

# CIRCUITOS ELÉCTRICOS

Séptima Edición

**JAMES W. NILSSON**

*Profesor Emérito*

IOWA STATE UNIVERSITY

**SUSAN A. RIEDEL**

MARQUETTE UNIVERSITY

**Traducción**

*Vuelapluma*



Madrid • México • Santafé de Bogotá • Buenos Aires • Caracas • Lima • Montevideo • San Juan •  
San José • Santiago • São Paulo • White Plains

## LISTA DE TABLAS

TABLA	TÍTULO	PÁGINA
1.1	El sistema internacional de unidades (SI)	11
1.2	Unidades derivadas en el SI	11
1.3	Prefijos estándar representativos de las potencias de 10	12
1.4	Interpretación de las direcciones de referencia en la Figura 1.5	16
2.1	Reacciones fisiológicas de los seres humanos a los niveles de corriente	54
3.1	Resumen de las ecuaciones de las resistencias para la rejilla térmica	93
4.1	Términos para la descripción de circuitos	115
4.2	Resultados del análisis de sensibilidad mediante PSpice	164
6.1	Ecuaciones para las bobinas y condensadores ideales	260
6.2	Ecuaciones para bobinas y condensadores conectados en serie y en paralelo	260
7.1	Valor de $e^{-1/\tau}$ para $t$ igual a múltiplos enteros de $\tau$	280
8.1	Parámetros de la respuesta natural del circuito $RLC$ paralelo	351
9.1	Valores de impedancia y de reactancia	414
9.2	Valores de admitancia y susceptancia	419
9.3	Impedancia y valores relacionados	448
10.1	Requerimientos anuales de energía de algunos electrodomésticos	479
10.2	Tres tipos de potencia y sus unidades	483
12.1	Lista abreviada de parejas de transformadas de Laplace	574
12.2	Lista abreviada de transformadas operacionales	579
12.3	Cuatro parejas útiles de transformadas	590
13.1	Resumen de los circuitos equivalentes en el dominio de $s$	612
13.2	Valores numéricos de $v_o(t)$	644
14.1	Módulo de la tensión de entrada y de salida para diversas frecuencias	694
15.1	Polinomios de Butterworth normalizados (de modo que $\omega_c = 1$ rad/s) hasta el octavo orden	756
17.1	Transformadas de Fourier de funciones elementales	857
17.2	Transformadas operacionales	862
18.1	Tabla de conversión de parámetros	891
18.2	Ecuaciones de los cuadripolos con terminación	898

## ALFABETO GRIEGO

A	$\alpha$	Alpha	$\Theta$	$\theta$	Theta	O	$o$	Omicron	X	$\chi$	Chi
B	$\beta$	Beta	I	$\iota$	Iota	$\Pi$	$\pi$	Pi	$\Psi$	$\psi$	Psi
$\Gamma$	$\gamma$	Gamma	K	$\kappa$	Kappa	$\rho$	$\rho$	Rho	$\Omega$	$\omega$	Omega
$\Delta$	$\delta$	Delta	$\Lambda$	$\lambda$	Lambda	$\Sigma$	$\sigma$	Sigma			
E	$\epsilon$	Epsilon	M	$\mu$	Mu	T	$\tau$	Tau			
Z	$\zeta$	Zeta	N	$\nu$	Nu	$\Upsilon$	$\upsilon$	Upsilon			
H	$\eta$	Eta	$\Xi$	$\xi$	Xi	$\Phi$	$\phi$	Phi			

## LISTA ABREVIADA DE PAREJAS DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE

$f(t) (t > 0^-)$	TIPO	$F(s)$
$\delta(t)$	(impulso)	1
$u(t)$	(escalón)	$\frac{1}{s}$
$t$	(rampa)	$\frac{1}{s^2}$
$e^{-at}$	(exponencial)	$\frac{1}{s+a}$
$\text{sen } \omega t$	(seno)	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\text{cos } \omega t$	(coseno)	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$t e^{-at}$	(rampa amortiguada)	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$e^{-at} \text{ sen } \omega t$	(seno amortiguado)	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \text{ cos } \omega t$	(coseno amortiguado)	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$

## LISTA ABREVIADA DE TRANSFORMADAS OPERACIONALES

$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
$Kf(t)$	$KF(s)$	$f(t-a)u(t-a), a > 0$	$e^{-as}F(s)$
$f_1(t) + f_2(t) - f_3(t) + \dots$	$F_1(s) + F_2(s) - F_3(s) + \dots$	$e^{-at}f(t)$	$F(s+a)$
$\frac{df(t)}{dt}$	$sF(s) - f(0^-)$	$f(at), a > 0$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$
$\frac{d^2f(t)}{dt^2}$	$s^2F(s) - sf(0^-) - \frac{df(0^-)}{dt}$	$t f(t)$	$-\frac{dF(s)}{ds}$
$\frac{d^n f(t)}{dt^n}$	$s^n F(s) - s^{n-1}f(0^-) - s^{n-2}\frac{df(0^-)}{dt} - s^{n-3}\frac{d^2f(0^-)}{dt^2} - \dots - \frac{d^{n-1}f(0^-)}{dt^{n-1}}$	$t^n f(t)$	$(-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$
$\int_0^t f(x) dx$	$\frac{F(s)}{s}$	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(u) du$

**CIRCUITOS ELÉCTRICOS**

NILSSON, J. W.; RIEDEL, S. A.

PEARSON EDUCACIÓN, S.A., Madrid, 2005

ISBN: 84-205-4458-2

Materia: Electricidad. 537

Formato: 195 × 250 mm

Páginas: 1048

Todos los derechos reservados.

Queda prohibida, salvo excepción prevista en la Ley, cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública y transformación de esta obra sin contar con autorización de los titulares de propiedad intelectual. La infracción de los derechos mencionados puede ser constitutiva de delito contra la propiedad intelectual (*arts. 270 y sgts. Código Penal*).

**DERECHOS RESERVADOS**

© 2005 PEARSON EDUCACIÓN, S.A.

C/ Ribera del Loira, 28

28042 Madrid (España)

**CIRCUITOS ELÉCTRICOS**

NILSSON, J. W.; RIEDEL, S. A.

ISBN: 84-205-4458-2

Depósito Legal: M. 10.218-2005

PEARSON-PRENTICE HALL es un sello editorial autorizado de PEARSON EDUCACIÓN, S.A.

Authorized translation from the English language edition, entitled **ELECTRIC CIRCUITS**, 7<sup>th</sup> Edition, by NILSSON, JAMES W.; RIEDEL, SUSAN, published by Pearson Education, Inc. publishing as Prentice Hall, Copyright © 2005.

ISBN: 0-13-146592-9

All rights reserved. No part of this book may be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopying, recording or by any information storage retrieval system, without permission from Pearson Education, Inc.

**Equipo editorial:**

Editor: Miguel Martín-Romo

Técnico editorial: Marta Caicoya

**Equipo de producción:**

Director: José Antonio Clares

Técnico: María Alvear

Diseño de cubierta: Equipo de diseño de Pearson Educación, S.A.

Impreso por: CLOSAS - ORCOYEN, S.L.

IMPRESO EN ESPAÑA - PRINTED IN SPAIN



**Para Anna**

## **Créditos de las fotografías**

**Figura 1.2** Cortesía de Getty Images/Photodisc Green. National Institute of Mental Health.

**Capítulo 2, Perspectiva práctica** Cortesía de Getty Images/Photodisc Green, Skip Nall.

**Figura 2.9** Cortesía de Tom Robbins.

**Capítulo 3, Perspectiva práctica** Cortesía de Getty Images/Photodisc Blue.

**Capítulo 4, Perspectiva práctica** Cortesía de Getty Images/Photodisc Blue.

**Capítulo 5, Perspectiva práctica** Cortesía de Getty Images/Photodisc Red, Akira Kaede.

**Capítulo 6, Perspectiva práctica** Cortesía de Getty Images/Photodisc Red, Kirk Wedle.

**Capítulo 9, Perspectiva práctica** Cortesía de Getty Images/Photodisc Green, Steve Cole.

**Capítulo 10, Perspectiva práctica** Cortesía de Getty Images/Photodisc Green, Jim Wehtje.

**Capítulo 11, Perspectiva práctica** Cortesía de Getty Images/Photodisc Green, Spike Mafford.

**Capítulo 13, Perspectiva práctica** Cortesía de Getty Images/Photodisc Blue.

**Capítulo 14, Perspectiva práctica** Cortesía de Getty Images/Photodisc Green, Ryan McVay.

**Capítulo 15, Perspectiva práctica** Cortesía de Getty Images/Photodisc Green, Ryan McVay.

# Resumen del contenido

	Lista de ejemplos .....	xvii
	Prefacio .....	xxi
Capítulo 1	Variables de circuito .....	2
Capítulo 2	Elementos de circuito .....	28
Capítulo 3	Circuitos resistivos simples .....	66
Capítulo 4	Técnicas de análisis de circuitos .....	112
Capítulo 5	El amplificador operacional .....	188
Capítulo 6	Inductancia, capacitancia e inductancia mutua .....	226
Capítulo 7	Respuesta de circuitos <i>RL</i> y <i>RC</i> de primer orden .....	274
Capítulo 8	Respuesta natural y al escalón de los circuitos <i>RLC</i> .....	346
Capítulo 9	Análisis de régimen permanente sinusoidal .....	398
Capítulo 10	Cálculos de potencia en régimen permanente sinusoidal .....	470
Capítulo 11	Circuitos trifásicos equilibrados .....	520
Capítulo 12	Introducción a la transformada de Laplace .....	562
Capítulo 13	La transformada de Laplace en el análisis de circuitos .....	606
Capítulo 14	Introducción a los circuitos de frecuencia selectiva .....	684
Capítulo 15	Filtros activos .....	730
Capítulo 16	Series de Fourier .....	792
Capítulo 17	La transformada de Fourier .....	846
Capítulo 18	Cuadripolos .....	884
Apéndice A	Resolución de sistemas de ecuaciones lineales .....	917
Apéndice B	Números complejos .....	939
Apéndice C	Información adicional sobre bobinas magnéticamente acopladas y transformadores ideales .....	947

<b>Apéndice D</b>	<b>El decibelio .....</b>	<b>957</b>
<b>Apéndice E</b>	<b>Diagramas de Bode .....</b>	<b>961</b>
<b>Apéndice F</b>	<b>Tabla abreviada de identidades trigonométricas .....</b>	<b>981</b>
<b>Apéndice G</b>	<b>Tabla abreviada de integrales .....</b>	<b>983</b>
<b>Apéndice H</b>	<b>Respuesta a los problemas seleccionados .....</b>	<b>985</b>
<b>Índice</b>	<b>.....</b>	<b>1005</b>

# Contenido

<b>Lista de ejemplos</b>	<b>xvii</b>
<b>Prefacio</b>	<b>xxi</b>
<b>Capítulo 1 Variables de circuito</b>	<b>2</b>
1.1 Ingeniería eléctrica: panorámica	4
1.2 El sistema internacional de unidades	10
1.3 Análisis de circuitos: panorámica	12
1.4 Tensión y corriente	14
1.5 El elemento de circuito básico ideal	15
1.6 Potencia y energía	17
<i>Resumen</i>	20
<i>Problemas</i>	20
<b>Capítulo 2 Elementos de circuito</b>	<b>28</b>
<i>Perspectiva práctica: seguridad eléctrica</i>	28
2.1 Fuentes de tensión y de corriente	30
2.2 Resistencia eléctrica (Ley de Ohm)	34
2.3 Construcción de un modelo de circuito	39
2.4 Leyes de Kirchhoff	42
2.5 Análisis de un circuito con fuentes dependientes	49
<i>Perspectiva práctica: seguridad eléctrica</i>	54
<i>Resumen</i>	55
<i>Problemas</i>	56
<b>Capítulo 3 Circuitos resistivos simples</b>	<b>66</b>
<i>Perspectiva práctica: luneta térmica para automóviles</i>	67
3.1 Resistencias en serie	68
3.2 Resistencias en paralelo	69
3.3 Circuitos divisores de tensión y divisores de corriente	73
3.4 División de tensión y división de corriente	77
3.5 Medida de la tensión y de la corriente	80
3.6 Medida de la resistencia: el puente de Wheatstone	84
3.7 Circuitos equivalentes triángulo-estrella (Pi-T)	86
<i>Perspectiva práctica: luneta térmica para automóviles</i>	89
<i>Resumen</i>	93
<i>Problemas</i>	94

<b>Capítulo 4</b>	<b>Técnicas de análisis de circuitos</b>	<b>112</b>
	<i>Perspectiva práctica: circuitos con resistencias realistas</i>	113
4.1	Terminología	114
4.2	Introducción al método de las tensiones de nodo	118
4.3	El método de las tensiones de nodo con fuentes dependientes	121
4.4	Método de las tensiones de nodo: algunos casos especiales	122
4.5	Introducción al método de las corrientes de malla	127
4.6	El método de las corrientes de malla con fuentes dependientes	130
4.7	Método de las corrientes de malla: algunos casos especiales	132
4.8	Comparación entre los métodos de las tensiones de nodos y de las corrientes de malla	136
4.9	Transformación de fuentes	140
4.10	Equivalentes de Thévenin y de Norton	144
4.11	Más aspectos del cálculo de equivalentes de Thévenin	150
4.12	Transferencia máxima de potencia	154
4.13	Superposición	157
	<i>Perspectiva práctica: circuitos con resistencias realistas</i>	161
	<i>Resumen</i>	165
	<i>Problemas</i>	166
<b>Capítulo 5</b>	<b>El amplificador operacional</b>	<b>188</b>
	<i>Perspectiva práctica: galgas extensométricas</i>	189
5.1	Terminales del amplificador operacional	190
5.2	Tensiones y corrientes en los terminales	191
5.3	El circuito amplificador inversor	197
5.4	Circuito amplificador sumador	199
5.5	Circuito amplificador no inversor	200
5.6	Circuito amplificador diferencial	201
5.7	Un modelo más realista del amplificador operacional	206
	<i>Perspectiva práctica: galgas extensométricas</i>	210
	<i>Resumen</i>	211
	<i>Problemas</i>	212
<b>Capítulo 6</b>	<b>Inductancia, capacitancia e inductancia mutua</b>	<b>226</b>
	<i>Perspectiva práctica: conmutadores de proximidad</i>	227
6.1	La bobina	228
6.2	El condensador	235
6.3	Combinaciones serie-paralelo de bobinas y condensadores	240
6.4	Inductancia mutua	244
6.5	Un examen más detallado de la inductancia mutua	249
	<i>Perspectiva práctica: conmutadores de proximidad</i>	256
	<i>Resumen</i>	259
	<i>Problemas</i>	261
<b>Capítulo 7</b>	<b>Respuesta de circuitos <math>RL</math> y <math>RC</math> de primer orden</b>	<b>274</b>
	<i>Perspectiva práctica: circuito luminoso intermitente</i>	275

<b>7.1</b>	Respuesta natural de un circuito <i>RL</i> .....	277
<b>7.2</b>	Respuesta natural de un circuito <i>RC</i> .....	284
<b>7.3</b>	Respuesta al escalón de los circuitos <i>RL</i> y <i>RC</i> .....	289
<b>7.4</b>	Una solución general para la respuesta natural y la respuesta al escalón .....	297
<b>7.5</b>	Conmutación secuencial .....	304
<b>7.6</b>	Respuesta no acotada .....	308
<b>7.7</b>	El amplificador integrador .....	310
	<i>Perspectiva práctica: circuito luminoso intermitente</i> .....	314
	<i>Resumen</i> .....	316
	<i>Problemas</i> .....	317
<b>Capítulo 8</b>	<b>Respuesta natural y al escalón de los circuitos <i>RLC</i></b> .....	<b>346</b>
	<i>Perspectiva práctica: circuito de ignición</i> .....	347
<b>8.1</b>	Introducción a la respuesta natural de un circuito <i>RLC</i> paralelo .....	348
<b>8.2</b>	Formas de la respuesta natural de un circuito <i>RLC</i> paralelo .....	353
<b>8.3</b>	Respuesta al escalón de un circuito <i>RLC</i> paralelo .....	364
<b>8.4</b>	Respuesta natural y al escalón de un circuito <i>RLC</i> serie .....	371
<b>8.5</b>	Un circuito con dos amplificadores integradores .....	376
	<i>Perspectiva práctica: circuito de ignición</i> .....	381
	<i>Resumen</i> .....	384
	<i>Problemas</i> .....	386
<b>Capítulo 9</b>	<b>Análisis de régimen permanente sinusoidal</b> .....	<b>398</b>
	<i>Perspectiva práctica: circuito de distribución doméstico</i> .....	399
<b>9.1.</b>	Fuentes sinusoidales .....	400
<b>9.2.</b>	La respuesta sinusoidal .....	404
<b>9.3.</b>	Fasores .....	405
<b>9.4.</b>	Elementos de circuito pasivos en el dominio de la frecuencia .....	410
<b>9.5.</b>	Leyes de Kirchhoff en el dominio de la frecuencia .....	415
<b>9.6.</b>	Simplificaciones serie, paralelo y triángulo-estrella .....	416
<b>9.7.</b>	Transformaciones de fuentes y circuitos equivalentes de Thévenin-Norton .....	424
<b>9.8.</b>	Método de las tensiones de nodo .....	429
<b>9.9.</b>	El método de las corrientes de malla .....	430
<b>9.10.</b>	El transformador .....	431
<b>9.11.</b>	El transformador ideal .....	436
<b>9.12.</b>	Diagramas de fasores .....	443
	<i>Perspectiva práctica: circuito de distribución doméstico</i> .....	447
	<i>Resumen</i> .....	448
	<i>Problemas</i> .....	449
<b>Capítulo 10</b>	<b>Cálculos de potencia en régimen permanente sinusoidal</b> .....	<b>470</b>
	<i>Perspectiva práctica: secadores</i> .....	471
<b>10.1</b>	Potencia instantánea .....	472
<b>10.2</b>	Potencia media y reactiva .....	474
<b>10.3</b>	El valor eficaz en los cálculos de potencia .....	480

<b>10.4</b>	Potencia compleja .....	483
<b>10.5</b>	Cálculos de potencia .....	485
<b>10.6</b>	Transferencia máxima de potencia .....	493
	<i>Perspectiva práctica: secadores</i> .....	500
	<i>Resumen</i> .....	502
	<i>Problemas</i> .....	504
<b>Capítulo 11</b>	<b>Circuitos trifásicos equilibrados</b> .....	<b>520</b>
	<i>Perspectiva práctica: transmisión y distribución de energía eléctrica</i> .....	521
<b>11.1</b>	Tensiones trifásicas equilibradas .....	522
<b>11.2</b>	Fuentes de tensión trifásicas .....	523
<b>11.3</b>	Análisis del circuito estrella-estrella .....	525
<b>11.4</b>	Análisis del circuito estrella-triángulo .....	532
<b>11.5</b>	Cálculos de potencia en circuitos trifásicos equilibrados .....	536
<b>11.6</b>	Medida de la potencia media en circuitos trifásicos .....	543
	<i>Perspectiva práctica: transmisión y distribución de energía eléctrica</i> .....	547
	<i>Resumen</i> .....	549
	<i>Problemas</i> .....	550
<b>Capítulo 12</b>	<b>Introducción a la transformada de Laplace</b> .....	<b>562</b>
<b>12.1</b>	Definición de la transformada de Laplace .....	564
<b>12.2</b>	La función escalón .....	565
<b>12.3</b>	La función impulsiva .....	568
<b>12.4</b>	Transformadas funcionales .....	572
<b>12.5</b>	Transformadas operacionales .....	574
<b>12.6</b>	Aplicación de la transformada de Laplace .....	580
<b>12.7</b>	Transformadas inversas .....	582
<b>12.8</b>	Polos y ceros de $F(s)$ .....	592
<b>12.9</b>	Teoremas del valor inicial y del valor final .....	593
	<i>Resumen</i> .....	596
	<i>Problemas</i> .....	597
<b>Capítulo 13</b>	<b>La transformada de Laplace en el análisis de circuitos</b> .....	<b>606</b>
	<i>Perspectiva práctica: supresores de sobretensiones</i> .....	607
<b>13.1</b>	Elementos de circuito en el dominio de $s$ .....	608
<b>13.2</b>	Análisis de circuitos en el dominio de $s$ .....	612
<b>13.3</b>	Aplicaciones .....	614
<b>13.4</b>	La función de transferencia .....	631
<b>13.5</b>	La función de transferencia en la expansión en fracciones parciales .....	634
<b>13.6</b>	La función de transferencia y la integral de convolución .....	637
<b>13.7</b>	La función de transferencia y la respuesta en régimen permanente sinusoidal .....	646
<b>13.8</b>	La función impulsiva en el análisis de circuitos .....	649
	<i>Perspectiva práctica: supresores de sobretensiones</i> .....	658
	<i>Resumen</i> .....	659
	<i>Problemas</i> .....	661



<b>Capítulo 14</b>	<b>Introducción a los circuitos de frecuencia selectiva</b>	<b>684</b>
	<i>Perspectiva práctica: circuitos telefónicos de marcación por tonos</i>	685
<b>14.1</b>	Preliminares	686
<b>14.2</b>	Filtros paso bajo	689
<b>14.3</b>	Filtros paso alto	697
<b>14.4</b>	Filtros paso banda	703
<b>14.5</b>	Filtros de banda eliminada	715
	<i>Perspectiva práctica: circuitos telefónicos de marcación por tonos</i>	721
	<i>Resumen</i>	722
	<i>Problemas</i>	723
<b>Capítulo 15</b>	<b>Filtros activos</b>	<b>730</b>
	<i>Perspectiva práctica: control de graves</i>	731
<b>15.1</b>	Filtros paso bajo y paso alto de primer orden	732
<b>15.2</b>	Cambio de escala	738
<b>15.3</b>	Filtros paso banda y de banda eliminada con amplificador operacional	741
<b>15.4</b>	Filtros de orden superior basados en amplificador operacional	749
<b>15.5</b>	Filtros paso banda y de banda eliminada de banda estrecha	765
	<i>Perspectiva práctica: control de graves</i>	772
	<i>Resumen</i>	775
	<i>Problemas</i>	777
<b>Capítulo 16</b>	<b>Series de Fourier</b>	<b>792</b>
<b>16.1</b>	Análisis en series de Fourier: panorámica	795
<b>16.2</b>	Coefficientes de Fourier	797
<b>16.3</b>	Efecto de la simetría sobre los coeficientes de Fourier	800
<b>16.4</b>	Forma trigonométrica alternativa para las series de Fourier	807
<b>16.5</b>	Una aplicación	810
<b>16.6</b>	Cálculo de la potencia media con funciones periódicas	817
<b>16.7</b>	Valor rms de una función periódica	820
<b>16.8</b>	Forma exponencial de las series de Fourier	821
<b>16.9</b>	Espectros de amplitud y de fase	824
	<i>Resumen</i>	827
	<i>Problemas</i>	828
<b>Capítulo 17</b>	<b>La transformada de Fourier</b>	<b>846</b>
<b>17.1</b>	Definición de la transformada de Fourier	848
<b>17.2</b>	Convergencia de la integral de Fourier	850
<b>17.3</b>	Utilización de transformadas de Laplace para hallar transformadas de Fourier	853
<b>17.4</b>	Transformadas de Fourier en el límite	855
<b>17.5</b>	Algunas propiedades matemáticas	858
<b>17.6</b>	Transformadas operacionales	860
<b>17.7</b>	Aplicaciones a los circuitos	863
<b>17.8</b>	Teorema de Parseval	866
	<i>Resumen</i>	874

<i>Problemas</i> .....	875
<b>Capítulo 18 Cuadripolos</b> .....	<b>884</b>
18.1 Ecuaciones de los terminales .....	886
18.2 Parámetros de un cuadripolo .....	887
18.3 Análisis de un cuadripolo con terminación .....	897
18.4 Cuadripolos interconectados .....	903
<i>Resumen</i> .....	907
<i>Problemas</i> .....	907
<b>Apéndice A Resolución de sistemas de ecuaciones lineales</b> .....	<b>917</b>
A.1 Pasos preliminares .....	917
A.2 Método de Cramer .....	918
A.3 Determinante característico .....	918
A.4 Determinante del numerador .....	918
A.5 Evaluación de un determinante .....	919
A.6 Matrices .....	921
A.7 Álgebra matricial .....	922
A.8 Matriz identidad, adjunta e inversa .....	926
A.9 Matrices particionadas .....	929
A.10 Aplicaciones .....	932
<b>Apéndice B Números complejos</b> .....	<b>939</b>
B.1 Notación .....	939
B.2 Representación gráfica de un número complejo .....	940
B.3 Operaciones aritméticas .....	941
B.4 Identidades útiles .....	943
B.5 Potencias enteras de un número complejo .....	944
B.6 Raíces de un número complejo .....	944
<b>Apéndice C Información adicional sobre bobinas magnéticamente acopladas y transformadores ideales</b> .....	<b>947</b>
C.1 Circuitos equivalentes para bobinas magnéticamente acopladas .....	947
C.2 La necesidad de transformadores ideales en los circuitos equivalentes .....	953
<b>Apéndice D El decibelio</b> .....	<b>957</b>
<b>Apéndice E Diagramas de Bode</b> .....	<b>961</b>
E.1 Polos y ceros reales de primer orden .....	961
E.2 Diagramas de amplitud de líneas rectas .....	962
E.3 Gráficas de amplitud más precisas .....	966
E.4 Gráficas del ángulo de fase mediante líneas rectas .....	968
E.5 Diagramas de Bode: polos y ceros complejos .....	970

<b>E.6</b>	Gráficas de amplitud .....	972
<b>E.7</b>	Corrección de las gráficas de amplitud basadas en líneas rectas .....	972
<b>E.8</b>	Gráficas del ángulo de fase .....	976
<b>Apéndice F</b>	<b>Tabla abreviada de identidades trigonométricas .....</b>	<b>981</b>
<b>Apéndice G</b>	<b>Tabla abreviada de integrales .....</b>	<b>983</b>
<b>Apéndice H</b>	<b>Respuesta a los problemas seleccionados .....</b>	<b>985</b>
<b>Índice</b>	<b>.....</b>	<b>1005</b>



# Lista de ejemplos

## Capítulo 2

2.1	Interconexión de fuentes ideales .....	32
2.2	Interconexión de fuentes ideales independientes y dependientes .....	33
2.3	Cálculo de la tensión, la corriente y la potencia en un circuito resistivo simple .....	37
2.4	Construcción de un modelo de circuito de una linterna .....	39
2.5	Construcción de un modelo de circuito basándose en medidas en los terminales .....	42
2.6	Utilización de la Ley de Kirchhoff de las corrientes .....	46
2.7	Utilización de la Ley de Kirchhoff de las tensiones .....	46
2.8	Aplicación de la Ley de Ohm y de las Leyes de Kirchhoff para calcular una corriente desconocida .....	46
2.9	Construcción de un modelo de circuito basándose en medidas en los terminales .....	47
2.10	Aplicación de la Ley de Ohm y de las Leyes de Kirchhoff para hallar una tensión desconocida .....	51
2.11	Aplicación de la Ley de Ohm y de las Leyes de Kirchhoff en un circuito amplificador .....	52

## Capítulo 3

3.1	Aplicación de la simplificación serie-paralelo .....	72
3.2	Análisis del circuito divisor de tensión .....	75
3.3	Análisis de un circuito divisor de corriente .....	76
3.4	Utilización de la división de tensión y la división de corriente para resolver un circuito .....	78
3.5	Utilización de un amperímetro de d'Arsonval .....	82
3.6	Utilización de un voltímetro de d'Arsonval .....	83
3.7	Aplicación de una transformación triángulo-estrella .....	88

## Capítulo 4

4.1	Identificación de nodos, ramas, mallas y lazos en un circuito .....	115
4.2	Utilización del método de las tensiones de nodo .....	120
4.3	Utilización del método de las tensiones de nodo con fuentes dependientes .....	121
4.4	Utilización del método de las corrientes de malla .....	129
4.5	Utilización del método de las corrientes de malla con fuentes dependientes .....	131
4.6	Comparación entre el método de las tensiones de nodo y el de las corrientes de malla .....	137
4.7	Comparación entre los métodos de las tensiones de nodos y de las corrientes de malla .....	138
4.8	Utilización de transformaciones de fuentes para resolver un circuito .....	141
4.9	Utilización de técnicas especiales de transformación de fuentes .....	143
4.10	Determinación del equivalente de Thévenin de un circuito con una fuente dependiente .....	149
4.11	Determinación del equivalente de Thévenin mediante una fuente de prueba .....	151
4.12	Cálculo de la condición de transferencia máxima de potencia .....	156
4.13	Utilización del principio de superposición para resolver un circuito .....	160

## Capítulo 5

5.1	Análisis de un circuito amplificador operacional .....	195
-----	--	-----

## Capítulo 6

6.1	Determinación de la tensión en los terminales de una bobina a partir de la corriente .....	229
6.2	Determinación de la corriente en los terminales de una bobina a partir de la tensión .....	231
6.3	Determinación de la tensión, la potencia y la energía en una bobina .....	232
6.4	Determinación de la corriente, la tensión, la potencia y la energía de un condensador .....	237
6.5	Cálculo de $v$ , $p$ y $w$ para un condensador en presencia de un pulso triangular de corriente .....	238
6.6	Determinación de las ecuaciones de las corrientes de malla en un circuito con bobinas magnéticamente acopladas .....	247

## Capítulo 7

7.1	Determinación de la respuesta natural de un circuito $RL$ .....	281
7.2	Determinación de la respuesta natural de un circuito $RL$ con bobinas en paralelo .....	282
7.3	Determinación de la respuesta natural de un circuito $RC$ .....	286
7.4	Determinación de la respuesta natural de un circuito $RC$ con condensadores en serie .....	287
7.5	Determinación de la respuesta al escalón de un circuito $RL$ .....	292
7.6	Determinación de respuesta al escalón de un circuito $RC$ .....	296
7.7	Utilización del método de resolución general para hallar la respuesta al escalón de un circuito $RC$ .....	299
7.8	Utilización del método de resolución general con condiciones iniciales nulas .....	301
7.9	Utilización del método de resolución general para hallar la respuesta al escalón de un circuito $RL$ .....	301
7.10	Determinación de la respuesta al escalón de un circuito con bobinas magnéticamente acopladas .....	302
7.11	Análisis de un circuito $RL$ con sucesos de conmutación secuenciales .....	305
7.12	Análisis de un circuito $RC$ con sucesos secuenciales de conmutación .....	307
7.13	Determinación de la respuesta no acotada en un circuito $RC$ .....	309
7.14	Análisis de un amplificador integrador .....	312
7.15	Análisis de un amplificador integrador con sucesos secuenciales de conmutación .....	312

## Capítulo 8

8.1	Determinación de las raíces de la ecuación característica de un circuito $RLC$ paralelo .....	352
8.2	Cálculo de la respuesta natural sobreamortiguada de un circuito $RLC$ paralelo .....	355
8.3	Cálculo de las corrientes de rama en la respuesta natural de un circuito $RLC$ paralelo .....	356
8.4	Determinación de la respuesta natural subamortiguada de un circuito $RLC$ paralelo .....	359
8.5	Determinación de la respuesta natural críticamente amortiguada de un circuito $RLC$ paralelo .....	362
8.6	Determinación de la respuesta al escalón sobreamortiguada en un circuito $RLC$ paralelo .....	366
8.7	Determinación de la respuesta al escalón subamortiguada en un circuito $RLC$ paralelo .....	368
8.8	Determinación de la respuesta al escalón críticamente amortiguada en un circuito $RLC$ paralelo .....	368
8.9	Comparación de las tres formas de la respuesta al escalón .....	369
8.10	Cálculo de la respuesta al escalón de un circuito $RLC$ paralelo con energía inicial almacenada .....	369
8.11	Determinación de la respuesta natural subamortiguada de un circuito $RLC$ serie .....	373
8.12	Determinación de la respuesta al escalón subamortiguada de un circuito $RLC$ serie .....	374
8.13	Análisis de dos amplificadores integradores conectados en cascada .....	377
8.14	Análisis de dos amplificadores integradores conectados en cascada con resistencias de realimentación ...	380

## Capítulo 9

9.1	Determinación de las características de una corriente sinusoidal .....	402
9.2	Determinación de las características de una tensión sinusoidal .....	402

<b>9.3</b>	Traducción de una función seno a una función coseno .....	403
<b>9.4</b>	Cálculo del valor rms de una forma de onda triangular .....	403
<b>9.5</b>	Suma de cosenos utilizando fasores .....	409
<b>9.6</b>	Combinación de impedancias en serie .....	417
<b>9.7</b>	Combinación de impedancias en serie y en paralelo .....	419
<b>9.8</b>	Utilización de una transformación triángulo-estrella en el dominio de la frecuencia .....	422
<b>9.9</b>	Realización de transformaciones de fuentes en el dominio de la frecuencia .....	425
<b>9.10</b>	Determinación de un equivalente de Thévenin en el dominio de la frecuencia .....	426
<b>9.11</b>	Utilización del método de las tensiones de nodo en el dominio de la frecuencia .....	429
<b>9.12</b>	Utilización del método de las corrientes de malla en el dominio de la frecuencia .....	430
<b>9.13</b>	Análisis de un transformador lineal en el dominio de la frecuencia .....	434
<b>9.14</b>	Análisis de un circuito con transformador ideal en el dominio de la frecuencia .....	441
<b>9.15</b>	Utilización de diagramas de fasores para analizar un circuito .....	444
<b>9.16</b>	Utilización de diagramas de fasores para analizar los efectos de carga capacitiva .....	445

## Capítulo 10

<b>10.1</b>	Cálculo de la potencia media y reactiva .....	477
<b>10.2</b>	Cálculos de potencia relativos a los aparatos domésticos .....	479
<b>10.3</b>	Determinación de la potencia media entregada a una resistencia por una tensión sinusoidal .....	482
<b>10.4</b>	Cálculo de la potencia compleja .....	484
<b>10.5</b>	Cálculo de la potencia media y reactiva .....	488
<b>10.6</b>	Cálculo de la potencia con cargas en paralelo .....	489
<b>10.7</b>	Igualación de la potencia suministrada y la potencia absorbida en un circuito de alterna .....	491
<b>10.8</b>	Determinación de la transferencia máxima de potencia sin restricciones de carga .....	495
<b>10.9</b>	Determinación de la transferencia máxima de potencia con restricciones de la impedancia de carga .....	496
<b>10.10</b>	Cálculo de la transferencia máxima de potencia con restricciones relativas al ángulo de impedancia .....	497
<b>10.11</b>	Cálculo de la transferencia máxima de potencia en un circuito con un transformador ideal .....	498

## Capítulo 11

<b>11.1</b>	Análisis de un circuito estrella-estrella .....	530
<b>11.2</b>	Análisis de un circuito estrella-triángulo .....	534
<b>11.3</b>	Cálculo de la potencia en un circuito trifásico estrella-estrella .....	540
<b>11.4</b>	Cálculo de la potencia en un circuito trifásico estrella-triángulo .....	541
<b>11.5</b>	Cálculo de la potencia trifásica con una carga no especificada .....	541
<b>11.6</b>	Cálculo de la lectura de los vatímetros en circuitos trifásicos .....	546

## Capítulo 12

<b>12.1</b>	Utilización de funciones escalón para representar una función de duración finita .....	567
-------------	--	-----

## Capítulo 13

<b>13.1</b>	Determinación de la función de transferencia de un circuito .....	632
<b>13.2</b>	Análisis de la función de transferencia de un circuito .....	634
<b>13.3</b>	Utilización de la integral de convolución para hallar una señal de salida .....	643
<b>13.4</b>	Utilización de la función de transferencia para hallar la respuesta en régimen permanente sinusoidal .....	648

## Capítulo 14

14.1	Diseño de un filtro paso bajo	693
14.2	Diseño de un filtro paso bajo $RC$ en serie	695
14.3	Diseño de un filtro paso alto $RL$ en serie	700
14.4	Adición de una carga al filtro paso alto $RL$ en serie	701
14.5	Diseño de un filtro paso banda	708
14.6	Diseño de un filtro paso banda $RLC$ paralelo	710
14.7	Determinación del efecto de una fuente de tensión no ideal sobre un filtro $RLC$ paso banda	711
14.8	Diseño de un filtro de banda eliminada $RLC$ en serie	719

## Capítulo 15

15.1	Diseño de un filtro paso bajo con amplificador operacional	734
15.2	Diseño de un filtro paso alto con amplificador operacional	736
15.3	Cambio de escala en un circuito $RLC$ en serie	739
15.4	Cambio de escala en un filtro prototipo paso bajo basado en amplificador operacional	740
15.5	Diseño de un filtro paso banda de banda ancha basado en amplificador operacional	744
15.6	Diseño de un filtro de banda eliminada y banda ancha basado en amplificador operacional	747
15.7	Diseño de un filtro paso bajo de cuarto orden basado en amplificador operacional	752
15.8	Cálculo de funciones de transferencia de Butterworth	755
15.9	Diseño de un filtro paso bajo de Butterworth de cuarto orden	758
15.10	Determinación del orden de un filtro de Butterworth	761
15.11	Un enfoque alternativo para la determinación del orden de un filtro de Butterworth	762
15.12	Diseño de un filtro paso banda de alta $Q$	767
15.13	Diseño de filtro de banda eliminada y alta $Q$	770

## Capítulo 16

16.1	Determinación de la serie de Fourier de una forma de onda triangular sin simetría	798
16.2	Determinación de la serie de Fourier de una función impar con simetría	806
16.3	Cálculo de las formas de la serie de Fourier trigonométrica para una tensión periódica	808
16.4	Cálculo de la potencia media para un circuito con una fuente de tensión periódica	818
16.5	Estimación del valor rms de una función periódica	820
16.6	Determinación de la forma exponencial de la serie de Fourier	823

## Capítulo 17

17.1	Utilización de la transformada de Fourier para hallar la respuesta transitoria	864
17.2	Utilización de la transformada de Fourier para hallar la respuesta en régimen permanente sinusoidal	865
17.3	Aplicación del teorema de Parseval	869
17.4	Aplicación del teorema de Parseval a un filtro paso banda ideal	869
17.5	Aplicación del teorema de Parseval a un filtro paso bajo	870

## Capítulo 18

18.1	Determinación de los parámetros $z$ en un cuadripolo	888
18.2	Determinación de los parámetros $a$ a partir de una serie de medidas	889
18.3	Cálculo de los parámetros $h$ a partir de una serie de medidas y de la Tabla 18.1	893
18.4	Análisis de un cuadripolo con terminación	901
18.5	Análisis de cuadripolos conectados en cascada	905



# Prefacio

La séptima edición de *Circuitos eléctricos* es una revisión cuidadosamente meditada del libro de texto de circuitos de nivel introductorio más ampliamente utilizado en los últimos 20 años, revisión presentada en un formato moderno y atractivo. Lo más importante es que los enfoques y filosofías didácticas no han sufrido modificaciones. Los objetivos son:

- *Conseguir la comprensión de los conceptos y las ideas explícitamente basándose en lo anteriormente aprendido.* Los desafíos, en el transcurso del aprendizaje, a los que se enfrentan los estudiantes de las teorías de análisis de circuitos para ingeniería son enormes; cada nuevo concepto se basa en numerosos otros conceptos anteriores. En *Circuitos eléctricos*, se presta especial atención al objetivo de ayudar a los estudiantes a reconocer la forma en que los nuevos conceptos e ideas encajan con los anteriormente aprendidos.
- *Hacer hincapié en la relación existente entre la comprensión conceptual y las técnicas de resolución de problemas.* El desafío principal de este curso continúa siendo desarrollar las capacidades de resolución de problemas de los estudiantes. Con este fin, *Circuitos eléctricos* utiliza ejemplos y problemas de evaluación con los que se ilustran las técnicas de resolución de problemas y que ofrecen a los estudiantes la oportunidad de practicar lo aprendido hasta el momento. No se hace así con la idea de proporcionar a los estudiantes modelos procedimentales para la resolución de problemas, sino que se pone el énfasis en la resolución de problemas vista como proceso de pensamiento en el que se aplica la comprensión conceptual a la solución de un problema práctico. Así, tanto en el texto como en los ejemplos resueltos, se trata de hacer hincapié en un proceso de resolución de problemas basado en conceptos, más que en el uso de procedimientos memorizados. El texto anima a los estudiantes a meditar sobre los problemas antes de abordarlos, y a menudo se llama la atención del lector sobre las implicaciones de carácter más genérico que una técnica específica de resolución de problemas tiene.
- *Proporcionar a los estudiantes una sólida base relativa a la práctica de la ingeniería.* Son limitadas las oportunidades existentes en un curso de análisis de circuitos para presentar a los estudiantes experiencias de ingeniería del mundo real. Continuamos insistiendo en las oportunidades existentes, y hemos realizado un gran esfuerzo para desarrollar problemas y ejercicios que utilicen valores realistas y representen situaciones físicas factibles. Se han incluido muchos problemas de diversos campos de aplicación y ejercicios de evaluación para estimular el interés de los estudiantes por la ingeniería. Muchos de estos problemas requieren el tipo de conocimiento que se espera de un ingeniero a la hora de afrontar un problema real.

## Principales características (de la séptima edición)

### Perspectivas prácticas


La séptima edición de *Circuitos eléctricos* incluye trece secciones de Perspectiva práctica que ofrecen ejemplos de circuitos del mundo real, tomados de dispositivos cotidianos, como teléfonos, secadores de pelo o automóviles. Los trece capítulos que componen el libro comienzan con una breve descripción de una aplicación práctica del material que se expondrá en el mismo. Una vez presentado el mate-

rial del capítulo, éste concluye con un análisis cuantitativo de la aplicación. En la sección de Problemas del capítulo se incluyen numerosos problemas relacionados con la Perspectiva práctica, los cuales están identificados con el icono ♦. Las secciones de Perspectiva práctica están diseñadas para estimular el interés de los estudiantes en la aplicación del análisis de circuitos al diseño de esquemas y dispositivos útiles, y constituyen una invitación a que el lector considere algunos aspectos complejos asociados con el diseño de circuitos verdaderamente funcionales. La tabla siguiente muestra dónde encontrar la descripción, el análisis cuantitativo y los problemas del capítulo relacionados con cada Perspectiva práctica.


DESCRIPCIÓN	ANÁLISIS CUANTITATIVO	PROBLEMAS RELACIONADOS
<i>Seguridad eléctrica</i> , Capítulo 2, página 28	Páginas 54-55	Páginas 64-65
<i>Luneta térmica para automóviles</i> , Capítulo 3, página 67	Páginas 89-93	Página 111
<i>Circuito con resistencias realistas</i> , Capítulo 4, página 113	Páginas 161-164	Página 187
<i>Galgas extensométricas</i> , Capítulo 5, página 189	Páginas 210-211	Páginas 224-225
<i>Conmutadores de proximidad</i> , Capítulo 6, página 227	Páginas 256-259	Páginas 272-273
<i>Circuito de una luz intermitente</i> , Capítulo 7, página 275	Páginas 314-316	Páginas 344-345
<i>Circuito de ignición</i> , Capítulo 8, página 347	Páginas 381-384	Páginas 396-397
<i>Circuito de distribución doméstico</i> , Capítulo 9, página 399	Página 447	Páginas 468-469
<i>Secadores</i> , Capítulo 10, página 471	Páginas 500-502	Página 519
<i>Transmisión y distribución de energía eléctrica</i> , Capítulo 11, página 521	Página 547	Páginas 560-561
<i>Supresores de sobretensiones</i> , Capítulo 13, página 607	Página 658	Páginas 682-683
<i>Circuitos telefónicos de marcación por tonos</i> , Capítulo 14, página 685	Página 721	Página 729
<i>Control de graves</i> , Capítulo 15, página 731	Páginas 772-774	Páginas 789-790

## Integración de herramientas informáticas

Las herramientas informáticas no pueden sustituir los métodos tradicionales de estudio de los circuitos eléctricos. Sin embargo, sí pueden ayudar a los estudiantes en su proceso de aprendizaje al proporcionar una representación visual del comportamiento de un circuito, y también pueden servir para validar una solución calculada, para reducir la complejidad computacional de los circuitos más complejos y para realizar iteraciones hasta encontrar una solución deseada utilizando el método de variación de parámetros. Esta ayuda informática resulta a menudo enormemente valiosa en el proceso de diseño.

La séptima edición incluye indicaciones para una herramienta informática muy popular, PSpice, añadiendo en el texto principal una serie de iconos que identifican los problemas de cada capítulo que resultan adecuados para su exploración con esta herramienta. El icono  identifica dichos problemas.

## Hincapié en el diseño

Esta edición continúa haciendo hincapié en el diseño de circuitos, de varias formas distintas. En primer lugar, muchas de las explicaciones contenidas en las secciones de Perspectiva práctica se centran en los aspectos de diseño de circuitos reales. Los problemas asociados de cada capítulo amplían las explicaciones relativas a las técnicas de diseño mediante ejemplos prácticos. En segundo lugar, los problemas de cada capítulo que están orientados al diseño han sido etiquetados explícitamente con el icono , lo que permite a los estudiantes y profesores identificar los problemas con un enfoque de diseño más acusado. En tercer lugar, la identificación de problemas adecuados para su tratamiento con PSpice sugiere al lector oportunidades de diseño para las que puede utilizar dicha herramienta informática.

## Problemas de los capítulos

Los lectores de las ediciones anteriores de *Circuitos eléctricos* siempre han considerado la sección de problemas de cada capítulo como una de las características más atractivas del libro. En la séptima edición, hay más de 1.000 problemas (el 75% de los cuales, aproximadamente, son nuevos o han sido revisados). Los problemas están diseñados con los siguientes objetivos:

- Hacer que los estudiantes practiquen las técnicas analíticas desarrolladas en el texto.
- Mostrar a los estudiantes que las técnicas analíticas son herramientas, no objetivos en sí mismas.
- Permitir a los estudiantes practicar en la elección del método analítico más adecuado para obtener una determinada solución.
- Mostrar a los estudiantes cómo pueden usarse los resultados de una solución para averiguar otro tipo de información acerca de la operación de un circuito.
- Animar a los estudiantes a que comprueben las soluciones, bien utilizando un método alternativo o verificando si la solución tiene sentido según el comportamiento conocido del circuito.
- Hacer que los estudiantes comiencen a familiarizarse con los problemas orientados al diseño.
- Hacer que los estudiantes practiquen en la deducción y manipulación de ecuaciones en las que las magnitudes de interés se expresan como funciones de variables de circuito tales como  $R$ ,  $L$ ,  $C$ ,  $\omega$ , etc.; este tipo de problemas también sirven de soporte al proceso de diseño.
- Presentar a los estudiantes problemas que estimulen su interés en la ingeniería eléctrica e informática.

## Precisión

El texto y los problemas de esta séptima edición han sido comprobados por triplicado para garantizar su precisión.

## Condiciones previas

Al escribir los 12 primeros capítulos del libro, hemos supuesto que el lector ha cursado con anterioridad un curso elemental de cálculo diferencial e integral. También se supone que el lector ha asistido a algún curso de introducción a la Física, bien en la universidad o antes de entrar en ella, donde se hayan presentado los conceptos de energía, potencia, carga eléctrica, corriente eléctrica, potencial eléctrico y campos electromagnéticos. Por lo que respecta a los seis últimos capítulos, en ellos se supone que el estudiante ha asistido o está asistiendo a un curso introductorio a las ecuaciones diferenciales.

## Opciones del curso

El texto ha sido diseñado para su utilización en cursos de un semestre, de dos semestres o de tres cuatrimestres.

- *Curso de un semestre:* después de ver los Capítulos 1-4 y los Capítulos 6-10 (omitiendo las Secciones 7.7 y 8.5), el profesor puede elegir entre el Capítulo 5 (amplificadores operacionales), el Capítulo 11 (circuitos trifásicos), los Capítulos 13 y 14 (métodos de Laplace) y el Capítulo 18 (circuitos de dos puertos) con el fin de dar a los temas la importancia requerida.
- *Curso de dos semestres:* suponiendo tres clases por semana, los nueve primeros capítulos pueden impartirse durante el primer semestre, dejando los Capítulos 10-18 para el segundo.
- *Curso de tres cuatrimestres:* el libro puede subdividirse en tres partes diferenciadas: Capítulos 1-6, Capítulos 7-12 y Capítulos 13-18.

La introducción a los circuitos amplificadores operacionales puede omitirse sin que ello suponga ningún problema para el lector que continúe con los capítulos siguientes. Por ejemplo, si se omite el Capítulo 5, el profesor puede simplemente prescindir de las Secciones 7.7 y 8.5, el Capítulo 15 y los problemas y problemas de evaluación de objetivos en los capítulos siguientes al 5 que estén relacionados con amplificadores operacionales.

Se han incluido varios apéndices al final del libro con el fin de que los lectores puedan hacer un uso más efectivo de sus conocimientos matemáticos. El Apéndice A repasa el método de Cramer de resolución de sistemas de ecuaciones y los conceptos más simples del álgebra matricial; los números complejos se repasan en el Apéndice B; el Apéndice C contiene material adicional sobre bobinas de acoplamiento magnético y transformadores ideales; el Apéndice D contiene una breve explicación del decibelio; el Apéndice E está dedicado a los diagramas de Bode; el Apéndice F incluye una tabla abreviada de identidades trigonométricas que resultan útiles en el análisis de circuitos; el Apéndice G contiene una tabla abreviada de integrales útiles y, finalmente, el Apéndice H proporciona las respuestas a un conjunto seleccionado de problemas sugeridos.

## Agradecimientos

Queremos expresar una vez más nuestra gratitud por las contribuciones de Norman Wittels, del Worcester Polytechnic Institute. Sus contribuciones a las secciones de Perspectiva práctica han permitido mejorar en gran medida tanto esta edición como las dos anteriores.

Son numerosas las personas que han dedicado muchas energías a este libro dentro de la editorial, y todas ellas merecen nuestra gratitud por los esfuerzos realizados para esta séptima edición. En Prentice Hall, queremos dar las gracias a Tom Robbins, Rose Kernan, Sarah Parker, Xiaohong Zhu, Lynda Castillo, Maureen Eide, Carole Anson, Vince O'Brien, Holly Stark y David A. George por su continuo apoyo y por todo el trabajo realizado. Los autores también quieren agradecer a Paul Mailhot y Mike Beckett de PreTEX, Inc. su dedicación y su esfuerzo a la hora de maquetar el libro.

Las numerosas revisiones del texto fueron realizadas gracias a la cuidadosa lectura y a las valiosas contribuciones de diversos profesores. Nuestra más sincera gratitud a David Shattuck, University of Houston; Bill Eccles, Rose-Hulman Institute; Major Bob Yahn, US Air Force; Thomas Schubert, University of San Diego; Norman Wittles, WPI; Mahmoud A. Abdallah, Central State University; Nadipuram (Ram) Prasad, New Mexico State University; Terry Martin, University of Arkansas; Belle Sheno, Wright State University; Nurgun Erdol, Florida Atlantic University; Ezz I. El-Masry, DalTech Dalhousie University; John Naber, University of Louisville; Charles P. Neuman, Carnegie Mellon University; David Grow, South Dakota School of Mines and Technology; Dan Moore, Rose-Hulman Institute; Bob Mayhan, Bob Strum, Dennis Tyner, Bill Oliver, William Eccles, Gary Ybarra y Ron Prasad.

Los autores también quieren dar las gracias a Tamara Papalias de San José State University, Ramakan Srivastava de la Universidad de Florida y Kurt Norlin de Laurel Technical Services por su ayuda en la comprobación del texto y de todos los problemas de la séptima edición.

Susan quiere agradecer al profesor James Nilsson la oportunidad de compartir el trabajo y las recompensas de este libro de *Circuitos eléctricos*. En su opinión, nadie hay más paciente, considerado y trabajador que James, de quien siempre continúa aprendiendo en cada revisión del texto. Gracias también a los demás profesores de su equipo y a sus colegas, Susan Schneider y Jeff Hock, que tanto la han ayudado a concentrarse en la tarea. Gracias a los alumnos de los cursos 1997-2004 de Ingeniería Eléctrica en Marquette University que le ayudaron a reescribir muchos de los problemas de los capítulos, a menudo sin ser conscientes de ello. Pero principalmente quiere dar las gracias a sus hijos David y Jason, que continúan tolerando las muchas horas de trabajo y las cenas frías y que le proporcionan los abrazos que necesita para recobrar el ánimo de vez en cuando.

James quiere dar las gracias a Susan por aceptar el desafío de convertirse en coautora del libro de *Circuitos eléctricos*. Su disposición a sugerir cambios tanto pedagógicos como en el contenido y a aceptar al mismo tiempo con naturalidad la crítica constructiva ha hecho que esta séptima edición fuera posible. Ella ha aportado al texto una gran experiencia informática y un genuino interés y entusiasmo por la docencia.

James también quiere dar las gracias a Robert Yahn (USAF) y a Stephen O'Conner (USAF) por su interés continuado en el libro. Gracias asimismo al profesor emérito Thomas Scott y a C. J. Triska de Iowa State University que continúan haciendo valiosas sugerencias en relación al contenido y al enfoque pedagógico del texto. Finalmente, quiere dejar constancia de la gran ayuda prestada por Jacob Chacko, ingeniero de transmisión y distribución de Ames Municipal Electric System.

Estamos profundamente en deuda con los muchos profesores y estudiantes que nos han ofrecido valiosos comentarios y sugerencias con los que hemos podido mejorar el texto. Queremos dar especialmente las gracias a todas esas personas que invirtieron un tiempo y un esfuerzo considerables leyendo los borradores del libro y verificando la precisión del contenido de esta edición revisada.

JAMES W. NILSSON  
SUSAN A. RIEDEL

## Guía de utilización de la séptima edición


La séptima edición de *Circuitos eléctricos* fue diseñada de modo que le resultara fácil al lector localizar los diferentes elementos que comprenden este texto. La mayoría de los elementos están identificados de manera gráfica.

### Introducción del capítulo

La información contenida en la introducción de cada capítulo proporciona una panorámica del contenido del mismo. En la página izquierda se incluyen varios elementos importantes, como el **título del capítulo** y el resumen de **contenido del capítulo**, incluyendo los números de página. El segundo elemento son los **objetivos del capítulo**. Estos objetivos están numerados y proporcionan un método organizado para determinar las habilidades que se espera dominar después de completar el capítulo. El tercer elemento es la **introducción** al capítulo, que proporciona una panorámica del contenido del capítulo y del propósito que tiene estudiar dicho material.

En la mayoría de los capítulos, la página de la derecha de la sección introductoria contiene una **Perspectiva práctica**. Se trata de ejemplos de circuitos reales que son componentes de algún dispositivo también real, como un equipo de música, un automóvil o un secador de pelo. La Perspectiva práctica proporciona una descripción de una aplicación práctica del material contenido en el texto e incluye frecuentemente una fotografía del dispositivo y un esquemático del circuito de interés. Al final del capítulo, vuelve a analizarse la Perspectiva práctica con mayor detalle, aplicando el material presentado en el texto.

### Ecuaciones y conceptos fundamentales

Como tendrá oportunidad de ver, la mayoría de los capítulos contienen numerosas ecuaciones matemáticas. Esto no debe resultar sorprendente, ya que las matemáticas constituyen una de las bases fundamentales del estudio de la ingeniería en general y de los circuitos eléctricos en particular. Algunas de estas ecuaciones están identificadas como **ecuaciones fundamentales**. Podrá reconocer estas ecuaciones porque están marcadas mediante una definición que describe la ecuación precedida por el icono . Una ecuación fundamental describe un concepto importante del capítulo de manera matemática.

En algunos casos, un concepto importante del capítulo no puede describirse en forma de ecuación matemática. Para atraer la atención del lector hacia esos **conceptos fundamentales**, aparecen recuadrados en el texto. Estos recuadros e iconos facilitan la localización de los conceptos y ecuaciones fundamentales a lo largo del libro.

### Ejemplos

Todos los capítulos incluyen varios ejemplos que ilustran los conceptos presentados en el texto, en la forma de un ejemplo numérico. El libro incluye más de 130 ejemplos de este estilo. En las páginas xiii-xv hay una lista completa de ejemplos, con sus títulos y sus correspondientes números de página. Cada uno de los ejemplos tiene un título que deja claro cuál es su propósito. La mayoría de estos ejemplos ocupan una única página de texto y pretenden ilustrar la aplicación de un concepto concreto y familiarizar al lector con los métodos adecuados de resolución de problemas, incluyendo la elección de una técnica de resolución y la comprobación de dicha solución mediante un enfoque distinto.

## Problemas de evaluación

Cada capítulo comienza con una lista de Objetivos del capítulo que identifican las capacidades que se podrán llegar a dominar al estudiar el material contenido en el capítulo. En determinados puntos del texto, se pide al lector que se detenga y evalúe su dominio de un objetivo concreto, resolviendo uno o más *problemas de evaluación*. Estos problemas están recuadrados y tienen un encabezado que identifica el número de Objetivo del capítulo que se está evaluando y una breve descripción de dicho objetivo. A continuación del enunciado del problema se proporciona inmediatamente la respuesta al mismo. Si el lector es capaz de resolver los problemas de evaluación correspondientes a un determinado objetivo, puede considerar que ya lo domina lo suficiente.

## Problemas sugeridos

Al final de cada conjunto de problemas de evaluación, se sugieren una serie de problemas del capítulo que se pueden resolver para comprobar más profundamente el dominio que se tiene de los objetivos del capítulo. Estos **problemas sugeridos** están identificados en una nota al final de cada sección de problemas de evaluación. También se sugieren otros problemas en otros puntos del texto, pudiendo el lector detenerse y evaluar su comprensión del material que se acaba de explicar resolviendo uno o más problemas del capítulo. En el Apéndice H se proporcionan las respuestas a un conjunto seleccionado de dichos problemas sugeridos.




## Perspectivas prácticas

Una vez presentado todo el material correspondiente al capítulo, se vuelve a analizar la **Perspectiva práctica** presentada en la sección introductoria. Se plantea un problema relacionado con la Perspectiva práctica y se presenta una solución del problema, usualmente en forma de ejemplo. El problema de la Perspectiva práctica permite comprender cómo pueden aplicarse los conceptos del capítulo a la resolución de un problema del mundo real. Cada Perspectiva práctica incluye una serie de problemas sugeridos que pueden resolverse con el fin de evaluar la comprensión de la aplicación práctica.

## Resumen

Cada capítulo concluye con un Resumen de los conceptos más importantes presentados en el capítulo, en forma de lista. Cada concepto hace referencia al número de la página donde se lo ha explicado. El Resumen resulta muy útil para revisar el material impartido en el capítulo y para evaluar si se domina suficientemente dicho material.

## Problemas del capítulo

El elemento final de cada capítulo es un conjunto de **problemas del capítulo**. Los problemas del capítulo son de muchos tipos distintos, pero hay tres tipos de problemas que están identificados con iconos específicos. Algunos de estos problemas resultan adecuados para tratar de resolverlos mediante PSpice, un simulador software de circuitos; dichos problemas están identificados con el icono de PSpice . Otros problemas se centran en el diseño de circuitos y se identifican con el icono de diseño . Los problemas relacionados con la Perspectiva práctica se identifican con su icono correspondiente, .





# Circuitos eléctricos

SÉPTIMA EDICIÓN

# CAPÍTULO

# 1

# Variables de circuito

## Contenido del capítulo

- 1.1. Ingeniería eléctrica: panorámica
- 1.2. El sistema internacional de unidades
- 1.3. Análisis de circuitos: panorámica
- 1.4. Tensión y corriente
- 1.5. El elemento de circuito básico ideal
- 1.6. Potencia y energía

La ingeniería eléctrica constituye una profesión excitante y maravillosa para cualquiera que tenga un genuino interés en las ciencias aplicadas y en las matemáticas y posea las necesarias aptitudes. En el último siglo y medio, los ingenieros eléctricos han desempeñado un papel dominante en el desarrollo de sistemas que han cambiado la forma de vivir y trabajar de las personas. Los enlaces de comunicación vía satélite, los teléfonos, las computadoras digitales, las televisiones, los equipos médicos de diagnóstico y cirugía, los robots de las líneas de montaje y las herramientas eléctricas son componentes representativos de toda una serie de sistemas que definen a nuestra moderna sociedad tecnológica. Como ingeniero eléctrico, el lector puede participar en esta revolución tecnológica en marcha, mejorando y refinando estos sistemas existentes y descubriendo y desarrollando nuevos sistemas que satisfagan las necesidades siempre cambiantes de nuestra sociedad.

A medida que se embarque en el estudio del análisis de circuitos, deberá aprender a ver cómo encaja este estudio en la jerarquía de temas que forman la introducción a la ingeniería eléctrica. Por tanto, comenzaremos presentando una panorámica de la ingeniería eléctrica, una serie de ideas sobre el punto de vista del ingeniero en lo que se refiere al análisis de circuitos y una revisión del sistema internacional de unidades.

Después describiremos en términos generales cuál es el objeto del análisis de circuitos, para presentar a continuación los conceptos de tensión y corriente. Una vez introducidos, explicaremos lo que es el elemento básico ideal de un circuito y la necesidad de un sistema de referencia para las polaridades. Concluiremos el capítulo describiendo cómo se relacionan la corriente y la tensión con la potencia y la energía.

## Objetivos del capítulo

1. Entender y ser capaz de utilizar las unidades del SI y los prefijos estándar de las potencias de 10.
2. Conocer y ser capaz de utilizar las definiciones de *tensión* y *corriente*.
3. Conocer y ser capaz de utilizar las definiciones de *potencia* y *energía*.
4. Ser capaz de utilizar el convenio de signos pasivo para calcular la potencia de un elemento de circuito básico ideal a partir de su tensión y su corriente.

## 1.1. Ingeniería eléctrica: panorámica

La ingeniería eléctrica es la profesión que se ocupa de los sistemas necesarios para producir, transmitir y medir señales eléctricas. La ingeniería eléctrica combina el modelo físico de los fenómenos naturales con las herramientas matemáticas necesarias para manipular esos modelos con el fin de producir sistemas que satisfagan necesidades prácticas. Los sistemas eléctricos están presentes en todos los aspectos de nuestra vida; podemos encontrarlos en nuestros hogares, en las escuelas, en el lugar de trabajo y en los vehículos de transporte utilizados en todo el mundo. Comenzaremos presentando unos cuantos ejemplos extraídos de cada uno de los cinco tipos principales de sistemas eléctricos:

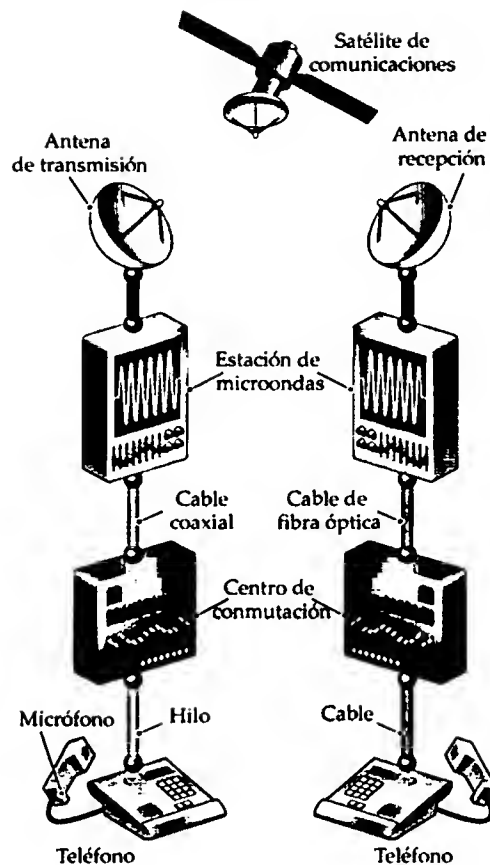
- Sistemas de comunicaciones
- Sistemas informáticos
- Sistemas de control
- Sistemas de alimentación
- Sistemas de procesamiento de la señal

Después describiremos la forma en que los ingenieros eléctricos analizan y diseñan dichos tipos de sistemas.

Los **sistemas de comunicaciones** son sistemas eléctricos que generan, transmiten y distribuyen información. Como claros ejemplos podríamos citar los equipos de televisión, como cámaras, transmisores, receptores y aparatos de vídeo; los radiotelescopios, utilizados para explorar el universo; los sistemas de comunicación vía satélite, que nos devuelven imágenes de otros planetas y del nuestro propio; los sistemas de radar, utilizados para coordinar el vuelo de las aeronaves, y los sistemas telefónicos.

La Figura 1.1 indica los componentes principales de un sistema telefónico moderno. Comenzando por la izquierda de la figura, dentro de un teléfono, un micrófono transforma las ondas sonoras en señales eléctricas. Estas señales son transportadas hasta un centro de conmutación, donde se las combina con las señales procedentes de decenas, centenares o miles de otros teléfonos. Las señales combinadas salen del centro de conmutación; su forma depende de la distancia que deban recorrer. En nuestro ejemplo, son enviadas a través de una serie de hilos eléctricos en cables coaxiales subterráneos, hasta una estación de transmisión de microondas. Aquí, las señales se transforman a la frecuencia propia de las microondas y son difundidas desde una antena de transmisión a través del aire y el espacio, pasando por un satélite de comunicaciones, hasta una antena receptora. La estación receptora de microondas traduce las señales de microondas a una forma adecuada para su transmisión ulterior, por ejemplo a pulsos de luz que puedan enviarse a través de un cable de fibra óptica. Al llegar al segundo centro de conmutación, las señales combinadas se separan y cada una de ellas es encaminada hacia el teléfono apropiado, donde el auricular actúa como altavoz para convertir de nuevo las señales eléctricas recibidas a ondas sonoras. En cada etapa del proceso, una serie de circuitos eléctricos operan sobre las señales. Imagínese la dificultad que implica el diseño, la construcción y la operación de cada circuito en una forma tal que se garantice que los centenares o miles de llamadas simultáneas disfruten de conexiones de alta calidad.

Los **sistemas informáticos** utilizan señales eléctricas para procesar diversos tipos de información, desde la edición de textos a operaciones matemáticas. Los sistemas varían de tamaño y de potencia, desde las calculadoras de bolsillo hasta computadoras personales y supercomputadoras, que realizan tareas de tanta complejidad como son el procesamiento de los datos meteorológicos y el modelado de las interacciones químicas de moléculas orgánicas complejas. Estos sistemas incluyen redes de microcircuitos, o circuitos integrados, que son conjuntos de centenares, miles o millones de componentes eléctricos, conjuntos que tienen el tamaño de un sello de correos y a menudo operan a velocidades



**Figura 1.1.** Un sistema telefónico.

y niveles de potencia que están muy próximos a los límites físicos fundamentales, incluyendo la velocidad de la luz y las leyes termodinámicas.

Los **sistemas de control** utilizan señales eléctricas para regular procesos. Como ejemplos podríamos citar el control de temperaturas, presiones y flujos en una refinería de petróleo; la mezcla de combustible y aire en un motor de inyección para un automóvil; mecanismos tales como los motores, puertas y puntos de iluminación en los ascensores; y las esclusas del canal de Panamá. Los sistemas de piloto automático y de aterrizaje automático que ayudan a dirigir y a aterrizar los aviones son también sistemas de control que a todos nos resultan familiares.

Los **sistemas de alimentación** generan y distribuyen la potencia eléctrica. La potencia eléctrica, que es la base de nuestra sociedad tecnológica, se suele generar en grandes cantidades mediante centrales nucleares, hidroeléctricas y térmicas (de carbón, de petróleo o de gas). La energía se distribuye mediante una red de conductores que atraviesan todo el territorio. Uno de los mayores desafíos a la hora de diseñar y operar tales sistemas es el de proporcionar un control y una redundancia suficientes para que el fallo de cualquier equipo no deje a una ciudad, a una provincia o a una región sin acceso al suministro eléctrico.

Los **sistemas de procesamiento de la señal** operan sobre señales eléctricas que representan información. Transforman las señales y la información contenida en ellas a una forma más adecuada.

Existen muchas formas distintas de procesar las señales y su correspondiente información. Por ejemplo, los sistemas de procesamiento de imágenes recopilan cantidades masivas de datos procedentes de los satélites meteorológicos que orbitan alrededor de la Tierra, reducen esa cantidad de datos a un nivel más manejable y transforman los datos restantes en una imagen de vídeo que puede, por ejemplo, emitirse por televisión. Un equipo de tomografía computerizada (CT) constituye otro ejemplo de sistema de procesamiento de imágenes. El equipo toma las señales generadas por una máquina de rayos X especial y las transforma en una imagen como la mostrada en la Figura 1.2. Aunque las señales de rayos X originales no resultan muy útiles para un médico, una vez que han sido procesadas para generar una imagen reconocible, la información que contienen puede utilizarse en el diagnóstico de enfermedades y lesiones. Existe una considerable interacción entre las diversas disciplinas de la ingeniería implicadas en el diseño y en la operación de estas cinco clases de sistemas. Así, los ingenieros de comunicaciones utilizan computadoras digitales para controlar el flujo de información. Las computadoras contienen sistemas de control y los sistemas de control contienen computadoras. Los sistemas de alimentación requieren sistemas de comunicaciones adecuados para coordinar de forma segura y fiable la operación de una serie de componentes que pueden estar distribuidos por todo un continente. Un sistema de procesamiento de señales puede incluir un enlace de comunicaciones, una computadora y un sistema de control.



**Figura 1.2.** Una imagen de CT de la cabeza de un adulto.

Un buen ejemplo de la interacción entre distintos tipos de sistemas sería un aeroplano comercial, como el mostrado en la Figura 1.3. Un sofisticado sistema de comunicaciones permite al piloto y al controlador de tráfico aéreo monitorizar la ubicación de la aeronave, con lo que el controlador de tráfico aéreo puede diseñar un plan de vuelo seguro para todos los aeroplanos cercanos, permitiendo también que el piloto mantenga la aeronave en la trayectoria asignada. En los aviones comerciales más modernos, se utiliza un sistema informático embarcado para gestionar las funciones de propulsión, para implementar los sistemas de control de navegación y de vuelo y para generar pantallas de información de vídeo dentro de la cabina. Un complejo sistema de control recopila los comandos emitidos por el piloto y ajusta la posición y velocidad de la aeronave, generando las señales apropiadas dirigidas a los motores y a las superficies de control (como los flaps, los alerones y el timón) para garantizar que el avión continúe volando de forma segura y de acuerdo con el plan de vuelo deseado. El avión debe disponer de su propio sistema de alimentación para continuar volando y para proporcionar y distribuir la energía eléctrica necesaria para mantener encendidas las luces de la cabina, para hacer el café o para mostrar una película a los pasajeros. Una serie de sistemas de procesamiento de la señal reducen el ruido en las comunicaciones de tráfico aéreo y transforman la información relativa a la ubicación del avión a la forma, mucho más significativa, de una pantalla de vídeo en la cabina. Son numerosos los

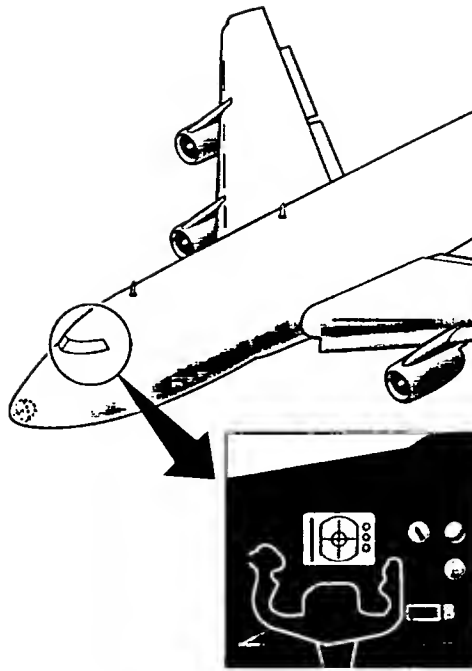


Figura 1.3. Una aeronave.

desafíos para el ingeniero en el diseño de cada uno de estos sistemas y en su integración en un todo coherente. Por ejemplo, estos sistemas deben operar en condiciones medioambientales que varían ampliamente y de forma impredecible. Quizás el desafío más importante al que el ingeniero se enfrenta consiste en garantizar que se incorpore la suficiente redundancia en los diseños para que los pasajeros puedan llegar con seguridad y a tiempo al destino deseado.

Aunque los ingenieros eléctricos puedan estar interesados principalmente en una de las áreas mencionadas, deben también conocer de manera suficiente las otras áreas que interaccionan con la que sea de su interés. Esta interacción es en parte responsable de que la ingeniería eléctrica sea una profesión tan compleja y excitante. El énfasis principal en la ingeniería consiste en hacer que las cosas funcionen, por lo que los ingenieros son libres para adquirir y utilizar cualquier técnica, de cualquier campo, que los ayude a completar la tarea que tengan entre manos.

## Teoría de circuitos

En un campo tan diverso como la ingeniería eléctrica, cabe preguntarse si hay algo que todas las ramas tengan en común. La respuesta es afirmativa: los circuitos eléctricos. Un **circuito eléctrico** es un modelo matemático que aproxima el comportamiento de un sistema eléctrico real. Como tal, proporciona una importante base para el aprendizaje (tanto en los cursos posteriores como en la práctica de la ingeniería) de los detalles de cómo diseñar y operar sistemas tales como los que hemos descrito. Los modelos, las técnicas matemáticas y el lenguaje de la teoría de circuitos formarán el marco conceptual para su futuro trabajo como ingeniero.

Observe que el término *circuito eléctrico* se utiliza comúnmente para referirse tanto a un sistema eléctrico real como al modelo que lo representa. En este texto, cuando hablemos de un circuito eléctrico, nos referiremos siempre a un modelo, a menos que se indique lo contrario. Es el aspecto de mode-

lado de la teoría de circuitos lo que tiene amplias aplicaciones en las distintas disciplinas de la ingeniería.

La teoría de circuitos es un caso especial de la teoría de campos electromagnéticos: el estudio de cargas eléctricas estáticas y en movimiento. Aunque la teoría de campos generalizada pueda parecer un punto de partida adecuado para investigar las señales eléctricas, su aplicación no sólo resulta engorrosa, sino que también requiere utilizar técnicas matemáticas avanzadas. En consecuencia, un curso en teoría de campos electromagnéticos no constituye un requisito para comprender el material contenido en este libro. Lo que sí asumimos, sin embargo, es que el lector ha asistido a un curso de introducción a la Física en el que se hayan explicado los fenómenos eléctricos y magnéticos.

Tres suposiciones básicas nos permiten utilizar la teoría de circuitos, en lugar de la teoría de campos electromagnéticos, para estudiar un sistema físico representado por un circuito eléctrico. Estas suposiciones son las siguientes:

1. *Los efectos eléctricos se dejan notar instantáneamente en todo el sistema.* Podemos hacer esta suposición porque sabemos que las señales eléctricas viajan a una velocidad igual a la de la luz o próxima a ella. Por tanto, si el sistema es físicamente pequeño, las señales eléctricas lo atraviesan tan rápidamente que podemos considerar que afectan a todos los puntos del sistema simultáneamente. Un sistema que sea lo suficientemente pequeño para poder hacer esta suposición se denomina **sistema de parámetros agregados**.
2. *La carga neta en cada componente del sistema es siempre cero.* Por tanto, ningún componente puede acumular un exceso neto de carga, aunque algunos componentes, como veremos posteriormente, pueden almacenar cargas independientes iguales, pero de signo opuesto.
3. *No existe acoplamiento magnético entre los componentes de un sistema.* Como veremos más adelante, el acoplamiento magnético sí puede tener lugar *dentro* de un componente.

Eso es todo; no hay ninguna otra suposición de partida. La utilización de la teoría de circuitos proporciona soluciones simples (de la suficiente precisión) a problemas que resultarían excesivamente complicados si utilizáramos la teoría de campos electromagnéticos. Estos beneficios son tan apreciables que los ingenieros diseñan en ocasiones específicamente los sistemas eléctricos con el fin de garantizar que estas suposiciones se cumplan. La importancia de las suposiciones 2 y 3 resultará evidente cuando presentemos los elementos de circuito básicos y las reglas para analizar los elementos interconectados. Sin embargo, debemos examinar detenidamente la suposición 1. La cuestión puede plantearse así: «¿Hasta qué punto debe ser pequeño un sistema físico para poder considerarlo un sistema de parámetros agregados?». Podemos obtener una pista cuantitativa para responder a esta cuestión observando que las señales eléctricas se propagan de forma ondulatoria. Si la longitud de onda de la señal es grande comparada con las dimensiones físicas del sistema, tendremos un sistema de parámetros agregados. La longitud de onda  $\lambda$  es la velocidad dividida por la tasa de repetición o **frecuencia** de la señal. Es decir,  $\lambda = c/f$ . La frecuencia  $f$  se mide en hercios (Hz). Por ejemplo, los sistemas de alimentación en España operan a 50 Hz. Si utilizamos la velocidad de la luz ( $c = 3 \times 10^8$  m/s) como velocidad de propagación, la longitud de onda será  $6 \times 10^6$  m. Si el sistema de alimentación que nos interesa es físicamente menor que esta longitud de onda, podemos representarlo como un sistema de parámetros agregados y utilizar la teoría de circuitos para analizar su comportamiento. ¿Qué queremos decir exactamente con la palabra *menor*? Una regla práctica es la *regla del 10%*. Si las dimensiones del sistema son un 10% (o menos) de la longitud de onda, podemos considerar que el sistema es de parámetros agregados. Así, mientras que las dimensiones físicas del sistema de alimentación sean inferiores a  $6 \times 10^5$  m, podemos tratarlo como un sistema de dicho tipo.

Por otro lado, la frecuencia de propagación de las señales de radio es del orden de  $10^9$  Hz. Por tanto, la longitud de onda es de 0,3 m. Utilizando la regla del 10%, las dimensiones relevantes de un sistema



de comunicaciones que envíe o reciba señales de radio deberían ser inferiores a 3 cm para poder considerarlo como un sistema de parámetros agregados. Si cualquiera de las dimensiones pertinentes del sistema en estudio se aproxima a la longitud de onda de las señales, deberemos utilizar la teoría de campos electromagnéticos para analizar el sistema. A lo largo del libro, estudiaremos circuitos derivados de sistemas con parámetros agregados.

## Resolución de problemas

En la práctica de la ingeniería, nadie va a pedirnos que resolvamos problemas que ya hayan sido resueltos. Ya estemos tratando de mejorar las prestaciones de un sistema existente o de crear un nuevo sistema, trabajaremos con problemas no resueltos. Sin embargo, como estudiante, tendrá que dedicar buena parte de su atención al análisis de problemas que otros ya han solucionado antes. Viendo y discutiendo cómo se resolvieron estos problemas en el pasado, y resolviendo los ejercicios y problemas de examen por su cuenta, comenzará a desarrollar las habilidades necesarias para encarar con éxito los nuevos problemas que tendrá que afrontar en su trabajo como ingeniero. Vamos a presentar aquí algunos procedimientos generales de resolución de problemas. Muchos de ellos se refieren a la manera de pensar y organizar la estrategia de resolución *antes* de comenzar los cálculos.

1. *Identifique los datos que se proporcionan y los resultados que hay que obtener.* Al resolver un problema, es necesario conocer cuál es nuestro destino antes de seleccionar la ruta que nos lleve a él. ¿Qué es lo que el problema nos está pidiendo que resolvamos o averiguemos? Algunas veces, el objetivo de un problema resulta obvio; otras veces, será necesario interpretar el enunciado o construir listas o tablas con la información conocida y desconocida para poder ver cuál es el objetivo.

El enunciado de un problema puede contener información adicional no relevante que sea necesario descartar antes de continuar. Por otro lado, puede que ofrezca información incompleta o que su nivel de complejidad exceda los métodos de resolución que tengamos a nuestra disposición. En ese caso, será necesario realizar suposiciones para suplir la información no suministrada o simplificar el contexto del problema. Esté preparado para volver sobre sus pasos y considerar de nuevo si ha hecho bien al descartar información supuestamente irrelevante y/o revisar las suposiciones que haya realizado, si los cálculos no conducen a ninguna parte o producen una respuesta que no parezca tener sentido.

2. *Dibuje un diagrama de circuito u otro modelo visual.* Traducir una descripción verbal de un problema a un modelo visual suele resultar útil para simplificar el proceso de resolución. Si ya nos proporcionan un diagrama de circuito, puede que necesitemos añadir información, como etiquetas, valores o direcciones de referencia. También puede que convenga volver a dibujar el circuito de una forma más simple, pero equivalente. Más adelante en el libro veremos métodos para desarrollar dichos circuitos equivalentes simplificados.
3. *Piense en varios métodos de solución y trate de determinar la forma de elegir entre ellos.* Este curso le ayudará a desarrollar una colección de herramientas analíticas, algunas de las cuales pueden ser aplicables a un mismo problema dado. Pero uno de los métodos puede producir un sistema de ecuaciones más pequeño que otro, o puede que uno de los métodos sólo requiera técnicas algebraicas, en lugar de técnicas de cálculo, para poder obtener la solución. Ese tipo de eficiencia, si se es capaz de anticiparla, puede facilitar el proceso considerablemente. Tener en mente un método alternativo también nos proporciona una vía de escape en caso de que nuestro primer intento de solución resulte estéril.

4. *Calcule una solución.* La planificación realizada hasta el momento debería habernos ayudado a identificar un buen método analítico y las ecuaciones correctas para el problema. Ahora llega el momento de resolver dichas ecuaciones. Los cálculos se pueden hacer de forma manual, con una calculadora o con un programa informático, para tratar de resolver un problema de análisis de circuitos. La eficiencia y las preferencias del profesor serán las que dicten qué herramientas deben usarse.
5. *Utilice su creatividad.* Si sospecha que la respuesta no es adecuada o si los cálculos parecen embrollarse más y más sin aproximarnos a una solución, conviene detenerse y considerar otras alternativas. Puede que sea necesario volver a revisar las suposiciones o seleccionar un método de resolución diferente. O puede que sea necesario adoptar un enfoque de resolución de problemas menos convencional, como por ejemplo trabajar hacia atrás a partir de una solución. Este texto proporciona respuestas para todos los problemas de evaluación y para muchos de los problemas de los capítulos, así que podrá trabajar hacia atrás si se encuentra de repente bloqueado. En el mundo real, nadie va a proporcionarnos las respuestas de antemano, pero puede que tengamos en mente cuál es el resultado deseado del problema y que podamos trabajar hacia atrás a partir del mismo. Otros enfoques creativos incluyen tratar de encontrar paralelismos con otros tipos de problemas que ya se hayan resuelto satisfactoriamente antes, seguir los dictados de nuestra intuición en lo que se refiere al modo de proceder o, simplemente, dejar de lado el problema temporalmente y volver a retomarlo más tarde.
6. *Compruebe su solución.* Pregúntese si tiene sentido la solución que haya obtenido. ¿Parece razonable la magnitud de la respuesta? ¿Es físicamente realizable la solución? Puede que convenga continuar y tratar de resolver el problema con un método alternativo. Al hacerlo así, no sólo comprobamos la validez de la respuesta original, sino que también podemos desarrollar nuestra intuición sobre cuáles son los métodos de resolución más eficientes para los distintos tipos de problemas. En el mundo real, los diseños con restricciones críticas de seguridad se comprueban siempre por varios métodos independientes. Desarrollar el hábito de comprobar las respuestas le resultará de ayuda tanto durante su etapa de estudiante como cuando tenga que poner en práctica sus conocimientos de ingeniería en el mundo profesional.

Estos pasos de resolución de problemas no pueden usarse como receta para resolver todos los problemas de este o de cualquier otro curso. Puede que sea necesario saltarse pasos, cambiar el orden de los mismos o desarrollar más algunos de ellos con el fin de resolver un problema concreto. Utilice estos pasos como guía general para desarrollar un estilo de resolución de problemas que le resulte personalmente satisfactorio.

## 1.2. El sistema internacional de unidades

Los ingenieros comparan los resultados teóricos con los resultados experimentales y comparan entre sí diferentes diseños alternativos utilizando medidas cuantitativas. La ingeniería moderna es una profesión multidisciplinar en la que equipos de ingenieros trabajan conjuntamente en los proyectos y pueden comunicarse sus resultados de una forma significativa sólo si todos ellos usan las mismas unidades de medida. El sistema internacional de unidades (abreviado SI) es utilizado por todas las principales asociaciones de ingeniería y por la mayoría de los ingenieros en todo el mundo, así que es el que utilizaremos en este libro.

Las unidades del SI están basadas en seis magnitudes *definidas*:

- longitud

- masa
- tiempo
- corriente eléctrica
- temperatura termodinámica
- intensidad luminosa

Estas magnitudes, junto con la unidad básica y el símbolo de cada una, se enumeran en la Tabla 1.1. Aunque no se trata estrictamente de unidades del SI, las unidades de tiempo familiares de los minutos (60 s), horas (3600 s), etc. se utilizan a menudo en los cálculos de ingeniería. Además, las magnitudes definidas se combinan para formar unidades **derivadas**. Algunas, como la fuerza, la energía, la potencia y la carga eléctrica, ya nos resultan familiares de los cursos previos de Física. La Tabla 1.2 enumera las unidades derivadas utilizadas en este libro.

**Tabla 1.1.** El sistema internacional de unidades (SI).

MAGNITUD	UNIDAD BÁSICA	SÍMBOLO
Longitud	metro	m
Masa	kilogramo	kg
Tiempo	segundo	s
Corriente eléctrica	amperio	A
Temperatura termodinámica	grado Kelvin	K
Intensidad luminosa	candela	cd

**Tabla 1.2.** Unidades derivadas en el SI.

MAGNITUD	NOMBRE DE LA UNIDAD (SÍMBOLO)	FÓRMULA
Frecuencia	herzio (Hz)	$s^{-1}$
Fuerza	newton (N)	$kg \cdot m/s^2$
Energía o trabajo	julio (J)	$N \cdot m$
Potencia	vatio (W)	$J/s$
Carga eléctrica	culombio (C)	$A \cdot s$
Potencial eléctrico	voltio (V)	$J/C$
Resistencia eléctrica	ohmio ( $\Omega$ )	$V/A$
Conductancia eléctrica	siemens (S)	$A/V$
Capacitancia eléctrica	faradio (F)	$C/V$
Flujo magnético	weber (Wb)	$V \cdot s$
Inductancia	henrio (H)	$Wb/A$

En muchos casos, la unidad del SI es demasiado pequeña o demasiado grande para poder utilizarla de forma cómoda. En esos casos, se aplican a la unidad básica prefijos estándar correspondientes a las potencias de 10, los cuales se enumeran en la Tabla 1.3. Todos estos prefijos son correctos, pero los ingenieros suelen utilizar únicamente los correspondientes a las potencias divisibles por 3; así, centi, deci, deca y hecto se utilizan raramente. Asimismo, los ingenieros suelen seleccionar el prefijo que hace que el número base esté comprendido en el rango de 1 a 1000. Suponga que un cálculo de tiempo nos da un resultado de  $10^{-5}$  s, es decir, 0,00001 s. La mayoría de los ingenieros describirán esta magnitud como  $10\ \mu\text{s}$ , es decir,  $10^{-5} = 10 \times 10^{-6}$  s, en lugar de 0,01 ms, o 10.000.000 ps.

**Tabla 1.3.** Prefijos estándar representativos de las potencias de 10.

PREFIJO	SÍMBOLO	POTENCIA	PREFIJO	SÍMBOLO	POTENCIA
atto	a	$10^{-18}$	deci	d	$10^{-1}$
femto	f	$10^{-15}$	deca	da	$10$
pico	p	$10^{-12}$	hecto	h	$10^2$
nano	n	$10^{-9}$	kilo	k	$10^3$
micro	$\mu$	$10^{-6}$	mega	M	$10^6$
mili	m	$10^{-3}$	giga	G	$10^9$
centi	c	$10^{-2}$	tera	T	$10^{12}$

### Evaluación del objetivo 1

- Entender y ser capaz de usar las unidades del SI y los prefijos estándar de las potencias de 10.

1.1. ¿Cuántos euros por milisegundo debería recaudar el gobierno europeo para compensar un déficit de 100.000 millones de euros en un año?

RESPUESTA 3,17 €/ms.

1.2. Si una señal puede viajar por un cable a un 80% de la velocidad de la luz, ¿qué longitud de cable, en pulgadas, representa 1 ns?

RESPUESTA 9,45".

**NOTA** Trate también de resolver los Problemas 1.1, 1.3 y 1.6 del capítulo.

## 1.3. Análisis de circuitos: panorámica

Antes de entrar en los detalles del análisis de circuitos, conviene echar un amplio vistazo al diseño propio de la ingeniería, y específicamente al diseño de circuitos eléctricos. El propósito de esta panorámica consiste en proporcionar una perspectiva sobre dónde encaja el análisis de circuitos dentro de la materia completa del diseño de circuitos. Aunque este libro se centra en el análisis de circuitos, trataremos de proporcionar oportunidades para el diseño de circuitos siempre que sea apropiado.

Todos los diseños de ingeniería comienzan con algún tipo de necesidad, como se muestra en la Figura 1.4. Esta necesidad puede provenir del deseo de mejorar un diseño existente o puede tratarse de diseñar algo completamente nuevo. Una evaluación cuidadosa de la necesidad dará como resultado unas especificaciones de diseño, que son características mensurables del diseño propuesto. Una vez propuesto el diseño, las especificaciones nos permiten evaluar si el diseño satisface o no la necesidad de partida.

A continuación viene el desarrollo del concepto del diseño. El concepto se deriva de una comprensión completa de las especificaciones de diseño, junto con un análisis de la necesidad que se ve facilitado por la formación académica y por la experiencia. El concepto puede tomar la forma de un dibujo, de una descripción escrita o cualquier otra que resulte apropiada. A menudo, el paso siguiente consiste en traducir el concepto a un modelo matemático. Un modelo matemático de uso común para los sistemas eléctricos es el **modelo de circuito**.

Los elementos que forman el modelo de circuito se denominan **componentes de circuito ideales**. Un componente de circuito ideal es un modelo matemático de un componente eléctrico real, como por ejemplo una batería o una bombilla. Es importante que el componente de circuito ideal utilizado en un modelo de circuito represente el comportamiento del componente eléctrico real con un grado aceptable de precisión. A continuación se aplican al circuito herramientas de **análisis de circuitos**, que es el foco principal de este libro. El análisis de circuitos está basado en técnicas matemáticas y se utiliza para predecir el comportamiento del modelo de circuito y de sus componentes de circuito ideales. Una comparación entre el comportamiento deseado, que se obtiene de las especificaciones de diseño, y el comportamiento predicho, que se obtiene del análisis del circuito, puede conducir a refinamientos en el modelo de circuito y en sus elementos de circuito ideales. Una vez que concuerden el comportamiento deseado y el predicho, puede construirse un prototipo físico.

El **prototipo físico** es un sistema eléctrico real, construido con componentes eléctricos reales. Se utilizan técnicas de medición para determinar el comportamiento cuantitativo real del sistema físico.

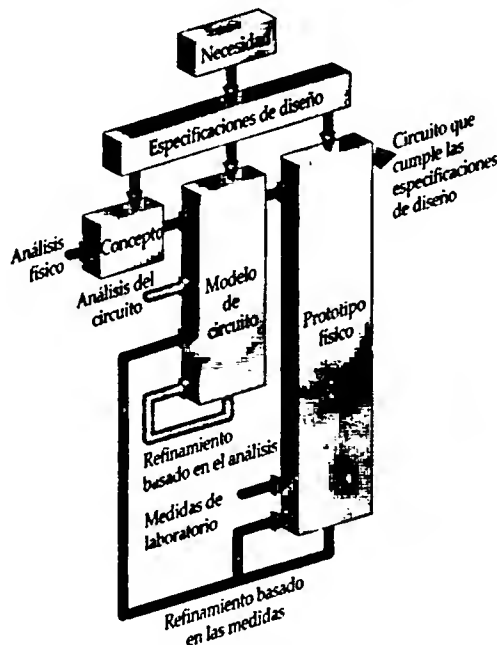


Figura 1.4. Un modelo conceptual para las tareas de diseño en ingeniería eléctrica.

Este comportamiento real se compara con el comportamiento deseado establecido en las especificaciones de diseño y con el comportamiento predicho a partir del análisis del circuito. Dichas comparaciones pueden dar como resultado nuevos refinamientos en el prototipo físico, en el modelo de circuito o en ambos. Al final, este proceso iterativo, en el que se refinan de modo continuo los modelos, componentes y sistemas, puede producir un diseño que se ajuste de forma precisa a las especificaciones del diseño y que, por tanto, satisfaga la necesidad de partida.

A partir de esta descripción, resulta claro que el análisis de circuitos juega un papel muy importante en el proceso de diseño. Puesto que el análisis de circuitos se aplica a los modelos de circuito, los ingenieros profesionales intentan utilizar modelos de circuito maduros para que los diseños resultantes cumplan con las especificaciones de diseño en la primera iteración. En este libro, utilizaremos modelos que han sido probados durante un período de entre 20 y 100 años; podemos, por tanto, asumir que son suficientemente maduros. La capacidad de modelar sistemas eléctricos reales con elementos de circuito ideales hace que la teoría de circuitos sea sumamente útil para los ingenieros.

Decir que la interconexión de elementos de circuito ideales puede usarse para predecir cuantitativamente el comportamiento de un sistema implica que podemos describir la interconexión de los elementos mediante ecuaciones matemáticas. Para que esas ecuaciones matemáticas sean útiles, debemos escribirlas en términos de magnitudes mensurables. En el caso de los circuitos, dichas magnitudes son la tensión y la corriente, de las que hablaremos en la Sección 1.4. El estudio del análisis de circuitos implica comprender el comportamiento de cada elemento de circuito ideal en términos de su tensión y de su corriente y comprender las restricciones impuestas a la tensión y a la corriente como resultado de la interconexión de los elementos ideales.

## 1.4. Tensión y corriente

El concepto de carga eléctrica es la base para describir todos los fenómenos eléctricos. Recordemos algunas características importantes de la carga eléctrica.

- La carga es bipolar, lo que quiere decir que los efectos eléctricos se describen en términos de cargas positivas y negativas.
- La carga eléctrica existe en cantidades discretas, que son múltiplos enteros de la carga electrónica,  $1,6022 \times 10^{-19}$  C.
- Los efectos eléctricos pueden atribuirse a la separación de las cargas y al movimiento de éstas.

En teoría de circuitos, la separación de las cargas crea una fuerza eléctrica (tensión), mientras que el movimiento de una carga crea un fluido eléctrico (corriente).

Los conceptos de tensión y de corriente son útiles desde el punto de vista del ingeniero porque pueden expresarse de forma cuantitativa. Cuando separamos cargas positivas y negativas, tenemos que gastar energía en el proceso. La **tensión** es la energía por unidad de carga creada por la separación. Expresamos este cociente en forma diferencial como

✎ DEFINICIÓN DE LA TENSIÓN

$$v = \frac{dw}{dq}, \quad (1.1)$$

donde  $v$  = tensión en voltios,  
 $w$  = energía en julios,  
 $q$  = carga en culombios.

Los efectos eléctricos causados por las cargas en movimiento dependen de la tasa de flujo de la carga. La tasa de flujo de la carga se conoce como **corriente eléctrica**, que se expresa como

✦ **DEFINICIÓN DE LA CORRIENTE** 
$$i = \frac{dq}{dt}, \quad (1.2)$$

donde  $i$  = corriente en amperios,  
 $q$  = carga en culombios,  
 $t$  = tiempo en segundos.

Las Ecuaciones 1.1 y 1.2 son definiciones que nos dan la magnitud de la tensión y la corriente, respectivamente. La naturaleza bipolar de la carga eléctrica requiere que asignemos referencias de polaridad a estas variables, lo cual haremos en la Sección 1.5.

Aunque la corriente está formada por electrones discretos en movimiento, no tenemos necesidad de considerarlos individualmente, debido a la enorme cantidad de ellos que hay. En lugar de ello, pensamos en los electrones y en su correspondiente carga como en una entidad que fluye de forma continua. Por tanto,  $i$  se trata como una variable continua.

Una ventaja de utilizar modelos de circuito es que podemos modelar un componente estrictamente en función de la tensión y la corriente en sus terminales. Así, dos componentes físicamente distintos podrían presentar la misma relación entre la tensión en los terminales y la corriente en los mismos. Si es así, ambos componentes son idénticos en lo que respecta al análisis del circuito. Una vez que sabemos cómo se comporta un componente en sus terminales, podemos analizar su comportamiento dentro de un circuito. Sin embargo, a la hora de desarrollar modelos de circuito, nos interesa conocer el comportamiento interno de un componente. Queremos conocer, por ejemplo, si la conducción de carga tiene lugar debido a que una serie de electrones libres se mueven a través de la estructura cristalina de un metal o si se produce porque los electrones se mueven dentro de los enlaces covalentes de un material semiconductor. Sin embargo, estos temas caen más allá del ámbito de la teoría de circuitos. En este libro, vamos a usar modelos de circuito que ya han sido desarrollados; no entraremos a explicar el modo en que se desarrollan los modelos de componentes.

## 1.5. El elemento de circuito básico ideal

Un **elemento de circuito ideal básico** tiene tres atributos: (1) sólo tiene dos terminales, que son los puntos de conexión con otros componentes del circuito; (2) está descrito matemáticamente en función de la corriente y/o la tensión; y (3) no puede subdividirse en otros elementos. Utilizamos la palabra *ideal* para denotar que un elemento de circuito básico no existe como componente físicamente realizable. Sin embargo, como hemos explicado en la Sección 1.3, pueden conectarse elementos ideales para modelar dispositivos y sistemas reales. Utilizamos la palabra *básico* para significar que el elemento de circuito no puede reducirse o subdividirse en otros elementos. De este modo, los elementos de circuito básicos constituyen los bloques componentes para la construcción de modelos de circuitos, pero ellos mismos no pueden ser modelados mediante ningún otro tipo de elemento.

La Figura 1.5 es una representación de un elemento de circuito ideal básico. El recuadro está en blanco porque no queremos hacer ningún enunciado en este momento sobre el tipo de elemento de circuito de que se trata. En la citada figura, la tensión entre los terminales del componente se representa mediante  $v$  y la corriente que atraviesa el elemento de circuito se representa mediante  $i$ . La referencia de polaridad para la tensión está indicada por los signos más y menos y la referencia de dirección para la

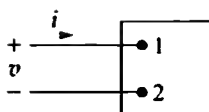


Figura 1.5. Un elemento de circuito ideal básico.

corriente se muestra mediante la flecha que indica hacia dónde fluye. La interpretación de estas referencias, dados valores numéricos positivos o negativos de  $v$  e  $i$ , se resume en la Tabla 1.4. Observe que, algebraicamente, la noción de una carga positiva que fluye en una dirección es equivalente a la noción de una carga negativa que fluye en la dirección opuesta.

Las asignaciones de la polaridad de referencia para la tensión y de la dirección de referencia para la corriente son enteramente arbitrarias. Sin embargo, una vez que se han asignado las referencias, todas las subsiguientes ecuaciones deben escribirse en concordancia con las referencias elegidas. El convenio de signos más ampliamente utilizado para aplicarlo a estas referencias se denomina *convenio de signos pasivo*, y es el que utilizaremos a lo largo de este libro. El convenio de signos pasivo puede enunciarse como sigue:

#### ✦ CONVENIO DE SIGNOS PASIVO

Siempre que la dirección de referencia para la corriente que atraviesa un elemento se encuentre en la dirección de la caída de tensión de referencia en bornes del elemento (como en la Figura 1.5), utilice un signo positivo en cualquier expresión que relacione la tensión con la corriente. En caso contrario, utilice un signo negativo.

Aplicaremos este convenio de signos en todos los análisis que siguen. Nuestro propósito al presentarlo antes incluso de haber hablado de los diferentes tipos de elementos de circuito básicos es el de hacer comprender al lector el hecho de que la selección de referencias de polaridad, junto con la adopción del convenio de signos pasivo, *no es* dependiente de los elementos básicos ni del tipo de interconexiones realizadas entre esos elementos básicos. En la Sección 1.6, presentaremos la aplicación e interpretación del convenio de signos pasivo en los cálculos de potencia.

Tabla 1.4. Interpretación de las direcciones de referencia en la Figura 1.5.

VALOR POSITIVO	VALOR NEGATIVO
$v$ caída de tensión del terminal 1 al terminal 2	caída de tensión del terminal 2 al terminal 1
$o$ incremento de tensión del terminal 2 al terminal 1	$o$ incremento de tensión del terminal 1 al terminal 2
$i$ carga positiva que fluye del terminal 1 al terminal 2	carga negativa que fluye del terminal 2 al terminal 1
$o$ carga positiva que fluye del terminal 2 al terminal 1	$o$ carga negativa que fluye del terminal 1 al terminal 2



## Evaluación del objetivo 2

■ Conocer y ser capaz de utilizar las definiciones de *tensión* y *corriente*.

1.3. La corriente en los terminales del elemento de la Figura 1.5 es

$$i = 0, \quad t < 0;$$

$$i = 20e^{-5000t} \text{ A}, \quad t \geq 0.$$

Calcule la carga total (en microculombios) que entra en el elemento por su terminal superior.

**RESPUESTA** 4000  $\mu\text{C}$ .

1.4. La expresión de la carga que entra por el terminal superior de la Figura 1.5 es

$$q = \frac{1}{\alpha^2} - \left( \frac{t}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} \right) e^{-\alpha t} \text{ C.}$$

Calcule el valor máximo de la corriente que entra por el terminal si  $\alpha = 0,03679 \text{ s}^{-1}$ .

**RESPUESTA** 10 A.

**NOTA** Trate también de resolver el Problema 1.9 del capítulo.

## 1.6. Potencia y energía

Los cálculos de potencia y energía son también importantes en el análisis de circuitos. Una de las razones es que, aunque la tensión y la corriente son variables útiles en el análisis y diseño de sistemas eléctricos, la salida útil del sistema es a menudo de naturaleza no eléctrica, y esta salida puede expresarse convenientemente en términos de potencia o energía. Otra razón es que todos los dispositivos prácticos tienen limitaciones en cuanto a la cantidad de potencia que pueden manejar. Por tanto, en el proceso de diseño, los cálculos de tensiones y corrientes no son suficientes por sí mismos.

Vamos ahora a relacionar la potencia y la energía con la tensión y la corriente y, al mismo tiempo, utilizaremos los cálculos de potencia para ilustrar el convenio de signos pasivo. Recuerde, de los estudios de Física básica, que la potencia es la tasa temporal de gasto o de absorción de energía (una bomba de agua de 75 kW nominales puede entregar más litros por segundo que otra que tenga 7,5 kW nominales). Matemáticamente, la energía por unidad de tiempo se expresa en forma de derivada, de la manera siguiente:

### DEFINICIÓN DE POTENCIA

$$p = \frac{dw}{dt}, \quad (1.3)$$

donde  $p$  = potencia en vatios,  
 $w$  = energía en julios,  
 $t$  = tiempo en segundos.

Por tanto, 1 W es equivalente a 1 J/s.

La potencia asociada con el flujo de carga se sigue directamente de la definición de la tensión y de la corriente en las Ecuaciones 1.1 y 1.2, y es

$$p = \frac{dw}{dt} = \left( \frac{dw}{dq} \right) \left( \frac{dq}{dt} \right),$$

de modo que

➤ **ECUACIÓN DE LA POTENCIA**

$$p = vi \quad (1.4)$$

donde  $p$  = potencia en vatios,  
 $v$  = tensión en voltios,  
 $i$  = corriente en amperios.

La Ecuación 1.4 muestra que la **potencia** asociada con un elemento de circuito básico es, simplemente, el producto de la corriente que atraviesa el elemento por la tensión que cae en él. Por tanto, la potencia es una magnitud asociada con un par de terminales y debemos ser capaces de determinar, a partir de nuestros cálculos, si se está entregando potencia a ese par de terminales o se está extrayendo potencia de ellos. Esta información se puede obtener aplicando e interpretando correctamente el convenio de signos pasivo.

Si utilizamos el convenio de signos pasivo, la Ecuación 1.4 es correcta si la dirección de referencia para la corriente se encuentra en la dirección de la caída de tensión de referencia en bornes de los terminales. En caso contrario, la Ecuación 1.4 debe escribirse con un signo menos. En otras palabras, si la referencia de corriente se encuentra en la dirección de un incremento de la tensión de referencia en bornes de los terminales, la expresión para la potencia será

$$p = -vi. \quad (1.5)$$

El signo algebraico de la potencia se basa en el movimiento de las cargas a través de caídas e incrementos de tensión. A medida que las cargas se mueven a través de una caída de tensión, pierden energía, mientras que si se mueven a través de un incremento de tensión, ganan energía. La Figura 1.6 resume la relación existente entre las referencias de polaridad para la tensión y la corriente y la ecuación que define la potencia.

Ahora podemos enunciar la regla para interpretar el signo algebraico de la potencia:

➤ **INTERPRETACIÓN DEL SIGNO ALGEBRAICO DE LA POTENCIA**

Si la potencia es positiva (es decir, si  $p > 0$ ), se estará entregando potencia al circuito contenido dentro del recuadro. Si la potencia es negativa (es decir, si  $p < 0$ ), se estará extrayendo potencia del circuito contenido en el recuadro.

Por ejemplo, suponga que hemos seleccionado las referencias de polaridad mostradas en la Figura 1.6(b). Suponga, asimismo, que nuestros cálculos relativos a la corriente y la tensión nos dan los siguientes resultados numéricos:

$$i = 4 \text{ A} \quad \text{y} \quad v = -10 \text{ V.}$$

Entonces, la potencia asociada con la pareja de terminales 1,2 es

$$p = -(-10)(4) = 40 \text{ W.}$$

Por tanto, el circuito contenido dentro de la caja estará absorbiendo 40 W.

Para llevar este análisis un paso más lejos, supongamos que un colega nuestro está resolviendo el mismo problema, pero ha seleccionado las referencias de polaridad mostradas en la Figura 1.6(c). Los valores numéricos resultantes serán

$$i = -4 \text{ A}, \quad v = 10 \text{ V} \quad \text{y} \quad p = 40 \text{ W.}$$

Observe que la interpretación de estos resultados según el sistema de referencia nos proporciona las mismas conclusiones que ya antes hemos obtenido, es decir, que el circuito contenido dentro de la caja está absorbiendo 40 W. De hecho, cualquiera de los sistemas de referencia de la Figura 1.6 proporciona el mismo resultado.

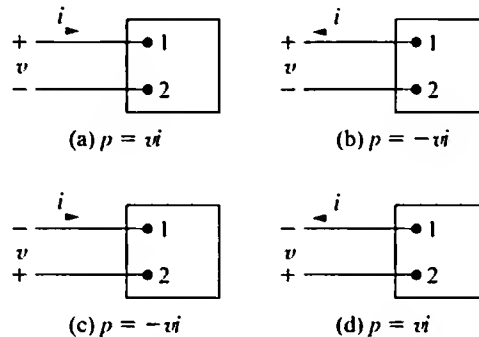


Figura 1.6. Referencias de polaridad y expresión de la potencia.

### Evaluación de los objetivos 3 y 4

- Conocer y ser capaz de utilizar las definiciones de *potencia* y *energía* y ser capaz de utilizar el convenio de signos pasivo para calcular la potencia de un elemento de circuito básico ideal a partir de su tensión y su corriente.

1.5. Suponga que existe una caída de tensión de 20 V entre el terminal 2 y el terminal 1 de un elemento y que una corriente de 4 A entra por el terminal 2.

- a) Especifique los valores de  $v$  e  $i$  para las referencias de polaridad mostradas en la Figura 1.6(a)-(d).
- b) Indique si el circuito contenido en la caja está absorbiendo o entregando potencia.
- c) ¿Cuánta potencia está absorbiendo el circuito?

#### RESPUESTA

(a) Circuito 1.6(a):  $v = -20$  V,  $i = -4$  A;  
 circuito 1.6(b):  $v = -20$  V,  $i = 4$  A;  
 circuito 1.6(c):  $v = 20$  V,  $i = -4$  A;  
 circuito 1.6(d):  $v = 20$  V,  $i = 4$  A;

(b) absorbe potencia; (c) 80 W.

1.6. Suponga que la tensión entre los terminales del elemento de la Figura 1.5 correspondiente a la corriente del Problema de evaluación 1.3 es

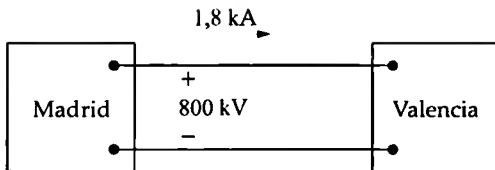
$$v = 0, \quad t < 0;$$

$$v = 10e^{-5000t} \text{ kV}, \quad t \geq 0.$$

Calcule la energía total (en julios) entregada al elemento de circuito.

**RESPUESTA** 20 J.

1.7. Una línea de transmisión de corriente continua a alta tensión entre Madrid y Valencia está operando a 800 kV y transporta 1800 A, como se muestra. Calcule la potencia (en megavatios) en el extremo de la línea correspondiente a Madrid e indique la dirección del flujo de potencia.

**RESPUESTA**

1440 MW, de Madrid a Valencia.

**NOTA** Trate también de resolver los Problemas 1.12, 1.17, 1.24 y 1.26 del capítulo.

**RESUMEN**

- El sistema internacional de unidades (SI) permite a los ingenieros comunicarse información acerca de resultados cuantitativos de una manera significativa. La Tabla 1.1 resume las unidades básicas del SI. La Tabla 1.2 presenta algunas unidades derivadas útiles del SI (véase la página 11).
- El análisis de circuitos está basado en las variables de tensión y corriente (véase la página 12).
- La **tensión** es la energía por unidad de carga creada por la separación de las cargas y tiene las unidades en el SI de voltios ( $v = dw/dq$ ) (véase la página 14).
- La **corriente** es la tasa de variación del flujo y tiene en el SI las unidades de amperios ( $i = dq/dt$ ) (véase la página 15).
- El **elemento de circuito ideal básico** es un componente de dos terminales que no puede subdividirse; puede describirse matemáticamente en función de la tensión y la corriente en sus terminales (véase la página 15).
- El **convenio de signos pasivo** utiliza un signo positivo en la expresión que relaciona la tensión y la corriente en los terminales de un elemento, cuando la dirección de referencia para la corriente que atraviesa el elemento se encuentra en la dirección de la caída de tensión de referencia en bornes del elemento (véase la página 16).
- La **potencia** es la energía por unidad de tiempo y es igual al producto de la tensión y de la corriente en los terminales; en el SI, las unidades correspondientes son los vatios ( $p = dw/dt = vi$ ) (véase la página 17).
- El signo algebraico de la potencia se interpreta como sigue:
  - Si  $p > 0$ , se está entregando potencia al circuito o componente de circuito.
  - Si  $p < 0$ , se está extrayendo potencia del circuito o componente de circuito (véase la página 18).

**PROBLEMAS**

- 1.1. Una pantalla de computadora de alta resolución tiene  $1280 \times 1024$  elementos de imagen o píxeles. Cada elemento de imagen contiene 24 bits de información. Si un byte está definido como 8 bits, ¿cuántos megabytes (MB) se requieren para la pantalla?
- 1.2. Suponga que una señal telefónica se desplaza a través de un cable a la mitad de la velocidad de la luz. ¿Cuánto tardará la señal en atravesar los Estados Unidos si la distancia es aproximadamente 5 Mm?
- 1.3. Algunas especies de bambú pueden crecer 250 mm/día. Suponiendo que las células individuales de la planta tienen una longitud de  $10 \mu\text{m}$ , ¿cuánto tarda un tallo de bambú, como media, en crecer una longitud igual a la de una célula?

- 1.4. Un litro (L) de pintura cubre aproximadamente  $10 \text{ m}^2$  de pared. ¿Qué anchura tendrá la capa de pintura depositada sobre la pared antes de secarse? (*Sugerencia:*  $1 \text{ L} = 1 \times 10^6 \text{ mm}^3$ ).
- 1.5. Una moneda de un céntimo de euro tiene aproximadamente 1,5 mm de espesor. ¿A qué velocidad media debería crecer una pila de esas monedas para acumular 300.000 millones de euros en un año?
- 1.6. Un disquete de 3 y media pulgadas almacena 1,4 MB. Los bits de datos están almacenados en pistas circulares, existiendo 77 pistas por cada cara. El radio de la pista más interna es de media pulgada, mientras que el de la más externa es de una y media pulgadas. El número de bits por pista es el mismo y hay 8 bits en cada byte. ¿Cuánta área ocupa, en  $\mu\text{m}^2$ , un bit almacenado en la pista más interna?
- 1.7. Un bus de conexión de cobre rectangular ( $0,6 \times 9 \text{ cm}$ ) está atravesado por una corriente de 1400 A. La corriente se debe a los electrones libres que se mueven a través del conector de bus a una velocidad media de  $v$  metros/segundo. Si la concentración de electrones libres es de  $10^{29}$  electrones por metro cúbico y si los electrones están uniformemente distribuidos por todo el bus, ¿cuál es la velocidad media de un electrón?
- 1.8. En los circuitos electrónicos, no resulta extraño manejar corrientes en el rango de los  $\mu\text{A}$ . Suponga una corriente de  $20 \mu\text{A}$ , debida al flujo de electrones.
- ¿Cuál es el número medio de electrones por segundo que fluyen a través de una sección transversal fija de referencia perpendicular a la dirección del flujo?
  - Compare este número con el número de  $\mu\text{m}$  existentes entre Miami y Seattle. Suponga que esa distancia es igual a 3303 millas.
- 1.9. La corriente que entra por el terminal superior de la Figura 1.5 es

$$i = 20 \cos 5000t \text{ A.}$$

Suponga que la carga en el terminal superior es 0 en el instante en que la corriente alcanza su máximo valor. Calcule la expresión de  $q(t)$ .

- 1.10. ¿Cuánta energía se extrae de un electrón cuando fluye a través de una batería de 9 V desde el terminal positivo hasta el negativo? Exprese su respuesta en attojulios.
- 1.11. Cuatro baterías de 1,5 V suministran 100 mA a un reproductor de CD portátil. ¿Cuánta energía suministran las baterías en 3 horas?
- 1.12. Dos circuitos eléctricos, representados por las cajas A y B, están conectados como se muestra en la Figura P1.12. La dirección de referencia para la corriente  $i$  en la interconexión y la polaridad de referencia para la tensión  $v$  en la interconexión se muestran en la figura. Para cada uno de los siguientes conjuntos de valores numéricos, calcule la potencia en la interconexión e indique si esta potencia fluye a A a B o viceversa.

- |                        |                     |                         |                     |
|------------------------|---------------------|-------------------------|---------------------|
| a) $i = 15 \text{ A},$ | $v = 20 \text{ V}$  | b) $i = -5 \text{ A},$  | $v = 100 \text{ V}$ |
| c) $i = 4 \text{ A},$  | $v = -50 \text{ V}$ | d) $i = -16 \text{ A},$ | $v = -25 \text{ V}$ |

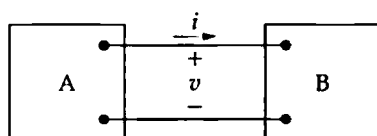


Figura P1.12

- 1.13. Las referencias para la tensión y la corriente en los terminales de un elemento de circuito son como se muestra en la Figura 1.6(d). Los valores numéricos de  $v$  e  $i$  son  $-20$  V y  $5$  A.
- Calcule la potencia en los terminales e indique si esta potencia es absorbida o entregada por el elemento contenido en la caja.
  - Supuesto que la corriente se debe al flujo de electrones, indique si los electrones están entrando o saliendo por el terminal 2.
  - ¿Ganan o pierden energía los electrones cuando pasan a través del elemento contenido en la caja?
- 1.14. Repita el Problema 1.13 con una corriente de  $-5$  A.
- 1.15. Cuando una automóvil se queda sin batería, a menudo puede ser arrancado conectando la batería de otro coche a sus terminales. Los terminales positivos se conectan entre sí, al igual que los negativos. La conexión se ilustra en la Figura P1.15. Suponga que medimos la corriente  $i$  en esta figura y que comprobamos que es igual a  $-40$  A.



Figura P1.15

- ¿Cuál de los dos vehículos se ha quedado sin batería?
  - Si mantenemos esta conexión durante 1,5 min, ¿cuánta energía se transferirá a la batería que no funcionaba?
- 1.16. El fabricante de una batería de 6 V de célula seca para linternas dice que la batería suministra 15 mA durante 60 h. Durante ese tiempo, la tensión caerá de 6 V a 4 V. Suponga que la caída de tensión es lineal con respecto al tiempo. ¿Cuánta energía entrega la batería en este intervalo de 60 h?
- 1.17. La tensión y la corriente en los terminales del elemento de circuito de la Figura 1.5 son cero para  $t < 0$ . Para  $t \geq 0$  son
- ☐

$$v = 50e^{-1600t} - 50e^{-400t} \text{ V}, \quad i = 5e^{-1600t} - 5e^{-400t} \text{ mA}.$$
- Calcule la potencia en  $t = 625 \mu\text{s}$ .
  - ¿Cuánta energía se suministra al elemento del circuito entre 0 y  $625 \mu\text{s}$ ?
  - Calcule la energía total suministrada al elemento.
- 1.18. La tensión y la corriente en los terminales del elemento de circuito en la Figura 1.5 son cero para  $t < 0$ . Para  $t \geq 0$  son
- ☐

$$v = 100e^{-50t} \sin 150t \text{ V}, \quad i = 20e^{-50t} \sin 150t \text{ A}.$$
- Calcule la potencia absorbida por el elemento en  $t = 20$  ms.
  - Calcule la energía total absorbida por el elemento.
- 1.19. La tensión y la corriente en los terminales del elemento de circuito en la Figura 1.5 se muestran en la Figura P1.19.

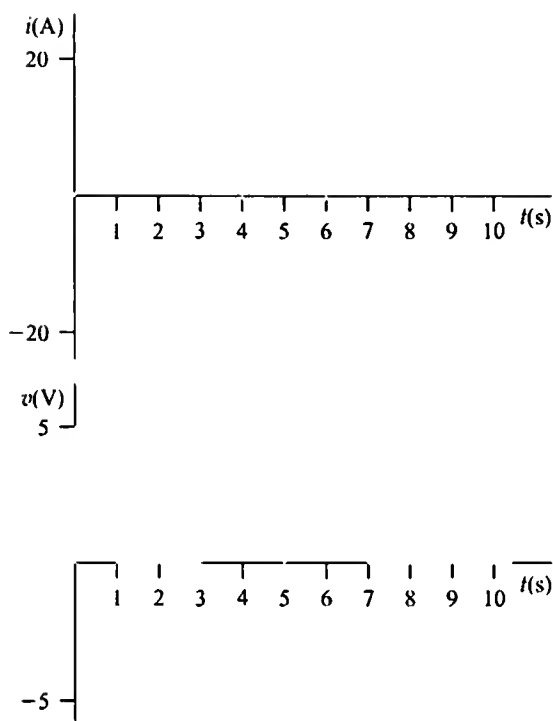


Figura P1.19

- a) Dibuje la gráfica de la potencia en función de  $t$  para  $0 \leq t \leq 10$  s.  
 b) Calcule la energía suministrada al elemento del circuito en  $t = 1, 6$  y  $10$  s.

**1.20.** La tensión y la corriente en los terminales del elemento de circuito de la Figura 1.5 son cero para  $t < 0$ . Para  $t \geq 0$  son



$$v = 100e^{-500t} \text{ V},$$

$$i = 20 - 20e^{-500t} \text{ mA}.$$

- a) Calcule el valor máximo de la potencia entregada al circuito.  
 b) Calcule la energía total suministrada al elemento.

**1.21.** La tensión y la corriente en los terminales del elemento de la Figura 1.5 son



$$v = 200 \cos 500\pi t \text{ V},$$

$$i = 4,5 \sin 500\pi t \text{ A}.$$

- a) Calcule el valor máximo de la potencia entregada al elemento.  
 b) Calcule el valor máximo de la potencia extraída del elemento.  
 c) Calcule el valor medio de  $p$  en el intervalo  $0 \leq t \leq 4$  ms.  
 d) Calcule el valor medio de  $p$  en el intervalo  $0 \leq t \leq 15$  ms.

**1.22.** La tensión y la corriente en los terminales de una batería de automóvil durante un ciclo de carga se muestran en la Figura P1.22.

- a) Calcule la carga total transferida a la batería.  
 b) Calcule la energía total transferida a la batería.

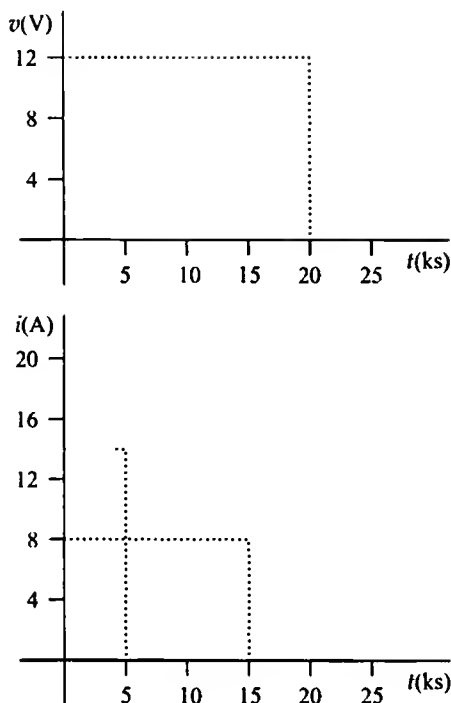


Figura P1.22

- 1.23. La tensión y la corriente en los terminales del elemento de circuito de la Figura 1.5 son cero para  $t < 0$ . Para  $t \geq 0$  son



$$v = (10.000t + 5)e^{-400t} \text{ V}, \quad i = (40t + 0,05)e^{-400t} \text{ A}.$$

- ¿En qué instante se entrega una potencia máxima al elemento?
- Calcule la potencia máxima en vatios.
- Calcule la energía total suministrada al elemento en milijulios.

- 1.24. La tensión y la corriente en los terminales del elemento de circuito de la Figura 1.5 son cero para  $t < 0$  y  $t > 40$  s. En el intervalo entre 0 y 40 s, las expresiones correspondientes son:



$$v = t(1 - 0,025t) \text{ V}, \quad 0 < t < 40 \text{ s}; \quad i = 4 - 0,2t \text{ A}, \quad 0 < t < 40 \text{ s}.$$

- ¿En qué instante es máxima la potencia entregada al elemento de circuito?
- ¿Cuál es la potencia en el instante calculado en el apartado (a)?
- ¿En qué instante es máxima la potencia extraída del elemento de circuito?
- ¿Cuál es la potencia en el instante calculado en el apartado (c)?
- Calcule la energía neta suministrada al circuito en 0, 10, 20, 30 y 40 s.

- 1.25. La tensión y la corriente en los terminales del elemento de circuito de la Figura 1.5 son cero para  $t < 0$ . Para  $t \geq 0$  son



$$v = 80.000te^{-500t} \text{ V}, \quad t \geq 0; \quad i = 15te^{-500t} \text{ A}, \quad t \geq 0.$$

- Calcule el tiempo (en milisegundos) para el que la potencia suministrada al elemento de circuito es máxima.



b) Calcule el valor máximo de  $p$  en milivatios.

c) Calcule la energía total suministrada al elemento de circuito en microjulios.

1.26. Los valores numéricos de las corrientes y tensiones del circuito de la Figura P1.26 se indican en la Tabla P1.26. Calcule la potencia total consumida en el circuito.

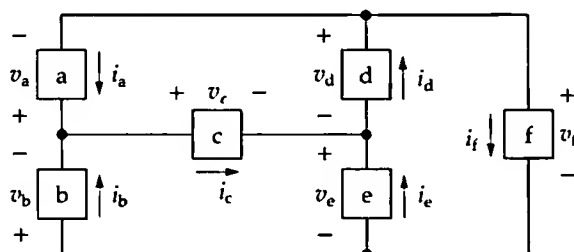


Figura P1.26

1.27. Suponga que le encargan, como ingeniero, de un proyecto y que uno de sus subordinados le informa de que la interconexión en la Figura P1.27 no cumple con las restricciones de potencia. Los datos correspondientes a la interconexión se indican en la Tabla P1.27.

a) ¿Tiene razón su subordinado? Explique su respuesta.

b) Si tiene razón, ¿puede ver cuál es el error en los datos?

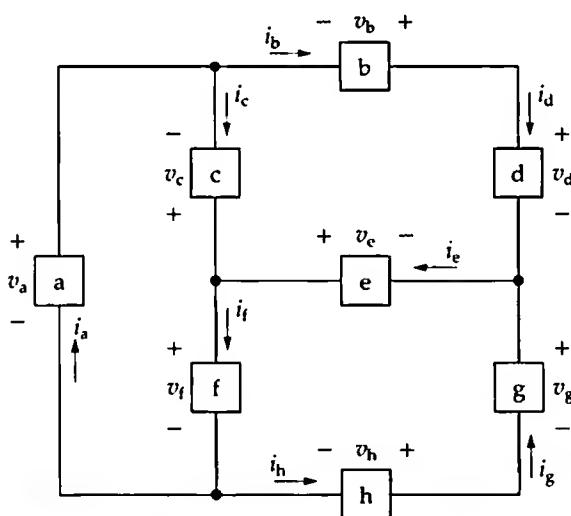


Figura P1.27

Tabla P1.26

ELEMENTO	TENSIÓN (V)	CORRIENTE (A)	ELEMENTO	TENSIÓN (V)	CORRIENTE (A)
a	-18	-51	d	20	-20
b	-18	45	e	16	-14
c	2	-6	f	36	31

Tabla P1.27

ELEMENTO	TENSIÓN (V)	CORRIENTE (A)	ELEMENTO	TENSIÓN (V)	CORRIENTE (A)
a	900	-22,5	e	-120	30,0
b	105	-52,5	f	300	60,0
c	-600	-30,0	g	585	82,5
d	585	-52,5	h	-165	82,5

1.28. Los valores numéricos de las tensiones y corrientes en las interconexiones mostradas en la Figura P1.28 se indican en la Tabla P1.28. ¿Satisfacen las interconexiones las pruebas de potencia?

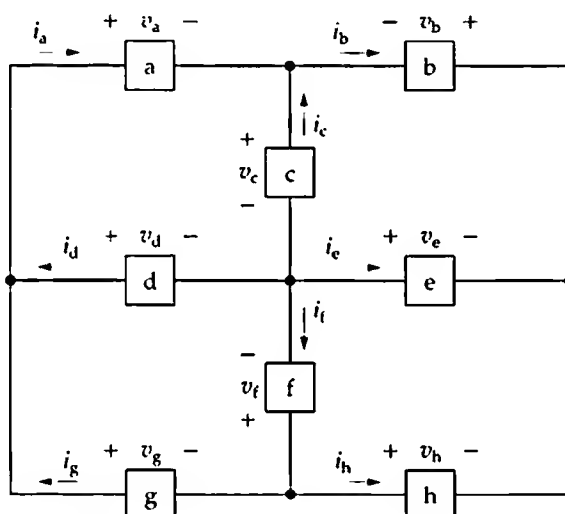


Figura P1.28

Tabla 1.28

ELEMENTO	TENSIÓN (V)	CORRIENTE (A)	ELEMENTO	TENSIÓN (V)	CORRIENTE (A)
a	9	1,8	e	-30	-1,0
b	-15	1,5	f	-240	4,0
c	45	-0,3	g	294	4,5
d	54	-2,7	h	-270	-0,5

1.29. Un método de comprobar los cálculos relativos a una serie de elementos de circuito interconectados consiste en ver si la potencia total suministrada es igual a la potencia total absorbida (principio de conservación de la energía). Teniendo esto presente, compruebe las interconexiones de la Figura P1.29 e indique si satisfacen esta prueba de la potencia. Los valores de corriente y de tensión para cada elemento se indican en la Tabla P1.29.

Tabla P1.29

ELEMENTO	TENSIÓN (V)	CORRIENTE (A)	ELEMENTO	TENSIÓN (V)	CORRIENTE (A)
a	-160	-10	e	800	-20
b	-100	-20	f	-700	14
c	-60	6	g	640	-16
d	800	-50			

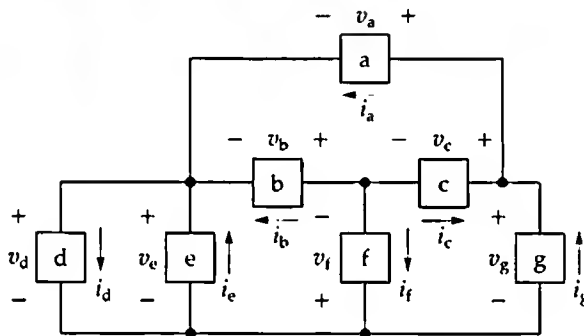


Figura P1.29

- 1.30. a) En el circuito mostrado en la Figura P1.30, identifique los elementos que tienen las polaridades de referencia para la tensión y la corriente definidas mediante el convenio de signos pasivo.
- b) Los valores numéricos de las corrientes y las tensiones para cada elemento se indican en la Tabla P1.30. ¿Qué potencia total es absorbida y cuánta es suministrada en este circuito?

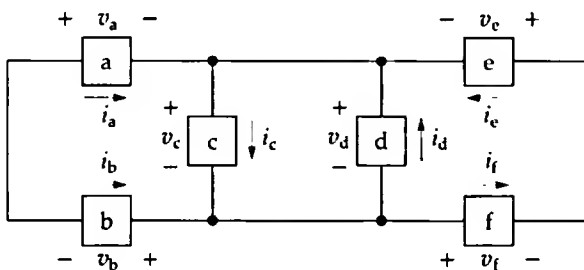


Figura P1.30

Tabla P1.30

ELEMENTO	TENSIÓN (V)	CORRIENTE (A)	ELEMENTO	TENSIÓN (V)	CORRIENTE (A)
a	-8	7	d	10	5
b	-2	-7	e	-6	3
c	10	15	f	-4	3

# CAPÍTULO

# 2

# Elementos de circuito

## Contenido del capítulo

- 2.1. Fuentes de tensión y de corriente
- 2.2. Resistencia eléctrica (ley de Ohm)
- 2.3. Construcción de un modelo de circuito
- 2.4. Leyes de Kirchhoff
- 2.5. Análisis de un circuito con fuentes dependientes

Hay cinco elementos de circuito ideales básicos: fuentes de tensión, fuentes de corriente, resistencias, bobinas y condensadores. En este capítulo, presentaremos las características de las fuentes de tensión, de las fuentes de corriente y de las resistencias. Aunque pueda parecer que se trata de un número de elementos demasiado pequeño para poder comenzar a analizar circuitos, muchos sistemas prácticos pueden modelarse utilizando simplemente fuentes y resistencias. Asimismo, constituyen un punto de partida bastante útil, debido a su relativa simplicidad; las relaciones matemáticas entre la tensión y la corriente en las fuentes y en las resistencias son algebraicas. Así, podremos comenzar a aprender las técnicas básicas de análisis de circuitos utilizando exclusivamente manipulaciones algebraicas.

Vamos a posponer la presentación de las bobinas y condensadores hasta el Capítulo 6, ya que su uso requiere que se resuelvan ecuaciones integrales y diferenciales. Sin embargo, las técnicas analíticas básicas para resolver circuitos con bobinas y condensadores son iguales a las presentadas en este capítulo. De este modo, cuando necesitemos comenzar a manipular ecuaciones de mayor complejidad, ya estaremos familiarizados con los métodos utilizados para escribirlas.

## Perspectiva práctica

### Seguridad eléctrica

«¡Peligro, alta tensión!». Este aviso tan común resulta un tanto engañoso. Todas las formas de energía, incluyendo la energía eléctrica, pueden ser peligrosas, pero no es la tensión lo que causa daños. La descarga de electricidad estática que recibimos cuando caminamos sobre una alfombra y tocamos el pomo de una puerta es molesta, pero no nos causa ningún



daño. Sin embargo, esa chispa de descarga está provocada por una tensión que es centenares o miles de veces mayor que las tensiones que pueden dañarnos.

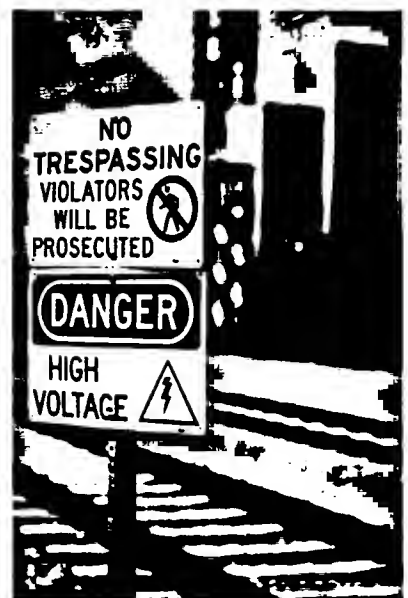
La energía eléctrica que puede llegar a causarnos lesiones es debida a la corriente eléctrica y al modo en que ésta fluye a través del cuerpo. ¿Por qué, entonces, el aviso nos advierte contra las altas tensiones? Debido a la forma en que se produce y distribuye la potencia eléctrica, resulta más fácil determinar las tensiones que las corrientes. Asimismo, la mayoría de las fuentes eléctricas producen tensiones constantes especificadas. De modo que los avisos nos advierten acerca de aquello que es más fácil de medir. Determinar si una cierta fuente puede suministrar corrientes potencialmente peligrosas, y en qué condiciones puede producirse esto, es más difícil, ya que se requieren algunos conocimientos de ingeniería eléctrica.

Antes de examinar este aspecto de la seguridad eléctrica, debemos ver el modo en que se producen las tensiones y corrientes y la relación existente entre ellas. El comportamiento eléctrico de los objetos, como por ejemplo el cuerpo humano, es bastante complejo y a menudo se carece de una comprensión completa del mismo. Para poder predecir y controlar los fenómenos eléctricos, utilizamos modelos simplificados en los que se aproximan, mediante relaciones matemáticas simples entre la corriente y la tensión, las relaciones verdaderas existentes en los objetos reales. Tales modelos y métodos analíticos forman la base de las técnicas de ingeniería eléctrica que nos permitirán comprender todos los fenómenos eléctricos, incluyendo los relativos a la seguridad eléctrica.

Al final de este capítulo, usaremos un modelo de circuito eléctrico simple para describir la razón y la manera en que una persona puede resultar lesionada por una corriente eléctrica. Aunque puede que nunca lleguemos a desarrollar una explicación completa y precisa del comportamiento eléctrico del cuerpo humano, podemos obtener una buena aproximación utilizando modelos de circuitos simples para evaluar y mejorar la seguridad de los dispositivos y sistemas eléctricos. El desarrollo de modelos que proporcionen una comprensión imperfecta pero suficiente para resolver problemas prácticos es una de las características básicas de la ingeniería. Una de las técnicas principales del arte de la ingeniería eléctrica, técnica que se aprende con la experiencia, consiste en saber reconocer cuándo y de qué manera resolver problemas difíciles utilizando modelos simplificados.

## Objetivos del capítulo

1. Comprender los símbolos y el comportamiento de los siguientes elementos de circuito básicos ideales: fuentes independientes de tensión y corriente, fuentes dependientes de tensión y corriente y resistencias.
2. Ser capaz de enunciar la ley de Ohm, la ley de las corrientes de Kirchhoff y la ley de las tensiones de Kirchhoff y saber utilizar estas leyes para analizar circuitos simples.
3. Saber cómo calcular la potencia correspondiente a cada elemento de un circuito simple y ser capaz de determinar si la potencia está equilibrada, o no, en el circuito completo.



## 2.1. Fuentes de tensión y de corriente

Antes de explicar las fuentes de tensión y de corriente ideales, es preciso considerar la naturaleza general de las fuentes eléctricas. Una **fente eléctrica** es un dispositivo capaz de convertir energía no eléctrica en energía eléctrica y viceversa. Una batería, durante su descarga, convierte energía química en energía eléctrica, mientras que una batería que esté siendo cargada convierte la energía eléctrica en energía química. Una dinamo es una máquina que convierte energía mecánica en energía eléctrica y viceversa. Si está operando en el modo de conversión mecánico a eléctrico, se denomina generador; si está transformando energía eléctrica en mecánica, se denomina motor. Lo importante es que estas fuentes pueden suministrar o absorber **potencia eléctrica**, generalmente manteniendo la tensión o la corriente. Este comportamiento resulta de gran interés para el análisis de circuitos y condujo a la definición de la fuente de tensión ideal y de la fuente de corriente ideal como elementos de circuito básicos. El desafío consiste en modelar las fuentes reales en función de los elementos de circuito ideales básicos.

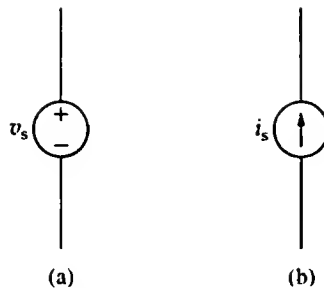
Una **fente ideal de tensión** es un elemento de circuito que mantiene una tensión prescrita en bornes de sus terminales, independientemente de la corriente que fluya a través de esos terminales. De forma similar, una **fente de corriente ideal** es un elemento de circuito que mantiene una corriente prescrita a través de sus terminales, independientemente de la tensión existente en bornes de los mismos. Estos elementos de circuito no existen como dispositivos reales, sino que se trata de modelos idealizados de las fuentes de corriente y tensión existentes en la práctica.

Utilizar un modelo ideal para las fuentes de corriente y de tensión impone una restricción importante en cuanto al modo de describir esas fuentes matemáticamente. Puesto que una fuente de tensión ideal proporciona una tensión constante, incluso aunque la corriente en el elemento cambie, resulta imposible especificar la corriente de una fuente ideal de tensión en función de la tensión de ésta. De la misma forma, si la única información que tenemos sobre una fuente de corriente ideal es el valor de la corriente suministrada, resulta imposible determinar la tensión en bornes de la fuente de corriente. En otras palabras, hemos sacrificado nuestra capacidad de relacionar la tensión y la corriente en una fuente real en aras de la simplicidad de utilizar fuentes ideales en el análisis de circuitos.

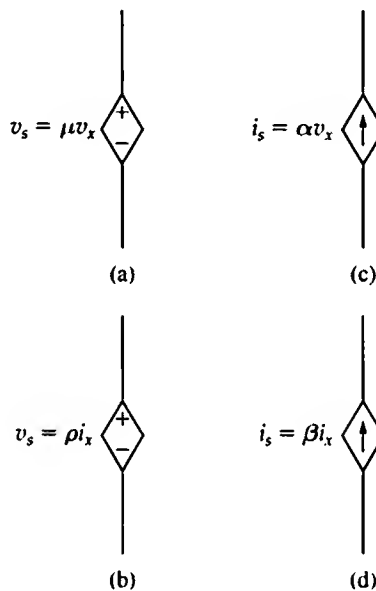
Las fuentes ideales de tensión y de corriente pueden subdividirse en fuentes independientes y fuentes dependientes. Una **fente independiente** establece una tensión o corriente en un circuito que no dependen de las tensiones o corrientes existentes en otras partes del circuito. El valor de la tensión o corriente suministradas está especificado, exclusivamente, por el valor de la propia fuente independiente. Por contraste, una **fente dependiente** proporciona una tensión o corriente cuyo valor depende de la tensión o corriente existentes en algún otro punto del circuito. No podemos especificar el valor de una fuente dependiente a menos que conozcamos el valor de la tensión o de la corriente de las que la fuente depende.

Los símbolos de circuito para las fuentes independientes ideales se muestran en la Figura 2.1. Observe que se utiliza un círculo para representar una fuente independiente. Para especificar completamente una fuente de tensión ideal e independiente en un circuito, es preciso incluir el valor de la tensión suministrada y la polaridad de referencia, como se indica en la Figura 2.1(a). De forma similar, para especificar completamente una fuente de corriente ideal e independiente, será preciso indicar el valor de la corriente suministrada y su dirección de referencia, como se muestra en la Figura 2.1(b).

Los símbolos de circuito para las fuentes ideales dependientes se muestran en la Figura 2.2. Para representar una fuente dependiente, se utiliza el símbolo de un rombo. Tanto la fuente dependiente de corriente como la fuente dependiente de tensión pueden estar controladas por una tensión o una corriente existentes en otra parte del circuito, por lo que existe un total de cuatro variantes, como se indica mediante los símbolos de la Figura 2.2. Las fuentes dependientes se denominan en ocasiones **fuentes controladas**.



**Figura 2.1.** Símbolos de circuito para (a) una fuente de tensión ideal e independiente y (b) una fuente de corriente ideal e independiente.



**Figura 2.2.** Símbolos de circuito para (a) una fuente de tensión ideal y dependiente controlada por tensión, (b) una fuente de tensión ideal y dependiente controlada por corriente, (c) una fuente de corriente ideal y dependiente controlada por tensión y (d) una fuente de corriente ideal y dependiente controlada por corriente.

Para especificar completamente una fuente de tensión ideal y dependiente controlada por tensión, es necesario indicar la tensión de control, la ecuación que permite calcular la tensión suministrada a partir de la tensión de control y la polaridad de referencia de la tensión suministrada. En la Figura 2.2(a), la tensión de control se denomina  $v_x$ , la ecuación que determina la tensión suministrada  $v_s$  es

$$v_s = \mu v_x,$$

y la polaridad de referencia de  $v_s$  es la que se indica. Observe que  $\mu$  es una constante multiplicadora adimensional.

Existen otros requisitos similares para especificar completamente las otras fuentes ideales dependientes. En la Figura 2.2(b), la corriente de control es  $i_x$ , la ecuación de la tensión suministrada  $v_s$  es

$$v_s = \rho i_x,$$

la referencia de polaridad es la que se muestra y la constante multiplicadora  $\rho$  tiene como dimensiones voltios partidos por amperios. En la Figura 2.2(c), la tensión de control es  $v_x$ , la ecuación de la corriente suministrada  $i_s$  es

$$i_s = \alpha v_x,$$

la dirección de referencia es la mostrada y la constante multiplicadora  $\alpha$  tiene como dimensiones amperios partidos por voltios. En la Figura 2.2(b), la corriente de control es  $i_x$ , la ecuación de la corriente suministrada  $i_s$  es

$$i_s = \beta i_x,$$

la dirección de referencia es la mostrada y la constante multiplicadora  $\beta$  es adimensional.

Finalmente, en nuestro análisis de las fuentes ideales, observemos que constituyen ejemplos de elementos de circuito activos. Un **elemento activo** es aquel que modela un dispositivo capaz de generar energía eléctrica. Los **elementos pasivos** modelan dispositivos físicos que son incapaces de generar energía eléctrica. Las resistencias, las bobinas y los condensadores son, todos ellos, ejemplos de elementos de circuito pasivos. Los Ejemplos 2.1 y 2.2 ilustran el modo en que las características de las fuentes ideales independientes y dependientes limitan los tipos de interconexiones admisibles entre las fuentes.

### EJEMPLO 2.1 Interconexión de fuentes ideales

Utilizando las definiciones de las fuentes ideales independientes de tensión y de corriente, indique qué interconexiones de la Figura 2.3 son admisibles y cuáles violan las restricciones impuestas por las fuentes ideales.

### SOLUCIÓN

La conexión (a) es válida. Cada una de las fuentes suministra una tensión en bornes del mismo par de terminales, marcados como a,b. Esto

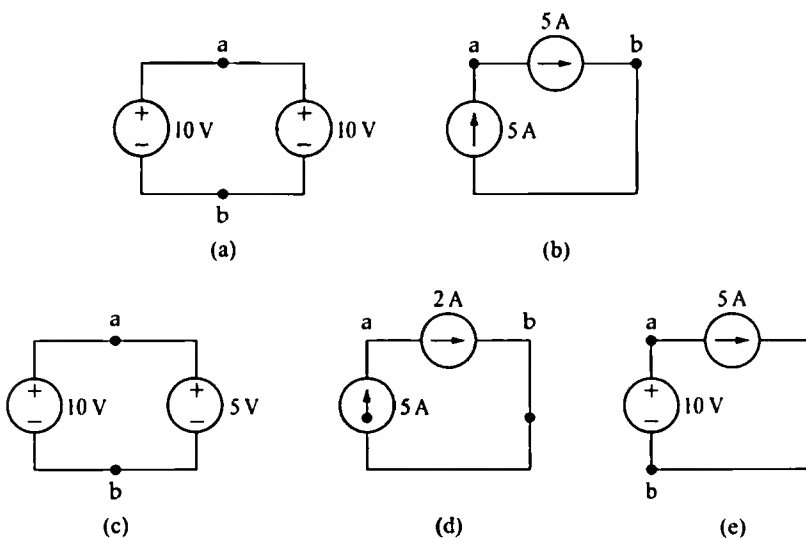


Figura 2.3. Circuitos del Ejemplo 2.1.



requiere que cada una de las fuentes suministre la misma tensión y con la misma polaridad, cosa que las dos fuentes del ejemplo hacen.

La conexión (b) es válida. Cada una de las fuentes suministra corriente a través del mismo par de terminales, marcados como a y b. Esto requiere que cada fuente suministre la misma corriente y en la misma dirección, cosa que las dos fuentes del ejemplo hacen.

La conexión (c) no es correcta. Cada fuente suministra tensión en bornes del mismo par de terminales, marcados como a y b. Esto requiere que cada fuente suministre la misma tensión y con la misma polaridad, cosa que no sucede con las dos fuentes del ejemplo.

La conexión (d) no es admisible. Cada fuente suministra corriente a través del mismo par de terminales, marcados como a y b. Esto requiere que cada fuente suministre la misma corriente y en la misma dirección, lo cual no hacen las dos fuentes del ejemplo.

La conexión (e) es válida. La fuente de tensión suministra tensión en bornes de la pareja de terminales marcados como a y b. La fuente de corriente suministra corriente a través del mismo par de terminales. Puesto que una fuente ideal de tensión suministra la misma tensión independientemente de la corriente existente, y una fuente ideal de corriente suministra la misma corriente independientemente de la tensión, se trata de una conexión válida.

### EJEMPLO 2.2 Interconexión de fuentes ideales independientes y dependientes

Utilizando las definiciones de las fuentes ideales independientes y dependientes, indique qué interconexiones de la Figura 2.4 son válidas y cuáles violan las restricciones impuestas por las fuentes ideales.

#### SOLUCIÓN

La conexión (a) no es válida. Tanto la fuente independiente como la dependiente suministran tensión en bornes del mismo par de terminales, etiquetados como a,b. Esto requiere que cada fuente suministre la misma tensión y con la misma polaridad. La fuente independiente suministra 5 V, pero la fuente dependiente suministra 15 V.

La conexión (b) es válida. La fuente independiente de tensión suministra tensión en bornes del par de terminales marcados como a,b. La fuente dependiente de corriente suministra corriente a través del mismo par de terminales. Puesto que una fuente ideal de tensión suministra la misma tensión independientemente de la corriente existente, y una fuente ideal de corriente suministra la misma corriente independientemente de la tensión, se trata de una conexión válida.

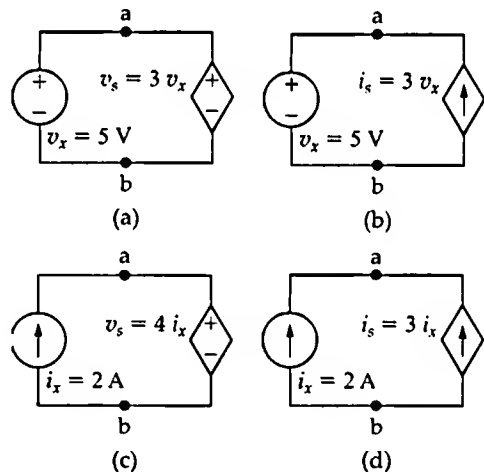


Figura 2.4. Circuitos del Ejemplo 2.2.

La conexión (c) es válida. La fuente dependiente de corriente suministra corriente a través del par de terminales marcados como a,b. La fuente dependiente de tensión suministra tensión en bornes del mismo par de terminales. Puesto que una fuente ideal de corriente suministra la misma corriente independientemente de la tensión, y una fuente ideal de tensión suministra la

misma tensión independientemente de la corriente, se trata de una conexión admisible.

La conexión (d) es inválida. Tanto la fuente independiente como la dependiente suministran corriente a través del mismo par de terminales,

etiquetados como a,b. Esto requiere que cada fuente suministre la misma corriente y en la misma dirección de referencia. La fuente independiente suministra 2 A, pero la fuente dependiente suministra 6 A en dirección opuesta.

## Evaluación del objetivo 1

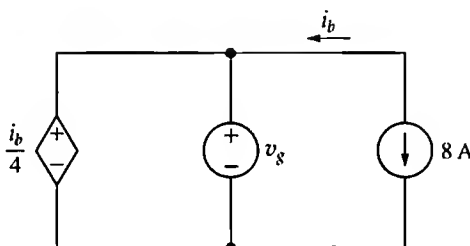
- Comprender los elementos de circuito ideales básicos.

2.1. Para el circuito mostrado,

- ¿Qué valor de  $v_g$  se requiere para que la interconexión sea válida?
- Para este valor de  $v_g$ , calcule la potencia asociada con la fuente de 8 A.

**RESPUESTA**

- 2 V;
- 16 W (16 W suministrados).

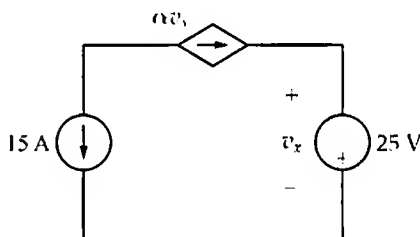


2.2. Para el circuito mostrado,

- ¿Qué valor de  $\alpha$  se requiere para que la interconexión sea válida?
- Para el valor de  $\alpha$  calculado en la parte (a), calcule la potencia asociada con la fuente de 25 V.

**RESPUESTA**

- 0,6 A/V;
- 375 W (375 W absorbidos).

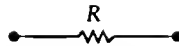


**NOTA** Intente resolver también los Problemas 2.6 y 2.7 del capítulo.

## 2.2. Resistencia eléctrica (ley de Ohm)

La **resistencia** es la capacidad de los materiales para oponerse al flujo de corriente o, más específicamente, al flujo de carga eléctrica. El elemento de circuito utilizado para modelar este comportamiento se denomina **resistencia**. La Figura 2.5 muestra el símbolo de circuito de la resistencia, donde  $R$  representa el valor de la resistencia del elemento.

Conceptualmente, podemos comprender la resistencia si pensamos en que los electrones en movimiento que forman la corriente eléctrica interactúan con la estructura atómica del material a través del cual se mueven, lo que tiende a retardarlos. En el curso de estas interacciones, parte de la energía eléctrica se convierte en energía térmica y se disipa en forma de calor. Este efecto puede que no resulte deseable. Sin embargo, hay otros muchos dispositivos eléctricos útiles que aprovechan este efecto de calentamiento mediante resistencias, como por ejemplo estufas, tostadoras, planchas y calefactores.



**Figura 2.5.** Símbolo de circuito de una resistencia de valor  $R$ .

La mayoría de los materiales ofrecen una resistencia a la corriente que puede medirse. El valor de la resistencia depende del material en cuestión. Algunos metales, como el cobre y el aluminio, tienen valores de resistencia pequeños, por lo que resultan adecuados para fabricar los cables utilizados para conducir la corriente eléctrica. De hecho, cuando se los representa en un diagrama de circuito, los cables de cobre o aluminio no se suelen modelar como una resistencia. La resistencia de esos cables es tan pequeña, comparada con la resistencia de los otros elementos del circuito, que podemos prescindir de ella con el fin de simplificar el diagrama.

Con el objeto de analizar los circuitos, debemos referenciar la corriente que atraviesa la resistencia con respecto a la tensión existente entre sus terminales. Podemos hacerlo de dos maneras: en la dirección de la caída de tensión que se produce en la resistencia o en la dirección del incremento de tensión en la resistencia, como se muestra en la Figura 2.6. Si elegimos la primera de las dos soluciones, la relación entre la tensión y la corriente es

⚡ **LEY DE OHM**  $v = iR,$  (2.1)

donde  $v$  = tensión en voltios,

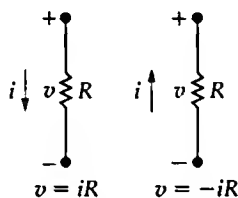
$i$  = corriente en amperios,

$R$  = resistencia en ohmios.

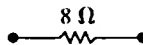
Si elegimos el segundo método, deberemos escribir

$$v = -iR, \quad (2.2)$$

donde  $v$ ,  $i$  y  $R$  se miden, como antes, en voltios, amperios y ohmios, respectivamente. Los signos algebraicos utilizados en las Ecuaciones 2.1 y 2.2 son una consecuencia directa del convenio de signos pasivo, que hemos presentado en el Capítulo 1.



**Figura 2.6.** Dos posibles elecciones de referencia para la corriente y la tensión en los terminales de una resistencia, junto con sus ecuaciones correspondientes.



**Figura 2.7.** Símbolo de circuito para una resistencia de  $8 \Omega$ .

Las Ecuaciones 2.1 y 2.2 se conocen con el nombre de **ley de Ohm**, en honor a Georg Simon Ohm, físico alemán que estableció su validez a principios del siglo XIX. La ley de Ohm es la relación algebraica existente entre la tensión y la corriente en una resistencia. En unidades del SI, la resistencia se mide en ohmios. El símbolo estándar para un ohmio es la letra griega omega ( $\Omega$ ). El símbolo utilizado en un diagrama de circuito para una resistencia de  $8 \Omega$  sería el que se muestra en la Figura 2.7.

La ley de Ohm expresa la tensión en función de la corriente. Sin embargo, en ocasiones necesitamos expresar la corriente en función de la tensión, para lo cual escribiríamos, a partir de la Ecuación 2.1,

$$i = \frac{v}{R}, \quad (2.3)$$

o, a partir de la Ecuación 2.2,

$$i = -\frac{v}{R}. \quad (2.4)$$

El inverso de la resistencia se denomina **conductancia**, se simboliza mediante la letra  $G$  y se mide en siemens (S). Así,

$$G = \frac{1}{R} \text{ S}. \quad (2.5)$$

Una resistencia de  $8 \, \Omega$  tiene un valor de conductancia igual a  $0,125 \text{ S}$ . En la literatura profesional, la unidad utilizada para la conductancia es el mho (ohm escrito al revés), que se simboliza mediante una letra omega invertida ( $\oslash$ ). Por tanto, podemos también decir que una resistencia de  $8 \, \Omega$  tiene una conductancia de  $0,125 \text{ mhos}$  ( $\oslash$ ).

Utilizamos las resistencias ideales en el análisis de circuitos para modelar el comportamiento de los dispositivos físicos. Utilizar el adjetivo *ideal* sirve para recordarnos que el modelo de la resistencia realiza diversas suposiciones simplificadoras acerca del comportamiento de los dispositivos resistivos reales. La más importante de estas suposiciones simplificadoras es que el valor de la resistencia ideal es constante y no varía con el tiempo. En realidad, la mayoría de los dispositivos resistivos que podemos encontrar en la práctica no tienen una resistencia constante y su valor varía con el tiempo. El modelo de resistencia ideal puede utilizarse para representar un dispositivo físico cuya resistencia no varíe mucho con respecto a cierto valor constante a lo largo del período de tiempo de interés para nuestro análisis del circuito. En este libro, asumiremos que las suposiciones simplificadoras acerca de los dispositivos resistivos son válidas, por lo que utilizaremos resistencias ideales en el análisis de los circuitos.

Podemos calcular la potencia existente en los terminales de una resistencia de varias formas. El primer enfoque consiste en utilizar la ecuación que define la resistencia y calcular simplemente el producto de la tensión y la corriente en los terminales. Para el sistema de referencia mostrado en la Figura 2.6, escribiremos

$$p = vi \quad (2.6)$$

cuando  $v = iR$  y

$$p = -vi \quad (2.7)$$

cuando  $v = -iR$ .

Un segundo método para expresar la potencia en los terminales de una resistencia es el que consiste en expresarla en términos de la corriente y del propio valor de la resistencia. Sustituyendo la Ecuación 2.1 en la Ecuación 2.6, obtenemos

$$p = vi = (iR)i$$

de modo que

✦ **POTENCIA EN UNA RESISTENCIA  
EN TÉRMINOS DE LA CORRIENTE**

$$p = i^2 R. \quad (2.8)$$

De la misma forma, sustituyendo la Ecuación 2.2 en la Ecuación 2.7, tenemos

$$p = -vi = -(-iR)i = i^2 R, \quad (2.9)$$

Las Ecuaciones 2.8 y 2.9 son idénticas y demuestran claramente que la potencia en los terminales de una resistencia es siempre positiva, independientemente de la polaridad de la tensión y de la dirección de la corriente. Por tanto, las resistencias siempre absorben potencia del circuito.

Un tercer método para expresar la potencia en los terminales de una resistencia es en términos de la tensión y del valor de la resistencia. La expresión es independiente de las referencias de polaridad, de modo que

✦ **POTENCIA EN UNA RESISTENCIA  
EN TÉRMINOS DE LA TENSIÓN**

$$p = \frac{v^2}{R}. \quad (2.10)$$

Algunas veces, el valor de una resistencia se expresará como conductancia y no como resistencia. Utilizando la relación existente entre resistencia y conductancia, indicada en la Ecuación 2.5, podemos escribir las Ecuaciones 2.9 y 2.10 en términos de la conductancia, con lo que se obtiene

$$p = \frac{i^2}{G} \quad (2.11)$$

$$p = v^2 G. \quad (2.12)$$

Las Ecuaciones 2.6-2.12 proporcionan diversos métodos para calcular la potencia absorbida por una resistencia. Todos estos métodos proporcionan la misma respuesta. A la hora de analizar un circuito, examine la información proporcionada y seleccione la ecuación de la potencia que permita utilizar dicha información de manera directa.

El Ejemplo 2.3 ilustra la aplicación de la ley de Ohm junto con una fuente ideal y una resistencia. También se analiza el cálculo de la potencia en los terminales de una resistencia.

**EJEMPLO 2.3** Cálculo de la tensión, la corriente y la potencia en un circuito resistivo simple

En cada circuito de la Figura 2.8, se desconoce el valor de  $v$  o  $i$ .

- Calcule los valores de  $v$  e  $i$ .
- Determine la potencia disipada en cada resistencia.

**SOLUCIÓN**

- La tensión  $v_a$  en la Figura 2.8(a) es una caída en la dirección de la corriente que atraviesa la resistencia. Por tanto,

$$v_a = (1)(8) = 8 \text{ V}.$$

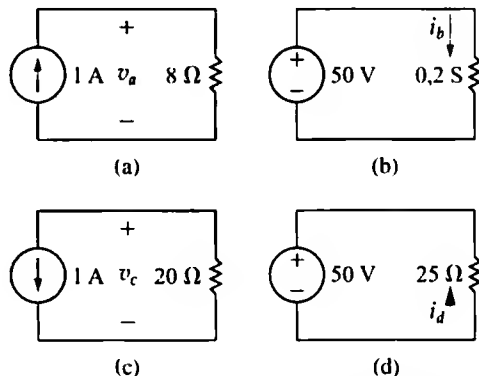


Figura 2.8. Los circuitos del Ejemplo 2.3.

La corriente  $i_b$  en la resistencia con una conductancia de  $0,2 \text{ S}$  en la Figura 2.8(b) va en la dirección de la caída de tensión en bornes de la resistencia. Por tanto,

$$i_b = (50)(0,2) = 10 \text{ A.}$$

La tensión  $v_c$  en la Figura 2.8(c) es un incremento en la dirección de la corriente que atraviesa la resistencia. Obtenemos

$$v_c = -(1)(20) = -20 \text{ V.}$$

La corriente  $i_d$  en la resistencia de  $25 \Omega$  de la Figura 2.8(d) va en la dirección del incremento de tensión en bornes de la resistencia. Por tanto,

$$i_d = \frac{-50}{25} = -2 \text{ A.}$$

b) La potencia disipada en cada una de las resistencias es

$$p_{8\Omega} = \frac{(8)^2}{8} = (1)^2(8) = 8 \text{ W,}$$

$$p_{0,2\text{S}} = (50)^2(0,2) = 500 \text{ W,}$$

$$p_{20\Omega} = \frac{(-20)^2}{20} = (1)^2(20) = 20 \text{ W,}$$

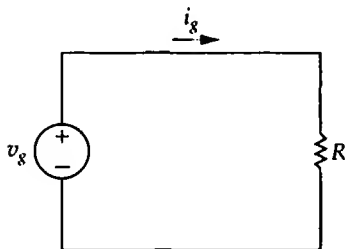
$$p_{25\Omega} = \frac{(50)^2}{25} = (-2)^2(25) = 100 \text{ W.}$$

Habiendo introducido las características generales de las fuentes ideales y de las resistencias, vamos a ver ahora cómo usar esos elementos para construir el modelo de circuito de un sistema práctico.

## Evaluación del objetivo 2

- Ser capaz de enunciar y utilizar la ley de Ohm y las leyes de Kirchhoff para la corriente y la tensión.

2.3. Para el circuito mostrado,

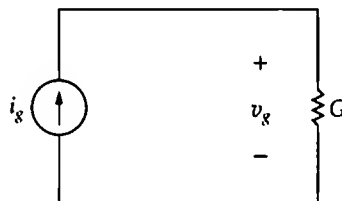


- Si  $v_g = 1 \text{ kV}$  e  $i_g = 5 \text{ mA}$ , calcule el valor de  $R$  y la potencia absorbida por la resistencia.
- Si  $i_g = 75 \text{ mA}$  y la potencia entregada por la fuente de tensión es  $3 \text{ W}$ , calcule  $v_g$ ,  $R$  y la potencia absorbida por  $R$ .
- Si  $R = 300 \Omega$  y la potencia absorbida por  $R$  es  $480 \text{ mW}$ , calcule  $i_g$  y  $v_g$ .

**RESPUESTA** (a)  $200 \text{ k}\Omega$ ,  $5 \text{ W}$ ;

(b)  $40 \text{ V}$ ,  $533,33 \Omega$ ,  $3 \text{ W}$ ; (c)  $40 \text{ mA}$ ,  $12 \text{ V}$ .

2.4. Para el circuito mostrado,



- Si  $i_g = 0,5 \text{ A}$  y  $G = 50 \text{ mS}$ , calcule  $v_g$  y la potencia suministrada por la fuente de corriente.
- Si  $v_g = 15 \text{ V}$  y la potencia entregada a la resistencia es  $9 \text{ W}$ , halle la conductancia  $G$  y la corriente de la fuente  $i_g$ .
- Si  $G = 200 \mu\text{S}$  y la potencia suministrada a la conductancia es  $8 \text{ W}$ , calcule  $i_g$  y  $v_g$ .

**RESPUESTA** (a)  $10 \text{ V}$ ,  $5 \text{ W}$ ; (b)  $40 \text{ mS}$ ,  $0,6 \text{ A}$ ; (c)  $40 \text{ mA}$ ,  $200 \text{ V}$ .

**NOTA** Trate también de resolver los Problemas 2.10 y 2.11 del capítulo.

## 2.3. Construcción de un modelo de circuito

Ya hemos indicado que una de las razones de nuestro interés en los elementos de circuito básicos es que podemos usarlos para construir modelos de circuitos de sistemas prácticos. La habilidad necesaria para desarrollar un modelo de circuito de un dispositivo o sistema es tan compleja como la habilidad requerida para resolver el circuito derivado. Aunque el énfasis de este texto se centra en las habilidades usadas para resolver los circuitos, en la práctica de la ingeniería eléctrica son también necesarias otras habilidades, y una de las más importantes es la de modelado.

Vamos a desarrollar modelos de circuito en los dos ejemplos siguientes. En el Ejemplo 2.4 construiremos un modelo de circuito basándonos en el conocimiento del comportamiento de los componentes del sistema y en el modo en que los componentes están interconectados. En el Ejemplo 2.5 crearemos un modelo de circuito midiendo el comportamiento entre los terminales de un dispositivo.

### EJEMPLO 2.4 Construcción de un modelo de circuito de una linterna

Construir un modelo de circuito de una linterna.

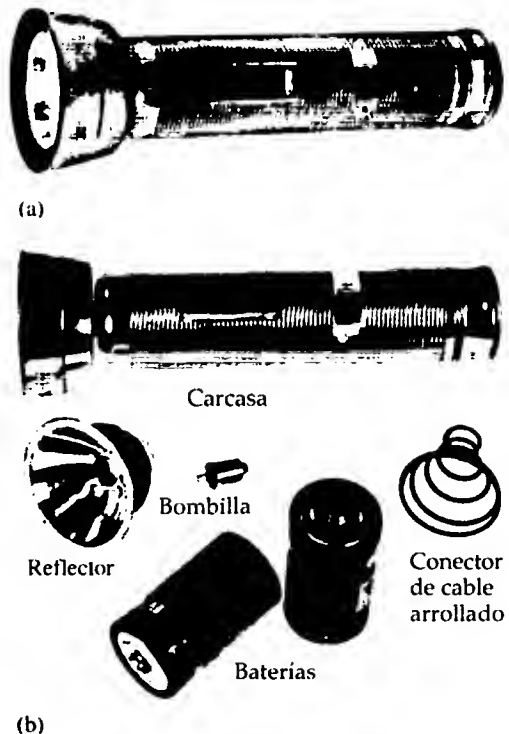
#### SOLUCIÓN

Hemos elegido la linterna como ilustración de un sistema práctico debido a que sus componentes resultan muy familiares. La Figura 2.9(a) muestra una fotografía de una linterna similar a cualquiera de las disponibles comercialmente. La Figura 2.9(b) muestra los componentes de la linterna desensamblados.

Cuando consideramos la linterna como un sistema eléctrico, los componentes de mayor interés son las baterías, la bombilla, el conector, la carcasa y el conmutador. Vamos a considerar ahora el modelo de circuito de cada componente.

Una batería de celda seca mantiene una tensión razonablemente constante entre sus terminales, siempre que no haya una demanda de corriente excesiva. Por tanto, si la batería de celda seca está operando dentro de los límites nominales, podemos modelarla como una fuente ideal de tensión. La tensión prescrita es, entonces, constante e igual a la suma de los valores nominales de dos celdas de batería.

La salida proporcionada por la bombilla es energía luminosa, que se consigue calentando el filamento de la bombilla a una temperatura lo suficientemente alta como para provocar radiación en el rango visible. Podemos modelar la bombilla mediante una resistencia ideal. Observe, en este caso, que, aunque la resistencia es

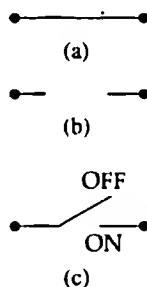


**Figura 2.9.** Una linterna vista como un sistema eléctrico. (a) Linterna. (b) Linterna desmontada.

ción en el rango visible. Podemos modelar la bombilla mediante una resistencia ideal. Observe, en este caso, que, aunque la resistencia es

la responsable de la energía eléctrica convertida en energía térmica, no nos permite predecir cuánta de la energía térmica se convierte en energía luminosa. Lo que sí predice el valor de la resistencia utilizado para representar la bombilla es el consumo de corriente en régimen permanente impuesto a las baterías, una característica del sistema que también nos interesa. En este modelo,  $R_l$  simboliza la resistencia de la bombilla.

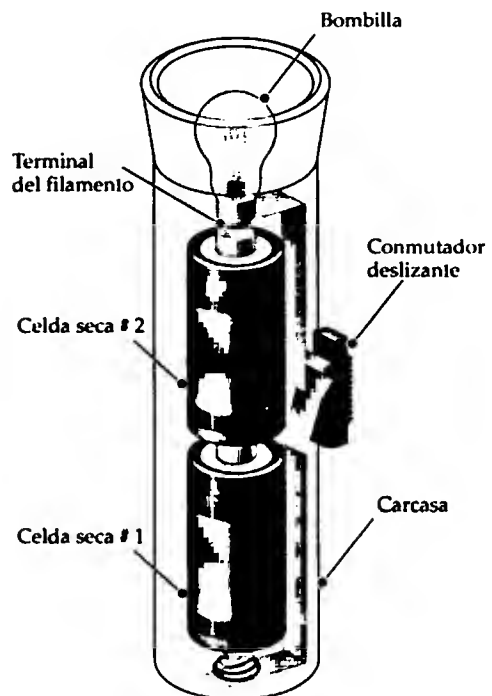
El conector utilizado en la linterna cumple un doble papel. En primer lugar, proporciona un camino de conducción eléctrica entre las baterías y la carcasa. En segundo lugar, está arrollado en forma de muelle, por lo que también puede aplicar una presión mecánica al contacto existente entre las baterías y la bombilla. El propósito de esta presión mecánica es mantener el contacto entre las dos baterías y entre éstas y la bombilla. Por tanto, a la hora de seleccionar el cable con el que fabricar el conector, podemos comprobar que sus propiedades mecánicas son más importantes que sus propiedades eléctricas para el diseño de la linterna. Eléctricamente, podemos modelar el conector mediante una resistencia ideal, que denominaremos  $R_l$ .



**Figura 2.10.** Símbolos de circuito.  
(a) Cortocircuito. (b) Circuito abierto.  
(c) Conmutador.

La carcasa también tiene una utilidad tanto mecánica como eléctrica. Mecánicamente, contiene los demás componentes y proporciona un agarre para la persona que utilice la linterna. Eléctricamente, proporciona una conexión entre los demás elementos del sistema. Si la carcasa es metálica, conducirá corriente entre las baterías y la bombilla. Si es de plástico, una tira de metal

dentro de la carcasa unirá el conector arrollado con el conmutador. En cualquiera de los dos casos, una resistencia ideal, que denominaremos  $R_c$ , nos permitirá modelar la conexión eléctrica proporcionada por la carcasa.



**Figura 2.11.** Disposición de los componentes de la linterna.

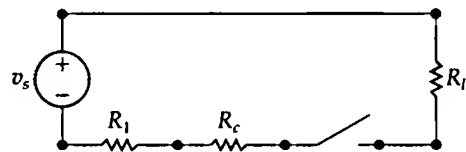
El componente final es el conmutador. Eléctricamente, el conmutador es un dispositivo de dos estados, que puede estar abierto o cerrado. Un conmutador ideal no ofrece ninguna resistencia a la corriente cuando se encuentra en el estado cerrado, mientras que ofrece una resistencia infinita cuando se encuentra en el estado abierto. Estos dos estados representan los valores límite de una resistencia; es decir, el estado cerrado se corresponde con una resistencia cuyo valor numérico sea cero, mientras que el estado abierto se corresponde con una resistencia cuyo valor numérico sea infinito. Los dos valores extremos tienen los descriptivos nombres de **cortocircuito** ( $R = 0$ ) y **circuito abierto** ( $R = \infty$ ). Las Figuras



2.10(a) y (b) muestran la representación gráfica de un cortocircuito y de un circuito abierto, respectivamente. El símbolo mostrado en la Figura 2.10(c) representa el hecho de que un conmutador puede ser o un cortocircuito o un circuito abierto, dependiendo de la posición de sus contactos.

Construyamos ahora el modelo de circuito de la linterna. Comenzando con las baterías de celda seca, el terminal positivo de la primera celda se conecta al terminal negativo de la segunda, como se muestra en la Figura 2.11. El terminal positivo de la segunda celda se conecta a uno de los terminales de la bombilla. El otro terminal de la bombilla hace contacto con uno de los lados del conmutador, mientras que el otro lado está conec-

tado a la carcasa metálica. Ésta se conecta a su vez con el terminal negativo de la primera celda seca, por medio del muelle de metal. Observe que los elementos forman un camino o circuito cerrado. En la Figura 2.11 se muestra el camino cerrado formado por los elementos conectados. La Figura 2.12 muestra un modelo de circuito de la linterna.



**Figura 2.12.** Modelo de circuito para una linterna.

Podemos realizar algunas observaciones generales sobre el modelado a partir de nuestro ejemplo de la linterna. En primer lugar, a la hora de desarrollar un modelo de circuito, lo que más nos interesa es el comportamiento *eléctrico* de cada componente físico. En el modelo de la linterna, hay tres componentes físicos bien distintos (una bombilla, un cable arrollado y una carcasa metálica) que se representan mediante el mismo elemento de circuito (una resistencia), porque el fenómeno eléctrico que tiene lugar en cada uno es el mismo. Todos ellos presentan resistencia a la corriente que fluye a través del circuito.

En segundo lugar, los modelos de circuito deben tener en cuenta tanto los efectos eléctricos deseados como los indeseados. Por ejemplo, el calor generado por la resistencia de la bombilla produce luz, un efecto deseado. Sin embargo, el calor generado por la resistencia de la carcasa y del muelle representa un efecto no deseado o parásito. Este efecto no deseado consume corriente de las baterías y no produce ningún resultado útil. Tales efectos parásitos deben tenerse en cuenta para que el modelo resultante represente adecuadamente el sistema.

Finalmente, el modelado requiere realizar aproximaciones. Incluso para el sistema básico representado por la linterna, hemos realizado suposiciones simplificadoras a la hora de desarrollar el modelo de circuito. Por ejemplo, hemos supuesto que se utiliza un conmutador ideal, pero en los conmutadores reales, la resistencia de contacto puede ser lo suficientemente alta para interferir en la adecuada operación del sistema. Nuestro modelo no predice este comportamiento. También hemos supuesto que el conector en forma de muelle ejerce la suficiente presión para eliminar cualquier resistencia de contacto existente entre las baterías. Nuestro modelo no predice qué es lo que sucede en caso de que la presión sea inadecuada. Nuestra utilización de una fuente ideal de tensión pasa por alto cualquier disipación interna de energía que pueda producirse dentro de las baterías, por ejemplo debido al calentamiento parásito que antes hemos mencionado. Podríamos tener esto en cuenta añadiendo una resistencia ideal entre la fuente y la resistencia de la bombilla. Nuestro modelo supone que las pérdidas internas son despreciables.

Al modelar la linterna en forma de circuito, hemos partido de una comprensión básica de los componentes internos del sistema y hemos supuesto que tenemos acceso a los mismos. Sin embargo, en

ocasiones lo único que podemos determinar es el comportamiento de un dispositivo en sus terminales, y debemos utilizar esta información para construir el modelo. El Ejemplo 2.5 explora este tipo de problema de modelado.

### EJEMPLO 2.5 Construcción de un modelo de circuito basándose en medidas en los terminales

Medimos la tensión y la corriente en los terminales del dispositivo ilustrado en la Figura 2.13(a) y obtenemos los valores de  $v_t$  e  $i_t$ , expuestos en la tabla de la Figura 2.13(b). Construya un modelo de circuito del dispositivo contenido en la caja.

Volveremos a analizar esta técnica de utilizar las características en los terminales para construir un modelo de circuito después de presentar las leyes de Kirchhoff y las técnicas de análisis de circuitos.

#### SOLUCIÓN

Si dibujamos la tensión en función de la corriente, obtenemos la gráfica mostrada en la Figura 2.14(a). La ecuación de la línea de esta figura ilustra que la tensión en los terminales es directamente proporcional a la corriente que los atraviesa,  $v_t = 4i_t$ . Según la ley de Ohm, el dispositivo contenido en la caja se comporta como una resistencia de  $4\ \Omega$ . Por tanto, el modelo de circuito para el dispositivo contenido en la caja será una resistencia de  $4\ \Omega$ , como se muestra en la Figura 2.14(b).

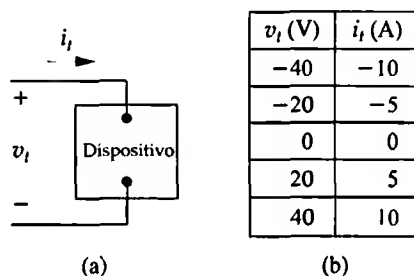


Figura 2.13. (a) Dispositivo y (b) datos para el Ejemplo 2.5.

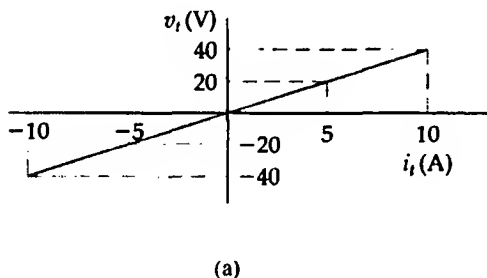


Figura 2.14. (a) Valores de  $v_t$  en función de  $i_t$  para el dispositivo de la Figura 2.13. (b) Modelo de circuito para el dispositivo de la Figura 2.13.

**NOTA** Evalúe su comprensión de este ejemplo tratando de resolver los Problemas 2.2 y 2.4 del capítulo.

## 2.4. Leyes de Kirchhoff

Decimos que un circuito está resuelto cuando se conoce la tensión en bornes de todos los elementos y la corriente que atraviesa cada uno de ellos. La ley de Ohm es una ecuación de gran importancia a la

hora de determinar dichas soluciones. Sin embargo, puede que la ley de Ohm no sea suficiente para obtener una solución completa. Como veremos al tratar de resolver el circuito de la linterna del Ejemplo 2.4, necesitamos utilizar otras dos relaciones algebraicas más importantes, conocidas con el nombre de leyes de Kirchhoff, para resolver la mayoría de los circuitos.

Comenzaremos volviendo a dibujar el circuito como se muestra en la Figura 2.15, con el conmutador en el estado cerrado. Observe que también hemos incluido etiquetas para las variables de corriente y tensión asociadas con cada resistencia y para la corriente asociada con la fuente de tensión. El etiquetado incluye, como siempre, las polaridades de referencia. Para facilitar nuestra tarea, hemos asociado los mismos subíndices a las variables de tensión y de corriente que se utilizaban para las resistencias. En la Figura 2.15, también hemos eliminado algunos de los puntos de la Figura 2.12 que señalan los terminales y hemos insertado nodos. Los puntos terminales son los puntos que marcan el inicio y el fin de un elemento de circuito individual. Un **nodo**, por el contrario, es un punto en el que se juntan dos o más elementos de circuito. Es necesario identificar los nodos para poder utilizar la ley de Kirchhoff de las corrientes, como veremos dentro de unos instantes. En la Figura 2.15, hemos etiquetado los nodos como a, b, c y d. El nodo d conecta la batería y la bombilla y se extiende, en esencia, por toda la parte superior del diagrama, aunque sólo etiquetamos un único punto por mera comodidad. Los puntos a ambos lados del conmutador indican sus terminales, pero sólo es necesario uno de ellos para representar un nodo, por lo que sólo hemos etiquetado uno como nodo c.

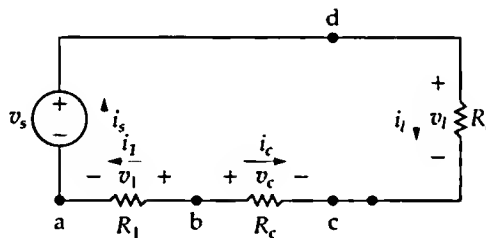
Para el circuito mostrado en la Figura 2.15, podemos identificar siete incógnitas:  $i_s$ ,  $i_1$ ,  $i_c$ ,  $i_l$ ,  $v_1$ ,  $v_c$  y  $v_l$ . Recuerde que  $v_s$  es una tensión conocida, ya que representa la suma de las tensiones terminales de las dos baterías de celda seca, que es una tensión constante de 3 V. El problema es hallar el valor de las siete incógnitas. Sabemos, del álgebra, que para calcular el valor de  $n$  incógnitas es necesario resolver un sistema de  $n$  ecuaciones independientes. A partir de las explicaciones relativas a la ley de Ohm de la Sección 2.2, sabemos que tres de las ecuaciones necesarias son

$$v_1 = i_1 R_1, \quad (2.13)$$

$$v_c = i_c R_c, \quad (2.14)$$

$$v_l = i_l R_l. \quad (2.15)$$

¿De dónde podemos sacar las otras cuatro ecuaciones?



**Figura 2.15.** Modelo de circuito de la linterna en el que se han asignado las variables de tensión y de corriente.

La interconexión de los elementos de circuito impone una serie de restricciones a la relación existente entre las tensiones y las corrientes en los terminales. Estas restricciones se denominan leyes de Kirchhoff, en honor a Gustav Kirchhoff, que fue quien primero las enunció en un artículo publicado en 1848. Las dos leyes que enuncian dichas restricciones en forma matemática se conocen con el nombre de ley de Kirchhoff de las corrientes y de ley de Kirchhoff de las tensiones.

Podemos enunciar la **ley de Kirchhoff de las corrientes** de la forma siguiente:

✎ **LEY DE KIRCHHOFF DE LAS CORRIENTES**

La suma algebraica de todas las corrientes existentes en un nodo de un circuito es igual a cero.

Para usar la ley de Kirchhoff de las corrientes, debe asignarse a cada nodo del circuito un signo algebraico que indique la dirección de referencia. Asignar un signo positivo a una corriente que salga de un nodo requiere que asignemos un signo negativo a las corrientes que entren en el nodo. De la misma forma, si asignamos un signo negativo a una corriente que sale de un nodo, deberemos asignar un signo positivo a todas las corrientes que entren en el mismo.

Aplicando la ley de Kirchhoff de las corrientes a los cuatro nodos del circuito mostrado en la Figura 2.15, utilizando el convenio de que las corrientes que salen de un nodo se consideran positivas, obtenemos cuatro ecuaciones:

$$\text{nodo a} \quad i_s - i_1 = 0, \quad (2.16)$$

$$\text{nodo b} \quad i_1 + i_c = 0, \quad (2.17)$$

$$\text{nodo c} \quad -i_c - i_l = 0, \quad (2.18)$$

$$\text{nodo d} \quad i_l - i_s = 0. \quad (2.19)$$

Observe que las Ecuaciones 2.16-2.19 no constituyen un conjunto de ecuaciones independientes, porque cualquiera de las cuatro puede deducirse a partir de las otras tres. En cualquier circuito con  $n$  nodos podemos obtener  $n - 1$  ecuaciones de corriente independientes aplicando la ley de Kirchhoff de las corrientes<sup>1</sup>.

Eliminemos la Ecuación 2.19 para quedarnos con seis ecuaciones independientes, las Ecuaciones 2.13-2.18. Necesitamos otra más, que podemos obtener aplicando la ley de Kirchhoff de las tensiones.

Antes de enunciar la ley de Kirchhoff de las tensiones necesitamos definir el concepto de **camino cerrado o lazo**. Comenzando en un nodo seleccionado arbitrariamente, trazamos un camino cerrado en el circuito que pase a través de una serie de elementos de circuito básicos seleccionados y vuelva hasta el nodo original sin pasar a través de ningún nodo intermedio más de una vez. El circuito mostrado en la Figura 2.15 sólo tiene un camino cerrado o lazo. Por ejemplo, seleccionando el nodo a como punto de partida y trazando el circuito en el sentido de las agujas del reloj, formamos el camino cerrado moviéndonos a través de los nodos d, c, b y de nuevo volviendo al nodo a. Ahora podemos enunciar la **ley de Kirchhoff de las tensiones**:

✎ **LEY DE KIRCHHOFF DE LAS TENSIONES**

La suma algebraica de todas las tensiones alrededor de cualquier camino cerrado en un circuito es igual a cero.

Para utilizar la ley de Kirchhoff de las tensiones, debemos asignar un signo algebraico (dirección de referencia) a cada tensión del lazo. A medida que trazamos un camino cerrado, cada tensión aparecerá como un incremento o una caída en la dirección en que trazamos el lazo. Asignar un signo positivo a un incremento de tensión requiere que asignemos un signo negativo a todas las caídas de tensión. De

<sup>1</sup> Hablaremos más en detalle acerca de esta observación en el Capítulo 4.

la misma forma, si asignamos un signo negativo a un incremento de tensión deberemos asignar un signo positivo a todas las caídas de tensión.

Apliquemos ahora la ley de Kirchhoff de las tensiones al circuito mostrado en la Figura 2.15. Hemos decidido trazar el camino cerrado en el sentido de las agujas del reloj, asignando un signo algebraico positivo a las caídas de tensión. Comenzando por el nodo d, obtenemos la expresión

$$v_l - v_c + v_1 - v_s = 0, \quad (2.20)$$

que representa la séptima ecuación independiente necesaria para determinar el valor de las siete variables de circuito mencionadas anteriormente.

La idea de tener que resolver un sistema de siete ecuaciones para calcular la corriente suministrada por un par de baterías a la bombilla de una linterna no resulta muy atractiva. Por eso, en los próximos capítulos presentaremos una serie de técnicas analíticas que nos permitirán resolver un circuito simple de un único lazo escribiendo una única ecuación. Sin embargo, antes de entrar a analizar estas técnicas de circuito, necesitamos realizar diversas observaciones acerca del análisis detallado del circuito de la linterna. En general, estas observaciones son ciertas y, por tanto, de gran importancia para las explicaciones contenidas en los capítulos posteriores. También apoyan la afirmación de que el circuito de la linterna puede resolverse definiendo una única incógnita.

En primer lugar, observe que, si se conoce la corriente que atraviesa una resistencia, también se conoce la tensión en bornes de la misma, porque la corriente y la tensión están relacionadas de forma directa mediante la ley de Ohm. Por tanto, puede asociarse una incógnita con cada resistencia, pudiendo ser dicha incógnita la corriente o la tensión. Seleccionemos, por ejemplo, la corriente como variable desconocida. Entonces, una vez hallado el valor de la corriente desconocida que atraviesa la resistencia, puede averiguarse la tensión que cae en ella. En general, si se conoce la corriente que atraviesa un elemento pasivo, puede calcularse la tensión que cae en éste, reduciéndose así enormemente el número de ecuaciones que forman el sistema que hay que resolver. Por ejemplo, en el circuito de la linterna, podemos eliminar las tensiones  $v_c$ ,  $v_l$  y  $v_1$  como incógnitas. Con eso, habremos conseguido reducir la tarea analítica a la resolución de un sistema de cuatro ecuaciones, en lugar de siete.

La segunda observación general se relaciona con las consecuencias de conectar sólo dos elementos para formar un nodo. De acuerdo con la ley de Kirchhoff de las corrientes, cuando sólo hay dos elementos conectados a un nodo, si se conoce la corriente de uno de los elementos también se sabe la corriente que atraviesa el segundo. En otras palabras, sólo es necesario definir una variable de corriente para los dos elementos. Cuando sólo hay dos elementos conectados en un determinado nodo, decimos que ambos elementos están **en serie**. La importancia de esta segunda observación resulta obvia cuando se observa que cada nodo del circuito mostrado en la Figura 2.15 sólo conecta dos elementos. Debido a ello, sólo es necesario definir una variable de corriente. La razón es que las Ecuaciones 2.16-2.18 conducen directamente a

$$i_s = i_1 = -i_c = i_l, \quad (2.21)$$

lo que indica que, si se conoce el valor de cualquiera de las variables de corriente, se conoce el valor de todas ellas. Por ejemplo, si decidimos utilizar  $i_s$  como incógnita, se eliminan  $i_1$ ,  $i_c$  e  $i_l$ . El problema se reduce a determinar una única incógnita,  $i_s$ . Los Ejemplos 2.6 y 2.7 ilustran cómo escribir ecuaciones de circuito basándose en las leyes de Kirchhoff. El Ejemplo 2.8 ilustra cómo emplear las leyes de Kirchhoff y la ley de Ohm para calcular una corriente desconocida. El Ejemplo 2.9 utiliza la técnica presentada en el Ejemplo 2.5 para construir un modelo de circuito de un dispositivo cuyas características en los terminales son conocidas.

**EJEMPLO 2.6** Utilización de la ley de Kirchhoff de las corrientes

Sume las corrientes en cada nodo del circuito mostrado en la Figura 2.16. Observe que no hay ningún punto de conexión (•) en el centro del diagrama, donde la rama de  $4\ \Omega$  se cruza con la rama que contiene la fuente ideal de corriente  $i_a$ .

**SOLUCIÓN**

Al escribir las ecuaciones, utilizamos un signo positivo para la corriente que sale de un nodo. Las cuatro ecuaciones son

$$\text{nodo a} \quad i_1 + i_4 - i_2 - i_5 = 0,$$

$$\text{nodo b} \quad i_2 + i_3 - i_1 - i_b - i_a = 0,$$

$$\text{nodo c} \quad i_b - i_3 - i_4 - i_c = 0,$$

$$\text{nodo d} \quad i_5 + i_a + i_c = 0.$$

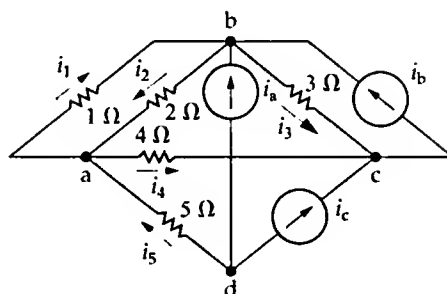


Figura 2.16. Circuito del Ejemplo 2.6.

**EJEMPLO 2.7** Utilización de la ley de Kirchhoff de las tensiones

Sume las tensiones alrededor de cada uno de los lazos designados en el circuito mostrado en la Figura 2.17.

**SOLUCIÓN**

Al escribir las ecuaciones, utilizamos un signo positivo para indicar una caída de tensión. Las cuatro ecuaciones son

$$\text{lazo a} \quad -v_1 + v_2 + v_4 - v_b - v_3 = 0,$$

$$\text{lazo b} \quad -v_a + v_3 + v_5 = 0,$$

$$\text{lazo c} \quad v_b - v_4 - v_c - v_6 - v_5 = 0,$$

$$\text{lazo d} \quad -v_a - v_1 + v_2 - v_c + v_7 - v_d = 0.$$

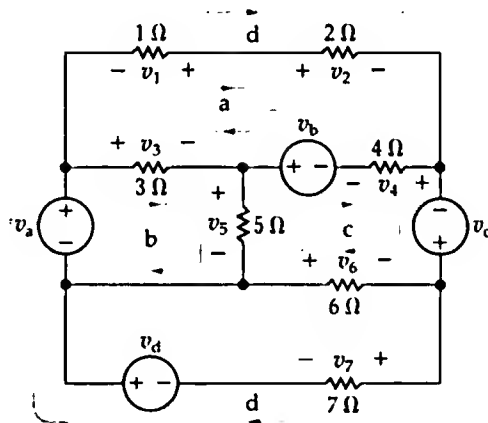


Figura 2.17. Circuito del Ejemplo 2.7.

**EJEMPLO 2.8** Aplicación de la ley de Ohm y de las leyes de Kirchhoff para calcular una corriente desconocida

- Utilice las leyes de Kirchhoff y la ley de Ohm para calcular  $i_o$  en el circuito mostrado en la Figura 2.18.
- Compruebe la solución obtenida para  $i_o$  verificando que la potencia total generada es igual a la potencia total disipada.

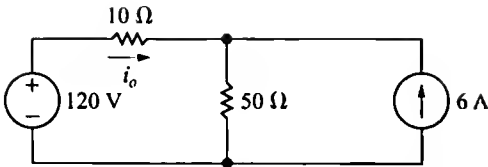


Figura 2.18. Circuito del Ejemplo 2.8.

### SOLUCIÓN

- a) Comenzamos volviendo a dibujar el circuito y asignando una corriente desconocida a la resistencia de  $50\ \Omega$  y tensiones desconocidas en bornes de las resistencias de  $10\ \Omega$  y de  $50\ \Omega$ . La Figura 2.19 muestra el circuito. Hemos etiquetado los nodos como a, b y c para simplificar las explicaciones.

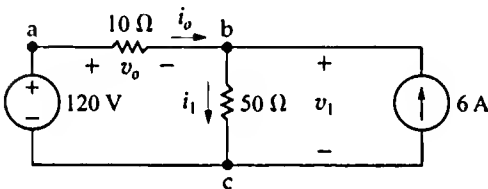


Figura 2.19. El circuito mostrado en la Figura 2.18, definiendo las incógnitas  $i_1$ ,  $v_o$  y  $v_1$ .

Puesto que  $i_o$  es también la corriente en la fuente de 120 V, tenemos dos corrientes desconocidas y deberemos, por tanto, definir un sistema de dos ecuaciones donde aparezcan  $i_o$  e  $i_1$ . Obtenemos una de las ecuaciones aplicando la ley de Kirchhoff de las corrientes al nodo b o al nodo c. Sumando las corrientes en el nodo b y asignando un signo positivo a las corrientes que salen del nodo, obtenemos

$$i_1 - i_o - 6 = 0.$$

Podemos obtener la segunda ecuación a partir de la ley de Kirchhoff de las tensiones, en combinación con la ley de Ohm. Observando, a partir de la ley de Ohm, que  $v_o$  es  $10i_o$  y que  $v_1$  es  $50i_1$ , podemos sumar las tensiones alrededor del camino cerrado cabc para obtener

$$-120 + 10i_o + 50i_1 = 0.$$

Al escribir esta ecuación, hemos asignado un signo positivo a las caídas de tensión en el sentido de las agujas del reloj. Resolviendo estas dos ecuaciones, obtenemos los valores de  $i_o$  e  $i_1$ :

$$i_o = -3\text{ A} \quad e \quad i_1 = 3\text{ A}$$

- b) La potencia disipada en la resistencia de  $50\ \Omega$  es

$$p_{50\Omega} = (3)^2(50) = 450\text{ W}.$$

La potencia disipada en la resistencia de  $10\ \Omega$  es

$$p_{10\Omega} = (-3)^2(10) = 90\text{ W}.$$

La potencia suministrada a la fuente de 120 V es

$$p_{120\text{V}} = -120i_o = -120(-3) = 360\text{ W}.$$

La potencia suministrada a la fuente de 6 A es

$$p_{6\text{A}} = -v_1(6) \quad \text{pero} \quad v_1 = 50i_1 = 150\text{ V}.$$

por tanto,

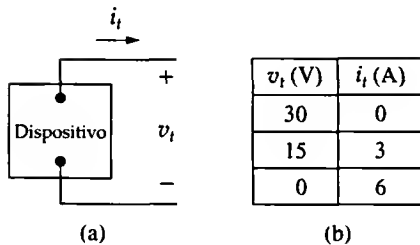
$$p_{6\text{A}} = -150(6) = -900\text{ W}.$$

La fuente de 6 A está suministrando 900 W y la fuente de 120 V está absorbiendo 360 W. La potencia total absorbida es  $360 + 450 + 90 = 900\text{ W}$ . Por tanto, la solución verifica que la potencia suministrada es igual a la potencia absorbida.

### EJEMPLO 2.9 Construcción de un modelo de circuito basándose en medidas en los terminales

Medimos la tensión y la corriente en los terminales del dispositivo mostrado en la Figura 2.20(a)

y obtenemos los valores de  $v_i$  e  $i_i$  que se indican en la tabla de la Figura 2.20(b).



**Figura 2.20.** (a) Dispositivo y (b) datos para el Ejemplo 2.9.

- Construya un modelo de circuito para el dispositivo contenido dentro de la caja.
- Utilizando este modelo de circuito, prediga la potencia que este dispositivo entregará a una resistencia de  $10\ \Omega$ .

### SOLUCIÓN

- Dibujando la tensión en función de la corriente, se obtiene la gráfica mostrada en la Figura 2.21(a). La ecuación de la línea indicada es

$$v_t = 30 - 5i_t.$$

Debemos ahora identificar los componentes de un modelo de circuito que introduzca la misma relación entre la tensión y la corriente. La ley de Kirchhoff de las tensiones nos dice que las caídas de tensión en dos componentes conectados en serie se suman. A partir de la ecuación, vemos que uno de esos componentes produce una caída de  $30\text{ V}$  independientemente de la corriente. Este componente puede modelarse como una fuente ideal e independiente de tensión. El otro componente produce una caída de tensión positiva en la dirección de la corriente  $i_t$ . Puesto que la caída de tensión es proporcional a la corriente, la ley de Ohm nos dice que este componente puede modelarse como una resistencia ideal con un valor de  $5\ \Omega$ . El modelo de circuito resultante se muestra en el recuadro punteado de la Figura 2.21(b).

- Ahora conectamos una resistencia de  $10\ \Omega$  al dispositivo de la Figura 2.21(b) para

completar el circuito. La ley de Kirchhoff de las corrientes nos dice que la corriente en la resistencia de  $10\ \Omega$  es igual a la corriente en la resistencia de  $5\ \Omega$ . Utilizando la ley de Kirchhoff de las tensiones y la ley de Ohm, podemos escribir la ecuación para las caídas de tensión alrededor del circuito, comenzando por la fuente de tensión y siguiendo en el sentido de las agujas del reloj:

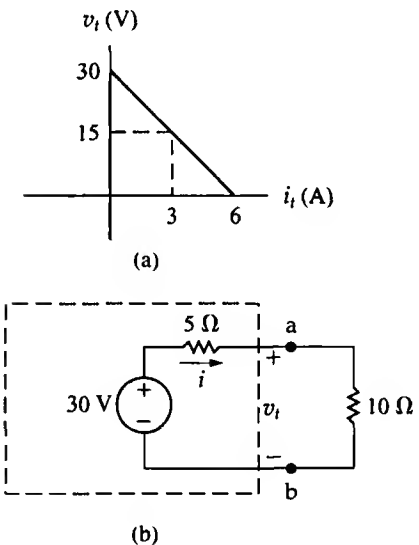
$$-30 + 5i + 10i = 0.$$

Despejando  $i$ , obtenemos

$$i = 2\text{ A}.$$

Puesto que éste es el valor de la corriente que fluye a través de la resistencia de  $10\ \Omega$ , podemos utilizar la ecuación de la potencia  $p = i^2 R$  para calcular la potencia entregada a esta resistencia:

$$p_{10\Omega} = (2)^2(10) = 40\text{ W}.$$



**Figura 2.21.** (a) Gráfica de  $v_t$  en función de  $i_t$  para el dispositivo de la Figura 2.20(a). (b) Modelo de circuito resultante para el dispositivo de la Figura 2.20(a), conectado a una resistencia de  $10\ \Omega$ .

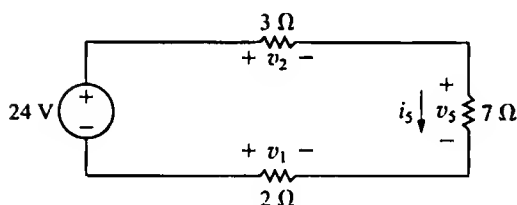


## Evaluación del objetivo 2

- Ser capaz de enunciar y utilizar la ley de Ohm y las leyes de Kirchhoff de las corrientes y de las tensiones.

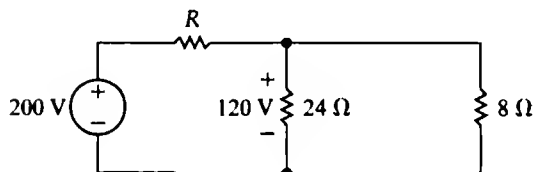
- 2.5. Para el circuito mostrado, calcule (a)  $i_5$ ; (b)  $v_1$ , (c)  $v_2$ , (d)  $v_3$  y (e) la potencia suministrada por la fuente de 24 V.

**RESPUESTA** (a) 2 A; (b)  $-4$  V; (c) 6 V; (d) 14 V; (e) 48 W.



- 2.6. Utilice la ley de Ohm y las leyes de Kirchhoff para averiguar el valor de  $R$  en el circuito mostrado.

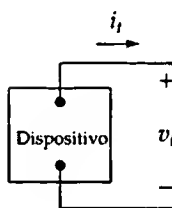
**RESPUESTA**  $R = 4\ \Omega$ .



- 2.7. a) Se miden la tensión y la corriente en los terminales del dispositivo mostrado. Los valores de  $v_i$  e  $i_i$  son los que se proporcionan en la tabla. Utilizando estos valores, dibuje la línea recta correspondiente a la gráfica de  $v_i$  en función de  $i_i$ .

Calcule la ecuación de la línea y utilice dicha ecuación para construir un modelo de circuito del dispositivo utilizando una fuente ideal de tensión y una resistencia.

- b) Utilice el modelo construido en (a) para predecir la potencia que ese dispositivo entregará a una resistencia de  $25\ \Omega$ .



$v_i$ (V)	$i_i$ (A)
25	0
15	0,1
5	0,2
0	0,25

(a)

(b)

**RESPUESTA** (a) Una fuente de 25 V en serie con una resistencia de  $100\ \Omega$ ; (b) 1 W.

- 2.8. Repita el Problema de evaluación 2.7, pero utilice la ecuación de la línea para construir un modelo de circuito que contenga una fuente de corriente ideal y una resistencia.

**RESPUESTA** (a) Una fuente de corriente de 0,25 A conectada entre los terminales de una resistencia de  $100\ \Omega$ ; (b) 1 W.

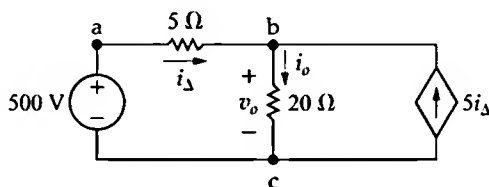
**NOTA** Trate también de resolver los Problemas 2.14, 2.16, 2.21 y 2.23 del capítulo.

## 2.5. Análisis de un circuito con fuentes dependientes

Concluimos esta introducción al análisis elemental de circuitos con una explicación de un circuito que contiene una fuente dependiente, como el que se muestra en la Figura 2.22.

Queremos utilizar las leyes de Kirchhoff y la ley de Ohm para calcular  $v_o$  en este circuito. Antes de escribir ecuaciones, conviene examinar el diagrama del circuito con atención, porque esto nos ayuda-

r a a identificar la información conocida y la información que debemos calcular. También nos puede ayudar a desarrollar una estrategia para resolver el circuito utilizando el menor número posible de cálculos.



**Figura 2.22.** Un circuito con una fuente dependiente.

Un examen del circuito de la Figura 2.22 revela que

- Una vez conocida  $i_o$ , podemos calcular  $v_o$  utilizando la ley de Ohm.
- Una vez conocida  $i_Δ$ , también conocemos la corriente suministrada por la fuente dependiente  $5i_Δ$ .
- La corriente de la fuente de 500 V es  $i_Δ$ .

Existen, por tanto, dos corrientes desconocidas,  $i_Δ$  e  $i_o$ . Necesitamos especificar y resolver dos ecuaciones independientes donde aparezcan estas dos corrientes con el fin de hallar el valor de  $v_o$ .

En el circuito, fijémonos en el camino cerrado que contiene a la fuente de tensión, a la resistencia de 5 Ω y a la resistencia de 20 Ω. Podemos aplicar la ley de Kirchhoff de las tensiones alrededor de este camino cerrado. La ecuación resultante contiene las dos corrientes desconocidas:

$$500 = 5 i_Δ + 20 i_o. \quad (2.22)$$

Necesitamos ahora generar una segunda ecuación que contenga estas dos corrientes. Considere el camino cerrado formado por la resistencia de 20 Ω y la fuente de corriente dependiente. Si tratamos de aplicar la ley de Kirchhoff de las tensiones a este lazo, no podremos obtener una ecuación útil, porque no conocemos el valor de la tensión existente en bornes de la fuente de corriente dependiente. De hecho, la tensión existente entre los terminales de la fuente dependiente es  $v_o$ , que es precisamente la tensión que estamos intentando calcular. Escribir una ecuación para este lazo no nos permitiría avanzar en busca de nuestra solución. Por esta misma razón, no utilizaremos el camino cerrado que contiene a la fuente de tensión, a la resistencia de 5 Ω y a la fuente dependiente.

Hay tres nodos en el circuito, así que utilizaremos la ley de Kirchhoff de las corrientes para generar la segunda ecuación. El nodo a conecta la fuente de tensión y la resistencia de 5 Ω; como ya hemos observado, la corriente en estos dos elementos es la misma. Podemos emplear el nodo b o el nodo c para definir la segunda ecuación a partir de la ley de Kirchhoff de las corrientes. Seleccionamos el nodo b y esto nos da la ecuación siguiente:

$$i_o = i_Δ + 5i_Δ = 6 i_Δ. \quad (2.23)$$

Resolviendo las Ecuaciones 2.22 y 2.23 para obtener las corrientes, el resultado es

$$\begin{aligned} i_Δ &= 4 \text{ A} \\ i_o &= 24 \text{ A}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Utilizando la Ecuación 2.24 y la ley de Ohm aplicada a la resistencia de 20 Ω, podemos despejar la tensión  $v_o$ :

$$v_o = 20 i_o = 480 \text{ V}.$$

Trate de pensar sobre la estrategia de análisis del circuito antes de comenzar a escribir ecuaciones. Como hemos visto, no todos los caminos cerrados permiten escribir una ecuación útil basándose en la ley de Kirchhoff de las tensiones. Asimismo, no todos los nodos permiten aplicar con resultados la ley de Kirchhoff de las corrientes. Meditar de antemano sobre el problema puede ayudarnos a seleccionar el enfoque más útil y las herramientas de análisis más adecuadas para cada problema concreto. Seleccionando un buen enfoque y las herramientas apropiadas, normalmente se reducirá el número y la complejidad de las ecuaciones que haya que resolver. El Ejemplo 2.10 ilustra otra aplicación de la ley de Ohm y de las leyes de Kirchhoff a un circuito con una fuente dependiente. El Ejemplo 2.11 incluye un circuito mucho más complicado, pero con una elección cuidadosa de las herramientas de análisis, puede resolverse el circuito de forma relativamente sencilla.

### EJEMPLO 2.10 Aplicación de la ley de Ohm y de las leyes de Kirchhoff para hallar una tensión desconocida

- a) Utilice las leyes de Kirchhoff y la ley de Ohm para hallar la tensión  $v_o$  en la Figura 2.23.

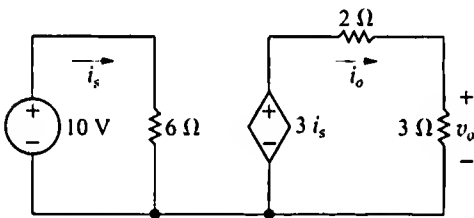


Figura 2.23. Circuito del Ejemplo 2.10.

- b) Demuestre que su solución es coherente con la restricción de que la potencia total generada en el circuito es igual a la potencia total disipada.

de las tensiones a cada uno de ellos para obtener las dos ecuaciones siguientes:

$$10 = 6i_s$$

$$3i_s = 2i_o + 3i_o$$

Resolviendo el sistema, se obtiene el valor de las corrientes

$$i_s = 1,67 \text{ A}$$

$$i_o = 1 \text{ A.}$$

Aplicando la ley de Ohm a la resistencia de  $3 \Omega$  se obtiene la tensión deseada:

$$v_o = 3i_o = 3 \text{ V.}$$

- b) Para calcular la potencia suministrada a las fuentes de tensión, utilizamos la ecuación de la potencia en la forma  $p = vi$ . La potencia suministrada a la fuente de tensión independiente es

$$p = (10)(-1,67) = -16,7 \text{ W.}$$

La potencia suministrada a la fuente de tensión dependiente es

$$p = (3i_s)(-i_o) = (5)(-1) = -5 \text{ W.}$$

Ambas fuentes están entregando potencia, y la potencia total entregada es de 21,7 W.

Para calcular la potencia suministrada a las resistencias utilizamos la ecuación de la potencia en la forma  $p = i^2R$ . La potencia suministrada a la resistencia de  $6 \Omega$  es

### SOLUCIÓN

- a) Un examen detallado del circuito de la Figura 2.23 nos revela que:

- Hay dos caminos cerrados, uno a la izquierda con la corriente  $i_s$  y otro a la derecha con la corriente  $i_o$ .
- Una vez conocida  $i_o$ , podemos calcular  $v_o$ .

Necesitamos dos ecuaciones para las dos corrientes. Puesto que hay dos caminos cerrados y ambos incluyen fuentes de tensión, podemos aplicar la ley de Kirchhoff

$$p = (1,67)^2(6) = 16,7 \text{ W.}$$

La potencia suministrada a la resistencia de  $2 \Omega$  es

$$p = (1)^2(2) = 2 \text{ W.}$$

La potencia suministrada a la resistencia de  $3 \Omega$  es

$$p = (1)^2(3) = 3 \text{ W.}$$

Todas las resistencias disipan potencia, y la potencia total disipada es de  $21,7 \text{ W}$ , igual a la potencia total generada en las fuentes.

### EJEMPLO 2.11 Aplicación de la ley de Ohm y de las leyes de Kirchhoff para hallar una tensión desconocida

El circuito de la Figura 2.24 representa una configuración que puede comúnmente encontrarse en el análisis y diseño de amplificadores a transistores. Suponga que los valores de todos los elementos del circuito ( $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_C$ ,  $R_E$ ,  $V_{CC}$  y  $V_0$ ) son conocidos.

- Escriba las ecuaciones necesarias para determinar la corriente en cada elemento de este circuito.
- A partir de estas ecuaciones, deduzca una fórmula para calcular  $i_B$  en términos de los valores de los elementos del circuito.

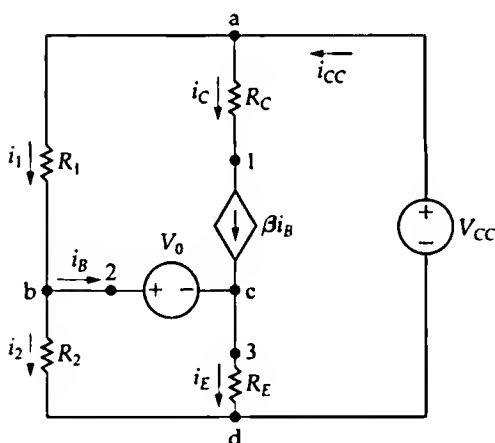


Figura 2.24. Circuito del Ejemplo 2.11.

### SOLUCIÓN

Un examen cuidadoso del circuito nos revela un total de seis corrientes desconocidas, que hemos designado como  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $i_B$ ,  $i_C$ ,  $i_E$  e  $i_{CC}$ . Al definir estas seis corrientes desconocidas, hemos usado

el hecho de que la resistencia  $R_C$  está conectada en serie con la fuente de corriente dependiente  $\beta i_B$ . Ahora deberemos determinar seis ecuaciones independientes donde aparezcan estas seis incógnitas.

- Podemos escribir tres ecuaciones aplicando la ley de Kirchhoff de las corrientes a cualesquiera tres de los nodos a, b, c y d. Vamos a utilizar los nodos a, b y c y a etiquetar las corrientes que salen de los nodos como positivas:

$$(1) i_1 + i_C - i_{CC} = 0,$$

$$(2) i_B + i_2 - i_1 = 0,$$

$$(3) i_E - i_B - i_C = 0.$$

Una cuarta ecuación puede obtenerse imponiendo la restricción derivada de la conexión en serie de  $R_C$  y de la fuente dependiente:

$$(4) i_C = \beta i_B.$$

Para determinar las dos ecuaciones restantes, volveremos nuestra atención a la ley de Kirchhoff de las tensiones. Necesitamos seleccionar dos caminos cerrados para poder usar esta ley. Observe que la tensión en bornes de la fuente de corriente dependiente es desconocida y que no puede determinarse a partir de la corriente de la fuente  $\beta i_B$ . Por tanto, debemos seleccionar dos caminos cerrados que no contengan esta fuente de corriente dependiente.

Seleccionamos los caminos bcd y badb y especificamos las caídas de tensión como positivas, con lo que se obtiene

$$(5) V_0 + i_E R_E - i_2 R_2 = 0,$$

$$(6) -i_1 R_1 + V_{CC} - i_2 R_2 = 0.$$

- b) Para obtener una única ecuación que nos proporcione  $i_B$  en términos de las variables de circuito conocidas, podemos seguir estos pasos:

- Despejar  $i_1$  en la Ecuación (6) y sustituir su valor en la Ecuación (2).
- Despejar  $i_2$  en la Ecuación (2) transformada y sustituir su valor en la Ecuación (5).
- Despejar  $i_E$  en la Ecuación (5) transformada y sustituir su valor en la Ecuación

- (3). Utilizar la Ecuación (4) para eliminar  $i_C$  en la Ecuación (3).

- Despejar  $i_B$  en la Ecuación (3) transformada y reordenar los términos para obtener

$$i_B = \frac{(V_{CC} R_2)/(R_1 + R_2) - V_0}{(R_1 R_2)/(R_1 + R_2) + (1 + \beta) R_E}. \quad (2.25)$$

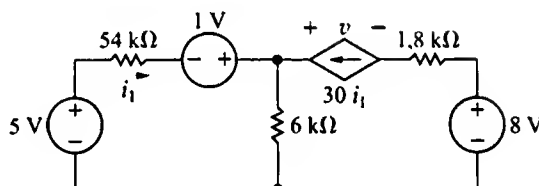
En el Problema 2.27 le pediremos que verifique estos pasos. Observe que, una vez que conocemos el valor de  $i_B$ , podemos obtener fácilmente el resto de las corrientes.

### Evaluación del objetivo 3

- Saber cómo calcular la potencia para cada elemento en un circuito simple.

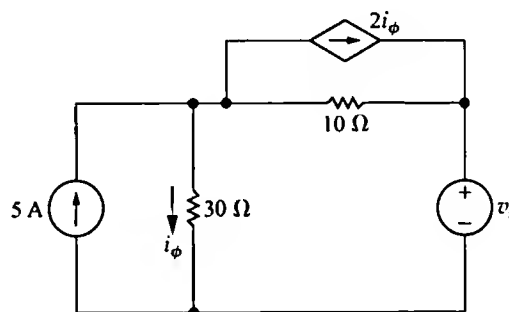
- 2.9. Para el circuito mostrado, calcule (a) la corriente  $i_1$  en microamperios, (b) la tensión  $v$  en voltios, (c) la potencia total generada y (d) la potencia total absorbida.

**RESPUESTA** (a) 25  $\mu\text{A}$ ; (b) -2 V;  
(c) 6150  $\mu\text{W}$ ; (d) 6150  $\mu\text{W}$ .



- 2.10. La corriente  $i_\phi$  en el circuito mostrado es de 2 A. Calcule

- a)  $v_s$ ,
- b) la potencia absorbida por la fuente de tensión independiente,
- c) la potencia suministrada por la fuente de corriente independiente,
- d) la potencia suministrada por la fuente de corriente controlada,
- e) la potencia total disipada en las dos resistencias.



**RESPUESTA** (a) 70 V; (b) 210 W;  
(c) 300 W; (d) 40 W; (e) 130 W.

**NOTA** Trate también de resolver los Problemas 2.26 y 2.29 del capítulo.

## Perspectiva práctica

### Seguridad eléctrica

Al principio del capítulo, hemos dicho que la corriente eléctrica que atraviese el cuerpo humano puede provocar lesiones. Examinemos este aspecto de la seguridad eléctrica.

Podría pensarse que las lesiones de naturaleza eléctrica son debidas a que partes del cuerpo puedan resultar quemadas. Sin embargo, no es así. La lesión de origen eléctrico más común es la que se produce en el sistema nervioso. Los nervios utilizan señales electroquímicas y las corrientes eléctricas pueden interrumpir dichas señales. Cuando el camino de la corriente sólo incluye músculos del esqueleto, los efectos pueden incluir una parálisis temporal (cesan las señales nerviosas) o contracciones involuntarias de los músculos, lo que generalmente no plantea riesgos fatales. Sin embargo, cuando el camino de la corriente incluye nervios y músculos que controlan el suministro de oxígeno al cerebro, el problema es mucho más grave. Una parálisis temporal de estos músculos puede hacer que una persona deje de respirar, y una contracción súbita de los músculos puede interrumpir las señales que regulan el latido cardíaco. El resultado es que se detiene el flujo de sangre oxigenada hacia el cerebro, causando la muerte en unos pocos minutos a menos que se proporcionen inmediatamente los primeros auxilios. La Tabla 2.1 indica las reacciones fisiológicas a diversos niveles de corriente. Los números en esta tabla son aproximados; se obtienen del análisis de accidentes, ya que no resulta ético, obviamente, realizar experimentos eléctricos con las personas. Un buen diseño eléctrico limitará la corriente a unos pocos miliamperios o menos en todas las posibles condiciones.

**Tabla 2.1.** Reacciones fisiológicas de los seres humanos a los niveles de corriente.

REACCIÓN FISIOLÓGICA	CORRIENTE
Apenas perceptible	3–5 mA
Dolor extremo	35–50 mA
Parálisis muscular	50–70 mA
Parada cardíaca	500 mA

*Nota:* Datos extraídos de W. F. Cooper, *Electrical Safety Engineering*, segunda ed. (Londres: Butterworth, 1986); y C. D. Winburn, *Practical Electrical Safety* (Monticello, N.Y.: Marcel Dekker, 1988).

Ahora vamos a desarrollar un modelo eléctrico simplificado del cuerpo humano. El cuerpo actúa como un conductor de corriente, así que un punto de partida razonable consiste en modelar el cuerpo utilizando resistencias. La Figura 2.25 muestra una situación potencialmente peligrosa. Existe una diferencia de tensión entre un brazo y una pierna de un ser humano. La Figura 2.25(b) muestra un modelo eléctrico del cuerpo humano de la Figura 2.25(a). Los brazos, piernas, cuello y tronco (torso y abdomen) tiene cada uno una resistencia característica. Observe que el camino de la corriente atraviesa el tronco, que contiene el corazón, lo que hace que esta situación sea potencialmente mortal.

**NOTA** Evalúe su comprensión de la Perspectiva práctica resolviendo los Problemas 2.34-2.38 del capítulo.

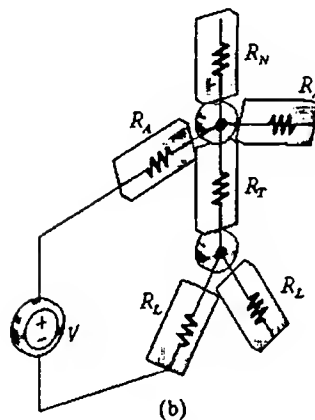
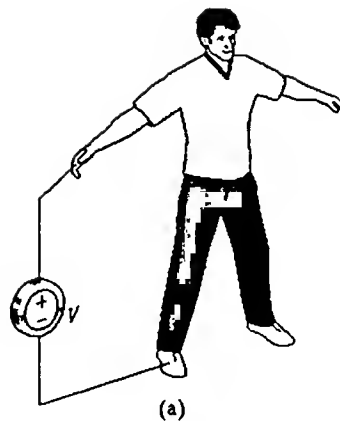


Figura 2.25. (a) Un cuerpo humano con una diferencia de potencial entre un brazo y una pierna.  
 (b) Un modelo simplificado del cuerpo humano con una diferencia de potencial entre un brazo y una pierna.

## RESUMEN

- Los elementos de circuito introducidos en este capítulo son las fuentes de tensión, las fuentes de corriente y las resistencias.
- Una **fente ideal de tensión** mantiene una tensión prescrita entre sus terminales independientemente de la corriente que atraviese el dispositivo. Una **fente ideal de corriente** mantiene una corriente prescrita independientemente de la tensión en bornes del dispositivo. Las fuentes de tensión y de corriente pueden ser **independientes**, es decir, que no están influenciadas por la corriente o la tensión existentes en cualquier otro punto del circuito; o **dependientes**, es decir, que están determinadas por alguna otra corriente o tensión del circuito (véanse las páginas 30 y 31).
- Una **resistencia** restringe su tensión y su corriente de modo que ambas son proporcionales. El valor de la constante de proporcionalidad que relaciona la tensión y la corriente se denomina tam-

bién resistencia y se mide en ohmios (véase la página 34).

- La ley de Ohm establece la proporcionalidad entre la tensión y la corriente en una resistencia. Específicamente,

$$v = iR \quad (2.26)$$

si la corriente fluye en la resistencia en la dirección de la caída de tensión que se produce a su través o

$$v = -iR \quad (2.27)$$

si la corriente fluye a través de la resistencia en la dirección del incremento de tensión a su través (véase la página 35).

- Combinando la ecuación de la potencia,  $p = vi$ , con la ley de Ohm, podemos determinar la potencia absorbida por una resistencia:

$$p = i^2R = v^2/R. \quad (2.28)$$

(Véase la página 37).

- Los circuitos están descritos por nodos y por caminos cerrados. Un **nodo** es un punto en el que se unen dos o más elementos de circuito. Cuando sólo hay dos elementos conectados para formar un nodo, decimos que ambos elementos están en

serie. Un **camino cerrado** es un lazo trazado a través de una serie de elementos conectados, que comienza y termina en el mismo nodo y que atraviesa cada uno de los nodos intermedios una única vez (véanse las páginas 44 y 45).

- Las tensiones y las corrientes de los elementos de circuito interconectados obedecen a las leyes de Kirchhoff:

- La ley de Kirchhoff de las corrientes establece que la suma algebraica de todas las corrientes en cualquier nodo del circuito es igual a cero (véase la página 44).

- La ley de Kirchhoff de las tensiones establece que la suma algebraica de todas las tensiones alrededor de cualquier camino cerrado de un circuito es igual a cero (véase la página 44).

- Un circuito está resuelto cuando se han determinado las tensiones en bornes de todos los elementos y las corrientes que los atraviesan. Combinando una adecuada comprensión de las fuentes dependientes e independientes, la ley de Ohm y las leyes de Kirchhoff, podemos resolver muchos circuitos simples.

## PROBLEMAS

- 2.1. Una pareja de faros de automóvil está conectada a una batería de 12 V según la disposición mostrada en la Figura P2.1. En la figura, el símbolo triangular ▼ se utiliza para indicar que el terminal está conectado directamente al armazón metálico del vehículo.
  - a) Construya un modelo de circuito utilizando resistencias y una fuente de tensión independiente.
  - b) Identifique la correspondencia entre el elemento de circuito ideal y el componente que representa.
- 2.2. Medimos la tensión y la corriente en los terminales del dispositivo mostrado en la Figura P2.2(a). Los valores de  $v$  e  $i$  se indican en la tabla de la Figura P2.2(b). Utilice los valores de la tabla para construir para el dispositivo un modelo de circuito compuesto por una única resistencia.
- 2.3. Se aplican diversos valores de fuentes de corriente al dispositivo mostrado en la Figura P2.3(a). La potencia absorbida por el dispositivo para cada valor de la corriente se indica en la tabla de



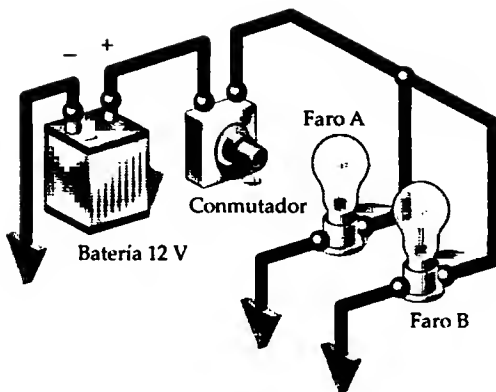
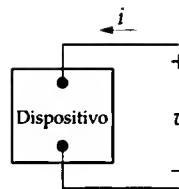


Figura P2.1



(a)

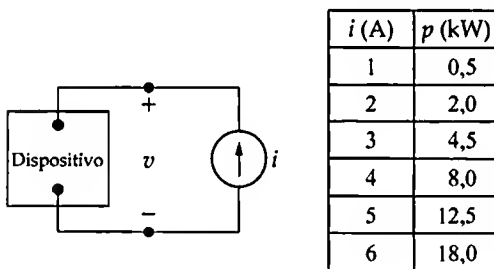
$i$ (mA)	$v$ (V)
-20	-160
-10	-80
10	80
20	160
30	240

(b)

Figura P2.2

la Figura P2.3(b). Utilice los valores de la tabla para construir un modelo de circuito para el dispositivo compuesto por una única resistencia.

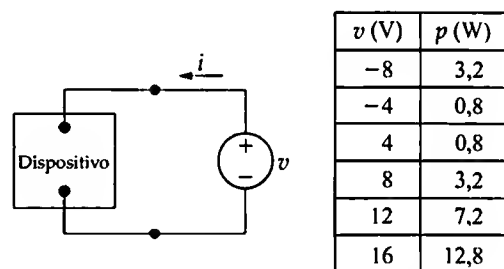
- 2.4. Se aplican diversos valores de fuente de tensión al dispositivo mostrado en la Figura P2.4(a). La potencia absorbida por el dispositivo para cada valor de la tensión se indica en la tabla de la Figura P2.4(b). Utilice los valores de la tabla para construir un modelo de circuito para el dispositivo compuesto por una única resistencia.



(a)

(b)

Figura P2.3



(a)

(b)

Figura P2.4

- 2.5. a) ¿Es válida la interconexión de fuentes ideales del circuito de la Figura P2.5? Explique su respuesta.  
 b) Identifique las fuentes que están entregando potencia y las fuentes que la están absorbiendo.  
 c) Verifique que la potencia total generada en el circuito es igual a la potencia total absorbida.  
 d) Repita los apartados (a)-(c), invirtiendo la polaridad de la fuente de 18 V.
- 2.6. Si la interconexión de la Figura P2.6 es válida, calcule la potencia total entregada por las fuentes de tensión. Si la interconexión no es válida, explique por qué.
- 2.7. Si la interconexión de la Figura P2.7 es válida, calcule la potencia total entregada por las fuentes de corriente. Si la interconexión no es válida, explique por qué.
- 2.8. Si la interconexión de la Figura P2.8 es válida, calcule la potencia total generada en el circuito. Si la interconexión no es válida, explique por qué.

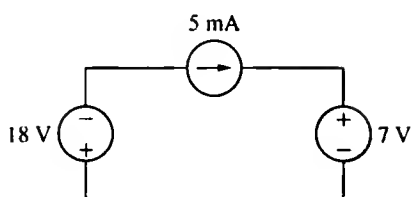


Figura P2.5

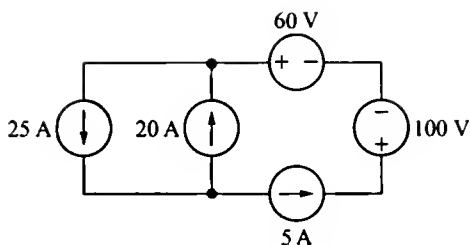


Figura P2.6

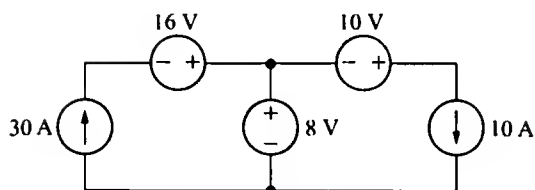


Figura P2.7

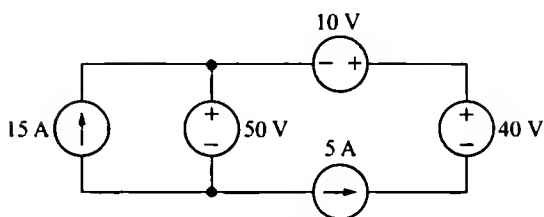


Figura P2.8

- 2.9. La interconexión de fuentes ideales puede conducir a soluciones indeterminadas. Teniendo esto presente, explique por qué las soluciones de  $v_1$  y  $v_2$  en el circuito de la Figura P2.9 no son únicas.
- 2.10. Si la interconexión de la Figura P2.10 es válida, calcule la potencia total generada en el circuito. Si la interconexión no es válida, explique por qué.

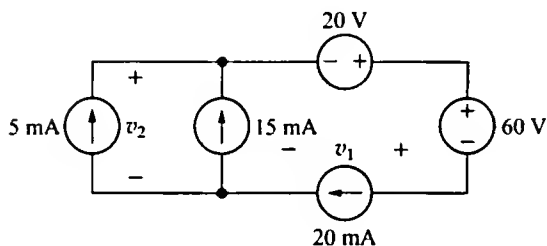


Figura P2.9

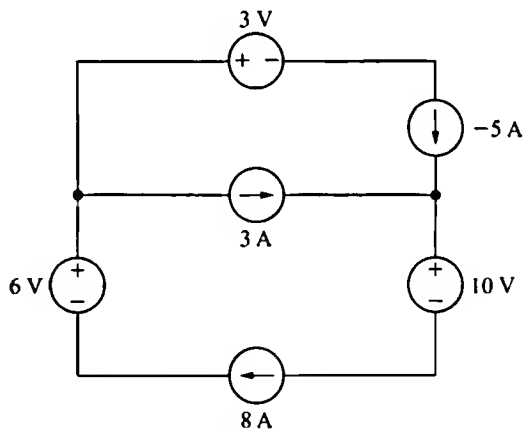


Figura P2.10

- 2.11. Si la interconexión de la Figura P2.11 es válida, calcule la potencia total generada en el circuito. Si la interconexión no es válida, explique por qué.
- 2.12. a) ¿Es válida la interconexión de la Figura P2.12? Explique su respuesta.  
b) ¿Puede calcular la energía total generada en el circuito? Explique su respuesta.
- 2.13. Calcule la potencia total generada en el circuito de la Figura P2.13 si  $v_o = 5\text{ V}$ .

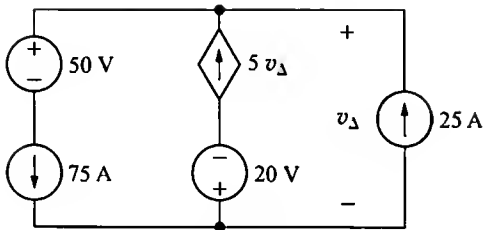


Figura P2.11

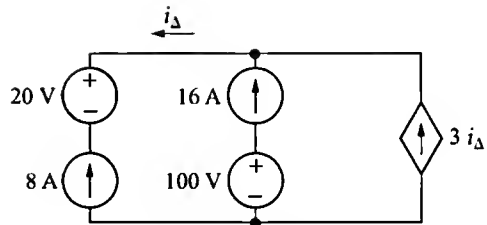


Figura P2.12

2.14. Dado el circuito mostrado en la Figura P2.14, calcule

- ☐ a) el valor de  $i_a$ ,  
☐ b) el valor de  $i_b$ ,  
☐ c) el valor de  $v_o$ ,  
☐ d) la potencia disipada en cada resistencia,  
☐ e) la potencia generada por la fuente de 200 V.

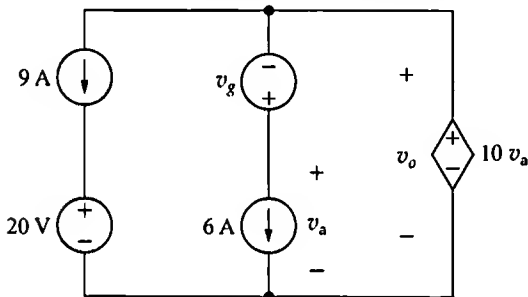


Figura P2.13

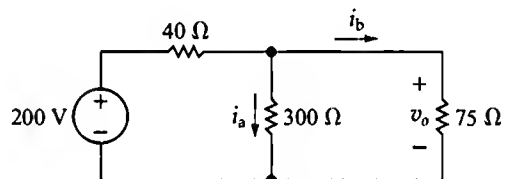


Figura P2.14

2.15. La corriente  $i_a$  en el circuito mostrado en la Figura P2.15 es de 20 A. Calcule (a)  $i_o$ , (b)  $i_g$  y (c) la potencia generada por la fuente de corriente independiente.



2.16. a) Calcule las corrientes  $i_g$  e  $i_o$  en el circuito de la Figura P2.16.



- b) Calcule la tensión  $v_o$ .  
c) Verifique que la potencia total generada es igual a la potencia total disipada.

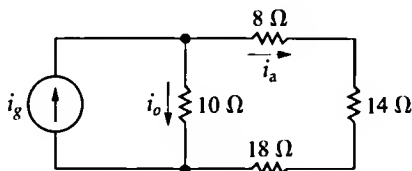


Figura P2.15

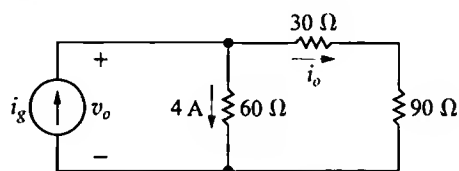


Figura P2.16

2.17. La corriente  $i_o$  de la Figura P2.17 es de 2 A.



- a) Calcule  $i_1$ .  
b) Calcule la potencia disipada en cada resistencia.  
c) Verifique que la potencia total disipada en el circuito es igual a la potencia generada por la fuente de 80 V.

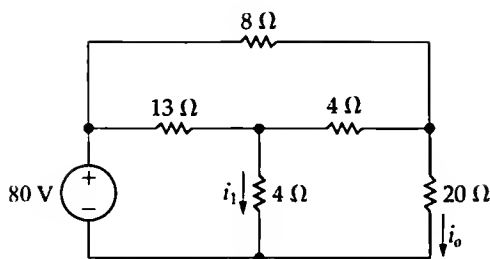


Figura P2.17

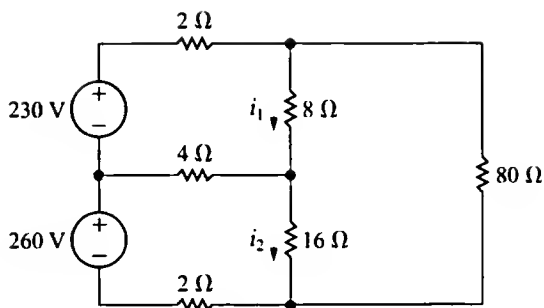


Figura P2.18

- 2.18. Las corrientes  $i_1$  e  $i_2$  en el circuito de la Figura P2.18 son de 20 A y 15 A, respectivamente.
- Calcule la potencia suministrada por cada fuente de tensión.
  - Demuestre que la potencia total suministrada es igual a la potencia total disipada en las resistencias.
- 2.19. Las corrientes  $i_a$  e  $i_b$  en el circuito de la Figura P2.19 son de 4 A y de  $-2$  A, respectivamente.
- Calcule  $i_g$ .
  - Calcule la potencia disipada en cada resistencia.
  - Calcule  $v_g$ .
  - Demuestre que la potencia suministrada por la fuente de corriente es igual a la potencia absorbida por todos los demás elementos.
- 2.20. Se miden la tensión y la corriente en los terminales del dispositivo mostrado en la Figura P2.20(a). Los resultados se indican en la tabla de la Figura P2.20(b).
- Construya un modelo de circuito para este dispositivo utilizando una fuente de corriente ideal y una resistencia.
  - Utilice el modelo para predecir el valor de  $i_t$  cuando se conecte una resistencia de  $20 \Omega$  entre los terminales del dispositivo.

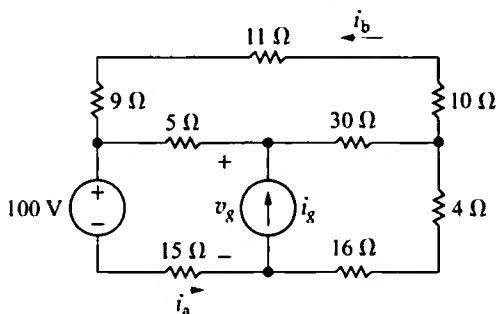
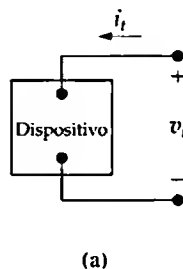


Figura P2.19



(a)

$v_t$ (V)	$i_t$ (A)
50	0
65	3
80	6
95	9
110	12
125	15

(b)

Figura P2.20

- 2.21. Se miden la tensión y la corriente en los terminales del dispositivo mostrado en la Figura P2.21(a). Los resultados se indican en la tabla de la Figura P2.21(b).
- Construya un modelo de circuito para este dispositivo utilizando una fuente ideal de tensión y una resistencia.

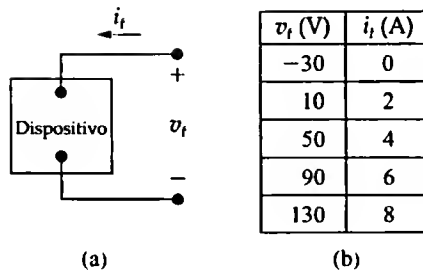


Figura P2.21

- b) Utilice el modelo para predecir la potencia que entregará al dispositivo a una resistencia de  $40 \Omega$ .
- 2.22. La tabla de la Figura P2.22(a) proporciona la relación entre la corriente y la tensión entre los terminales de la fuente de corriente constante real mostrada en la Figura 2.22(b).
- Dibuje  $i_s$  en función de  $v_s$ .
  - Construya un modelo de circuito de esta fuente de corriente que sea válido para  $0 \leq v_s \leq 75 \text{ V}$ , basándose en la ecuación de la línea dibujada en el apartado (a).
  - Utilice su modelo de circuito para predecir la corriente suministrada a una resistencia de  $2,5 \text{ K}\Omega$ .
  - Utilice su modelo de circuito para predecir la tensión de circuito abierto de la fuente de corriente.
  - ¿Cuál es la tensión de circuito abierto real?
  - Explique por qué son distintas las respuestas a los apartados (d) y (e).

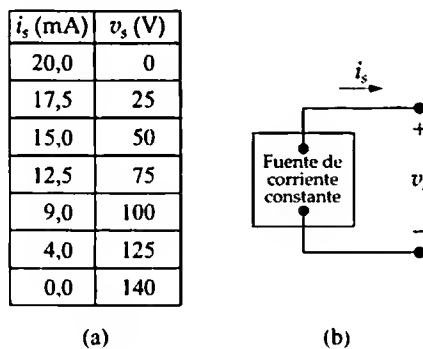


Figura P2.22

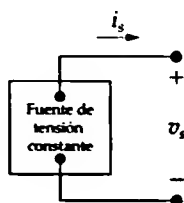
- 2.23. La tabla de la Figura P2.23(a) proporciona la relación entre la tensión y la corriente en los terminales de la fuente de tensión constante real mostrada en la Figura P2.23(b).
- Dibuje  $v_s$  en función de  $i_s$ .
  - Construya un modelo de circuito de la fuente que sea válido para  $0 \leq i_s \leq 24 \text{ A}$ , basándose en la ecuación de la línea dibujada en el apartado (a). (Utilice una fuente ideal de tensión en serie con una resistencia ideal).
  - Utilice su modelo de circuito para predecir la corriente suministrada a una resistencia de  $1 \Omega$  conectada entre los terminales de la fuente.

- d) Utilice su modelo de circuito para predecir la corriente suministrada a un cortocircuito conectado entre los terminales de la fuente.
- e) ¿Cuál es la corriente real de cortocircuito?
- f) Explique por qué no coinciden las respuestas a los apartados (d) y (e).

2.24. La resistencia variable  $R$  del circuito de la Figura P2.24 se ajusta hasta que  $i_a$  es igual a 1 A. Calcule el valor de  $R$ .

$v_s$ (V)	$i_s$ (A)
24	0
22	8
20	16
18	24
15	32
10	40
0	48

(a)



(b)

Figura P2.23

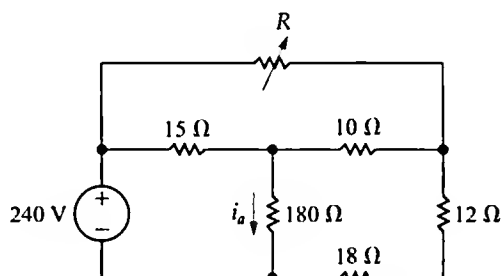


Figura P2.24

2.25. Para el circuito mostrado en la Figura P2.25, calcule (a)  $R$  y (b) la potencia suministrada por la fuente de 500 V.

2.26. La tensión en bornes de la resistencia de  $22,5 \Omega$  del circuito de la Figura P2.26 es de 90 V, positiva en el terminal superior.

- a) Calcule la potencia disipada en cada resistencia.
- b) Calcule la potencia suministrada por la fuente ideal de tensión de 240 V.
- c) Verifique que la potencia suministrada es igual a la potencia total disipada.

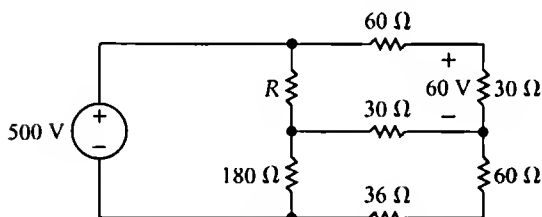


Figura P2.25

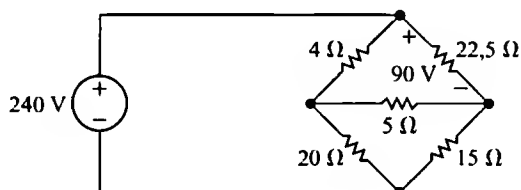


Figura P2.26

2.27. Deduzca la Ecuación 2.25. *Sugerencia:* Utilice las Ecuaciones (3) y (4) del Ejemplo 2.11 para expresar  $i_E$  en función de  $i_B$ . Despeje  $i_2$  en la Ecuación (2) y sustituya el resultado en las Ecuaciones (5) y (6). Despeje  $i_1$  en la «nueva» Ecuación (6) y sustituya el resultado en la «nueva» Ecuación (5). Sustituya  $i_E$  en la «nueva» Ecuación (5) y despeje  $i_B$ . Observe que, como  $i_{CC}$  sólo aparece en la Ecuación (1), el cálculo de  $i_B$  implica la manipulación de sólo cinco ecuaciones.

2.28. Calcule (a)  $i_o$ , (b)  $i_1$  y (c)  $i_2$  en el circuito de la Figura P2.28.

- 2.29. a) Determine la tensión  $v_y$  en el circuito de la Figura 2.29.  
☐ b) Demuestre que la potencia total generada en el circuito es igual a la potencia total absorbida.

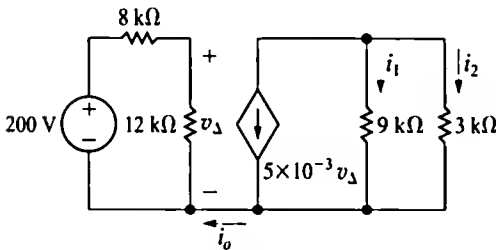


Figura P2.28

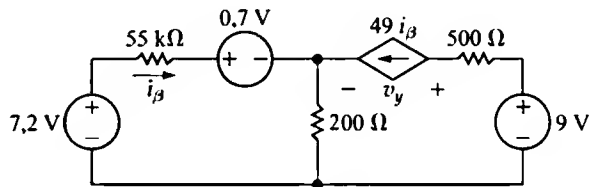


Figura P2.29

- 2.30. Para el circuito mostrado en la Figura P2.30, calcule (a)  $i_Δ$  y  $v_o$  y (b) demuestre que la potencia generada es igual a la potencia absorbida.  
☐

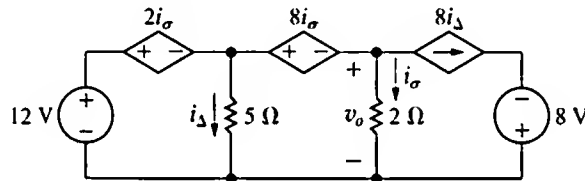


Figura P2.30

- 2.31. Calcule  $v_1$  y  $v_g$  en el circuito mostrado en la Figura P2.31 cuando  $v_o$  es igual a 5 V. (Sugerencia: comience por el extremo derecho del circuito y trabaje hacia atrás hasta llegar a  $v_g$ ).  
☐

- 2.32. Para el circuito mostrado en la Figura 2.24,  $R_1 = 40 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 60 \text{ k}\Omega$ ,  $R_C = 750 \Omega$ ,  $R_E = 120 \Omega$ ,  $V_{CC} = 10 \text{ V}$ ,  $V_0 = 600 \text{ mV}$  y  $\beta = 49$ . Calcule  $i_B$ ,  $i_C$ ,  $i_E$ ,  $v_{3d}$ ,  $v_{bd}$ ,  $i_2$ ,  $i_1$ ,  $v_{ab}$ ,  $i_{CC}$  y  $v_{13}$ . (Nota: En la notación con doble subíndice de las variables de tensión, el primer subíndice es positivo con respecto al segundo subíndice. Véase la Figura P2.32).  
☐

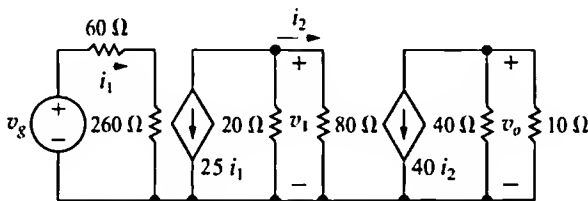


Figura P2.31

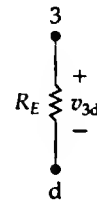
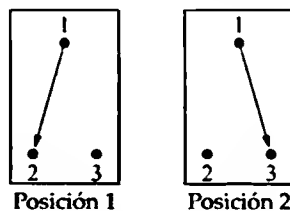


Figura P2.32

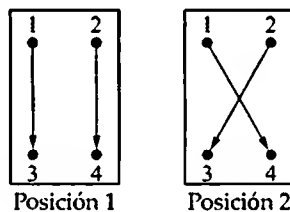
- 2.33. A menudo resulta deseable, al diseñar un sistema de cableado eléctrico, poder controlar un mismo aparato desde dos o más puntos; por ejemplo, controlar una lámpara tanto desde la parte superior como desde la parte inferior de un tramo de escaleras. En los sistemas de cableado doméstico, este tipo de control se implementa utilizando conmutadores de tres y cuatro vías. Un conmutador de tres vías es un conmutador de tres terminales y dos posiciones y un conmutador de cuatro vías es un conmutador de cuatro terminales y dos posiciones. Dichos conmutadores se  
❖

muestran esquemáticamente en la Figura P2.33(a), que ilustra un conmutador de tres vías, y P2.33(b), que ilustra un conmutador de cuatro vías.

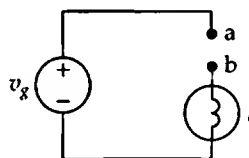
- Muestre cómo podrían conectarse dos conmutadores de tres vías entre a y b en el circuito de la Figura P2.33(c) para poder encender o apagar la bombilla  $I$  desde dos puntos distintos.
- Si la bombilla (aparato) debe controlarse desde más de dos puntos, se utilizan conmutadores de cuatro vías conjuntamente con conmutadores de tres vías. Se requiere un conmutador de cuatro vías por cada punto de control adicional a los dos puntos de control iniciales. Demuestre cómo pueden conectarse un conmutador de cuatro vías y dos conmutadores de tres vías entre a y b en la Figura P2.33(c) para controlar la bombilla desde tres puntos distintos. (*Sugerencia*: el conmutador de cuatro vías se coloca entre los dos conmutadores de tres vías).



(a)



(b)



(c)

**Figura P2.33**

- Suponga que la compañía eléctrica instala un equipo que podría proporcionar una descarga de 250 V a un ser humano. ¿Es suficientemente peligrosa la corriente resultante como para poner un aviso de peligro y tomar otras precauciones con el fin de evitar tal descarga? Suponga que la fuente es de 250 V, que la resistencia del brazo es de  $400\ \Omega$ , que la resistencia del tronco es de  $50\ \Omega$  y que la resistencia de la pierna es de  $200\ \Omega$ . Utilice el modelo proporcionado en la Figura 2.25(b).
- Basándose en el modelo y el circuito mostrados en la Figura 2.25, dibuje un modelo de circuito del camino de la corriente a través del cuerpo humano para una persona que tocara una fuente de tensión con ambas manos y que tuviera ambos pies al mismo potencial que el terminal negativo de la fuente de tensión.



- 2.36. a) Utilizando los valores de resistencia para la pierna, el brazo y el tronco proporcionados en el Problema 2.34, calcule la potencia disipada en el brazo, en la pierna y en el tronco.
- b) El calor específico del agua es de  $4,18 \times 10^3 \text{ J/kg } ^\circ\text{C}$ , de modo que una masa de agua  $M$  (en kilogramos) calentada por una potencia  $P$  (en vatios) sufre un incremento de temperatura a una velocidad dada por

$$\frac{dT}{dt} = \frac{2,39 \times 10^{-4} P}{M} \text{ } ^\circ\text{C/s.}$$

Suponiendo que la masa de un brazo sea de 4 kg, que la de una pierna sea de 10 kg y que la del tronco sea de 25 kg, y asumiendo también que el cuerpo humano está compuesto principalmente por agua, ¿cuántos segundos necesitarían el brazo, la pierna y el tronco para elevar su temperatura los  $5 \text{ } ^\circ\text{C}$  que podrían representar un peligro para los tejidos?

- c) ¿Cómo compararía los valores calculados en el apartado (b) con los escasos minutos que se requieren para que la falta de oxígeno cause lesiones en el cerebro?
- 2.37. Una persona agarra accidentalmente sendos conductores conectados a cada uno de los extremos de una fuente de tensión continua, tomando un conductor en cada mano.
- a) Utilizando los valores de resistencia para el cuerpo humano proporcionados en el Problema 2.34, ¿cuál es la mínima tensión de fuente que puede producir una descarga eléctrica suficiente para causar una parálisis, impidiendo a esa persona soltar los conductores?
- b) ¿Existe un riesgo significativo de que este tipo de accidente ocurra a la hora de reparar una computadora personal, que normalmente tiene fuentes de alimentación de 5 V y 12 V?
- 2.38. Para comprender por qué el nivel de tensión no es el único determinante de las potenciales lesiones debidas a descargas eléctricas, considere el caso de una descarga de electricidad estática, que ya hemos mencionado en la Perspectiva práctica al principio de este capítulo. Cuando arrastramos los pies por una alfombra, nuestro cuerpo se carga. El efecto de esta carga es que todo el cuerpo representa un cierto potencial de tensión. Cuando se toca un pomo metálico, se crea una diferencia de tensión entre el cuerpo y el pomo y la corriente fluye, pero el material de conducción es el aire, no el cuerpo.
- Suponga que podemos modelar el espacio entre la mano y el pomo como una resistencia de  $1 \text{ M}\Omega$ . ¿Qué diferencia de tensión existe entre la mano y el pomo si la corriente que causa esa leve descarga es de 3 mA?

# CAPÍTULO

# 3

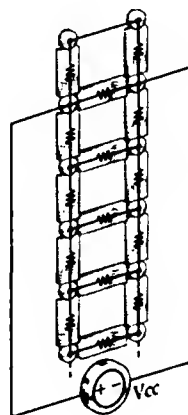
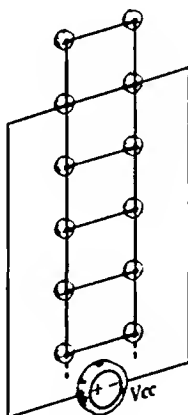
# Circuitos resistivos simples

## Contenido del capítulo

- 3.1. Resistencias en serie
- 3.2. Resistencias en paralelo
- 3.3. Circuitos divisores de tensión y divisores de corriente
- 3.4. División de tensión y división de corriente
- 3.5. Medida de la tensión y de la corriente
- 3.6. Medida de la resistencia: el puente de Wheatstone
- 3.7. Circuitos equivalentes triángulo-estrella (Pi-T)

Nuestro conjunto de herramientas analíticas contiene ya la ley de Ohm y las leyes de Kirchhoff. En el Capítulo 2 hemos utilizado estas herramientas para resolver circuitos simples. En este capítulo, vamos a continuar aplicándolas, pero con circuitos de mayor complejidad. Esa mayor complejidad radica en el mayor número de elementos, con interconexiones más complicadas. Este capítulo se centra en la reducción de dichos circuitos a otros circuitos equivalentes más simples. Continuaremos centrándonos en circuitos de relativa simplicidad por dos razones: (1) nos da la oportunidad de acostumbrarnos a las leyes que subyacen a otros métodos más sofisticados y (2) nos permite introducir algunos circuitos que tienen importantes aplicaciones en el campo de la ingeniería.

Las fuentes contenidas en los circuitos analizados en este capítulo están limitadas a fuentes de tensión y corriente que generan tensiones o corrientes constantes; es decir, tensiones y corrientes que no varían con el tiempo. Las fuentes constantes se denominan a menudo **fuentes de continua**. Este tipo de fuentes se denominan también en ocasiones *fuentes*



CC (fuentes de corriente continua), expresión que resulta un tanto engañosa, ya que también utilizaremos la denominación fuente CC para referirnos a fuentes de tensión constante.

## Perspectiva práctica

### Luneta térmica para automóviles

El circuito térmico en las lunetas traseras de los automóviles constituye un ejemplo de circuito resistivo que realiza una función de gran utilidad. En la parte (a) de la figura se muestra la estructura cuadrícula de uno de estos circuitos. Los conductores de la cuadrícula pueden modelarse mediante resistencias, como se muestra en la parte (b) de la figura. El número de conductores horizontales varía con la marca y el modelo del automóvil, pero normalmente está comprendido entre 9 y 16.

¿Cómo funciona esta cuadrícula calefactora para quitar la escarcha de la luneta trasera? ¿Cómo se determinan las propiedades del circuito? Responderemos a estas cuestiones en la sección de Perspectiva práctica al final del capítulo. Las técnicas de análisis de circuitos requeridas para responder a estas cuestiones son las derivadas de la necesidad de tener una capacidad uniforme de eliminación de la escarcha en las direcciones tanto horizontal como vertical.



### Objetivos del capítulo

1. Ser capaz de reconocer las resistencias conectadas en serie y en paralelo y utilizar las reglas de combinación de resistencias conectadas en serie y resistencias conectadas en paralelo para calcular la resistencia equivalente.
2. Saber cómo diseñar circuitos simples divisores de tensión y divisores de corriente.
3. Ser capaz de utilizar apropiadamente la división de tensión y la división de corriente para resolver circuitos simples.
4. Ser capaz de determinar la lectura de un amperímetro al añadirlo a un circuito para medir la corriente; ser capaz de determinar la lectura de un voltímetro al añadirlo a un circuito para medir la tensión.
5. Comprender el modo en que se utiliza un puente de Wheatstone para medir la resistencia.
6. Saber cuándo y cómo utilizar circuitos equivalentes triángulo-estrella para resolver circuitos simples.

### 3.1. Resistencias en serie

En el Capítulo 2, hemos dicho que, cuando sólo hay dos elementos conectados en un mismo nodo, decimos que ambos elementos están en serie. Los elementos de **circuito conectados en serie** transportan la misma corriente. Las resistencias del circuito mostrado en la Figura 3.1 están conectadas en serie. Podemos demostrar que estas resistencias transportan la misma corriente aplicando la ley de Kirchhoff de las corrientes a cada uno de los nodos del circuito. La interconexión en serie de la Figura 3.1 requiere que

$$i_s = i_1 = -i_2 = i_3 = i_4 = -i_5 = -i_6 = i_7, \quad (3.1)$$

lo que implica que, si conocemos cualquiera de las siete corrientes, sabremos el valor de todas ellas. Por tanto, podemos volver a dibujar la Figura 3.1 como se muestra en la Figura 3.2, reteniendo una única incógnita, la corriente  $i_s$ .

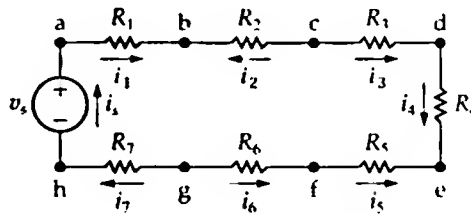


Figura 3.1. Resistencias conectadas en serie.

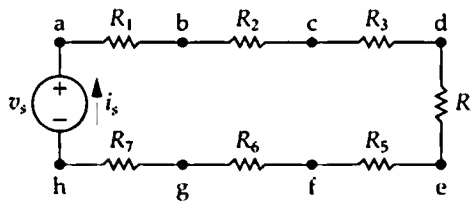


Figura 3.2. Resistencias en serie con una única variable de corriente,  $i_s$ .

Para calcular  $i_s$ , aplicamos la ley de Kirchhoff de las tensiones alrededor del único lazo cerrado de la figura. Definiendo la tensión en bornes de cada resistencia como una caída en la dirección de  $i_s$ , obtenemos

$$-v_s + i_s R_1 + i_s R_2 + i_s R_3 + i_s R_4 + i_s R_5 + i_s R_6 + i_s R_7 = 0, \quad (3.2)$$

o

$$v_s = i_s (R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 + R_6 + R_7) \quad (3.3)$$

El significado de la Ecuación 3.3 a la hora de calcular  $i_s$  es que las siete resistencias pueden sustituirse por una única resistencia cuyo valor numérico sea la suma de las resistencias individuales, es decir,

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 + R_6 + R_7 \quad (3.4)$$

y

$$v_s = i_s R_{eq}. \quad (3.5)$$

Por tanto, podemos volver a dibujar la Figura 3.2 como se muestra en la Figura 3.3.

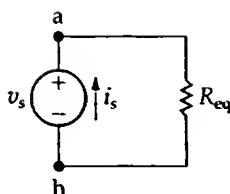


Figura 3.3. Una versión simplificada del circuito mostrado en la Figura 3.2.

En general, si se conectan  $k$  resistencias en serie, la resistencia única equivalente tiene un valor igual a la suma de las  $k$  resistencias, o

✦ **COMBINACIÓN DE RESISTENCIAS EN SERIE**

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^k R_i = R_1 + R_2 + \cdots + R_k. \quad (3.6)$$

Observe que el valor de la resistencia equivalente siempre es mayor que el de la resistencia más grande de las que se combinan en serie.

Otra manera de contemplar este concepto de resistencia equivalente consiste en visualizar la cadena de resistencias como si estuvieran contenidas dentro de una caja negra. (Un ingeniero eléctrico utiliza la denominación **caja negra** para referirse a un contenedor opaco, es decir, un circuito cuyo contenido está oculto. El desafío para el ingeniero consiste entonces en modelar el contenido de la caja estudiando las relaciones entre la tensión y la corriente en sus terminales). Resulta imposible determinar si la caja contiene  $k$  resistencias o una única resistencia equivalente. La Figura 3.4 ilustra este método de estudio del circuito mostrado en la Figura 3.2.

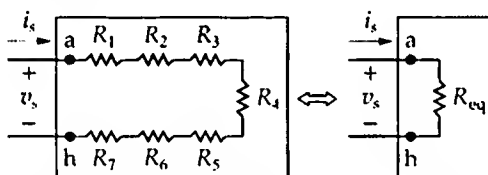


Figura 3.4. Equivalente de caja negra del circuito mostrado en la Figura 3.2.

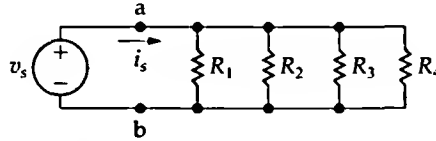
## 3.2. Resistencias en paralelo

Cuando dos elementos están conectados a una misma pareja de nodos, decimos que esos elementos están en paralelo. Los **elementos de circuito conectados en paralelo** tienen la misma tensión en bornes de sus terminales. El circuito mostrado en la Figura 3.5 ilustra varias resistencias conectadas en paralelo. No cometa el error de creer que dos elementos están conectados en paralelo simplemente porque estén alineados en paralelo en un diagrama de circuito. La característica que define la conexión en paralelo de elementos es que tienen la misma tensión en bornes de sus terminales. En la Figura 3.6, puede verse que  $R_1$  y  $R_3$  no están conectados en paralelo, porque entre sus respectivos terminales hay una resistencia que disipa parte de la tensión.

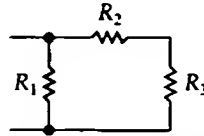
Las resistencias en paralelo pueden reducirse a una única resistencia equivalente utilizando la ley de Kirchhoff de las corrientes y la ley de Ohm, como vamos a ver. En el circuito mostrado en la Figura 3.5, denominemos  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $i_3$  e  $i_4$  a las corrientes que atraviesan las resistencias  $R_1$  a  $R_4$ , respectivamente.

Definamos, asimismo, la dirección de referencia positiva para la corriente de cada resistencia en sentido descendente a través de la resistencia, es decir, desde el nodo a hasta el nodo b. Aplicando la ley de Kirchhoff de las corrientes,

$$i_s = i_1 + i_2 + i_3 + i_4. \quad (3.7)$$



**Figura 3.5.** Resistencias en paralelo.



**Figura 3.6.** Resistencias no conectadas en paralelo.

La conexión en paralelo de las resistencias implica que la tensión en bornes de cada resistencia debe ser la misma. Por tanto, aplicando la ley de Ohm,

$$i_1 R_1 = i_2 R_2 = i_3 R_3 = i_4 R_4 = v_s. \quad (3.8)$$

De aquí obtenemos que

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{v_s}{R_1}, \\ i_2 &= \frac{v_s}{R_2}, \\ i_3 &= \frac{v_s}{R_3} \quad \text{y} \\ i_4 &= \frac{v_s}{R_4}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Sustituyendo la Ecuación 3.9 en la Ecuación 3.7 se obtiene

$$i_s = v_s \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right), \quad (3.10)$$

de donde

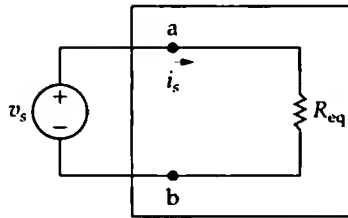
$$\frac{i_s}{v_s} = \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}. \quad (3.11)$$

La Ecuación 3.11 indica el resultado que queríamos demostrar: que las cuatro resistencias del circuito mostrado en la Figura 3.5 pueden sustituirse por una única resistencia equivalente.

El circuito mostrado en la Figura 3.7 ilustra la sustitución. Para  $k$  resistencias conectadas en paralelo, la Ecuación 3.11 pasa a ser

➤ **COMBINACIÓN DE RESISTENCIAS EN PARALELO**

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^k \frac{1}{R_i} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_k}. \quad (3.12)$$



**Figura 3.7.** Sustitución de las cuatro resistencias en paralelo de la Figura 3.5 por una única resistencia equivalente.

Observe que el valor de la resistencia equivalente siempre es menor que el valor de la resistencia más pequeña de entre las que conectemos en paralelo. En ocasiones, resulta más cómodo utilizar la conductancia a la hora de tratar con resistencias conectadas en paralelo. En este caso, la Ecuación 3.12 se transforma en

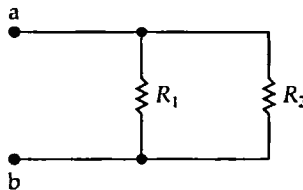
$$G_{eq} = \sum_{i=1}^k G_i = G_1 + G_2 + \cdots + G_k. \quad (3.13)$$

En muchas ocasiones, sólo hay dos resistencias conectadas en paralelo. La Figura 3.8 ilustra este caso especial. Calculemos la resistencia equivalente a partir de la Ecuación 3.12:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_2 + R_1}{R_1 R_2}, \quad (3.14)$$

o bien

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}. \quad (3.15)$$

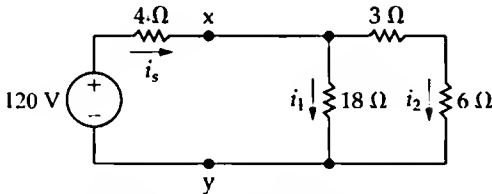


**Figura 3.8.** Dos resistencias conectadas en paralelo.

Así, cuando sólo hay dos resistencias en paralelo, la resistencia equivalente es igual al producto de las resistencias dividido por la suma de éstas. Recuerde que sólo puede utilizarse este resultado en el caso especial de que haya únicamente dos resistencias en paralelo. El Ejemplo 3.1 ilustra la utilidad de estos resultados que hemos obtenido.

**EJEMPLO 3.1** Aplicación de la simplificación serie-paralelo

Calcular  $i_s$ ,  $i_1$  e  $i_2$  en el circuito mostrado en la Figura 3.9.



**Figura 3.9.** Circuito del Ejemplo 3.1.

**SOLUCIÓN**

Comenzamos observando que la resistencia de  $3\ \Omega$  está en serie con la resistencia de  $6\ \Omega$ . Por tanto, sustituimos esta combinación en serie por una resistencia de  $9\ \Omega$ , reduciendo el circuito al mostrado en la Figura 3.10(a). Ahora podemos sustituir la combinación paralela de las resistencias de  $9\ \Omega$  y  $18\ \Omega$  por una única resistencia de valor  $(18 \times 9)/(18 + 9)$ , o  $6\ \Omega$ . La Figura 3.10(b) muestra esta reducción adicional del circuito. Los nodos x e y, etiquetados en todos los diagramas, facilitan la identificación de las distintas partes del circuito a lo largo del proceso de reducción.

A partir de la Figura 3.10(b), podemos verificar que  $i_s = 120/10$ , o  $12\ \text{A}$ . La Figura 3.11 muestra el resultado en este punto del análisis. Hemos añadido la tensión  $v_1$  para clarificar las explicaciones siguientes. Utilizando la ley de Ohm, podemos calcular el valor de  $v_1$ :

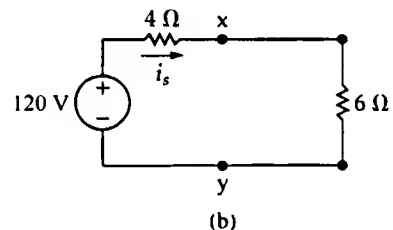
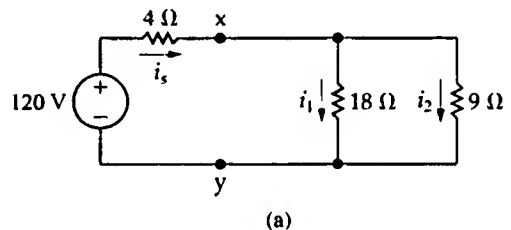
$$v_1 = (12)(6) = 72\ \text{V}. \quad (3.16)$$

Pero  $v_1$  es la caída de tensión entre el nodo x y el nodo y, así que podemos volver al circuito mostrado en la Figura 3.10(a) y volver a aplicar la ley de Ohm para calcular  $i_1$  e  $i_2$ . De este modo,

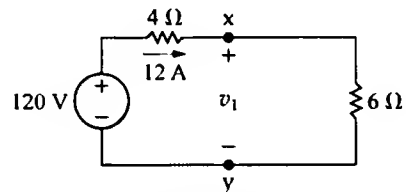
$$i_1 = \frac{v_1}{18} = \frac{72}{18} = 4\ \text{A}, \quad (3.17)$$

$$i_2 = \frac{v_1}{9} = \frac{72}{9} = 8\ \text{A}. \quad (3.18)$$

Hemos calculado las tres corrientes especificadas utilizando reducciones serie-paralelo en combinación con la ley de Ohm.



**Figura 3.10.** Simplificación del circuito mostrado en la Figura 3.9.



**Figura 3.11.** El circuito de la Figura 3.10(b) mostrando el valor numérico de  $i_s$ .

Antes de dejar el Ejemplo 3.1, le sugerimos que se tome el tiempo necesario para demostrar que la solución satisface la ley de Kirchhoff de las corrientes en todos los nodos y la ley de Kirchhoff de las tensiones en cada uno de los caminos cerrados del circuito (observe que hay tres caminos cerrados que pueden comprobarse). También puede resultarle útil demostrar que la potencia suministrada por la fuente de tensión es igual a la potencia total disipada en las resistencias (véanse los Problemas 3.3 y 3.4).

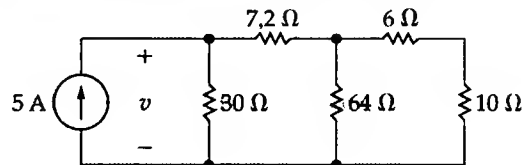


## Evaluación del objetivo 1

■ Ser capaz de reconocer resistencias conectadas en serie y en paralelo.

- 3.1. Para el circuito mostrado, calcule (a) la tensión  $v$ , (b) la potencia suministrada al circuito por la fuente de corriente y (c) la potencia disipada en la resistencia de  $10\ \Omega$ .

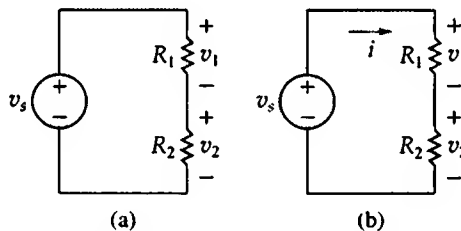
**RESPUESTA** (a) 60 V; (b) 300 W; (c) 57,6 W.



**NOTA** Trate también de resolver los Problemas 3.1, 3.2, 3.5 y 3.6 del capítulo.

### 3.3. Circuitos divisores de tensión y divisores de corriente

En ocasiones, especialmente en los circuitos electrónicos, es necesario obtener más de un nivel de tensión a partir de una única fuente de alimentación. Una manera de hacer esto consiste en utilizar un **circuito divisor de tensión**, como el mostrado en la Figura 3.12.



**Figura 3.12.** (a) Un circuito divisor de tensión y (b) el circuito divisor de tensión con la corriente  $i$  indicada.

Analizaremos este circuito aplicando directamente la ley de Ohm y las leyes de Kirchhoff. Para facilitar el análisis, introducimos la corriente  $i$  como se muestra en la Figura 3.12(b). A partir de la ley de Kirchhoff de las corrientes, vemos que  $R_1$  y  $R_2$  transportan una corriente de igual magnitud. Aplicando la ley de Kirchhoff de las tensiones alrededor del lazo cerrado obtenemos

$$v_s = iR_1 + iR_2, \quad (3.19)$$

o bien

$$i = \frac{v_s}{R_1 + R_2}. \quad (3.20)$$

Ahora podemos aplicar la ley de Ohm para calcular  $v_1$  y  $v_2$ :

$$v_1 = iR_1 = v_s \frac{R_1}{R_1 + R_2}, \quad (3.21)$$

$$v_2 = iR_2 = v_s \frac{R_2}{R_1 + R_2}. \quad (3.22)$$

Las Ecuaciones 3.21 y 3.22 muestran que  $v_1$  y  $v_2$  son fracciones de  $v_s$ . Cada una de las fracciones es el cociente de la resistencia a través de la cual está definida la tensión dividida, partida por la suma de las dos resistencias. Puesto que este cociente es siempre inferior a 1,0, las tensiones divididas  $v_1$  y  $v_2$  son siempre inferiores a la tensión de alimentación  $v_s$ .

Si se desea obtener un valor concreto de  $v_2$  y está especificado el valor de  $v_s$ , hay un número infinito de combinaciones de  $R_1$  y  $R_2$  que nos permiten obtener el cociente adecuado. Por ejemplo, suponga que  $v_s$  es igual a 15 V y que  $v_2$  deber ser 5 V. Entonces,  $v_2/v_s = 1/3$  y a partir de la Ecuación 3.22, vemos que este cociente se satisface siempre que  $R_2 = 1/2 \times R_1$ . Otros factores que pueden influir en la selección de  $R_1$ , y por tanto de  $R_2$ , incluyen las pérdidas de potencia que se producen al dividir la tensión de origen y los efectos de conectar el circuito divisor de tensión a otros componentes del circuito.

Considere la conexión de una resistencia  $R_L$  en paralelo con  $R_2$ , como se muestra en la Figura 3.13. La resistencia  $R_L$  actúa como carga sobre el circuito divisor de tensión. Una carga en cualquier circuito consiste en uno o más elementos de circuito que extraen potencia del mismo. Con la carga  $R_L$  conectada, la expresión para la tensión de salida será

$$v_o = \frac{R_{eq}}{R_1 + R_{eq}} v_s, \quad (3.23)$$

donde

$$R_{eq} = \frac{R_2 R_L}{R_2 + R_L}. \quad (3.24)$$

Sustituyendo la Ecuación 3.24 en la Ecuación 3.23, obtenemos

$$v_o = \frac{R_2}{R_1 [1 + (R_2 / R_L)] + R_2} v_s. \quad (3.25)$$

Observe que la Ecuación 3.25 se reduce a la Ecuación 3.22 a medida que  $R_L \rightarrow \infty$ , como debe ser. La Ecuación 3.25 muestra que, siempre que  $R_L \gg R_2$ , el cociente de tensiones  $v_o/v_s$  no se ve perturbado por la adición de la carga al divisor.

Otra característica interesante del circuito divisor de tensión es la sensibilidad del divisor a las tolerancias de las resistencias. Con el término *tolerancia* indicamos que existe un rango de posibles valores. Los valores de las resistencias comercialmente disponibles siempre varían dentro de un determinado porcentaje con respecto a su valor nominal. El Ejemplo 3.2 ilustra el efecto de las tolerancias de las resistencias en un circuito divisor de tensión.

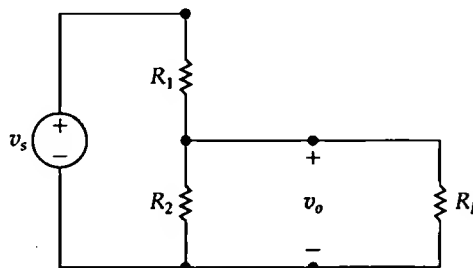
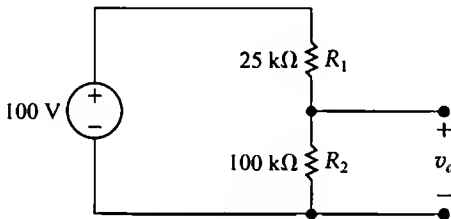


Figura 3.13. Un divisor de tensión conectado a una carga  $R_L$ .

**EJEMPLO 3.2** Análisis del circuito divisor de tensión

Las resistencias utilizadas en el circuito divisor de tensión mostrado en la Figura 3.14 tienen una tolerancia de  $\pm 10\%$ . Calcule los valores máximo y mínimo de  $v_o$ .



**Figura 3.14.** Circuito del Ejemplo 3.2.

**SOLUCIÓN**

A partir de la Ecuación 3.22, el valor máximo de  $v_o$  se producirá cuando  $R_2$  sea un 10% superior al

valor nominal y  $R_1$  sea un 10% inferior, mientras que el valor mínimo de  $v_o$  se producirá cuando  $R_2$  sea un 10% inferior al valor nominal y  $R_1$  sea un 10% superior. Por tanto

$$v_o(\text{máx}) = \frac{(100)(110)}{110 + 22,5} = 83,02 \text{ V},$$

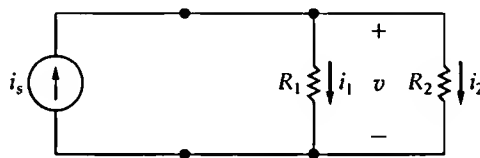
$$v_o(\text{mín}) = \frac{(100)(90)}{90 + 27,5} = 76,60 \text{ V}.$$

Así, al tomar la decisión de utilizar resistencias con una tolerancia del 10% en este divisor de tensión, vemos que la tensión de salida en ausencia de carga estará comprendida entre 76,60 y 83,02 V.

**El circuito divisor de corriente**

El **circuito divisor de corriente** mostrado en la Figura 3.15 está compuesto por dos resistencias conectadas en paralelo con una fuente de corriente. El divisor de corriente está diseñado para dividir la corriente  $i_s$  entre  $R_1$  y  $R_2$ . Podemos determinar la relación entre la corriente  $i_s$  y la corriente en cada resistencia (es decir,  $i_1$  e  $i_2$ ) aplicando directamente la ley de Ohm y la ley de Kirchhoff de las corrientes. La tensión en bornes de las resistencias en paralelo es

$$v = i_1 R_1 = i_2 R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} i_s. \quad (3.26)$$



**Figura 3.15.** El circuito divisor de corriente.

A partir de la Ecuación 3.26,

$$i_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i_s, \quad (3.27)$$

$$i_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i_s. \quad (3.28)$$

Las Ecuaciones 3.27 y 3.28 muestran que la corriente se divide entre las dos resistencias en paralelo de forma tal que la corriente en una de las resistencias es igual a la corriente que entra en la combinación en paralelo multiplicada por la otra resistencia y dividida por la suma de ambas. El Ejemplo 3.3 ilustra el uso de la ecuación del divisor de corriente.

### EJEMPLO 3.3 Análisis de un circuito divisor de corriente

Calcule la potencia disipada en la resistencia de  $6\ \Omega$  mostrada en la Figura 3.16.

#### SOLUCIÓN

En primer lugar, debemos calcular la corriente que atraviesa la resistencia simplificando el circuito mediante reducciones serie-paralelo. De este modo, el circuito mostrado en la Figura 3.16 se reduce al que se muestra en la Figura 3.17. Calculamos la corriente  $i_o$  utilizando la fórmula de división de la corriente:

$$i_o = \frac{16}{16+4}(10) = 8\text{ A.}$$

Observe que  $i_o$  es la corriente que atraviesa la resistencia de  $1,6\ \Omega$  en la Figura 3.16. Ahora podemos volver a dividir  $i_o$  entre las dos resistencias de  $6\ \Omega$  y de  $4\ \Omega$ . La corriente a través de la resistencia de  $6\ \Omega$  será

$$i_6 = \frac{4}{6+4}(8) = 3,2\text{ A,}$$

y la potencia disipada en esa resistencia de  $6\ \Omega$  será  $p = (3,2)^2(6) = 61,44\text{ W}$ .

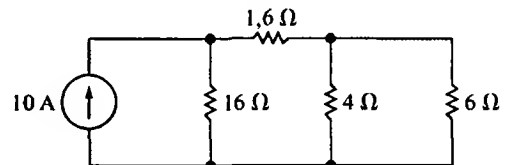


Figura 3.16. Circuito del Ejemplo 3.3.

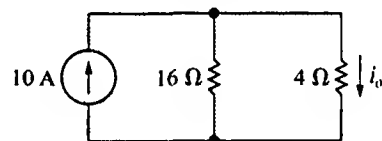


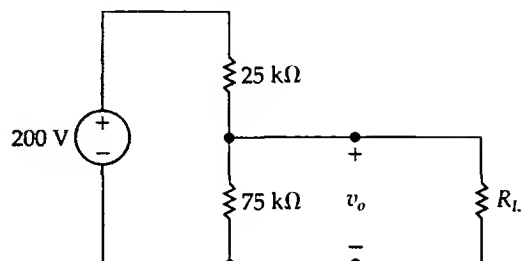
Figura 3.17. Simplificación del circuito mostrado en la Figura 3.16.

### Evaluación del objetivo 2

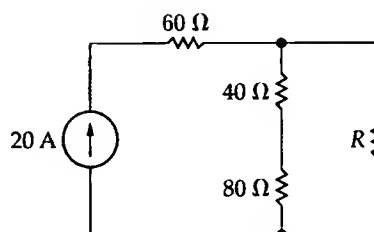
- Saber cómo diseñar circuitos simples divisores de tensión y divisores de corriente.

- 3.2. a) Calcule el valor de  $v_o$  en ausencia de carga en el circuito mostrado.  
 b) Calcule  $v_o$  cuando  $R_L$  sea  $150\text{ k}\Omega$ .  
 c) ¿Cuánta potencia se disipa en la resistencia de  $25\text{ k}\Omega$  si se cortocircuitan accidentalmente los terminales de carga?  
 d) ¿Cuál es la máxima potencia disipada en la resistencia de  $75\text{ k}\Omega$ ?

**RESPUESTA** (a)  $150\text{ V}$ ; (b)  $133,33\text{ V}$ ;  
 (c)  $1,6\text{ W}$ ; (d)  $0,3\text{ W}$ .



- 3.3. a) Calcule el valor de  $R$  que hará que fluyan 4 A de corriente a través de la resistencia de  $80\ \Omega$  en el circuito mostrado.
- b) ¿Cuánta potencia necesitará disipar la resistencia  $R$  calculada en el apartado (a)?
- c) ¿Cuánta potencia generará la fuente de corriente para el valor de  $R$  calculado en el apartado (a)?

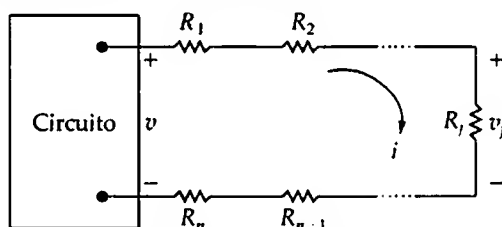


**RESPUESTA** (a)  $30\ \Omega$ ; (b) 7680 W; (c) 33.600 W

**NOTA** Trate también de resolver los Problemas 3.13, 3.14 y 3.21 del capítulo.

### 3.4. División de tensión y división de corriente

Podemos ahora generalizar los resultados de nuestro análisis del circuito divisor de tensión de la Figura 3.12 y del circuito divisor de corriente de la Figura 2.15. Las generalizaciones nos proporcionarán dos técnicas adicionales muy útiles de análisis de circuitos, denominadas **división de tensión** y **división de corriente**. Considere el circuito mostrado en la Figura 3.18.



**Figura 3.18.** Circuito utilizado para ilustrar la división de tensión.

La caja de la izquierda puede contener una única fuente de tensión o cualquier otra combinación de elementos de circuito básicos que permita obtener la tensión  $v$  mostrada en la figura. A la derecha de la caja se muestran  $n$  resistencias conectadas en serie. Lo que nos interesa es calcular la caída de tensión  $v_j$  en una resistencia arbitraria  $R_j$ , en función de la tensión  $v$ . Comenzaremos utilizando la ley de Ohm para calcular  $i$ , la corriente que atraviesa todas las resistencias conectadas en serie, en términos de la corriente  $v$  y de las  $n$  resistencias:

$$i = \frac{v}{R_1 + R_2 + \dots + R_n} = \frac{v}{R_{eq}}, \quad (3.29)$$

La resistencia equivalente,  $R_{eq}$ , es la suma de los valores de las  $n$  resistencias, como se muestra en la Ecuación 3.6, porque las resistencias están en serie. Aplicamos la ley de Ohm una segunda vez para calcular la caída de tensión  $v_j$  en bornes de la resistencia  $R_j$ , utilizando la corriente  $i$  calculada mediante la Ecuación 3.29:

✦ **ECUACIÓN DE DIVISIÓN DE TENSIÓN**

$$v_j = iR_j = \frac{R_j}{R_{eq}} v. \quad (3.30)$$

Observe que hemos usado la Ecuación 3.29 para obtener el lado derecho de la Ecuación 3.30. La Ecuación 3.30 es la ecuación de división de tensión, que nos dice que la caída de tensión  $v_j$  en una única

resistencia  $R_j$ , de un conjunto de resistencias conectadas en serie, es proporcional a la caída total de tensión  $v$  en el conjunto de resistencias conectadas en serie. La constante de proporcionalidad es el cociente entre esa única resistencia y la resistencia equivalente del conjunto de resistencias conectadas en serie, es decir,  $R_j/R_{eq}$ .

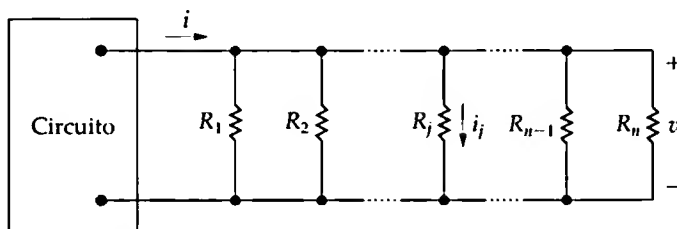


Figura 3.19. Circuito utilizado para ilustrar la división de corriente.

Ahora considere el circuito mostrado en la Figura 3.19. La caja de la izquierda puede contener una única fuente de corriente o cualquier otra combinación de elementos de circuito básicos que nos proporcione la corriente  $i$  mostrada en la figura. A la derecha de la caja hay  $n$  resistencias conectadas en paralelo. Lo que queremos es determinar la corriente  $i_j$  que atraviesa una resistencia arbitraria  $R_j$  en términos de la corriente  $i$ . Comenzaremos utilizando la ley de Ohm para calcular  $v$ , la caída de tensión a través de cada una de las resistencias conectadas en paralelo, en términos de la corriente  $i$  y de las  $n$  resistencias:

$$v = i (R_1 \parallel R_2 \parallel \dots \parallel R_n) = i R_{eq}. \quad (3.31)$$

La resistencia equivalente de  $n$  resistencias en paralelo,  $R_{eq}$ , puede calcularse utilizando la Ecuación 3.12. Aplicamos la ley de Ohm una segunda vez para calcular la corriente  $i_j$  que atraviesa la resistencia  $R_j$ , utilizando la tensión  $v$  calculada en la Ecuación 3.31:

✦ **ECUACIÓN DE DIVISIÓN DE LA CORRIENTE**

$$i_j = \frac{v}{R_j} = \frac{R_{eq}}{R_j} i. \quad (3.32)$$

Observe que hemos utilizado la Ecuación 3.31 para obtener el lado derecho de la Ecuación 3.32. La Ecuación 3.32 es la ecuación de división de la corriente, que establece que la corriente  $i$  que atraviesa una única resistencia  $R_j$ , de un conjunto de resistencias conectadas en paralelo, es proporcional a la corriente total  $i$  suministrada al conjunto de resistencias conectadas en paralelo. La constante de proporcionalidad es el cociente entre la resistencia equivalente del conjunto de resistencias conectadas en paralelo y el valor de esa única resistencia, es decir,  $R_{eq}/R_j$ . Observe que la constante de proporcionalidad en la ecuación de división de corriente es la inversa de la constante de proporcionalidad en la ecuación de división de tensión.

El Ejemplo 3.4 utiliza la división de corriente y la división de tensión para determinar las tensiones y corrientes existentes en un circuito.

#### EJEMPLO 3.4 Utilización de la división de tensión y la división de corriente para resolver un circuito

Utilice la técnica de división de corriente para calcular la corriente  $i_o$  y utilice la técnica de divi-

sión de tensión para determinar la tensión  $v_o$  en el circuito de la Figura 3.20.

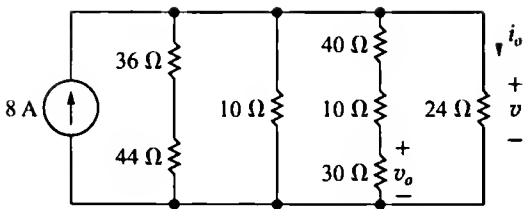


Figura 3.20. Circuito del Ejemplo 3.4.

**SOLUCIÓN**

Podemos usar la Ecuación 3.32 si somos capaces de calcular la resistencia equivalente de las cuatro ramas paralelas que contienen resistencias. Simbólicamente,

$$R_{eq} = (36 + 44) \parallel 10 \parallel (40 + 10 + 30) \parallel 24$$

$$= 80 \parallel 10 \parallel 80 \parallel 24 = \frac{1}{\frac{1}{80} + \frac{1}{10} + \frac{1}{80} + \frac{1}{24}} = 6 \Omega.$$

Aplicando la Ecuación 3.32,

$$i_o = \frac{6}{24}(8 \text{ A}) = 2 \text{ A}.$$

Podemos utilizar la ley de Ohm para calcular la caída de tensión en bornes de la resistencia de 24 Ω:

$$v = (24)(2) = 48 \text{ V}.$$

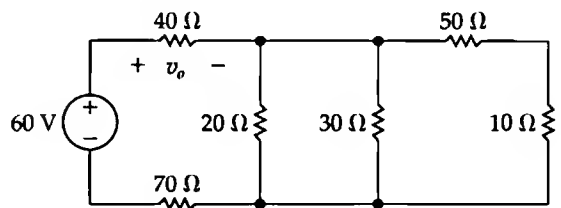
Ésta es también la caída de tensión en la rama que contiene las resistencias de 40 Ω, de 10 Ω y de 3 Ω en serie. Podemos entonces usar la técnica de división de tensión para determinar la caída de tensión  $v_o$  en la resistencia de 30 Ω, partiendo de que sabemos cuál es la caída de tensión para todo el conjunto de resistencias conectadas en serie; para ello aplicaremos la Ecuación 3.30. La manera de aplicarla consiste en determinar la resistencia equivalente del conjunto de resistencias conectadas en serie, que será  $40 + 10 + 30 = 80 \Omega$ :

$$v_o = \frac{30}{80}(48 \text{ V}) = 18 \text{ V}.$$

**Evaluación del objetivo 3**

- Ser capaz de utilizar las técnicas de división de corriente y de división de tensión para resolver circuitos simples.

- 3.4. a) Utilice la técnica de división de tensión para determinar la tensión  $v_o$  que cae en la resistencia de 40 Ω en el circuito mostrado.
- b) Utilice el valor de  $v_o$  calculado en el apartado (a) para determinar la corriente que pasa a través de la resistencia de 40 Ω y use esta corriente y la técnica de división de corriente para calcular la corriente que atraviesa la resistencia de 30 Ω.
- c) ¿Cuánta potencia es absorbida por la resistencia de 50 Ω?

**RESPUESTA**

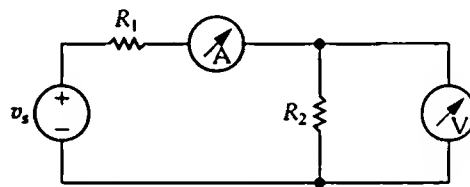
- (a) 20 V;  
 (b) 166,67 mA;  
 (c) 347,22 mW.

**NOTA** Trate también de resolver los Problemas 3.22 y 3.23 del capítulo.

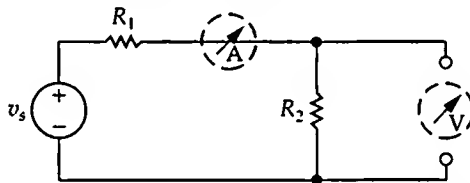
### 3.5. Medida de la tensión y de la corriente

Al trabajar con circuitos reales, a menudo será necesario medir tensiones y corrientes. Vamos a dedicar algo de tiempo a analizar diversos dispositivos de medida en esta sección y en la siguiente, ya que son relativamente simples de analizar y ofrecen ejemplos prácticos de las configuraciones de división de corriente y de tensión que acabamos de estudiar.

Un **amperímetro** es un instrumento diseñado para medir la corriente; se coloca en serie con el elemento de circuito cuya corriente se quiera medir. Un **voltímetro** es un instrumento diseñado para medir la tensión y se coloca en paralelo con el elemento cuya tensión quiera conocerse. Un amperímetro o voltímetro ideales no tienen ningún efecto sobre la variable de circuito para cuya medida están diseñados. Es decir, un amperímetro ideal tiene una resistencia equivalente de  $0\ \Omega$  y funciona como un cortocircuito en serie con el elemento cuya corriente se mide. Un voltímetro ideal tiene una resistencia equivalente infinita y, por tanto, funciona como un circuito abierto en paralelo con el elemento cuya tensión quiere determinarse. En la Figura 3.21 se muestran las configuraciones de un amperímetro utilizado para medir la corriente en  $R_1$  y de un voltímetro usado para medir la tensión en  $R_2$ . Los modelos ideales de estos medidores en el mismo circuito se muestran en la Figura 3.22.



**Figura 3.21.** Un amperímetro conectado para medir la corriente en  $R_1$  y un voltímetro conectado para medir la tensión que cae en  $R_2$ .



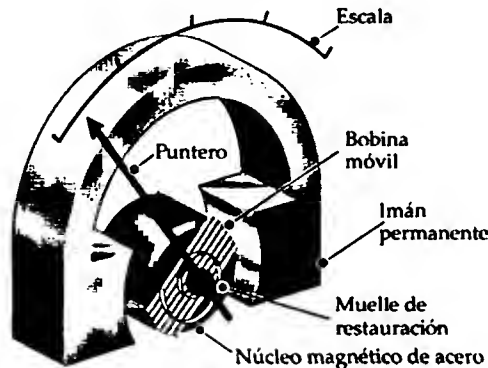
**Figura 3.22.** Un modelo de cortocircuito para el amperímetro ideal y un modelo de circuito abierto para el voltímetro ideal.

Existen dos categorías generales de medidores que se utilizan para medir tensiones y corrientes continuas: polímetros digitales y polímetros analógicos. Los **polímetros digitales** miden la señal de tensión o corriente continua en puntos discretos del tiempo, denominados instantes de muestreo. Así, la señal se convierte de la forma analógica, que es continua en el tiempo, a una señal digital, que sólo existe en instantes discretos del tiempo. Una explicación más detallada del funcionamiento de los polímetros digitales cae fuera del alcance de este libro y de este curso; sin embargo, es bastante probable que pueda ver y utilizar polímetros digitales en las prácticas de laboratorio, ya que ofrecen numerosas ventajas sobre los polímetros analógicos. Los polímetros digitales introducen menos resistencia en el circuito al que se conectan, son más fáciles de conectar y la precisión de la medida es mayor, debido a la naturaleza del mecanismo de lectura.

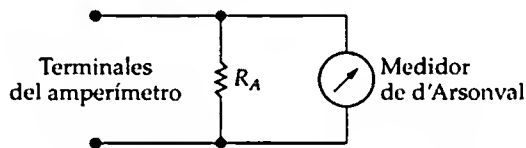
Los **polímetros analógicos** están basados en el movimiento del medidor de d'Arsonval, que se utiliza para implementar el mecanismo de lectura. El medidor de d'Arsonval está compuesto por una bobina



na móvil situada dentro del campo de un imán permanente. Cuando fluye corriente a través de la bobina, crea un par sobre ésta, haciéndola rotar y moviendo un puntero a lo largo de una escala calibrada. Por su propio diseño, la deflexión del puntero es directamente proporcional a la corriente que atraviesa la bobina móvil. La bobina está caracterizada tanto por un valor nominal de tensión como por un valor nominal de corriente. Por ejemplo, un medidor comercialmente disponible tiene valores nominales de 50 mV y 1 mA; esto quiere decir que, cuando la bobina es atravesada por una corriente de 1 mA, la caída de tensión en la misma es de 50 mV y el puntero se mueve hasta la posición de fondo de escala. En la Figura 3.23 se muestra una ilustración esquemática del medidor de d'Arsonval.

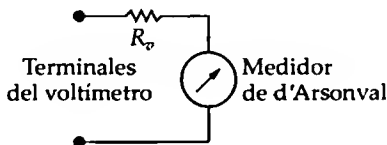


**Figura 3.23.** Diagrama esquemático de un medidor de d'Arsonval.



**Figura 3.24.** Circuito amperímetro para corriente continua.

Un amperímetro analógico está compuesto por un medidor de d'Arsonval en paralelo con una resistencia, como se muestra en la Figura 3.24. El propósito de la resistencia en paralelo consiste en limitar la cantidad de corriente que atraviesa la bobina del medidor, derivando parte de la misma a través de  $R_A$ . Un voltímetro analógico está compuesto por un medidor de d'Arsonval en serie con una resistencia, como se muestra en la Figura 3.25. Aquí, la resistencia se usa para limitar la caída de tensión entre los terminales de la bobina del medidor. En ambos polímetros, la resistencia añadida determina la lectura a fondo de escala del medidor.



**Figura 3.25.** Circuito voltímetro para corriente continua.

A partir de estas descripciones, vemos que un polímetro real no presenta características ideales; tanto la resistencia añadida como el propio medidor introducen una resistencia en el circuito al que el medidor se conecta. De hecho, cualquier instrumento utilizado para realizar medidas físicas extrae energía del sistema mientras realiza las medidas. Cuanta más energía extraigan los instrumentos, más

adversamente se verá perturbada la medida. Un amperímetro real tiene una resistencia equivalente distinta de cero, y por tanto añade resistencia de forma efectiva al circuito, en serie con el elemento cuya corriente se quiere medir con el amperímetro. Un voltímetro real tiene una resistencia equivalente que no es infinita, por lo que añade en la práctica una resistencia al circuito, en paralelo con el elemento cuya tensión se está midiendo.

El grado en que estos medidores perturben el circuito que se está midiendo dependerá de la resistencia efectiva de los medidores, comparada con la resistencia del circuito. Por ejemplo, utilizando la regla del 10%, la resistencia efectiva de un amperímetro no debería ser superior al diez por ciento del valor de la resistencia más pequeña del circuito, para estar seguros de que la corriente medida sea casi la misma con y sin el amperímetro. Pero en un polímetro analógico, el valor de la resistencia está determinado por la lectura deseada a fondo de escala que queramos realizar, y no puede elegirse arbitrariamente. Los siguientes ejemplos ilustran los cálculos implicados en la determinación de la resistencia necesaria en un amperímetro o voltímetro analógicos. Los ejemplos también indican la resistencia resultante efectiva del medidor cuando se lo inserta en un circuito.

### EJEMPLO 3.5 Utilización de un amperímetro de d'Arsonval

- a) Se usa un medidor de d'Arsonval de 50 mV, 1 mA en un amperímetro con una lectura a fondo de escala de 10 mA. Halle  $R_A$ .
- b) Repita el apartado (a) para una lectura a fondo de escala de 1 A.
- c) ¿Cuánta resistencia se añade al circuito cuando se inserta el amperímetro de 10 mA con el fin de medir la corriente?
- d) Repita el apartado (c) para el amperímetro de 1 A.
- b) Cuando la deflexión a fondo de escala del amperímetro es de 1 A,  $R_A$  deberá transportar 999 mA cuando el medidor esté atravesado por una corriente de 1 mA. En este caso,

$$999 \times 10^{-3} R_A = 50 \times 10^{-3},$$

o

$$R_A = 50/999 \approx 50,05 \text{ m}\Omega.$$

- c) Designemos mediante  $R_m$  la resistencia equivalente del amperímetro. Para el amperímetro de 10 mA,

$$R_m = \frac{50 \text{ mV}}{10 \text{ mA}} = 5 \Omega,$$

o, alternativamente

$$R_m = \frac{(50)(50/9)}{50 + 50/9} = 5 \Omega.$$

- d) Para el amperímetro de 1 A

$$R_m = \frac{50 \text{ mV}}{1 \text{ A}} = 0,050 \Omega,$$

o, alternativamente

$$R_m = \frac{(50)(50/999)}{50 + (50/999)} = 0,050 \Omega.$$

### SOLUCIÓN

- a) A partir del enunciado del problema, sabemos que, cuando la corriente en los terminales del amperímetro es de 10 mA, fluye 1 mA a través de la bobina del medidor, lo que significa que es preciso derivar 9 mA a través de  $R_A$ . También sabemos que, cuando el medidor transporta 1 mA, la caída de tensión en bornes de sus terminales es de 50 mV. La ley de Ohm establece que

$$9 \times 10^{-3} R_A = 50 \times 10^{-3},$$

o

$$R_A = 50/9 = 5,555 \Omega.$$

**EJEMPLO 3.6** Utilización de un voltímetro de d'Arsonval

- a) Se utiliza un medidor de d'Arsonval de 50 mV, 1 mA para construir un voltímetro en el que la lectura a fondo de escala es de 150 V. Determine  $R_v$ .
- b) Repita el apartado (a) para una lectura a fondo de escala de 5 V.
- c) ¿Cuánta resistencia inserta el medidor de 150 V en el circuito?
- d) Repita el apartado (c) para el medidor de 5 V.
- b) Para una lectura a fondo de escala de 5 V,

$$50 \times 10^{-3} = \frac{50}{R_v + 50} (5),$$

o

$$R_v = 4950 \, \Omega.$$

- c) Si representamos mediante  $R_m$  la resistencia equivalente del medidor,

$$R_m = \frac{150 \, \text{V}}{10^{-3} \, \text{A}} = 150.000 \, \Omega,$$

o, alternativamente,

$$R_m = 149.950 + 50 = 150.000 \, \Omega.$$

- d) En este caso,

$$R_m = \frac{5 \, \text{V}}{10^{-3} \, \text{A}} = 5000 \, \Omega,$$

o, alternativamente,

$$R_m = 4950 + 50 = 5000 \, \Omega.$$

**SOLUCIÓN**

- a) La deflexión a fondo de escala requiere 50 mV en bornes del medidor, el cual tiene una resistencia de 50  $\Omega$ . Por tanto, aplicamos la Ecuación 3.22 con  $R_1 = R_v$ ,  $R_2 = 50$ ,  $v_s = 150$  y  $v_2 = 50$  mV:

$$50 \times 10^{-3} = \frac{50}{R_v + 50} (150).$$

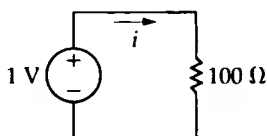
Despejando  $R_v$ , obtenemos

$$R_v = 149.950 \, \Omega.$$

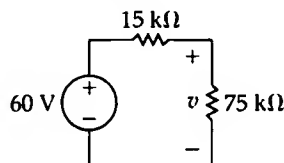
**Evaluación del objetivo 4**

- Ser capaz de determinar la lectura de amperímetros y voltímetros.

- 3.5. a) Calcule la corriente en el circuito mostrado.
- b) Si se utiliza el amperímetro del Ejemplo 3.5(a) para medir la corriente, ¿qué lectura nos dará?

**RESPUESTA** (a) 10 mA; (b) 9,524 mA.

- 3.6. a) Calcule la tensión  $v$  en bornes de la resistencia de 75 k $\Omega$  en el circuito mostrado.
- b) Si se utiliza el voltímetro de 150 V del Ejemplo 3.6(a) para medir la tensión, ¿qué lectura nos dará?

**RESPUESTA** (a) 50 V; (b) 46,15 V.**NOTA** Trate también de resolver los Problemas 3.31 y 3.34 del capítulo.

### 3.6. Medida de la resistencia: el puente de Wheatstone

Para medir la resistencia se utilizan muchas configuraciones de circuito distintas. Aquí nos vamos a centrar sólo en una de ellas, el puente de Wheatstone. El circuito en puente de Wheatstone se utiliza para medir con precisión resistencias de valores medios, es decir, en el rango de  $1\ \Omega$  a  $1\ \text{M}\Omega$ . En los modelos comerciales del puente de Wheatstone, pueden conseguirse precisiones del orden de  $\pm 0,1\%$ . El circuito en puente está compuesto por cuatro resistencias, una fuente de tensión cc y un detector. Una de las cuatro resistencias puede variarse, lo que se indica en la Figura 3.26 mediante la flecha que atraviesa  $R_3$ . La fuente de tensión cc es usualmente una batería, como se indica mediante el símbolo de batería para la fuente de tensión  $v$  en la Figura 3.26. El detector es generalmente un medidor d'Arsonval en el rango de los microamperios y se denomina galvanómetro. La Figura 3.26 muestra la disposición de circuito de las resistencias, de la batería y del detector, donde  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$  son resistencias conocidas y  $R_x$  es la resistencia cuyo valor deseamos determinar.

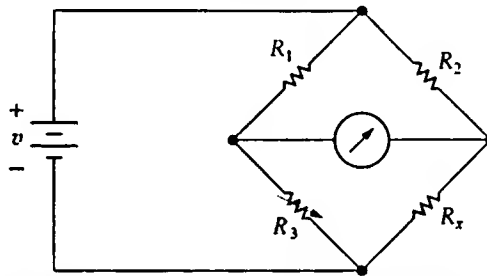


Figura 3.26. Circuito en puente de Wheatstone.

Para encontrar el valor de  $R_x$  ajustamos la resistencia variable  $R_3$  hasta que no atravesase el galvanómetro ninguna corriente. Entonces, calculamos el valor de la resistencia desconocida a partir de la expresión simple

$$R_x = \frac{R_2}{R_1} R_3. \quad (3.33)$$

La deducción de la Ecuación 3.33 resulta sencilla, sin más que aplicar las leyes de Kirchhoff al circuito en puente. Volvamos a dibujar el circuito en puente en la forma representada en la Figura 3.27 para mostrar las corrientes apropiadas para la deducción de la Ecuación 3.33. Cuando  $i_g$  es cero, es decir, cuando el puente está equilibrado, la ley de Kirchhoff de las corrientes requiere que

$$i_1 = i_3, \quad (3.34)$$

$$i_2 = i_x. \quad (3.35)$$

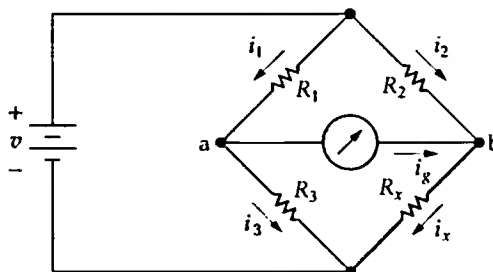


Figura 3.27. Un puente de Wheatstone equilibrado ( $i_g = 0$ ).

Ahora, puesto que  $i_x$  es cero, no hay caída de tensión en bornes del detector y, por tanto, los puntos a y b están al mismo potencial. Así, cuando el puente está equilibrado, la ley de Kirchhoff de las tensiones requiere que

$$i_3 R_3 = i_x R_x, \quad (3.36)$$

$$i_1 R_1 = i_2 R_2. \quad (3.37)$$

Combinando las Ecuaciones 3.34 y 3.35 con la Ecuación 3.36 se tiene que

$$i_1 R_3 = i_2 R_x. \quad (3.38)$$

Obtenemos la Ecuación 3.33 dividiendo primero la Ecuación 3.38 por la Ecuación 3.37 y luego despejando  $R_x$  en la expresión resultante:

$$\frac{R_3}{R_1} = \frac{R_x}{R_2}, \quad (3.39)$$

de donde

$$R_x = \frac{R_2}{R_1} R_3. \quad (3.40)$$

Ahora que hemos verificado la validez de la Ecuación 3.33, hagamos algunos comentarios acerca del resultado. En primer lugar, observe que, si la relación  $R_2/R_1$  es la unidad, la resistencia desconocida  $R_x$  será igual a  $R_3$ . En este caso, la resistencia del puente  $R_3$  debe variar a lo largo de un rango que incluya el valor  $R_x$ . Por ejemplo, si la resistencia desconocida fuera de  $1000 \Omega$  y  $R_3$  pudiera variar entre  $0$  y  $100 \Omega$ , nunca podría llegar a equilibrarse el puente. Por tanto, para cubrir un amplio rango de resistencias desconocidas, debemos ser capaces de variar la relación  $R_2/R_1$ . En un puente de Wheatstone comercial,  $R_1$  y  $R_2$  están compuestas de valores decimales de resistencias que pueden conmutarse dentro del circuito en puente. Normalmente, los valores decimales son  $1$ ,  $10$ ,  $100$  y  $1000 \Omega$ , de modo que el cociente  $R_2/R_1$  puede variarse entre  $0,001$  y  $1000$  en pasos decimales. La resistencia variable  $R_3$  es usualmente ajustable entre  $1$  y  $11.000 \Omega$  en valores enteros de resistencia.

Aunque la Ecuación 3.33 implica que  $R_x$  puede variar entre cero e infinito, el rango práctico de  $R_x$  va aproximadamente de  $1 \Omega$  a  $1 \text{ M}\Omega$ . Las resistencias inferiores son difíciles de medir en un puente de Wheatstone estándar, debido a las tensiones termoeléctricas generadas en las uniones de metales distintos y debido a los efectos de calentamiento térmico, es decir, a los efectos  $i^2 R$ . Las resistencias de mayor valor son difíciles de medir con precisión debido a las corrientes de fugas. En otras palabras, si  $R_x$  es grande, la corriente de fugas en el aislamiento eléctrico puede ser comparable a la corriente que atraviesa las ramas del circuito en puente.

### Evaluación del objetivo 5

- Comprender cómo se utiliza un puente de Wheatstone para medir resistencias.

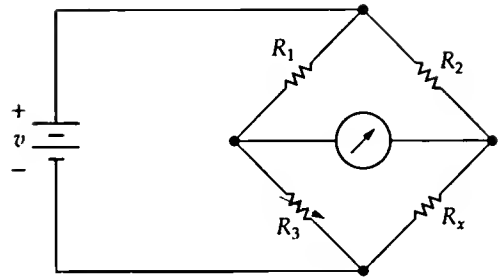
3.7. El circuito en puente mostrado en la figura está equilibrado cuando  $R_1 = 100 \Omega$ ,  $R_2 = 1000 \Omega$  y  $R_3 = 150 \Omega$ . El puente se ali-

menta a partir de una fuente de continua de  $5 \text{ V}$ .

a) ¿Cuál es el valor de  $R_x$ ?

- b) Suponga que cada resistencia del puente es capaz de disipar 250 mW. ¿Puede dejarse el puente en el estado equilibrado sin exceder la capacidad de disipación de potencias de las resistencias, lo que podría dañar el puente?

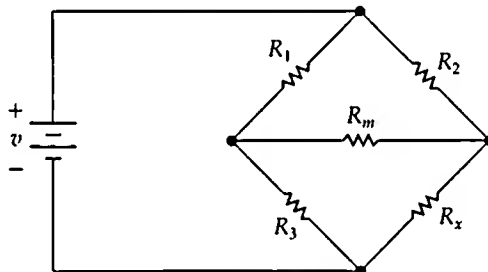
**RESPUESTA** (a) 1500  $\Omega$ ; (b) Sí.



**NOTA** Trate también de resolver el Problema 3.49 del capítulo.

### 3.7. Circuitos equivalentes triángulo-estrella (Pi-T)

La configuración en puente de la Figura 3.26 introduce un modelo de interconexión de las resistencias que merece una explicación adicional. Si sustituimos el galvanómetro por su resistencia equivalente  $R_m$ , podemos dibujar el circuito mostrado en la Figura 3.28. No podemos reducir las resistencias interconectadas de este circuito a una única resistencia equivalente entre los terminales de la batería si nos restringimos a los circuitos equivalentes simples en serie y en paralelo que hemos introducido anteriormente en el capítulo. Las resistencias interconectadas pueden reducirse a una única resistencia equivalente por medio de un circuito equivalente triángulo-estrella ( $\Delta$ -Y) o pi-T ( $\pi$ -T)<sup>1</sup>.



**Figura 3.28.** Red resistiva generada a partir de un circuito en puente de Wheatstone.

Las resistencias  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_m$  (o  $R_3$ ,  $R_m$  y  $R_x$ ) en el circuito mostrado en la Figura 3.28 se denominan **interconexión delta ( $\Delta$ ) o en triángulo**, debido a que la interconexión se asemeja a la letra griega  $\Delta$ , que tiene forma triangular. También se denomina **interconexión en pi** porque la  $\Delta$  puede dibujarse como una  $\pi$  sin perturbar la equivalencia eléctrica de las dos configuraciones. La equivalencia eléctrica entre las conexiones en  $\Delta$  y  $\pi$  resulta aparente en la Figura 3.29.

Las resistencias  $R_1$ ,  $R_m$  y  $R_3$  (o  $R_2$ ,  $R_m$  y  $R_x$ ) en el circuito mostrado en la Figura 3.28 se denominan **interconexión en Y o en estrella**, debido a que la interconexión puede dibujarse de forma que se asemeje a la letra Y. Resulta más sencillo ver la forma de la Y cuando se dibuja la interconexión como en la Figura 3.30. La interconexión en Y también se denomina **interconexión en T** porque la estructura en Y puede dibujarse como una estructura en T sin perturbar la equivalencia eléctrica de las dos estructuras. La equivalencia eléctrica de las configuraciones en Y y en T resulta obvia en la Figura 3.30.

<sup>1</sup> Las estructuras en  $\Delta$  e Y están presentes en muchos circuitos de utilidad, no sólo en las redes resistivas. Por tanto, la transformación  $\Delta$ -Y es una herramienta muy útil en el análisis de circuitos.

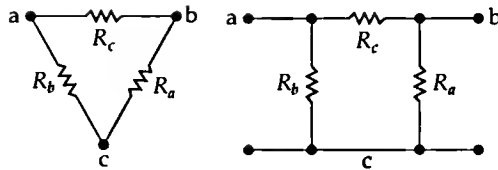


Figura 3.29. Una configuración en  $\Delta$  vista como una configuración en  $\pi$ .

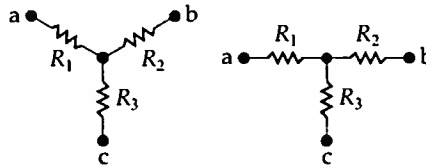


Figura 3.30. Una estructura en Y vista como una estructura en T.

La Figura 3.31 ilustra la transformación de circuitos equivalentes  $\Delta$ -Y (o  $\pi$ -T). Observe que no podemos transformar la interconexión  $\Delta$  en la interconexión en Y simplemente cambiando la forma de las interconexiones. Decir que un circuito conectado en  $\Delta$  es equivalente a otro circuito conectado en Y significa que la configuración en  $\Delta$  puede sustituirse por la configuración en Y sin que exista ninguna diferencia en cuanto al comportamiento en los terminales de las dos configuraciones. Por tanto, si situamos cada circuito en una caja negra, no podremos determinar mediante medidas externas si la caja contiene un conjunto de resistencias conectadas en  $\Delta$  o un conjunto de resistencias conectadas en Y. Esta condición es verdadera únicamente si la resistencia entre las correspondientes parejas de terminales es la misma para los dos circuitos. Por ejemplo, la resistencia entre los terminales a y b debe ser la misma si utilizamos el conjunto conectado en  $\Delta$  o el conjunto conectado en Y. Para cada par de terminales en el circuito conectado en  $\Delta$ , la resistencia equivalente puede calcularse utilizando simplificaciones en serie y en paralelo, con lo que se obtiene

$$R_{ab} = \frac{R_c(R_a + R_b)}{R_a + R_b + R_c} = R_1 + R_2, \quad (3.41)$$

$$R_{bc} = \frac{R_a(R_b + R_c)}{R_a + R_b + R_c} = R_2 + R_3, \quad (3.42)$$

$$R_{ca} = \frac{R_b(R_c + R_a)}{R_a + R_b + R_c} = R_1 + R_3. \quad (3.43)$$

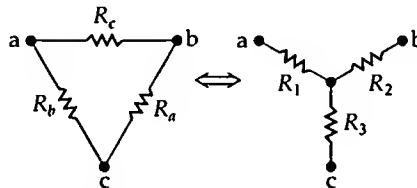


Figura 3.31. Transformación  $\Delta$ -Y.

La manipulación algebraica de las Ecuaciones 3.41-3.43 nos da los valores para las resistencias conectadas en Y en función de las resistencias conectadas en  $\Delta$ , valores requeridos para obtener el circuito equivalente  $\Delta$ -Y:

$$R_1 = \frac{R_b R_c}{R_a + R_b + R_c}, \quad (3.44)$$

$$R_2 = \frac{R_c R_a}{R_a + R_b + R_c}, \quad (3.45)$$

$$R_3 = \frac{R_a R_b}{R_a + R_b + R_c}. \quad (3.46)$$

También es posible invertir la transformación  $\Delta$ -Y. Es decir, podemos partir de la estructura en Y y sustituirla por una estructura en  $\Delta$  equivalente. Las expresiones para las tres resistencias conectadas en  $\Delta$  en función de las tres resistencias conectadas en Y son

$$R_a = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_1}, \quad (3.47)$$

$$R_b = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_2}, \quad (3.48)$$

$$R_c = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_3}. \quad (3.49)$$

El Ejemplo 3.7 ilustra una transformación  $\Delta$ -Y para simplificar el análisis de un circuito.

### EJEMPLO 3.7 Aplicación de una transformación triángulo-estrella

Calcule la corriente y la potencia suministrada por la fuente de 40 V en el circuito mostrado en la Figura 3.32.

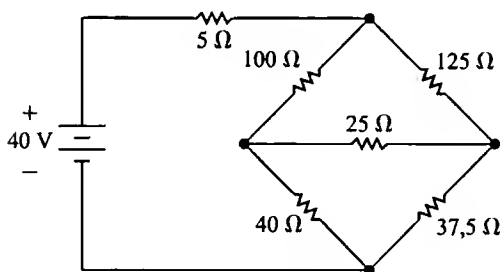


Figura 3.32. Circuito del Ejemplo 3.7.

resistencia equivalente de forma sencilla sin más que sustituir la  $\Delta$  superior (100, 125, 25  $\Omega$ ) o la  $\Delta$  inferior (40, 25, 37,5  $\Omega$ ) por su configuración en Y equivalente. Sustituyamos la  $\Delta$  superior. Podemos entonces calcular las tres resistencias en Y, definidas en la Figura 3.33, a partir de las Ecuaciones 3.44 a 3.46. De esta manera,

$$R_1 = \frac{100 \times 125}{250} = 50 \, \Omega,$$

$$R_2 = \frac{125 \times 25}{250} = 12,5 \, \Omega,$$

$$R_3 = \frac{100 \times 25}{250} = 10 \, \Omega.$$

### SOLUCIÓN

Sólo estamos interesados en la corriente y en el consumo de potencia en la fuente de 40 V, por lo que habremos resuelto el problema sin más que obtener la resistencia equivalente en bornes de los terminales de la fuente. Podemos calcular esta

Sustituyendo las resistencias en Y en el circuito mostrado en la Figura 3.32, se genera el circuito mostrado en la Figura 3.34. A partir de la Figura 3.34, podemos calcular fácilmente la resistencia en bornes de los terminales de la fuen-



te de 40 V mediante simplificaciones serie-paralelo:

$$R_{eq} = 55 + \frac{(50)(50)}{100} = 80 \, \Omega.$$

El paso final consiste en observar que el circuito se reduce a una resistencia de 80  $\Omega$  en bornes de una fuente de 40 V, como se muestra en la Figura 3.35, de donde resulta obvio que la fuente de 40 V suministra 0,5 A y 20 W al circuito.

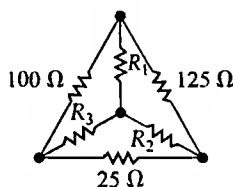


Figura 3.33. Resistencias en Y equivalentes.

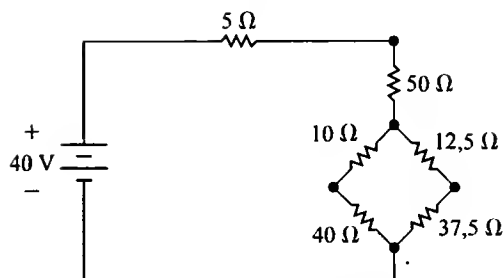


Figura 3.34. Versión transformada del circuito mostrado en la Figura 3.32.

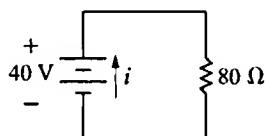


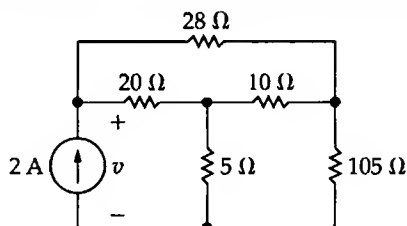
Figura 3.35. Paso final en la simplificación del circuito mostrado en la Figura 3.32.

## Evaluación del objetivo 6

- Saber cuándo y cómo utilizar circuitos equivalentes triángulo-estrella.

3.8. Utilice la transformación Y- $\Delta$  para calcular la tensión  $v$  en el circuito mostrado.

**RESPUESTA** 35 V.

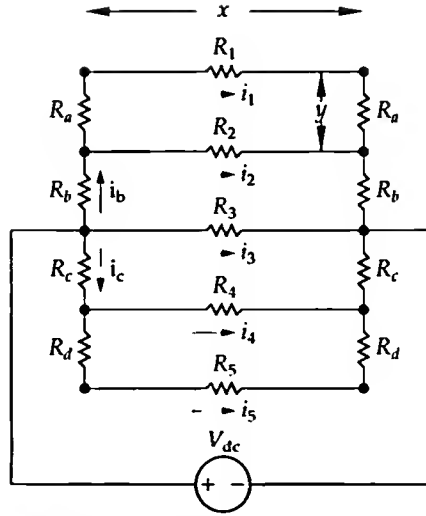


**NOTA** Trate también de resolver los Problemas 3.53, 3.54 y 3.55 del capítulo.

## Perspectiva práctica

### Un luneta térmica

En la Figura 3.36 se muestra un modelo de una rejilla térmica, donde  $x$  e  $y$  designan el espaciado horizontal y vertical de los elementos de la rejilla. Dadas las dimensiones de la rejilla, necesitamos encontrar las expresiones que nos den el valor de cada resistencia de la rejilla de modo que la potencia disipada por unidad de longitud sea la misma en cada conductor. Esto garantizará un calentamiento uniforme de la luneta trasera en las direcciones  $x$  e  $y$ . Por tanto, necesitamos determinar valores para las resistencias de la rejilla que satisfagan las siguientes relaciones:



**Figura 3.36.** Modelo de una rejilla térmica.

$$i_1^2 \left( \frac{R_1}{x} \right) = i_2^2 \left( \frac{R_2}{x} \right) = i_3^2 \left( \frac{R_3}{x} \right) = i_4^2 \left( \frac{R_4}{x} \right) = i_5^2 \left( \frac{R_5}{x} \right), \quad (3.50)$$

$$i_1^2 \left( \frac{R_a}{y} \right) = i_1^2 \left( \frac{R_1}{x} \right), \quad (3.51)$$

$$i_1^2 \left( \frac{R_a}{y} \right) = i_b^2 \left( \frac{R_b}{y} \right) = i_c^2 \left( \frac{R_c}{y} \right) = i_5^2 \left( \frac{R_d}{y} \right), \quad (3.52)$$

$$i_5^2 \left( \frac{R_d}{y} \right) = i_5^2 \left( \frac{R_5}{x} \right). \quad (3.53)$$

Comenzamos el análisis de la rejilla aprovechando la estructura que ésta presenta. Observe que, si desconectamos la parte inferior del circuito (es decir, las resistencias  $R_c$ ,  $R_d$ ,  $R_4$  y  $R_5$ ) las corrientes  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $i_3$  e  $i_b$  no se ven afectadas. Por tanto, en lugar de analizar el circuito de la Figura 3.36, podemos analizar el circuito más simple de la Figura 3.37. Observe también que, después de determinar  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ ,  $R_a$  y  $R_b$  en el circuito de la Figura 3.37, también habremos hallado los valores de las resistencias restantes, dado que

$$R_4 = R_2, \quad R_5 = R_1, \quad R_c = R_b, \quad R_d = R_a. \quad (3.54)$$

Comencemos el análisis del circuito simplificado de la rejilla mostrado en la Figura 3.37 escribiendo las expresiones de las corrientes  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $i_3$  e  $i_b$ . Para calcular  $i_b$ , determinamos la resistencia equivalente en paralelo con  $R_3$ :

$$\begin{aligned} R_c &= 2R_b + \frac{R_2(R_1 + 2R_a)}{R_1 + R_2 + 2R_a} \\ &= \frac{(R_1 + 2R_a)(R_2 + 2R_b) + 2R_2R_b}{(R_1 + R_2 + 2R_a)}. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Para mayor comodidad, definamos el numerador de la Ecuación 3.55 como

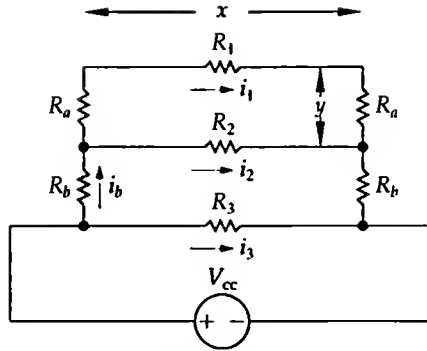


Figura 3.37. Un modelo simplificado de la rejilla térmica.

$$D = (R_1 + R_a)(R_2 + 2R_b) + 2R_2R_b, \quad (3.56)$$

y, por tanto,

$$R_e = \frac{D}{(R_1 + R_2 + 2R_a)}. \quad (3.57)$$

De aquí se sigue directamente que

$$\begin{aligned} i_b &= \frac{V_{cc}}{R_e} \\ &= \frac{V_{cc}(R_1 + R_2 + 2R_a)}{D}. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Las ecuaciones para  $i_1$  e  $i_2$  puede hallarse directamente a partir de  $i_b$  utilizando la técnica de división de corriente. De este modo,

$$i_1 = \frac{i_b R_2}{(R_1 + R_2 + 2R_a)} = \frac{V_{cc} R_2}{D}, \quad (3.59)$$

y

$$i_2 = \frac{i_b (R_1 + 2R_a)}{(R_1 + R_2 + 2R_a)} = \frac{V_{cc} (R_1 + 2R_a)}{D}. \quad (3.60)$$

La expresión de  $i_3$  será simplemente

$$i_3 = \frac{V_{cc}}{R_3}. \quad (3.61)$$

Ahora, utilizamos las restricciones de las Ecuaciones 3.50-3.52 para determinar las ecuaciones correspondientes a  $R_a$ ,  $R_b$ ,  $R_2$  y  $R_3$  en función de  $R_1$ . A partir de la Ecuación 3.51,

$$\frac{R_a}{y} = \frac{R_1}{x},$$

o bien

$$R_a = \frac{y}{x} R_1 = \sigma R_1,$$

donde

$$\sigma = y/x. \quad (3.62)$$

Entonces, a partir de la Ecuación 3.50, tenemos que

$$R_2 = \left(\frac{i_1}{i_2}\right)^2 R_1. \quad (3.63)$$

El cociente  $(i_1/i_2)$  se obtiene directamente de las Ecuaciones 3.59 y 3.60:

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{R_2}{R_1 + 2R_a} = \frac{R_2}{R_1 + 2\sigma R_1}. \quad (3.64)$$

Cuando se sustituye la Ecuación 3.64 en la Ecuación 3.63, se obtiene, después de una cierta manipulación algebraica (véase el Problema 3.69),

$$R_2 = (1 + 2\sigma)^2 R_1. \quad (3.65)$$

La ecuación que nos da  $R_b$  en función de  $R_1$  se deriva de la restricción impuesta por la Ecuación 3.52; específicamente,

$$R_b = \left(\frac{i_1}{i_b}\right)^2 R_a. \quad (3.66)$$

El cociente  $(i_1/i_b)$  se deduce de las Ecuaciones 3.58 y 3.59:

$$\frac{i_1}{i_b} = \frac{R_2}{(R_1 + R_2 + 2R_a)}. \quad (3.67)$$

Cuando se sustituye la Ecuación 3.67 en la Ecuación 3.66, se obtiene, después de ciertas manipulaciones algebraicas (véase el Problema 3.69),

$$R_b = \frac{(1 + 2\sigma)^2 \sigma R_1}{4(1 + \sigma)^2}. \quad (3.68)$$

Finalmente, la expresión de  $R_3$  puede obtenerse a partir de la restricción proporcionada en la Ecuación 3.50, resultando

$$R_3 = \left(\frac{i_1}{i_3}\right)^2 R_1, \quad (3.69)$$

donde

$$\frac{i_1}{i_3} = \frac{R_2 R_3}{D}.$$

Una vez más, después de ciertas operaciones algebraicas (véase el Problema 3.70), la expresión correspondiente a  $R_3$  puede reducirse a

$$R_3 = \frac{(1 + 2\sigma)^4}{(1 + \sigma)^2} R_1. \quad (3.70)$$

El resultado de nuestro análisis se resume en la Tabla 3.1.

**Tabla 3.1.** Resumen de las ecuaciones de las resistencias para la rejilla térmica.

RESISTENCIA	EXPRESIÓN
$R_a$	$\sigma R_1$
$R_b$	$\frac{(1 + 2\sigma)^2 \sigma R_1}{4(1 + \sigma)^2}$
$R_2$	$(1 + 2\sigma)^2 R_1$
$R_3$	$\frac{(1 + 2\sigma)^4}{(1 + \sigma)^2} R_1$ donde $\sigma = y/x$

**NOTA** Evalúe su comprensión de la Perspectiva práctica tratando de resolver los Problemas 3.71-3.73 del capítulo.

## RESUMEN

- Las **resistencias en serie** pueden combinarse para obtener una única resistencia equivalente de acuerdo con la ecuación

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^k R_i = R_1 + R_2 + \cdots + R_k.$$

(Véase la página 69).

- Las **resistencias en paralelo** pueden combinarse para obtener una única resistencia equivalente de acuerdo con la ecuación

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^k \frac{1}{R_i} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_k}.$$

Cuando sólo hay dos resistencias en paralelo, la ecuación de la resistencia equivalente puede simplificarse, obteniéndose

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

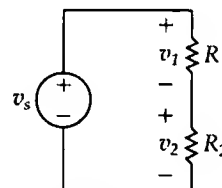
(Véanse las páginas 69-71).

- Cuando se divide la tensión entre resistencias en serie, como se muestra en la figura, la tensión en bornes de cada resistencia

puede determinarse de acuerdo con las ecuaciones

$$v_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} v_s,$$

$$v_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v_s.$$



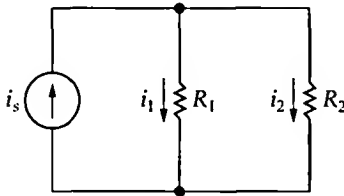
(Véase la página 73).

- Cuando se divide la corriente entre resistencias en paralelo, como se muestra en la figura, la corriente que atraviesa cada resistencia puede determinarse de acuerdo con las ecuaciones

$$i_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i_s,$$

$$i_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i_s.$$

(Véase la página 72).



- La técnica de **división de tensión** es una herramienta de análisis de circuitos utilizada para determinar la caída de tensión en una única resistencia de entre un conjunto de resistencias conectadas en serie, cuando se conoce la caída de tensión global del conjunto:

$$v_j = \frac{R_j}{R_{eq}} v,$$

donde  $v_j$  es la caída de tensión en la resistencia  $R_j$  y  $v$  es la caída de tensión en el conjunto de todas las resistencias conectadas en serie cuya resistencia equivalente es  $R_{eq}$  (véase la página 77).

- La técnica de **división de corriente** es una herramienta de análisis de circuitos utilizada para determinar la corriente que atraviesa una única resistencia de entre un conjunto de resistencias conectadas en paralelo, cuando se conoce la corriente que entra en el conjunto:

$$i_j = \frac{R_{eq}}{R_j} i,$$

donde  $i_j$  es la corriente a través de la resistencia  $R_j$  e  $i$  es la corriente que entra en el conjunto de resistencias conectadas en paralelo cuya resistencia equivalente es  $R_{eq}$  (véase la página 78).

- Un **voltímetro** mide la tensión y debe colocarse en paralelo con la tensión que se quiere medir. Un voltímetro ideal tiene una resistencia interna infinita y, por tanto, no altera la tensión que se quiere medir (véase la página 80).
- Un **amperímetro** mide la corriente y debe colocarse en serie con la corriente que se quiere medir. Un amperímetro lineal tiene una resistencia interna nula y, por tanto, no altera la corriente que se está midiendo (véase la página 80).
- Los **polímetros digitales** y los **polímetros analógicos** tienen una resistencia interna, que influye sobre el valor de la variable de circuito que se quiere medir. Los polímetros basados en el medidor de d'Arsonval incluyen deliberadamente una resistencia interna como forma de limitar la corriente que atraviesa la bobina del medidor (véase la página 81).
- El circuito en **punto de Wheatstone** se utiliza para realizar medidas precisas de valores de resistencia utilizando cuatro resistencias, una fuente de tensión cc y un galvanómetro. Un punto de Wheatstone está equilibrado cuando las resistencias cumplen la Ecuación 3.33, lo que da una lectura de 0 A en el galvanómetro (véase la página 84).
- Un circuito con tres resistencias conectadas en configuración  $\Delta$  (o configuración  $\pi$ ) puede transformarse en un circuito equivalente en el que las tres resistencias estén conectadas en Y (o en T). La transformación  $\Delta$ -Y está dada por las Ecuaciones 3.44-3.46; la transformación Y- $\Delta$  está dada por las Ecuaciones 3.47-3.49 (véase la página 88).

## PROBLEMAS

- 3.1. Para cada uno de los circuitos mostrados,
  - a) identifique las resistencias conectadas en serie,

- b) simplifique el circuito sustituyendo las resistencias conectadas en serie por resistencias equivalentes.

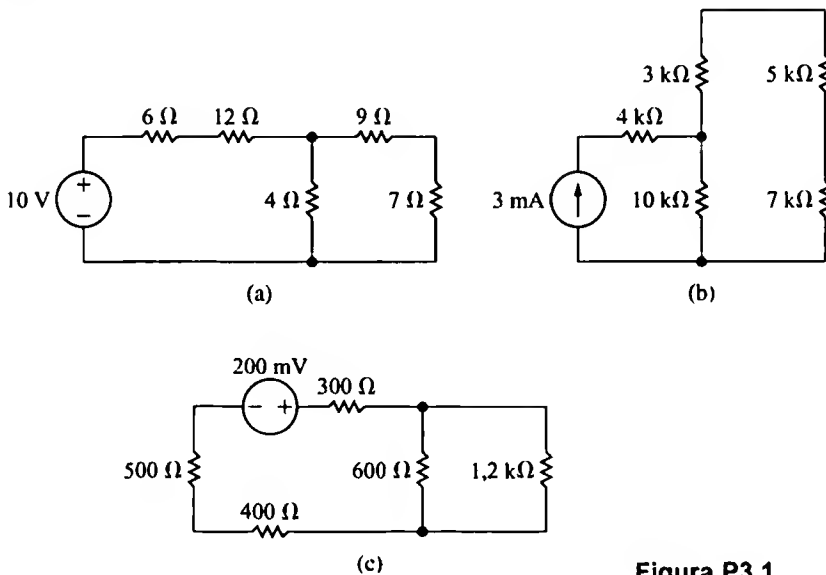


Figura P3.1

3.2. Para cada uno de los circuitos mostrados,

- identifique las resistencias conectadas en paralelo,
- simplifique el circuito sustituyendo las resistencias conectadas en paralelo por resistencias equivalentes.

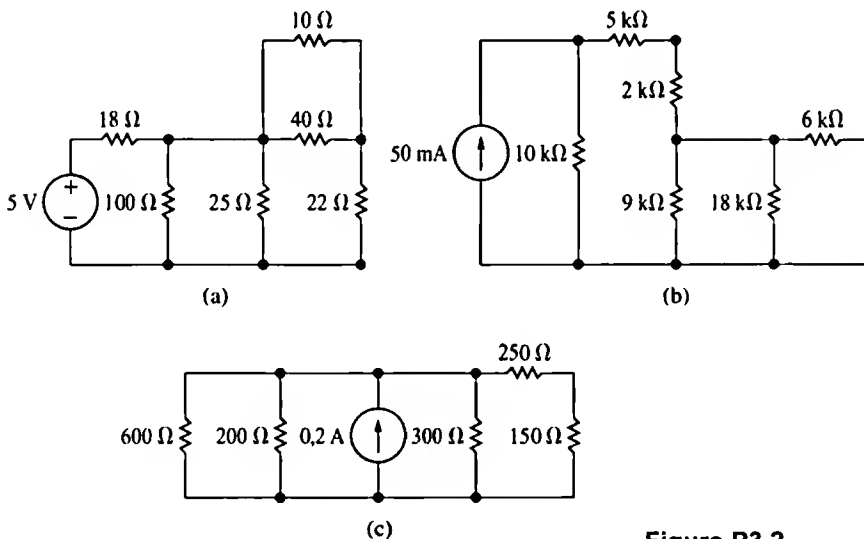


Figura P3.2

- 3.3. a) Calcule la potencia disipada en cada resistencia en el circuito mostrado en la Figura 3.9.  
 b) Calcule la potencia suministrada por la fuente de 120 V.  
 c) Demuestre que la potencia suministrada es igual a la potencia disipada.

3.4. a) Demuestre que la solución del circuito de la Figura 3.9 (véase el Ejemplo 3.1) satisface la ley de Kirchhoff de las corrientes en las uniones  $x$  e  $y$ .



b) Demuestre que la solución del circuito de la Figura 3.9 satisface la ley de Kirchhoff de las tensiones alrededor de cada uno de los lazos cerrados.

3.5. Calcule la resistencia equivalente vista por la fuente en los circuitos del Problema 3.1.

3.6. Calcule la resistencia equivalente vista por la fuente en los circuitos del Problema 3.2.

3.7. Calcule la resistencia equivalente  $R_{ab}$  para cada uno de los circuitos de la Figura P3.7.

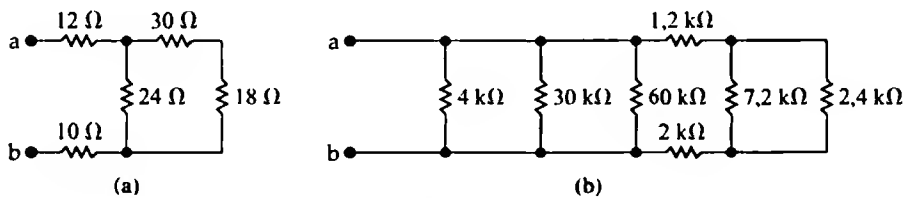


Figura P3.7

3.8. Calcule la resistencia equivalente  $R_{ab}$  para cada uno de los circuitos de la Figura P3.8.

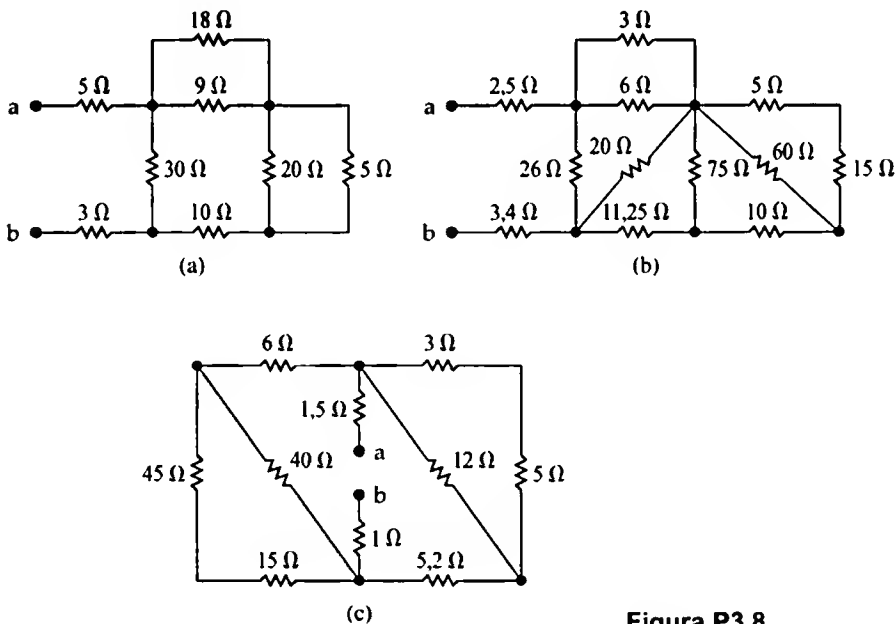


Figura P3.8

3.9. a) En los circuitos de la Figura P3.9(a)-(c), calcule la resistencia equivalente  $R_{ab}$ .



b) Para cada circuito, calcule la potencia suministrada por la fuente.

3.10. Calcule la potencia disipada en la resistencia de  $5\ \Omega$  en el circuito de la Figura P3.10.





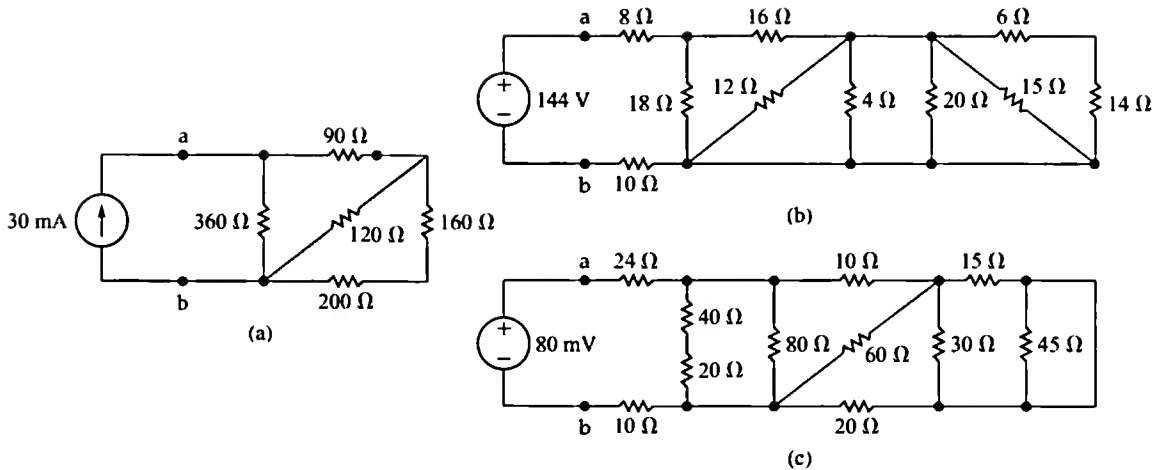


Figura P3.9

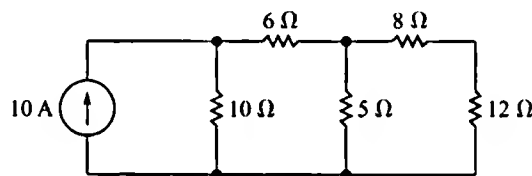


Figura P3.10

3.11. Para el circuito de la Figura P3.11, calcule



- $v_o$  e  $i_o$ ,
- la potencia disipada en la resistencia de  $15\ \Omega$ ,
- la potencia generada por la fuente de tensión.

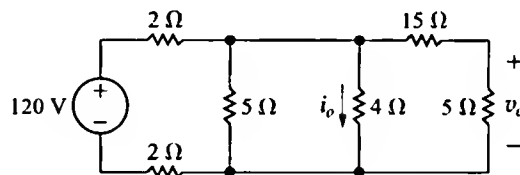


Figura P3.11

- Determine una expresión para la resistencia equivalente a dos resistencias de valor  $R$  en paralelo.
- Determine una expresión para la resistencia equivalente a  $n$  resistencias de valor  $R$  en paralelo.
- Utilizando los resultados del apartado (b), diseñe una red resistiva con una resistencia equivalente de  $400\ \Omega$  utilizando resistencias de  $2\ \text{k}\Omega$ .
- Utilizando los resultados del apartado (b), diseñe una red resistiva con una resistencia equivalente de  $12,5\ \Omega$  utilizando resistencias de  $100\ \text{k}\Omega$ .

- 3.13. a) Calcule la tensión en vacío  $v_o$  para el circuito divisor de tensión mostrado en la Figura P3.13.  
❖ b) Calcule la potencia disipada en  $R_1$  y  $R_2$ .



c) Suponga que sólo hay disponibles resistencias de 1 W. La tensión en vacío debe ser la misma que se haya calculado en el apartado (a). Especifique los valores óhmicos de  $R_1$  y  $R_2$ .

- 3.14. En el circuito divisor de tensión mostrado en la Figura P3.14, el valor en vacío de  $v_o$  es de 6 V. Cuando se conecta la resistencia de carga  $R_L$  entre los terminales a y b,  $v_o$  cae a 4 V. Calcule el valor de  $R_L$ .

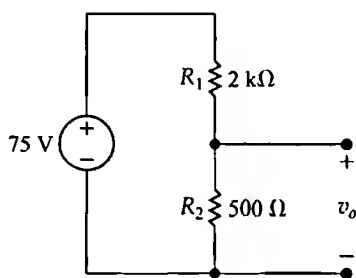


Figura P3.13

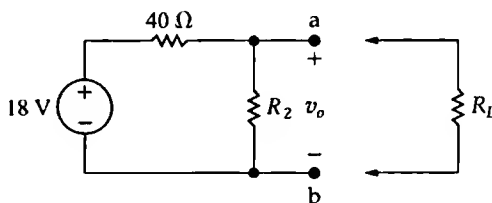


Figura P3.14

- 3.15. La tensión en vacío en el circuito divisor de tensión mostrado en la Figura P3.15 es de 8 V. La resistencia de carga más pequeña que se conecta al divisor es de 3,6 kΩ. Cuando el divisor esté cargado,  $v_o$  no debe caer por debajo de 7,5 V.



- a) Diseñe el circuito divisor para cumplir las especificaciones mencionadas. Indique los valores numéricos de  $R_1$  y  $R_2$ .  
b) Suponga que la potencia nominal de las resistencias disponibles comercialmente es de 1/16, 1/8, 1/4, 1 y 2 W. ¿Qué potencia nominal especificaría?

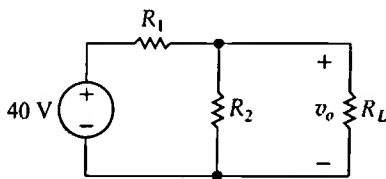


Figura P3.15

- 3.16. Suponga que el divisor de tensión de la Figura P3.15 se construye con resistencias de 1 W. ¿Hasta qué valor se puede bajar  $R_L$  antes de que alguna de las resistencias del divisor comience a operar más allá de su límite de disipación?
- 3.17. a) El divisor de tensión de la Figura P3.17(a) se carga con el divisor de tensión mostrado en la Figura P3.17(b); es decir, a se conecta con a' y b se conecta con b'. Calcule  $v_o$ .  
☐ b) Ahora suponga que el divisor de tensión de la Figura P3.17(b) se conecta al divisor de tensión de la Figura P3.17(a) por medio de una fuente de tensión controlada por corriente, como se muestra en la Figura P3.17(c). Calcule  $v_o$ .  
c) ¿Qué efecto tiene el añadir la fuente dependiente de tensión sobre la operación del divisor de tensión que está conectado a la fuente de 240 V?

- 3.18. A menudo surge la necesidad de generar más de una tensión utilizando un divisor de tensión. Por ejemplo, los componentes de memoria de muchas computadoras personales requieren tensiones

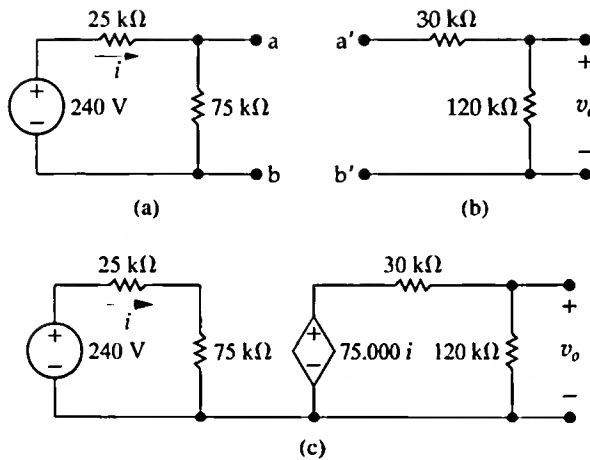


Figura P3.17

de  $-12\text{ V}$ ,  $6\text{ V}$  y  $+12\text{ V}$ , todas ellas con respecto a un terminal de referencia común. Seleccione los valores de  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$  en el circuito de la Figura P3.18 para satisfacer los siguientes requisitos de diseño:

- La potencia total suministrada al circuito divisor por la fuente de  $24\text{ V}$  es de  $36\text{ W}$  cuando el divisor no tiene ninguna carga.
- Las tres tensiones, todas medidas con respecto al terminal de referencia común, son  $v_1 = 12\text{ V}$ ,  $v_2 = 6\text{ V}$  y  $v_3 = -12\text{ V}$ .

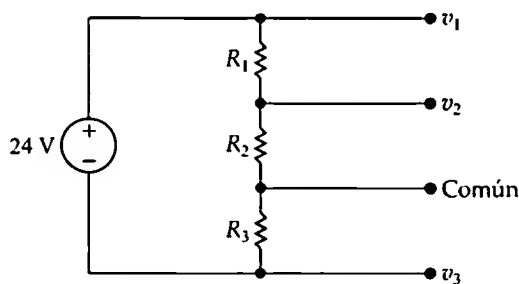


Figura P3.18

**3.19.** Necesitamos diseñar un divisor de tensión como el de la Figura 3.13 de modo que  $v_o = kv_s$  en vacío ( $R_L = \infty$ ) y  $v_o = \alpha v_s$  a plena carga ( $R_L = R_o$ ). Observe que, por definición,  $\alpha < k < 1$ .

- Demuestre que

$$R_1 = \frac{k - \alpha}{\alpha k} R_o$$

y

$$R_2 = \frac{k - \alpha}{\alpha(1 - k)} R_o.$$

- Especifique los valores numéricos de  $R_1$  y  $R_2$  si  $k = 0,85$ ,  $\alpha = 0,80$  y  $R_o = 34\text{ k}\Omega$ .
- Si  $v_s = 60\text{ V}$ , especifique la potencia máxima que se disipará en  $R_1$  y en  $R_2$ .
- Suponga que la resistencia de carga se cortocircuita accidentalmente. ¿Cuánta potencia se disipará en  $R_1$  y en  $R_2$ ?

- 3.20. a) Demuestre que la corriente en la  $k$ -ésima rama del circuito de la Figura P3.20(a) es igual a la corriente de la fuente,  $i_g$ , multiplicada por la conductancia de la  $k$ -ésima rama dividida por la suma de las conductancias, es decir,

$$i_k = \frac{i_g G_k}{G_1 + G_2 + G_3 + \cdots + G_k + \cdots + G_N}.$$

- b) Utilice el resultado obtenido en (a) para calcular la corriente que atraviesa la resistencia de  $800\ \Omega$  en el circuito de la Figura P3.20(b).

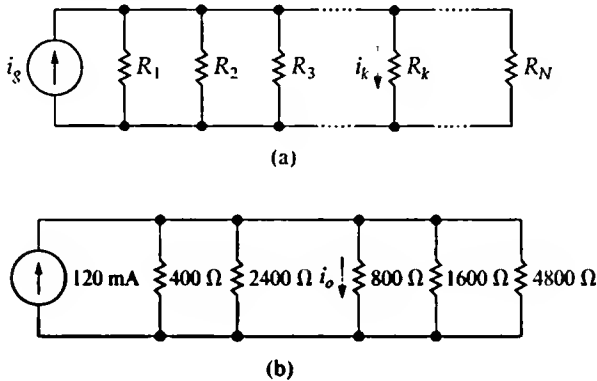


Figura P3.20

- 3.21. Especifique las resistencias del circuito de la Figura P3.21 con el fin de satisfacer los siguientes criterios de diseño:

$$i_g = 8\text{ mA}; v_g = 4\text{ V}; i_1 = 2i_2;$$

$$i_2 = 10i_3; \text{ e } i_3 = i_4.$$

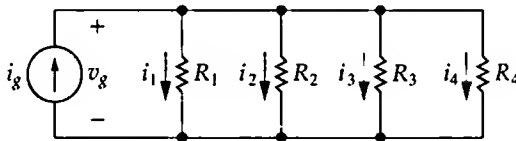


Figura P3.21

- 3.22. Utilice las técnicas de división de tensión o división de corriente para calcular la tensión o corriente especificada:
- Suponga que la caída de tensión en la resistencia de  $24\ \Omega$  de la Figura P3.7(a) es de  $40\text{ V}$ , siendo la tensión positiva en la parte superior de la resistencia. ¿Cuál es la caída de tensión en la resistencia de  $18\ \Omega$ ?
  - Suponga que la corriente que atraviesa la resistencia de  $10\ \Omega$  en la Figura P3.7(a) es de  $60\text{ mA}$ , fluyendo de izquierda a derecha. ¿Qué corriente fluye a través de la resistencia de  $30\ \Omega$ ?
  - Suponga que la corriente que atraviesa la resistencia de  $1,2\text{ k}\Omega$  en la Figura P3.7(b) es de  $9\text{ mA}$ , fluyendo de izquierda a derecha. ¿Cuál es la corriente que atraviesa la resistencia de  $30\text{ k}\Omega$ ?
  - Suponga que la caída de tensión en bornes de la resistencia de  $4\text{ k}\Omega$  en la Figura P3.7(b) es de  $50\text{ V}$ , siendo la tensión positiva en la parte superior de la resistencia. ¿Cuál es la caída de tensión en bornes de la resistencia de  $2,4\text{ k}\Omega$ ?

3.23. Utilice las técnicas de división de corriente y división de tensión para calcular la tensión o la corriente especificadas:

- Suponga que la caída de tensión en la resistencia de  $30\ \Omega$  de la Figura P3.8(a) es de  $100\ \text{mV}$ , siendo la tensión positiva en la parte superior de la resistencia. ¿Cuál es la caída de tensión en bornes de la resistencia de  $18\ \Omega$ ?
- Suponga que la caída de tensión en la resistencia de  $75\ \Omega$  de la Figura P3.8(b) es de  $10\ \text{V}$ , siendo la tensión positiva en la parte superior de la resistencia. ¿Cuál es la caída de tensión en la resistencia de  $15\ \Omega$ ?
- Suponga que la corriente que atraviesa la resistencia de  $5,2\ \Omega$  de la Figura P3.8(c) es de  $3\ \text{A}$ , fluyendo de izquierda a derecha. ¿Cuál es la corriente que atraviesa la resistencia de  $45\ \Omega$ ?

3.24. a) Calcule la tensión  $v_x$  en el circuito de la Figura P3.24.



- b) Sustituya la fuente de  $45\ \text{V}$  por una fuente de tensión de valor igual a  $V_s$ . Suponga que  $V_s$  es positiva en el terminal superior. Calcule  $v_x$  en función de  $V_s$ .

3.25. Calcule  $v_1$  y  $v_2$  en el circuito de la Figura P3.25.

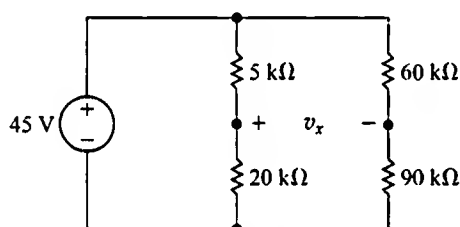


Figura P3.24

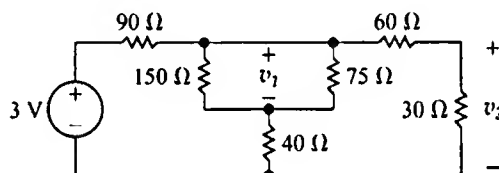


Figura P3.25

3.26. Calcule  $v_o$  en el circuito de la Figura P3.26.



3.27. Calcule  $i_o$  e  $i_g$  en el circuito de la Figura P3.27.

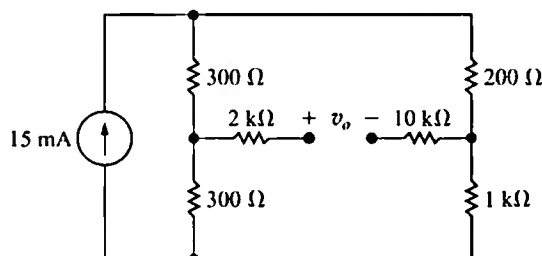


Figura P3.26

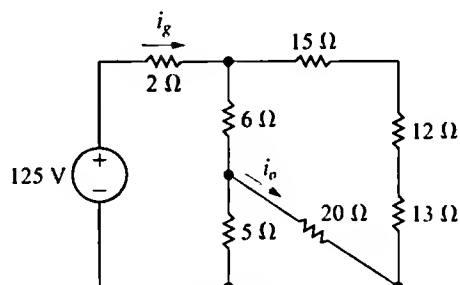


Figura P3.27

3.28. Para el circuito de la Figura P3.28, calcule (a)  $i_o$  y (b) la potencia disipada en la resistencia de  $90\ \Omega$ .



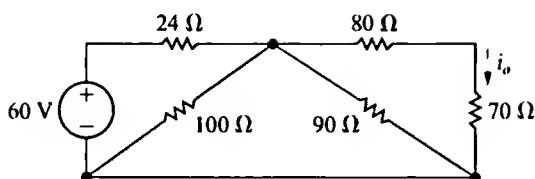


Figura P3.28

3.29. La corriente que atraviesa la resistencia de  $9\ \Omega$  en el circuito de la Figura P3.29 es de  $1\text{ A}$ , como se muestra.



- Calcule  $v_g$ .
- Calcule la potencia disipada en la resistencia de  $20\ \Omega$ .

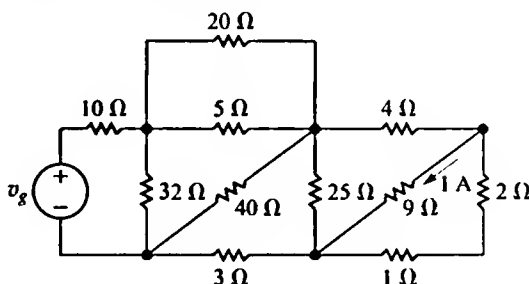


Figura P3.29

3.30. En el circuito de la Figura P3.30(a), el dispositivo etiquetado como D representa un componente cuyo circuito equivalente se muestra en la Figura P3.30(b). Las etiquetas en los terminales de D muestran cómo se conecta el dispositivo al circuito. Calcule  $v_x$  y la potencia absorbida por el dispositivo.

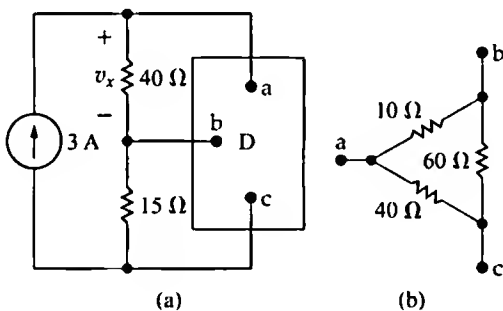


Figura P3.30

- Demuestre, para el circuito amperimétrico de la Figura P3.31, que la corriente en el medidor de d'Arsonval es siempre el 1% de la corriente que se esté midiendo.
  - ¿Cuál sería ese porcentaje si se utilizara el medidor de  $100\ \mu\text{V}$ ,  $10\ \mu\text{A}$  en un amperímetro de  $1\text{ A}$ ?
  - ¿Podemos esperar encontrarnos una escala uniforme en un amperímetro d'Arsonval para corriente continua?
- 3.32. El amperímetro del circuito de la Figura P3.32 tiene una resistencia de  $0,1\ \Omega$ . Indique el porcentaje de error en la lectura de este amperímetro si

$$\% \text{ error} = \left( \frac{\text{valor medido}}{\text{valor real}} - 1 \right) \times 100.$$

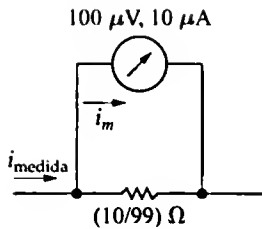


Figura P3.31

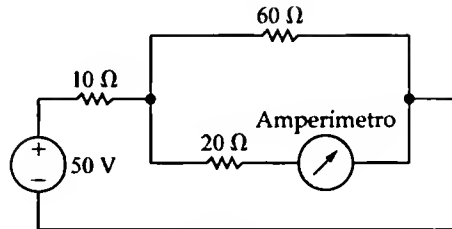


Figura P3.32

- 3.33. Utilizamos el amperímetro descrito en el Problema 3.32 para medir la corriente  $i_o$  en el circuito de la Figura P3.33. ¿Cuál es el porcentaje de error en el valor medido?
- 3.34. En la Figura P3.34 se muestra un voltímetro de d'Arsonval. Calcule el valor de  $R_V$  para cada una de las siguientes lecturas a fondo de escala: (a) 50 V, (b) 5 V, (c) 250 mV y (d) 25 mV.

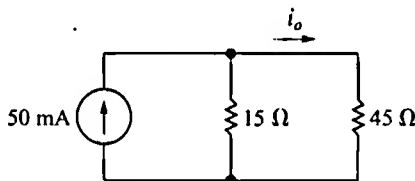


Figura P3.33

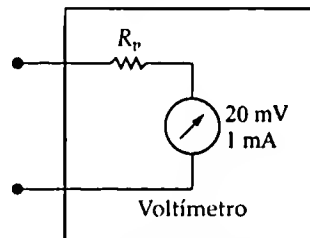


Figura P3.34

- 3.35. Suponga que utilizamos el voltímetro de d'Arsonval descrito en el Problema 3.34(b) para medir la tensión que cae en la resistencia de 45 Ω de la Figura P3.33.
- ¿Cuál será la lectura del voltímetro?
  - Utilizando la definición del porcentaje de error en la lectura de un medidor que hemos determinado en el Problema 3.32, ¿cuál es el porcentaje de error en la lectura del voltímetro?
- 3.36. Se utiliza una resistencia en derivación y un medidor de d'Arsonval de 50 mV y 1 mA para construir un amperímetro de 5 A. Se coloca una resistencia de 0,02 Ω entre los terminales del amperímetro. ¿Cuál será la nueva lectura a fondo de escala del amperímetro?
- 3.37. Un medidor de d'Arsonval tiene valores nominales de 2 mA y 100 mV. Suponga que hay disponibles resistencias de precisión de 0,25 W para utilizarlas como derivación. ¿Cuál es el amperímetro con mayor lectura a fondo de escala que puede diseñarse? Explique su respuesta.
- 3.38. En la Figura P3.38 se muestra un amperímetro de d'Arsonval. Diseñe un conjunto de amperímetros de d'Arsonval para obtener las siguientes lecturas de corriente a fondo de escala: (a) 10 A, (b) 1 A, (c) 10 mA y (d) 100 μA. Especifique la resistencia de derivación  $R_A$  para cada amperímetro.
- 3.39. Los elementos del circuito de la Figura 2.24 tienen los siguientes valores:  $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 50 \text{ k}\Omega$ ,  $R_C = 0,5 \text{ k}\Omega$ ,  $R_E = 0,3 \text{ k}\Omega$ ,  $V_{CC} = 12 \text{ V}$ ,  $V_0 = 0,4 \text{ V}$  y  $\beta = 29$ .

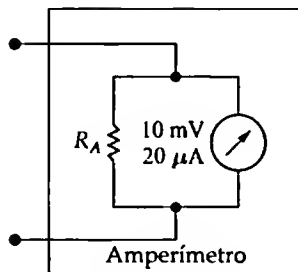


Figura P3.38

- Calcule el valor de  $i_B$  en microamperios.
  - Suponga que un voltímetro digital, cuando se lo utiliza como amperímetro de continua, tiene una resistencia de  $2\text{ k}\Omega$ . Si insertamos el medidor entre los terminales b y 2 para medir la corriente  $i_B$ , ¿cuál será la lectura del medidor?
  - Utilizando el valor de  $i_B$  calculado en el apartado (a) como valor correcto, ¿cuál es el porcentaje de error en la medida?
- 3.40.** Diseñamos un circuito divisor de tensión, mostrado en la Figura P3.40, de modo que la tensión de salida en vacío sea un 80% de la tensión de entrada. Utilizamos un voltímetro de d'Arsonval con una sensibilidad de  $100\text{ }\Omega/\text{V}$  y un valor a fondo de escala nominal de  $100\text{ V}$  para comprobar la operación del circuito.
- ¿Cuál será la lectura proporcionada por el voltímetro si se lo conecta en bornes de la fuente de  $100\text{ V}$ ?
  - ¿Cuál será la lectura proporcionada por el voltímetro si se lo coloca en bornes de la resistencia de  $60\text{ k}\Omega$ ?
  - ¿Cuál será la lectura proporcionada por el voltímetro si se lo coloca en bornes de la resistencia de  $15\text{ k}\Omega$ ?
  - ¿Será la suma las lecturas del voltímetro obtenidas en los apartados (b) y (c) igual a la lectura obtenida en el apartado (a)? Explique por qué o por qué no.

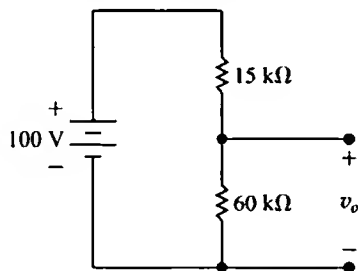


Figura P3.40

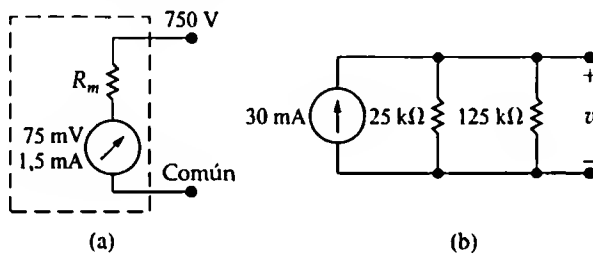
- 3.41.** Nos dicen que la tensión cc de una fuente de alimentación es de unos  $400\text{ V}$ . Cuando vamos al laboratorio para buscar un voltímetro de continua con el que medir la tensión de la fuente de alimentación, vemos que sólo hay dos voltímetros de continua disponibles. Uno de ellos es de  $300\text{ V}$  nominales a fondo de escala y tiene una sensibilidad de  $1000\text{ }\Omega/\text{V}$ . El otro voltímetro tiene un valor nominal de  $150\text{ V}$  a fondo de escala y una sensibilidad de  $800\text{ }\Omega/\text{V}$ .
- ¿Cómo pueden utilizarse los dos voltímetros para comprobar la tensión de la fuente de alimentación?
  - ¿Cuál es la máxima tensión que puede medirse?



c) Si la tensión de la fuente de alimentación fuera de 399 V, ¿qué lectura proporcionaría cada voltímetro?

**3.42.** Suponga que, además de los dos voltímetros descritos en el Problema 3.41, hay disponible también una resistencia de precisión de  $80\text{ k}\Omega$ . La resistencia de  $80\text{ k}\Omega$  se conecta en serie con los dos voltímetros conectados en serie. El circuito resultante se conecta entonces en bornes de los terminales de la fuente de alimentación. La lectura proporcionada por el voltímetro de  $300\text{ V}$  es de  $288\text{ V}$ , mientras que la lectura proporcionada por el voltímetro de  $150\text{ V}$  es de  $115,2\text{ V}$ . ¿Cuál es la tensión de la fuente de alimentación?

**3.43.** El voltímetro mostrado en la Figura P3.43(a) tiene una lectura a fondo de escala de  $750\text{ V}$ . El medidor tiene valores nominales de  $75\text{ mV}$  y  $1,5\text{ mA}$ . ¿Cuál es el porcentaje de error en la lectura del medidor si se lo emplea para medir la tensión  $v$  en el circuito de la Figura P3.43(b)?

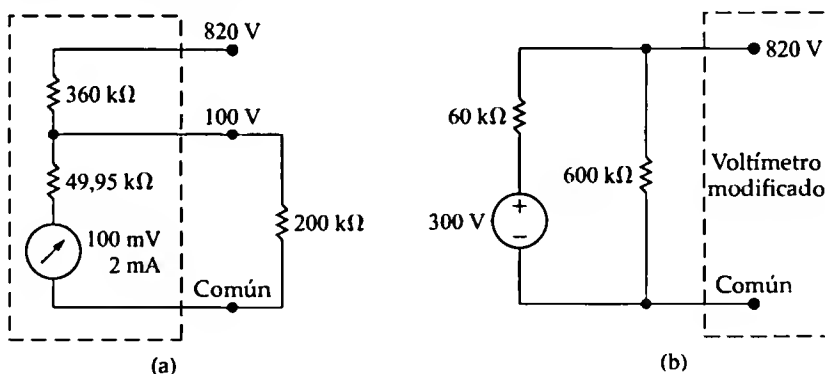


**Figura P3.43**

**3.44.** Se conecta una resistencia de  $200\text{ k}\Omega$  entre el terminal de  $100\text{ V}$  y el terminal común de un voltímetro de doble escala, como se muestra en la Figura P3.44(a). Este voltímetro modificado se usa entonces para medir la tensión que cae en la resistencia de  $600\text{ k}\Omega$  del circuito de la Figura P3.44(b).

a) ¿Cuál es la lectura en la escala de  $820\text{ V}$  del medidor?

b) ¿Cuál es el porcentaje de error de la tensión medida?



**Figura P3.44**

**3.45.** Suponga, al diseñar el voltímetro multirango mostrado en la Figura P3.45, que ignoramos la resistencia del medidor.

a) Especifique los valores de  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$ .

b) Para cada uno de los tres rangos, calcule el porcentaje de error que se obtiene con esta estrategia de diseño.

3.46. Diseñe un voltímetro de d'Arsonval que tenga los tres rangos de tensión mostrados en la Figura P3.46.

- Especifique los valores de  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$ .
- Suponga que se conecta una resistencia de  $750\text{ k}\Omega$  entre el terminal de  $150\text{ V}$  y el terminal común. A continuación, se conecta el voltímetro a una tensión desconocida utilizando el terminal común y el terminal de  $300\text{ V}$ . La lectura proporcionada por el voltímetro es de  $288\text{ V}$ . ¿Qué valor tiene la tensión desconocida?
- ¿Cuál es la máxima tensión que el voltímetro del apartado (b) puede medir?

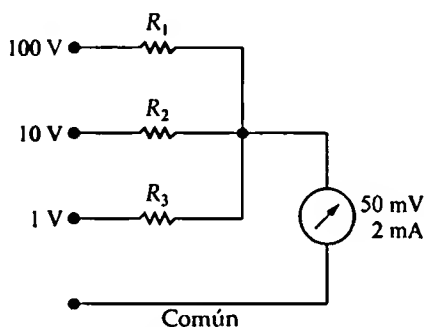


Figura P3.45

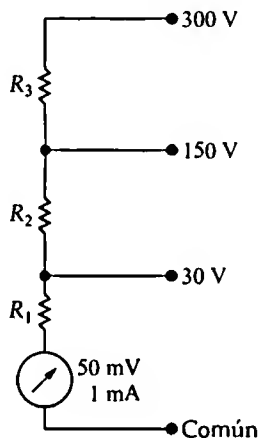


Figura P3.46

3.47. En la Figura P3.47 se muestra el modelo de circuito de una fuente de tensión cc. Realizamos las siguientes medidas de tensión en los terminales de la fuente: (1) con los terminales de la fuente en circuito abierto, medimos una tensión de  $50\text{ mV}$  y (2) conectando una resistencia de  $15\text{ M}\Omega$  entre los terminales, medimos una tensión de  $48,75\text{ mV}$ . Todas las medidas se realizan un voltímetro digital que tiene una resistencia de medidor de  $10\text{ M}\Omega$ .

- ¿Cuál es la tensión interna de la fuente ( $v_s$ ) en milivoltios?
- ¿Cuál es la resistencia interna de la fuente ( $R_s$ ) en kilohmios?

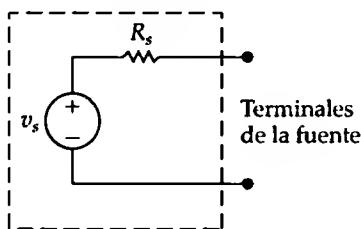


Figura P3.47

3.48. Suponga que sustituimos la fuente ideal de tensión de la Figura 3.26 por una fuente ideal de corriente. Demuestre que la Ecuación 3.33 sigue siendo válida.

3.49. Alimentamos el circuito en puente mostrado en la Figura 3.26 mediante una fuente cc de  $6\text{ V}$ . El puente está equilibrado cuando  $R_1 = 200\text{ }\Omega$ ,  $R_2 = 500\text{ }\Omega$  y  $R_3 = 800\text{ }\Omega$ .



- ¿Cuál es el valor de  $R_x$ ?

- b) ¿Cuánta corriente (en miliamperios) suministra la fuente de cc?  
 c) ¿Qué resistencia del circuito absorbe la mayor potencia? ¿Cuánta potencia absorbe?  
 d) ¿Qué resistencia absorbe la menor potencia? ¿Cuánta potencia absorbe?

3.50. Calcule la corriente del detector  $i_d$  en el puente no equilibrado de la Figura P3.50 si la caída de tensión en el detector es despreciable.



3.51. Calcule la potencia disipada en la resistencia de  $3\text{ k}\Omega$  en el circuito de la Figura P3.51.

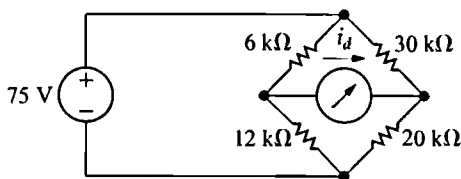


Figura P3.50

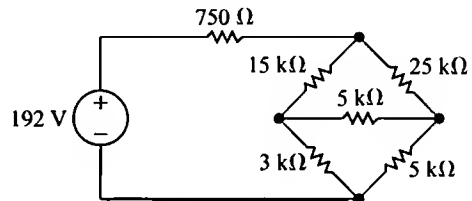


Figura P3.51

3.52. En el circuito en puente de Wheatstone mostrado en la Figura 3.26, el cociente  $R_2/R_1$  puede configurarse con los siguientes valores: 0,001, 0,01, 01, 1, 10, 100 y 1000. La resistencia  $R_3$  puede variarse entre 1 y 11.110  $\Omega$ , en incrementos de 1  $\Omega$ . Sabemos que una cierta resistencia de valor desconocido tiene un valor comprendido entre 4 y 5  $\Omega$ . ¿Qué valor del cociente  $R_2/R_1$  debemos elegir para poder medir la resistencia desconocida con cuatro dígitos significativos?



3.53. Utilice una transformación  $\Delta$ -Y para calcular las tensiones  $v_1$  y  $v_2$  en el circuito dc de la Figura P3.53.



3.54. a) Calcule la resistencia equivalente  $R_{ab}$  en el circuito de la Figura P3.54 utilizando una transformación  $\Delta$ -Y de las resistencias  $R_2$ ,  $R_3$  y  $R_4$ .



b) Repita el apartado (a) utilizando una transformación Y- $\Delta$  de las resistencias  $R_2$ ,  $R_4$  y  $R_5$ .

c) Indique dos transformaciones adicionales  $\Delta$ -Y o Y- $\Delta$  que pudieran utilizarse para calcular  $R_{ab}$ .

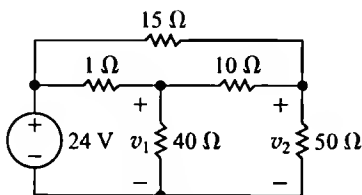


Figura P3.53

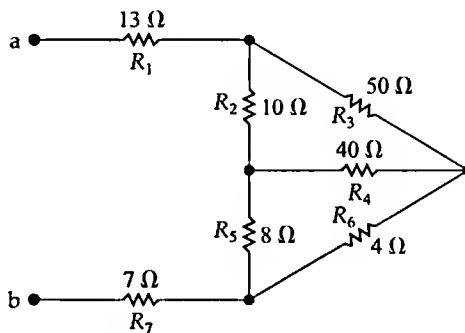


Figura P3.54

3.55. Calcule la resistencia equivalente  $R_{ab}$  en el circuito de la Figura P3.55.



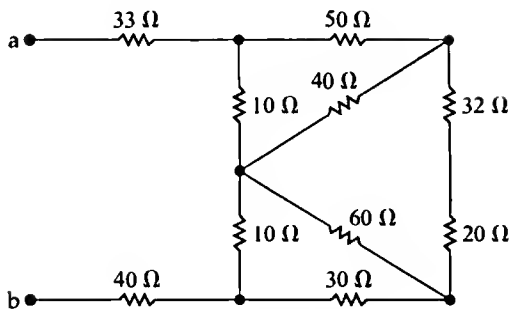


Figura P3.55

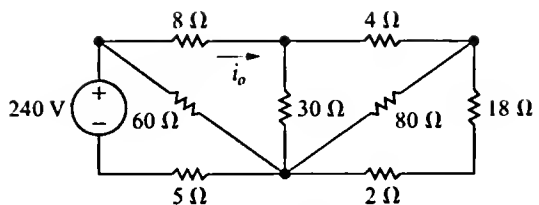


Figura P3.56

3.56. Calcule  $i_o$  y la potencia disipada en la resistencia de  $30\ \Omega$  en el circuito de la Figura P3.56.



3.57. Calcule  $R_{ab}$  en el circuito de la Figura P3.57.



3.58. a) Calcule la resistencia vista por la fuente ideal de tensión en el circuito de la Figura P3.58.



b) Si  $v_{ab}$  es igual a  $400\text{ V}$ , ¿cuánta potencia se disipa en la resistencia de  $31\ \Omega$ ?

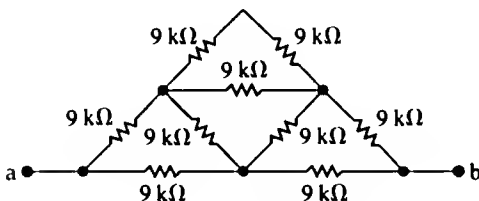


Figura P3.57

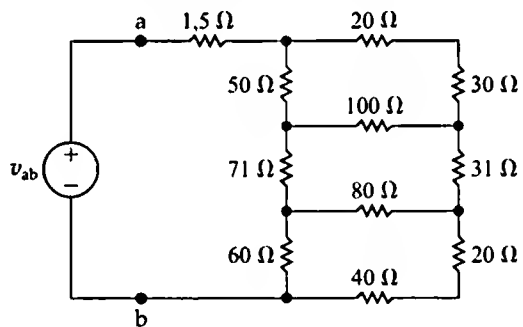


Figura P3.58

3.59. Utilice una transformación Y- $\Delta$  para calcular (a)  $i_o$ , (b)  $i_1$ , (c)  $i_2$  y (d) la potencia suministrada por la fuente ideal de tensión en el circuito de la Figura P3.59.

3.60. Para el circuito mostrado en la Figura P3.60, calcule (a)  $i_1$ , (b)  $v$ , (c)  $i_2$  y (d) la potencia suministrada por la fuente de corriente.

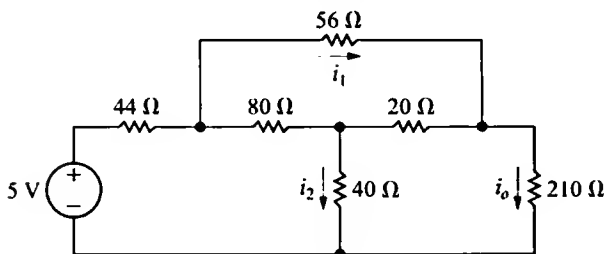


Figura P3.59

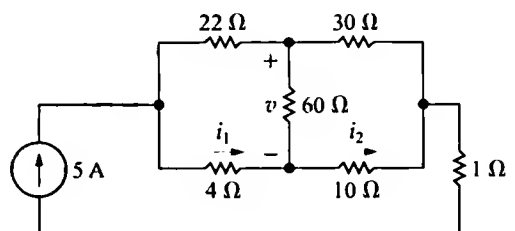


Figura P3.60

**3.61.** Deduzca las Ecuaciones 3.44-3.49 a partir de las Ecuaciones 3.41-3.43. Las dos sugerencias siguientes le servirán como ayuda para encaminar sus esfuerzos en la dirección correcta:

- Para calcular  $R_1$  en función de  $R_a$ ,  $R_b$  y  $R_c$ , reste primero la Ecuación 3.42 de la Ecuación 3.43 y luego sume este resultado a la Ecuación 3.39. Utilice operaciones similares para calcular  $R_2$  y  $R_3$  en función de  $R_a$ ,  $R_b$  y  $R_c$ .
- Para calcular  $R_b$  en función de  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$ , aproveche las deducciones realizadas gracias a la sugerencia anterior, es decir, las Ecuaciones 3.44-3.46. Observe que estas ecuaciones pueden dividirse para obtener

$$\frac{R_2}{R_3} = \frac{R_c}{R_b} \text{ o } R_c = \frac{R_2}{R_3} R_b,$$

y

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_b}{R_a} \text{ o } R_a = \frac{R_2}{R_1} R_b.$$

Ahora utilice estos cocientes en la Ecuación 3.43 para eliminar  $R_a$  y  $R_c$ . Utilice operaciones similares para calcular  $R_a$  y  $R_c$  en función de  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$ .

**3.62.** Demuestre que las expresiones para las conductancias  $\Delta$  en función de las tres conductancias  $Y$  son

$$G_a = \frac{G_2 G_3}{G_1 + G_2 + G_3},$$

$$G_b = \frac{G_1 G_3}{G_1 + G_2 + G_3},$$

$$G_c = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2 + G_3},$$

donde

$$G_a = \frac{1}{R_a}, \quad G_1 = \frac{1}{R_1}, \text{ etc.}$$

**3.63.** Las redes de resistencias se utilizan en ocasiones como circuitos de control de volumen. En este tipo de aplicación, se suelen denominar *atenuadores resistivos*. En la Figura P3.63 se muestra un atenuador fijo típico. Al diseñar un atenuador, el diseñador del circuito seleccionará los valores de  $R_1$  y  $R_2$  de modo que el cociente de  $v_o/v_i$  y la resistencia vista por la fuente de tensión de entrada,  $R_{ab}$ , tengan ambos un valor especificado.

- Demuestre que si  $R_{ab} = R_L$ , entonces

$$R_L^2 = 4R_1(R_1 + R_2)$$

$$\frac{v_o}{v_i} = \frac{R_2}{2R_1 + R_2 + R_L}$$

- Seleccione los valores de  $R_1$  y  $R_2$  de modo que  $R_{ab} = R_L = 600 \, \Omega$  y  $v_o/v_i = 0.6$ .

- 3.64. a) El atenuador fijo mostrado en la Figura P3.64 se denomina *atenuador en T puenteada*. Utilice una transformación Y- $\Delta$  para demostrar que  $R_{ab} = R_L$  si  $R = R_L$ .

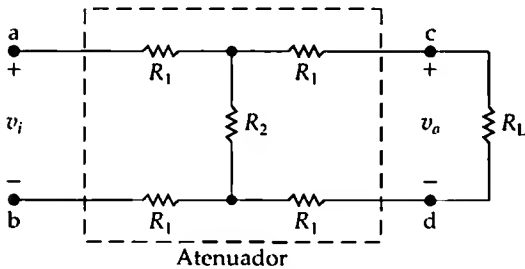


Figura P3.63

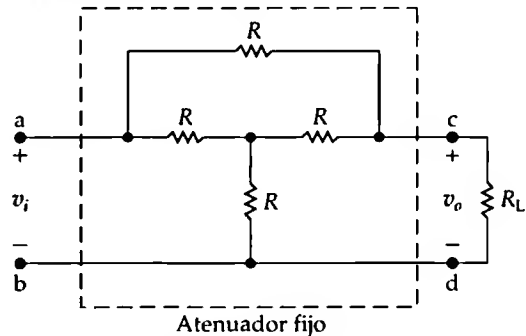


Figura P3.64

- b) Demuestre que, cuando  $R = R_L$ , el cociente de tensiones  $v_o/v_i$  es igual a 0,50.

- 3.65. Las ecuaciones de diseño para el circuito atenuador en T puenteada de la Figura P3.65 son

$$R_2 = \frac{2RR_L^2}{3R^2 - R_L^2}$$

$$\frac{v_o}{v_i} = \frac{3R - R_L}{3R + R_L}$$

donde  $R_2$  tiene el valor indicado.

- Diseñe un atenuador fijo de modo que  $v_i = 3,5v_o$  cuando  $R_L = 300 \Omega$ .
- Suponga que la tensión aplicada a la entrada del atenuador diseñado en el apartado (a) es de 42 V. ¿Qué resistencia del atenuador disipa la máxima potencia?
- ¿Cuánta potencia se disipa en la resistencia obtenida en el apartado (b)?
- ¿Qué resistencia del atenuador disipa la mínima potencia?
- ¿Cuánta potencia se disipa en la resistencia obtenida en el apartado (d)?

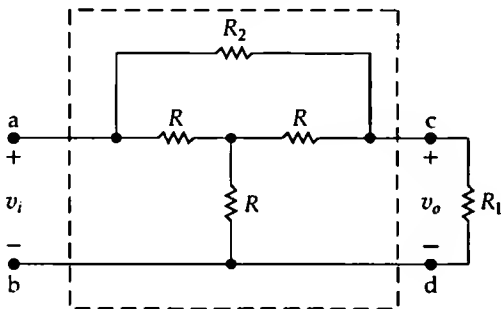


Figura P3.65

- 3.66. a) Para el circuito mostrado en la Figura P3.66, el puente está equilibrado cuando  $\Delta R = 0$ . Demuestre que si  $\Delta R \ll R_o$ , la tensión de salida del puente es aproximadamente

$$v_o \approx \frac{-\Delta R R_4}{(R_o + R_4)^2} v_{in}$$

- b) Dados los valores  $R_2 = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $R_3 = 500 \Omega$ ,  $R_4 = 5 \text{ k}\Omega$  y  $v_{in} = 6 \text{ V}$ , ¿cuál es la tensión de salida aproximada del puente si  $\Delta R$  es el 3% de  $R_o$ ?
- c) Calcule el valor de  $v_o$  en el apartado (b).

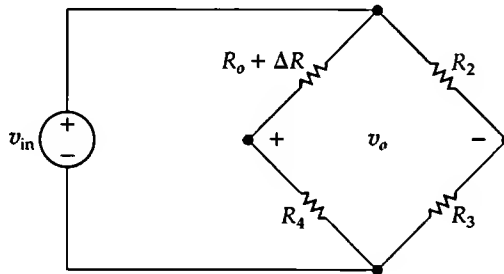


Figura P3.66

- 3.67. a) Si definimos el porcentaje de error como

$$\% \text{ error} = \left[ \frac{\text{valor aproximado}}{\text{valor verdadero}} - 1 \right] \times 100$$

demuestre que el porcentaje de error en la aproximación de  $v_o$  en el Problema 3.66 es

$$\% \text{ error} = \frac{(\Delta R)R_3}{(R_2 + R_3)R_4} \times 100.$$

- b) Calcule el porcentaje de error de  $v_o$  para el Problema 3.66.

- 3.68. Suponga que el error en  $v_o$  en el circuito en puente de la Figura P3.66 no debe exceder el 0,5%.  
❖ ¿Cuál es el máximo porcentaje de variación en  $R_o$  que puede permitirse?

- 3.69. a) Demuestre la Ecuación 3.65.

- ◆ b) Demuestre la Ecuación 3.68.

- 3.70. Demuestre la Ecuación 3.70.



- 3.71. Suponga que la estructura de rejilla de la Figura 3.36 tiene 1 m de anchura y que la separación vertical de las cinco líneas horizontales de la rejilla es de 0,025 m. Especifique los valores numéricos de  $R_1 - R_5$  y  $R_a - R_d$  para conseguir una disipación de potencia uniforme de 120 W/m utilizando una fuente de alimentación de 12 V. (Sugerencia: calcule  $\sigma$  en primer lugar y luego  $R_3$ ,  $R_1$ ,  $R_a$ ,  $R_b$  y  $R_2$ , en ese orden).

- 3.72. Compruebe la solución del Problema 3.71 demostrando que la potencia total disipada es igual a la potencia suministrada por la fuente de 12 V.



- 3.73. a) Diseñe una rejilla quitaescarcha como la de la Figura 3.36 que tenga cinco conductores horizontales y que satisfaga las siguientes especificaciones: la rejilla tiene que tener una anchura de 1,5 m, la separación vertical entre los conductores ha de ser de 0,03 m y la disipación de potencia tiene que ser de 200 W/m cuando la tensión de alimentación sea de 12 V.



- b) Compruebe su solución y asegúrese de que cumple las especificaciones de diseño.

# CAPÍTULO

# 4

# Técnicas de análisis de circuitos

## Contenido del capítulo

- 4.1. Terminología
- 4.2. Introducción al método de las tensiones de nodo
- 4.3. El método de las tensiones de nodo con fuentes dependientes
- 4.4. Método de las tensiones de nodo: algunos casos especiales
- 4.5. Introducción al método de las corrientes de malla
- 4.6. El método de las corrientes de malla con fuentes dependientes
- 4.7. Método de las corrientes de malla: algunos casos especiales
- 4.8. Comparación entre los métodos de las tensiones de nodos y de las corrientes de malla
- 4.9. Transformación de fuentes
- 4.10. Equivalentes de Thévenin y de Norton
- 4.11. Más aspectos del cálculo de equivalentes de Thévenin
- 4.12. Transferencia máxima de potencia
- 4.13. Superposición

Hasta ahora, hemos analizado circuitos resistivos relativamente simples aplicando las leyes de Kirchhoff en combinación con la ley de Ohm. Podemos utilizar este enfoque para todos los circuitos, pero a medida que éstos se vuelven más complicados desde el punto de vista estructural e implican un número cada vez mayor de elementos, este método directo llega a hacerse engorroso. En este capítulo, vamos a presentar dos potentes técnicas de análisis de circuitos que ayudan en el análisis de estructuras de circuitos complejas: el método de las tensiones de nodo y el método de las corrientes de malla. Estas técnicas nos proporcionan dos métodos sistemáticos para describir circuitos con un número mínimo de ecuaciones.

Además de estos dos métodos analíticos generales, en este capítulo también vamos a tratar de otras técnicas de simplificación de circuitos. Ya hemos demostrado cómo utilizar técnicas de reducción serie-paralelo y transformaciones  $\Delta$ -Y para simplificar una estructura de circuito. En este capítulo, añadiremos a nuestra colección de técnicas las transformaciones de fuentes y los circuitos equivalentes de Thévenin y de Norton.

También vamos a considerar otros dos temas que desempeñan un papel importante en el análisis de circuitos. Uno de ellos, el de la máxima transferencia de potencia, considera las condiciones necesarias para garantizar que la potencia entregada a una carga resistiva por una fuente sea máxima. Se utilizan circuitos equivalentes de Thévenin para establecer las condiciones de máxima transferencia de potencia. El tema final de este capítulo, la superposición, examina la cuestión del análisis de circuitos que contengan más de una fuente independiente.



# Perspectiva práctica

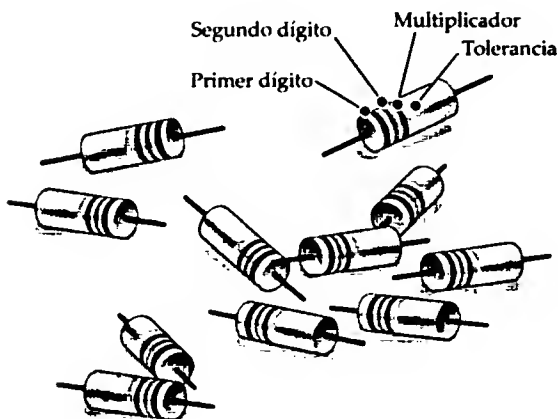
## Circuitos con resistencias realistas

En el capítulo anterior comenzamos a explorar el efecto que las imprecisiones de los valores de las resistencias tienen sobre el funcionamiento de un circuito; específicamente, sobre el funcionamiento de un divisor de tensión. Las resistencias sólo se fabrican en un pequeño número de valores discretos, y cualquier resistencia de un determinado lote variará con respecto a su valor nominal dentro de un cierto rango de tolerancia. Las resistencias con menor tolerancia, como por ejemplo del 1%, son más caras que las resistencias que tienen una tolerancia mayor, como pueda ser un 10%. Por tanto, en un circuito donde se utilicen muchas resistencias, es importante comprender cuál de los valores de resistencia tiene el mayor impacto sobre las prestaciones esperadas del circuito. En otras palabras, sería deseable poder predecir el efecto que tiene sobre la salida del circuito variar cada valor de resistencia. Si sabemos que una resistencia concreta debe estar muy próxima a su valor nominal para que el circuito funcione correctamente, podemos decidir gastar el dinero adicional necesario con el fin de que la tolerancia sea menor para ese valor de resistencia concreto.

La exploración del efecto que el valor de un componente de circuito tiene sobre la salida del circuito se denomina **análisis de sensibilidad**. Después de presentar otras técnicas adicionales de análisis de circuitos, examinaremos el tema del análisis de la sensibilidad.

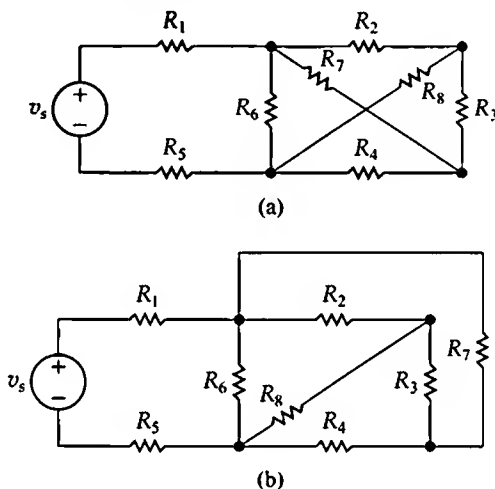
## Objetivos del capítulo

1. Comprender y ser capaz de utilizar el método de las tensiones de nodo para resolver un circuito.
2. Comprender y ser capaz de utilizar el método de las corrientes de malla para resolver un circuito.
3. Ser capaz de determinar si resulta más conveniente utilizar el método de las tensiones de nodo o el método de las corrientes de malla para resolver un circuito concreto.
4. Comprender la técnica de transformación de fuentes y ser capaz de utilizarla para resolver un circuito.
5. Comprender el concepto de los circuitos equivalentes de Thévenin y de Norton y ser capaz de construir un equivalente de Thévenin o de Norton de un circuito.
6. Conocer la condición de máxima transferencia de potencia a una carga resistiva y ser capaz de calcular el valor de la resistencia de carga que satisface dicha condición.

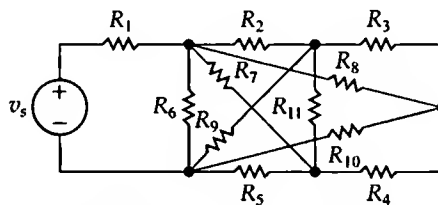


## 4.1. Terminología

Para explicar los métodos más complejos de análisis de circuitos, es preciso antes definir una serie de términos básicos. Hasta el momento, todos los circuitos que hemos presentado eran **circuitos planares**, es decir, circuitos que pueden dibujarse en un plano sin que ninguna de las ramas se cruce. Los circuitos que se dibujan con ramas cruzadas siguen considerándose planares si pueden redibujarse sin que ninguna rama se cruce. Por ejemplo, el circuito mostrado en la Figura 4.1(a) puede redibujarse como se muestra en la Figura 4.1(b); ambos circuitos son equivalentes, ya que se mantienen todas las conexiones de los nodos. Por tanto, la Figura 4.1(a) es un circuito planar, ya que puede ser redibujado de dicha forma. La Figura 4.2 muestra un circuito no planar; este circuito no puede redibujarse de manera que se mantengan todas las conexiones de nodo y que ninguna de las ramas cruce a otra. El método de las tensiones de nodo es aplicable tanto a los circuitos planares como a los no planares, mientras que el método de las corrientes de malla está limitado a los circuitos planares.



**Figura 4.1.** (a) Un circuito planar. (b) El mismo circuito redibujado para verificar que es planar.



**Figura 4.2.** Un circuito no planar.

### Descripción de un circuito: vocabulario

En la Sección 1.5 hemos definido el concepto de elemento de circuito ideal básico. Cuando se interconectan elementos de circuito básicos para formar un circuito, la interconexión resultante queda descrita en términos de nodos, caminos, ramas, lazos y mallas. En la Sección 2.4 hemos definido el concep-

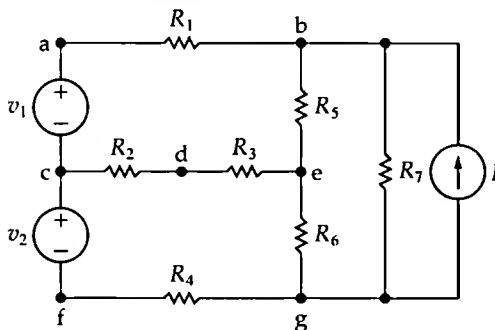
to de nodo y el de camino cerrado o lazo. Vamos a volver a enunciar aquí dichas definiciones y definiremos los términos adicionales de *camino*, *rama* y *mall*a. Por comodidad, presentamos todas estas definiciones en la Tabla 4.1, que incluye también ejemplos de cada definición, tomados del circuito de la Figura 4.3; esos conceptos se desarrollan en el Ejemplo 4.1.

**Tabla 4.1.** Términos para la descripción de circuitos.

NOMBRE	DEFINICIÓN	EJEMPLO DE LA FIGURA 4.3
nodo	Un punto en el que se unen dos o más elementos del circuito.	a
nodo esencial	Un nodo en el que se unen tres o más elementos del circuito.	b
camino	Una sucesión de elementos básicos adyacentes en la que no hay ningún elemento incluido más de una vez.	$v_1-R_1-R_5-R_6$
rama	Un camino que conecta dos nodos.	$R_1$
rama esencial	Un camino que conecta dos nodos esenciales sin pasar a través de un nodo esencial.	$v_1-R_1$
lazo	Un camino cuyo último nodo coincide con el nodo de partida.	$v_1-R_1-R_5-R_6-R_4-v_2$
malla	Un lazo que no encierra ningún otro lazo.	$v_1-R_1-R_5-R_3-R_2$
circuito planar	Un circuito que puede dibujarse en un plano sin que ninguna rama se cruce.	La Figura 4.3 es un circuito planar. La Figura 4.2 es un circuito no planar.

#### EJEMPLO 4.1 Identificación de nodos, ramas, mallas y lazos en un circuito

Para el circuito de la Figura 4.3, identifique



**Figura 4.3.** Un circuito en el que se ilustran nodos, ramas, mallas, caminos y lazos.

- Todos los nodos
- Todos los nodos esenciales
- Todas las ramas
- Todas las ramas esenciales
- Todas las mallas
- Dos caminos que no sean lazos ni ramas esenciales
- Dos lazos que no sean mallas

#### SOLUCIÓN

- Los nodos son a, b, c, d, e, f y g.
- Los nodos esenciales son b, c, e y g.

- c) Las ramas son  $v_1, v_2, R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, R_7$  e  $I$ .
- d) Las ramas esenciales son  $v_1-R_1, R_2-R_3, v_2-R_4, R_5, R_6, R_7$  e  $I$ .
- e) Las mallas son  $v_1-R_1-R_5-R_3-R_2, v_2-R_2-R_3-R_6-R_4, R_5-R_7-R_6$  y  $R_7-I$ .
- f)  $R_1-R_5-R_6$  es un camino, pero no es un lazo (porque no tiene el mismo nodo inicial y final), ni tampoco es una rama esencial (porque no conecta dos nodos esenciales).  $v_2-R_2$  también es un camino, pero tampoco es un lazo ni una rama esencial, por las mismas razones.
- g)  $v_1-R_1-R_5-R_6-R_4-v_2$  es un lazo, pero no es una malla, porque hay dos lazos dentro de él.  $I-R_5-R_6$  también es un lazo, pero no una malla.

**NOTA** Evalúe su comprensión de este material intentando resolver los Problemas 4.1 y 4.2 del capítulo.

## Número de ecuaciones simultáneas

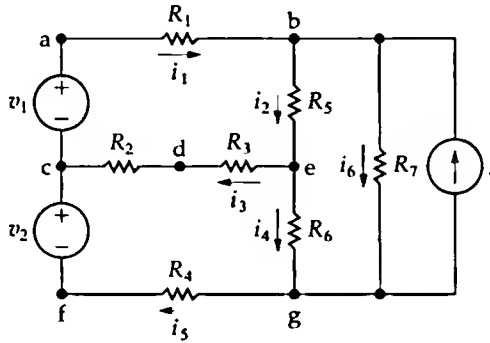
El número de valores de corriente desconocidos en un circuito es igual al número de ramas,  $b$ , en las que no se sabe el valor de la corriente. Por ejemplo, el circuito mostrado en la Figura 4.3 tiene nueve ramas en las que desconocemos la corriente. Recuerde que debemos tener  $b$  ecuaciones independientes para resolver un circuito con  $b$  corrientes desconocidas. Si designamos como  $n$  el número de nodos de un circuito, podemos obtener  $n-1$  ecuaciones independientes aplicando la ley de Kirchhoff de las corrientes a cualquier conjunto de  $n-1$  nodos. (La aplicación de la ley de las corrientes al nodo  $n$ -ésimo no genera una ecuación independiente, ya que esta ecuación puede deducirse a partir de las  $n-1$  ecuaciones anteriores; véase el Problema 4.5). Puesto que necesitamos  $b$  ecuaciones para describir un circuito dado y puesto que podemos obtener  $n-1$  de estas ecuaciones aplicando la ley de Kirchhoff de las corrientes, deberemos aplicar la ley de Kirchhoff de las tensiones a los lazos o mallas para obtener las restantes  $b-(n-1)$ .

De este modo, contando los nodos, las mallas y las ramas en las que no conocemos la corriente, hemos establecido un método sistemático para escribir el número necesario de ecuaciones para resolver un circuito. Específicamente, aplicamos la ley de Kirchhoff de las corrientes a  $n-1$  nodos y la ley de Kirchhoff de las tensiones a  $b-(n-1)$  lazos (o mallas). Estas observaciones son también válidas en términos de nodos esenciales y ramas esenciales. Así, si representamos mediante  $n_e$  el número de nodos esenciales y mediante  $b_e$  el número de ramas esenciales en las que la corriente es desconocida, podemos aplicar la ley de Kirchhoff de las corrientes a  $n_e-1$  nodos y la ley de Kirchhoff de las tensiones a  $b_e-(n_e-1)$  lazos o mallas. En los circuitos, el número de nodos esenciales es inferior o igual al número de nodos y el número de ramas esenciales es inferior o igual al número de ramas. Por tanto, a menudo resulta conveniente utilizar nodos esenciales y ramas esenciales cuando se analiza un circuito, ya que entonces hay que resolver un sistema con un menor número de ecuaciones independientes.

Un circuito puede estar compuesto por partes desconectadas. En el Problema 4.2 se examina un ejemplo de este tipo de circuitos. Los enunciados relativos al número de ecuaciones que pueden derivarse de la ley de Kirchhoff de las corrientes,  $n-1$ , y de la ley de las tensiones,  $b-(n-1)$ , se aplican a los circuitos conectados. Si un circuito tiene  $n$  nodos y  $b$  ramas y está compuesto de  $s$  partes, la ley de las corrientes puede aplicarse  $n-s$  veces, y la ley de las tensiones  $b-n+s$  veces. Dos partes separadas cualesquiera pueden conectarse mediante un único conductor. Esta conexión hace siempre que se forme un único nodo a partir de otros dos. Además, no existe corriente en ese único conductor, de modo que cualquier circuito formado por  $s$  partes desconectadas siempre puede reducirse a un circuito conectado.

## Técnica sistemática: ilustración

Ahora podemos ilustrar esta técnica sistemática utilizando el circuito mostrado en la Figura 4.4. Escribiremos las ecuaciones utilizando los nodos y ramas esenciales. El circuito tiene cuatro nodos esenciales y seis ramas esenciales, denominadas  $i_1$ – $i_6$ , en las que no conocemos la corriente.



**Figura 4.4.** El circuito mostrado en la Figura 4.3 con seis corrientes de rama desconocidas definidas.

Deducimos tres de las seis ecuaciones del sistema necesarias aplicando la ley de Kirchhoff de las corrientes a cualesquiera tres de los cuatro nodos esenciales. Utilizando los nodos b, c y e, obtenemos

$$\begin{aligned} -i_1 + i_2 + i_6 - I &= 0, \\ i_1 - i_3 - i_5 &= 0, \\ i_3 + i_4 - i_2 &= 0. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Deducimos las tres ecuaciones restantes aplicando la ley de Kirchhoff de las tensiones alrededor de tres mallas. Puesto que el circuito tiene cuatro, prescindiremos de una de las mallas. Decidimos prescindir de  $R_7$ – $I$ , porque no sabemos cuál es la tensión que cae en bornes de  $I$ <sup>1</sup>.

Utilizando las otras tres mallas, tenemos que

$$\begin{aligned} R_1 i_1 + R_5 i_2 + i_3(R_2 + R_3) - v_1 &= 0, \\ -i_3(R_2 + R_3) + i_4 R_6 + i_5 R_4 - v_2 &= 0, \\ -i_2 R_5 + i_6 R_7 - i_4 R_6 &= 0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Reordenando las Ecuaciones 4.1 y 4.2 para facilitar la resolución, se obtiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} -i_1 + i_2 + 0i_3 + 0i_4 + 0i_5 + i_6 &= I, \\ i_1 + 0i_2 - i_3 + 0i_4 - i_5 + 0i_6 &= 0, \\ 0i_1 - i_2 + i_3 + i_4 + 0i_5 + 0i_6 &= 0, \\ R_1 i_1 + R_5 i_2 + (R_2 + R_3)i_3 + 0i_4 + 0i_5 + 0i_6 &= v_1, \\ 0i_1 + 0i_2 - (R_2 + R_3)i_3 + R_6 i_4 + R_4 i_5 + 0i_6 &= v_2, \\ 0i_1 - R_5 i_2 + 0i_3 - R_6 i_4 + 0i_5 + R_7 i_6 &= 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

<sup>1</sup> Hablaremos más sobre esta decisión en la Sección 4.7.

Observe que, si se suma la corriente en el nodo  $n$ -ésimo ( $g$ , en este ejemplo), resulta

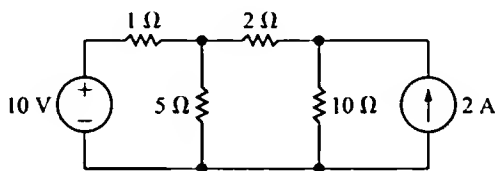
$$i_5 - i_4 - i_6 + I = 0. \quad (4.4)$$

La Ecuación 4.4 no es independiente, porque podemos deducirla sumando las Ecuaciones 4.1 y luego multiplicando la suma por  $-1$ . Por tanto, la Ecuación 4.4 es una combinación lineal de las Ecuaciones 4.1 y, como consecuencia, no es independiente de ellas. Vamos a llevar ahora el procedimiento un paso más allá. Introduciendo nuevas variables, podemos describir un circuito con sólo  $n-1$  ecuaciones o sólo  $b-(n-1)$  ecuaciones. De este modo, estas nuevas variables nos permitirán obtener una solución manipulando un sistema menor de ecuaciones, lo cual es siempre un objetivo deseable, aun cuando se utilice una computadora para obtener una solución numérica. Las nuevas variables se conocen con el nombre de tensiones de nodo y corrientes de malla. El método de las tensiones de nodo nos permite describir el circuito en términos de  $n_e-1$  ecuaciones; el método de las corrientes de malla nos permite describir un circuito en términos de  $b_e-(n_e-1)$  ecuaciones. Comenzaremos en la Sección 4.2 con el método de las tensiones de nodo.

**NOTA** Evalúe su comprensión de este material tratando de resolver los Problemas 4.3 y 4.4 del capítulo.

## 4.2. Introducción al método de las tensiones de nodo

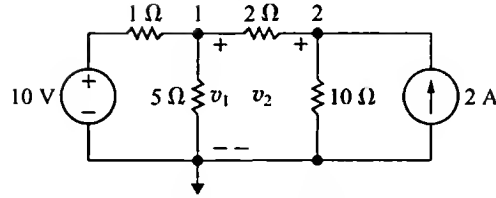
Vamos a presentar el método de las tensiones de nodo utilizando los nodos esenciales del circuito. El primer paso consiste en hacer un dibujo claro del circuito, de manera que ninguna rama se cruce con otra, y marcar claramente los nodos esenciales en el diagrama de circuito, como en la Figura 4.5. Este circuito tiene tres nodos esenciales ( $n_e = 3$ ); por tanto, necesitamos dos ( $n_e-1$ ) ecuaciones de tensión de nodo para describir el circuito. El siguiente paso consiste en seleccionar uno de los tres nodos esenciales como nodos de referencia. Aunque, en teoría, la elección es arbitraria, en la práctica la elección del nodo de referencia suele resultar obvia. Por ejemplo, una buena elección es el nodo que tenga mayor número de ramas. La elección óptima del nodo de referencia (si es que existe) resultará evidente una vez que haya adquirido algo de experiencia en la utilización de este método. En el circuito mostrado en la Figura 4.5, el nodo inferior es el que conecta mayor número de ramas, por lo que lo usaremos como nodo de referencia. Etiquetaremos el nodo de referencia elegido con el símbolo  $\blacktriangledown$ , como en la Figura 4.6.



**Figura 4.5.** Circuito utilizado para ilustrar el método de las tensiones de nodo para el análisis de circuitos.

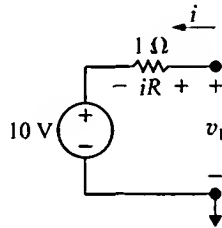
Después de seleccionar el nodo de referencia, definimos las tensiones de nodo en el diagrama del circuito. Una **tensión de nodo** se define como el incremento de tensión entre el nodo de referencia y otro de los nodos. Para este circuito, debemos definir dos tensiones de nodo, que indicamos mediante  $v_1$  y  $v_2$  en la Figura 4.6.

Ahora estamos listos para generar las ecuaciones de tensión de nodo. Lo hacemos escribiendo en primer lugar la corriente que sale de cada rama conectada a un nodo que no sea el de referencia, en función de las tensiones de nodo, y luego sumando estas corrientes para igualarlas a cero, de acuerdo con



**Figura 4.6.** El circuito de la Figura 4.5 con un nodo de referencia y las tensiones de nodo.

la ley de Kirchhoff de las corrientes. Para el circuito de la Figura 4.6, la corriente que sale del nodo 1 a través de la resistencia de  $1\ \Omega$  es la caída de tensión en la resistencia dividida por el valor de ésta (ley de Ohm). La caída de tensión en la resistencia, en la dirección de la corriente que sale del nodo, es  $v_1 - 10$ . Por tanto, la corriente en la resistencia de  $1\ \Omega$  es  $(v_1 - 10)/1$ . La Figura 4.7 ilustra estas conclusiones. En ella se muestra la rama  $10\text{ V}-1\ \Omega$ , con las tensiones y la corriente apropiadas.



**Figura 4.7.** Cálculo de la corriente  $i$  de la rama.

Este mismo razonamiento nos permite obtener la corriente en cada una de las ramas en que sea desconocida. Así, la corriente que sale del nodo 1 a través de la resistencia de  $5\ \Omega$  es  $v_1/5$ , y la corriente que sale del nodo 1 a través de la resistencia de  $2\ \Omega$  es  $(v_1 - v_2)/2$ . La suma de las tres corrientes que salen del nodo 1 debe ser igual a cero, por lo que la ecuación de tensión de nodo para el nodo 1 es

$$\frac{v_1 - 10}{1} + \frac{v_1}{5} + \frac{v_1 - v_2}{2} = 0. \quad (4.5)$$

La ecuación de tensión de nodo para el nodo 2 es

$$\frac{v_2 - v_1}{2} + \frac{v_2}{10} - 2 = 0. \quad (4.6)$$

Observe que el primer término de la Ecuación 4.6 es la corriente que sale del nodo 2 a través de la resistencia de  $2\ \Omega$ , el segundo término es la corriente que sale del nodo 2 a través de la resistencia de  $10\ \Omega$  y el tercer término es la corriente que sale del nodo 2 a través de la fuente de corriente.

Las Ecuaciones 4.5 y 4.6 forman un sistema de dos ecuaciones que describe el circuito de la Figura 4.6 en términos de las tensiones de nodo  $v_1$  y  $v_2$ . Resolviendo el sistema para obtener los valores de  $v_1$  y  $v_2$ , vemos que

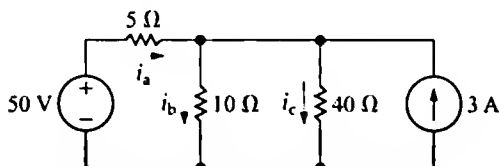
$$v_1 = \frac{100}{11} = 9,09\text{ V}$$

$$v_2 = \frac{120}{11} = 10,91\text{ V}.$$

Una vez conocidas las tensiones de nodo, pueden calcularse todas las corrientes de rama. Después de calculadas, se pueden determinar las tensiones de rama y las potencias. El Ejemplo 4.2 ilustra el uso del método de las tensiones de nodo.

**EJEMPLO 4.2** Utilización del método de las tensiones de nodo

- a) Utilice el método de las tensiones de nodo para análisis de circuitos con el fin de calcular las corrientes de rama  $i_a$ ,  $i_b$  e  $i_c$  en el circuito mostrado en la Figura 4.8.
- b) Calcule la potencia asociada con cada fuente e indique si la fuente está entregando o absorbiendo potencia.

**Figura 4.8.** Circuito del Ejemplo 4.2.**SOLUCIÓN**

- a) Comenzamos observando que el circuito tiene dos nodos esenciales; por tanto, necesitamos escribir una única ecuación de tensión de nodo. Seleccionamos el nodo inferior como nodo de referencia y definimos la tensión de nodo desconocida como  $v_1$ . La Figura 4.9 ilustra estas decisiones. Sumando las corrientes que salen del nodo 1, se obtiene la ecuación de la tensión de nodo

$$\frac{v_1 - 50}{5} + \frac{v_1}{10} + \frac{v_1}{40} - 3 = 0.$$

Despejando  $v_1$ ,

$$v_1 = 40 \text{ V.}$$

De aquí

$$i_a = \frac{50 - 40}{5} = 2 \text{ A.}$$

$$i_b = \frac{40}{10} = 4 \text{ A,}$$

$$i_c = \frac{40}{40} = 1 \text{ A.}$$

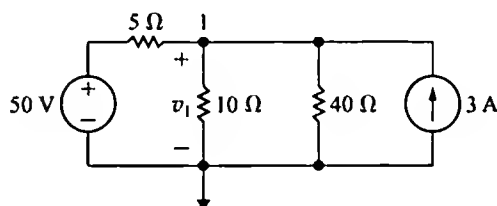
- b) La potencia asociada con la fuente de 50 V es

$$p_{50V} = -50i_a = -100 \text{ W (entregada).}$$

La potencia asociada con la fuente de 3 A es

$$p_{3A} = -3v_1 = -3(40) = -120 \text{ W (entregada).}$$

Podemos comprobar estos cálculos observando que la potencia total entregada es de 220 W. La potencia total absorbida por las tres resistencias es  $4(5) + 16(10) + 1(40)$ , es decir, 220 W, como habíamos calculado.

**Figura 4.9.** El circuito mostrado en la Figura 4.8, con un nodo de referencia y la tensión de nodo desconocida  $v_1$ .**Evaluación del objetivo 1**

- Comprender y ser capaz de utilizar el método de las tensiones de nodo.

- 4.1. a) Para el circuito mostrado, utilice el método de las tensiones de nodo para calcular  $v_1$ ,  $v_2$  e  $i_1$ .

- b) ¿Cuánta potencia entrega al circuito la fuente de 15 A?

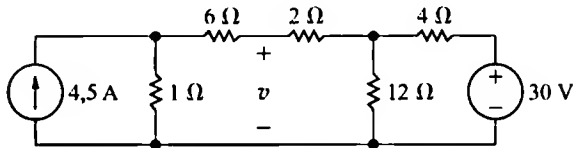
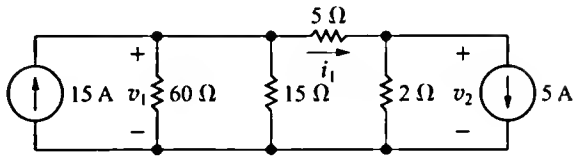


- c) Repita el apartado (b) para la fuente de 5 A.

**RESPUESTA** (a) 60 V, 10 V, 10 A;  
(b) 900 W; (c) -50 W.

- 4.2. Utilice el método de las tensiones de nodo para calcular  $v$  en el circuito mostrado.

**RESPUESTA** 15 V.



**NOTA** Trate también de resolver los Problemas 4.6, 4.9 y 4.10 del capítulo.

### 4.3. El método de las tensiones de nodo con fuentes dependientes

Si el circuito contiene fuentes dependientes, las ecuaciones de tensión de nodo deben complementarse con las ecuaciones de restricción impuestas por la presencia de las fuentes dependientes. El Ejemplo 4.3 ilustra la aplicación del método de las tensiones de nodo a un circuito que contiene una fuente dependiente.

#### EJEMPLO 4.3 Utilización del método de las tensiones de nodo con fuentes dependientes

Utilice el método de las tensiones de nodo para calcular la potencia disipada en la resistencia de 5 Ω en el circuito mostrado en la Figura 4.10.

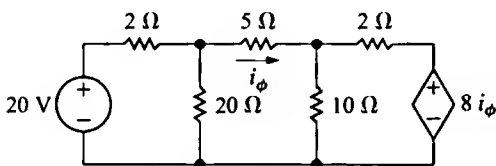


Figura 4.10. Circuito para el Ejemplo 4.3.

desconocidas están definidas en el circuito mostrado en la Figura 4.11. Sumando las corrientes que salen del nodo 1, se obtiene la ecuación

$$\frac{v_1 - 20}{2} + \frac{v_1}{20} + \frac{v_1 - v_2}{5} = 0.$$

Sumando las corrientes que salen del nodo 2 obtenemos

$$\frac{v_2 - v_1}{5} + \frac{v_2}{10} + \frac{v_2 - 8i_\phi}{2} = 0.$$

#### SOLUCIÓN

Comenzamos observando que el circuito tiene tres nodos esenciales. Por tanto, necesitamos dos ecuaciones de tensión de nodo para describir el circuito. Hay cuatro ramas que terminan en el nodo inferior, así que seleccionaremos éste como nodo de referencia. Las dos tensiones de nodo

Tal y como están escritas, estas dos ecuaciones de tensiones de nodo contienen tres incógnitas,  $v_1$ ,  $v_2$  e  $i_\phi$ . Para eliminar  $i_\phi$ , debemos expresar esta corriente de control en términos de las tensiones de nodo, de la forma siguiente:

$$i_\phi = \frac{v_1 - v_2}{5}.$$

Sustituyendo esta relación en la ecuación del nodo 2, se simplifican las dos ecuaciones de tensión de nodo, se obtiene

$$0,75v_1 - 0,2v_2 = 10,$$

$$-v_1 + 1,6v_2 = 0.$$

Despejando  $v_1$  y  $v_2$  se obtiene

$$v_1 = 16 \text{ V}$$

y

$$v_2 = 10 \text{ V}.$$

Entonces,

$$i_\phi = \frac{16 - 10}{5} = 1,2 \text{ A}$$

$$p_{5\Omega} = (1,44)(5) = 7,2 \text{ W}.$$

Un buen ejercicio para desarrollar la intuición necesaria para la resolución de problemas consiste en volver a considerar este ejemplo, pero utilizando el nodo 2 como nodo de referencia. ¿Resulta más fácil o más difícil el análisis?

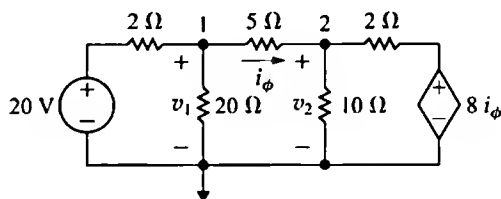
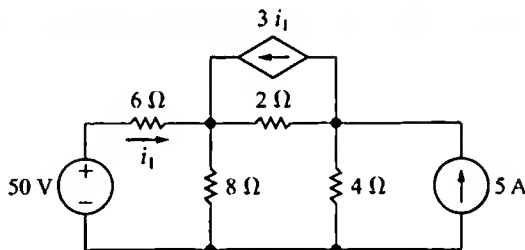


Figura 4.11. El circuito mostrado en la Figura 4.10, con un nodo de referencia y las tensiones de nodo.

## Evaluación del objetivo 1

- Comprender y ser capaz de utilizar el método de las tensiones de nodo.

- 4.3. a) Utilice el método de las tensiones de nodo para calcular la potencia asociada con cada una de las fuentes del circuito mostrado.
- b) Indique si la fuente está entregando potencia al circuito o extrayendo potencia del mismo.



**RESPUESTA** (a)  $p_{50V} = -150 \text{ W}$ ,  $p_{3i_1} = -144 \text{ W}$ ,  $p_{5A} = -80 \text{ W}$ ; (b) todas las fuentes están entregando potencia al circuito.

**NOTA** Trate también de resolver los Problemas 4.19 y 4.20 del capítulo.

## 4.4. Método de las tensiones de nodo: algunos casos especiales

Cuando el único elemento entre dos nodos esenciales es una fuente de tensión, el método de las tensiones de nodo se simplifica. Como ejemplo, examine el circuito de la Figura 4.12. Hay tres nodos esenciales en este circuito, lo que quiere decir que nos hace falta un sistema de dos ecuaciones. De entre estos tres nodos esenciales, hemos elegido un nodo de referencia y hemos etiquetado los otros dos nodos. Pero la fuente de 100 V restringe la tensión existente entre el nodo 1 y el nodo de referencia, de modo que su valor es de 100 V. Esto significa que sólo hay una tensión de nodo desconocida ( $v_2$ ). Por

tanto, la resolución de este circuito requiere una única ecuación de tensión de nodo, que será la del nodo 2:

$$\frac{v_2 - v_1}{10} + \frac{v_2}{50} - 5 = 0. \quad (4.7)$$

Pero  $v_1 = 100$  V, por lo que en la Ecuación 4.7 podemos despejar  $v_2$ :

$$v_2 = 125 \text{ V}. \quad (4.8)$$

Conociendo  $v_2$ , podremos calcular la corriente en todas las ramas. Puede verificar que la corriente que entra en el nodo 1 a través de la rama que contiene la fuente de tensión independiente es igual a 1,5 A.

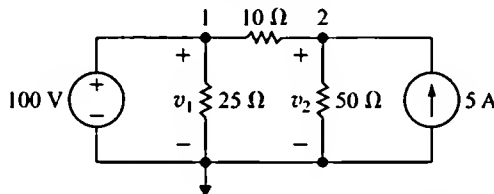


Figura 4.12. Circuito con una tensión de nodo conocida.

En general, cuando se utiliza el método de las tensiones de nodo para resolver circuitos que tengan fuentes de tensión directamente conectadas entre nodos esenciales, el número de tensiones de nodo desconocidas se reduce. La razón es que, siempre que una fuente de tensión conecta dos nodos esenciales, impone una restricción a la diferencia de tensión entre dichos nodos, que deberá ser igual a la tensión de la fuente. El análisis de circuitos puede, por tanto, simplificarse si nos tomamos el tiempo necesario para ver si se puede reducir de esta manera el número de incógnitas.

Suponga que tenemos que analizar el circuito mostrado en la Figura 4.13 utilizando el método de las tensiones de nodo. El circuito contiene cuatro nodos esenciales, por lo que cabría esperar tener que escribir tres ecuaciones de tensión de nodo. Sin embargo, dos de los nodos esenciales están conectados por una fuente de tensión independiente y los otros dos nodos esenciales están conectados mediante una fuente de tensión dependiente controlada por corriente. Por tanto, sólo existe en realidad una única tensión de nodo desconocida.

La elección del nodo que debe utilizarse como nodo de referencia abre distintas posibilidades. Ambos nodos a cada lado de la fuente de tensión dependiente parecen atractivos, porque, si los elegimos como nodo de referencia, una de las tensiones de nodo sería  $+10i_\phi$  (si elegimos como referencia el nodo de la izquierda) o  $-10i_\phi$  (si la referencia es el nodo de la derecha). El nodo inferior parece todavía mejor, porque con él sabemos inmediatamente una de las tensiones de nodo (50 V) y hay cinco ramas que terminan en él. Por tanto, elegiremos el nodo inferior como referencia.

La Figura 4.14 muestra el circuito nuevamente dibujado, en el que se ha indicado el nodo de referencia y se han definido las tensiones de nodo. Asimismo, introducimos la corriente  $i$  porque no podemos expresar la corriente de la rama que contiene la fuente de tensión dependiente en función de las tensiones de nodo  $v_2$  y  $v_3$ . De este modo, en el nodo 2,

$$\frac{v_2 - v_1}{5} + \frac{v_2}{50} + i = 0, \quad (4.9)$$

y en el nodo 3,

$$\frac{v_3}{100} - i - 4 = 0. \quad (4.10)$$

Eliminamos  $i$  simplemente sumando las Ecuaciones 4.9 y 4.10, para obtener

$$\frac{v_2 - v_1}{5} + \frac{v_2}{50} + \frac{v_3}{100} - 4 = 0. \quad (4.11)$$

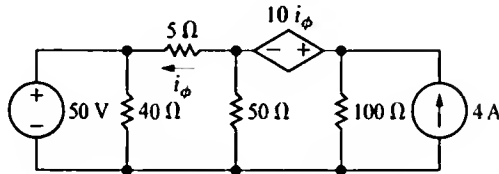


Figura 4.13. Circuito con una fuente de tensión dependiente conectada entre nodos.

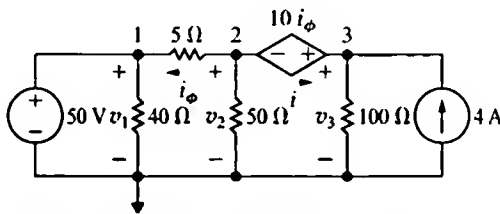


Figura 4.14. El circuito mostrado en la Figura 4.13, en el que se han definido las tensiones de nodo seleccionadas.

## Concepto de supernodo

La Ecuación 4.11 puede escribirse directamente, sin necesidad de recurrir al paso intermedio representado por las Ecuaciones 4.9 y 4.10. Para hacer esto, consideramos que los nodos 2 y 3 son un único nodo y simplemente sumamos las corrientes que salen del nodo en términos de las corrientes del nodo  $v_2$  y  $v_3$ . La Figura 4.15 ilustra este enfoque.

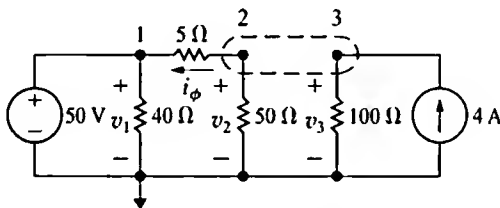


Figura 4.15. Consideración de los nodos 2 y 3 como un supernodo.

Cuando hay una fuente de tensión entre dos nodos esenciales, podemos combinar dichos nodos para formar un **supernodo**. Obviamente, la ley de Kirchhoff de las corrientes deberá cumplirse para el supernodo. En la Figura 4.15, comenzando con la rama de  $5\ \Omega$  y moviéndonos en sentido contrario al de las agujas del reloj alrededor del supernodo, generamos la ecuación

$$\frac{v_2 - v_1}{5} + \frac{v_2}{50} + \frac{v_3}{100} - 4 = 0, \quad (4.12)$$

que es idéntica a la Ecuación 4.11. La creación de un supernodo en los nodos 2 y 3 ha hecho que la tarea de analizar este circuito sea mucho más fácil. Por tanto, siempre merece la pena buscar este tipo de atajo antes de escribir ninguna ecuación. Después de haber deducido la Ecuación 4.12, el siguiente

paso consiste en reducir la expresión a una única tensión de nodo desconocido. En primer lugar, eliminamos  $v_1$  de la ecuación, ya que sabemos que  $v_1 = 50$  V. A continuación, expresamos  $v_3$  en función de  $v_2$ :

$$v_3 = v_2 + 10 i_\phi. \quad (4.13)$$

Ahora expresamos la corriente que controla la fuente de tensión dependiente como función de las tensiones de nodo:

$$i_\phi = \frac{v_2 - 50}{5}. \quad (4.14)$$

Utilizando las Ecuaciones 4.13 y 4.14 y  $v_1 = 50$  V, la Ecuación 4.12 se reduce a

$$v_2 \left( \frac{1}{50} + \frac{1}{5} + \frac{1}{100} + \frac{10}{500} \right) = 10 + 4 + 1$$

$$v_2(0,25) = 15$$

$$v_2 = 60 \text{ V.}$$

De las Ecuaciones 4.13 y 4.14:

$$i_\phi = \frac{60 - 50}{5} = 2 \text{ A}$$

$$v_3 = 60 + 20 = 80 \text{ V.}$$

## Análisis del circuito amplificador por el método de las tensiones de nodo

Utilicemos el método de las tensiones de nodo para analizar el circuito que introducimos por vez primera en la Sección 2.5 y que se muestra de nuevo en la Figura 4.16.

Cuando utilizamos el método de análisis basado en corrientes de rama en la Sección 2.5, nos enfrentamos a la tarea de escribir y resolver un sistema de seis ecuaciones. Aquí vamos a ver de qué manera puede el análisis de nodos simplificar nuestra tarea.

El circuito tiene cuatro nodos esenciales: los nodos a y d están conectados por una fuente de tensión independiente, al igual que los nodos b y c. Por tanto, el problema se reduce a determinar una única tensión de nodo desconocida, porque  $(n_e - 1) - 2 = 1$ . Utilizando d como nodo de referencia, combinamos los nodos b y c como un supernodo, etiquetamos la caída de tensión en  $R_2$  como  $v_b$  y etiquetamos la caída de tensión en  $R_E$  como  $v_c$ , como se muestra en la Figura 4.17. Entonces tenemos que

$$\frac{v_b}{R_2} + \frac{v_b - V_{CC}}{R_1} + \frac{v_c}{R_E} - \beta i_B = 0. \quad (4.15)$$

Ahora eliminamos tanto  $v_c$  como  $i_B$  de la Ecuación 4.15 y observamos que

$$v_c = (i_B + \beta i_B) R_E \quad (4.16)$$

$$v_c = v_b - V_0. \quad (4.17)$$

Sustituyendo las Ecuaciones 4.16 y 4.17 en la Ecuación 4.15, se obtiene

$$v_b \left[ \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{(1+\beta)R_E} \right] = \frac{V_{CC}}{R_1} + \frac{V_0}{(1+\beta)R_E}. \quad (4.18)$$

Despejando  $v_b$  en la Ecuación 4.18 nos queda

$$v_b = \frac{V_{CC}R_2(1+\beta)R_E + V_0R_1R_2}{R_1R_2 + (1+\beta)R_ER_2}. \quad (4.19)$$

Como vemos, la utilización del método de las tensiones de nodo para analizar este circuito reduce el problema de manipular un sistema de seis ecuaciones (véase el Problema 2.31) a manipular sólo tres ecuaciones simultáneas. Puede verificar que, cuando se combina la Ecuación 4.19 con las Ecuaciones 4.16 y 4.17, la solución que se obtiene para  $i_B$  es idéntica a la de la Ecuación 2.25 (véase el Problema 4.30).

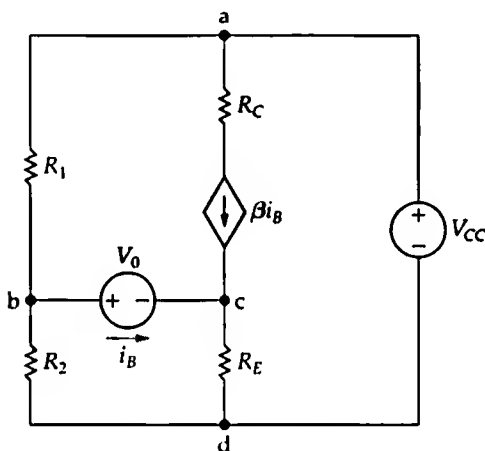


Figura 4.16. El circuito amplificador a transistor mostrado en la Figura 2.24.

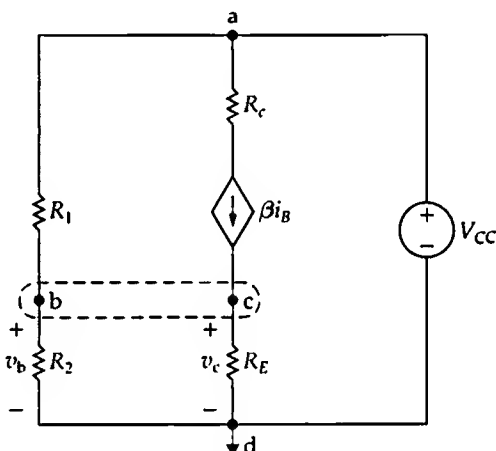
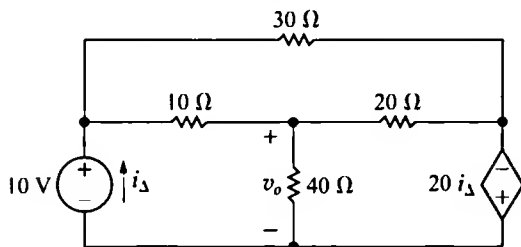


Figura 4.17. El circuito mostrado en la Figura 4.16, con las tensiones y el supernodo identificados.

### Evaluación del objetivo 1

- Comprender y ser capaz de utilizar el método de las tensiones de nodo.

4.4. Utilice el método de las tensiones de nodo para calcular  $v_o$  en el circuito mostrado.



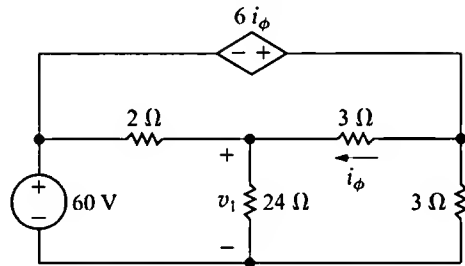
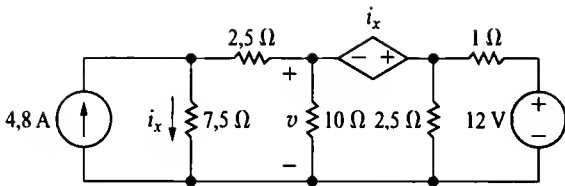
RESPUESTA 24 V.

4.5. Utilice el método de las tensiones de nodo para calcular  $v$  en el circuito de la izquierda mostrado en la página siguiente.

RESPUESTA 8 V.

4.6. Utilice el método de las tensiones de nodo para calcular  $v_1$  en el circuito de la derecha mostrado en la página siguiente.

RESPUESTA 48 V.



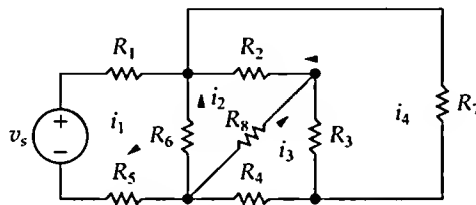
**NOTA** Trate también de resolver los Problemas 4.21, 4.26 y 4.27 del capítulo.

## 4.5. Introducción al método de las corrientes de malla

Como hemos indicado en la Sección 4.1, el método de las corrientes de malla para el análisis de circuitos nos permite describir un circuito en términos de  $b_e - (n_e - 1)$  ecuaciones. Recuerde que una malla es un lazo que no contiene ningún otro lazo en su interior. El circuito de la Figura 4.1(b) se muestra de nuevo en la Figura 4.18, con las flechas de corriente dentro de cada lazo para distinguirlos. Recuerde también que el método de las corrientes de malla sólo es aplicable a los circuitos planares. El circuito de la Figura 4.18 contiene siete ramas esenciales en las que desconocemos la corriente y cuatro nodos esenciales. Por tanto, para resolverlo mediante el método de las corrientes de malla, debemos escribir cuatro  $[7 - (4 - 1)]$  ecuaciones de corriente de malla.

Una **corriente de malla** es la corriente que existe sólo en el perímetro de una malla. En un diagrama de circuito, se representa como una línea continua cerrada o casi cerrada que sigue el perímetro de la malla correspondiente. Una punta de flecha en la línea continua indica la dirección de referencia para la corriente de malla. La Figura 4.18 muestra las cuatro corrientes de malla que describen el circuito de la Figura 4.1(b). Observe que, por definición, las corrientes de malla satisfacen automáticamente la ley de Kirchhoff de las corrientes. Es decir, en cualquier nodo del circuito, cada determinada corriente de malla entra y sale del nodo.

La Figura 4.18 también muestra que no siempre es posible identificar una corriente de malla en términos de una corriente de rama. Por ejemplo, la corriente de malla  $i_2$  no es igual a ninguna corriente de rama, mientras que las corrientes de malla  $i_1$ ,  $i_3$  e  $i_4$  sí que pueden identificarse con alguna corriente de rama. Por tanto, no siempre es posible medir una corriente de malla; observe que no hay ningún lugar donde pueda insertarse un amperímetro para medir la corriente de malla  $i_2$ . El hecho de que una corriente de malla pueda ser una magnitud ficticia no implica, sin embargo, que sea un concepto inútil. Por el contrario, el método de las corrientes de malla para el análisis de circuitos se deduce de una forma bastante natural a partir de las ecuaciones de las corrientes de rama.



**Figura 4.18.** El circuito mostrado en la Figura 4.1(b), con las corrientes de malla definidas.

Podemos utilizar el circuito de la Figura 4.19 para mostrar la deducción de la técnica de las corrientes de rama. Comenzamos utilizando las corrientes de rama ( $i_1$ ,  $i_2$  e  $i_3$ ) para formular el conjunto de ecuaciones independientes. Para este circuito,  $b_e = 3$  y  $n_e = 2$ . Sólo podemos escribir una ecuación de corriente independiente, por lo que necesitamos dos ecuaciones de tensión independientes. Aplicando la ley de Kirchhoff de las corrientes al nodo superior y la ley de Kirchhoff de las tensiones a las dos mallas, se genera el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$i_1 = i_2 + i_3, \quad (4.20)$$

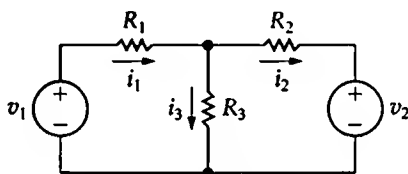
$$v_1 = i_1 R_1 + i_3 R_3, \quad (4.21)$$

$$-v_2 = i_2 R_2 - i_3 R_3. \quad (4.22)$$

Podemos reducir este conjunto de tres ecuaciones a sólo dos despejando  $i_3$  en la Ecuación 4.20 y luego sustituyendo esta expresión en las Ecuaciones 4.21 y 4.22:

$$v_1 = i_1(R_1 + R_3) - i_2 R_3, \quad (4.23)$$

$$-v_2 = -i_1 R_3 + i_2(R_2 + R_3). \quad (4.24)$$

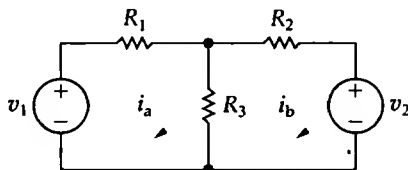


**Figura 4.19.** Circuito utilizado para ilustrar el desarrollo del método de las corrientes de malla para el análisis de circuitos.

Podemos obtener  $i_1$  e  $i_2$  a partir de las Ecuaciones 4.23 y 4.24, con lo que habremos reducido el sistema de tres ecuaciones a un sistema de sólo dos ecuaciones. Hemos determinado las Ecuaciones 4.23 y 4.24 sustituyendo las  $n_e - 1$  ecuaciones de corriente en las  $b_e - (n_e - 1)$  ecuaciones de tensión. El valor del método de las corrientes de malla es que, al definir las corrientes de malla, eliminamos automáticamente las  $n_e - 1$  ecuaciones de corriente. Por tanto, el método de las corrientes de malla es equivalente a una sustitución sistemática de las  $n_e - 1$  ecuaciones de corriente en las  $b_e - (n_e - 1)$  ecuaciones de tensión. Las corrientes de malla de la Figura 4.19, que son equivalentes a la eliminación de la corriente de rama  $i_3$  de las Ecuaciones 4.21 y 4.22, se muestran en la Figura 4.20. Ahora aplicamos la ley de Kirchhoff de las tensiones alrededor de las dos mallas, expresando todas las tensiones que caen en las resistencias en términos de las corrientes de malla, para obtener las ecuaciones

$$v_1 = i_a R_1 + (i_a - i_b) R_3, \quad (4.25)$$

$$-v_2 = (i_b - i_a) R_3 + i_b R_2. \quad (4.26)$$



**Figura 4.20.** Corrientes de malla  $i_a$  e  $i_b$ .



Agrupando los coeficientes de  $i_a$  e  $i_b$  en las Ecuaciones 4.25 y 4.26 se obtiene

$$v_1 = i_a(R_1 + R_3) - i_b R_3, \quad (4.27)$$

$$-v_2 = -i_a R_3 + i_b(R_2 + R_3). \quad (4.28)$$

Observe que las Ecuaciones 4.27 y 4.28 son idénticas en forma a las Ecuaciones 4.23 y 4.24, sin más que sustituir las corrientes de rama  $i_1$  e  $i_2$  por las corrientes de malla  $i_a$  e  $i_b$ . Observe también que las corrientes de rama mostradas en la Figura 4.19 pueden expresarse en términos de las corrientes de malla de la Figura 4.20 de la forma siguiente:

$$i_1 = i_a, \quad (4.29)$$

$$i_2 = i_b, \quad (4.30)$$

$$i_3 = i_a - i_b. \quad (4.31)$$

La capacidad de escribir las Ecuaciones 4.29-4.31 por inspección resulta crucial para el método de análisis de circuitos mediante las corrientes de malla. Una vez conocidas las corrientes de malla, sabemos también cuáles son las corrientes de rama. Y cuando se conocen las corrientes de rama, pueden calcularse las tensiones o los valores de potencia que se desee.

El Ejemplo 4.4 ilustra cómo se emplea el método de las corrientes de malla para calcular las potencias de las fuentes y las tensiones de rama.

#### EJEMPLO 4.4 Utilización del método de las corrientes de malla

- Utilice el método de las corrientes de malla para determinar la potencia asociada con cada fuente de tensión en el circuito mostrado en la Figura 4.21.
- Calcule la tensión  $v_o$  que cae en la resistencia de  $8\ \Omega$ .

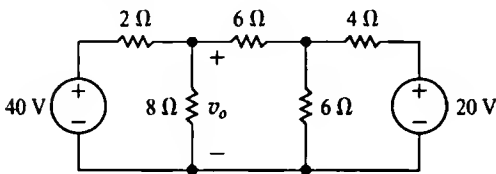


Figura 4.21. Circuito del Ejemplo 4.4.

la corriente es desconocida y cinco nodos. Por tanto, necesitamos tres  $[b - (n - 1) = 7 - (5 - 1)]$  ecuaciones de corriente de malla para describir el circuito. La Figura 4.22 muestra las tres corrientes de malla utilizadas para describir el circuito de la Figura 4.21. Si suponemos que las caídas de tensión son positivas, las tres ecuaciones de malla son

$$-40 + 2i_a + 8(i_a - i_b) = 0,$$

$$8(i_b - i_a) + 6i_b + 6(i_b - i_c) = 0,$$

$$6(i_c - i_b) + 4i_c + 20 = 0. \quad (4.32)$$

#### SOLUCIÓN

- Para calcular la potencia asociada con cada fuente, necesitamos saber la corriente de las mismas. El circuito indica que estas corrientes de fuente son idénticas a sendas corrientes de malla. Asimismo, observe que el circuito tiene siete ramas en las que

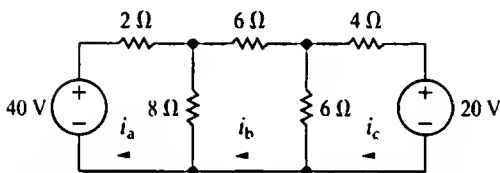
Estas ecuaciones pueden resolverse con la calculadora o con un programa informático. El método de Cramer es una herramienta útil a la hora de resolver un sistema de tres o más ecuaciones de forma manual; puede revisar esta importante herramienta en el Apéndice A. La reorganización de las Ecuaciones 4.32, para luego utilizar la cal-

culadora, un programa informático o el método de Cramer, nos da

$$\begin{aligned} 10i_a - 8i_b + 0i_c &= 40; \\ -8i_a + 20i_b - 6i_c &= 0; \\ 0i_a - 6i_b + 10i_c &= -20. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Las tres corrientes de malla son

$$\begin{aligned} i_a &= 5,6 \text{ A}, \quad i_b = 2,0 \text{ A}, \\ i_c &= -0,80 \text{ A}. \end{aligned}$$



**Figura 4.22.** Las tres corrientes de malla utilizadas para analizar el circuito mostrado en la Figura 4.21.

La corriente de malla  $i_a$  es idéntica a la corriente de rama de la fuente de 40 V, por lo que la potencia asociada con esta fuente es

$$p_{40V} = -40i_a = -224 \text{ W}.$$

El signo menos quiere decir que esta fuente está entregando potencia a la red. La corriente de la fuente de 20 V es idéntica a la corriente de malla  $i_c$ ; por tanto,

$$p_{20V} = 20i_c = -16 \text{ W}.$$

La fuente de 20 V también está entregando potencia a la red.

- b) La corriente de rama en la resistencia de  $8 \Omega$  en la dirección de la caída de tensión  $v_o$  es  $i_a - i_b$ . Por tanto,

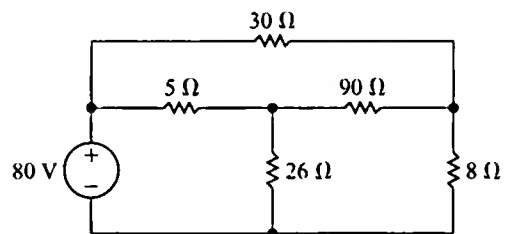
$$v_o = 8(i_a - i_b) = 8(3,6) = 28,8 \text{ V}.$$

## Evaluación del objetivo 2

- Comprender y ser capaz de utilizar el método de las corrientes de malla.

- 4.7. Utilice el método de las corrientes de malla para calcular (a) la potencia suministrada por la fuente de 80 V al circuito mostrado y (b) la potencia disipada en la resistencia de  $8 \Omega$ .

**RESPUESTA** (a) 400 W; (b) 50 W.



**NOTA** Trate también de resolver los Problemas 4.31 y 4.32 del capítulo.

## 4.6. El método de las corrientes de malla con fuentes dependientes

Si el circuito contiene fuentes dependientes, las ecuaciones de las corrientes de malla deben complementarse mediante las apropiadas ecuaciones de restricción. El Ejemplo 4.5 ilustra la aplicación del método de las corrientes de malla cuando el circuito incluye una fuente dependiente.

### EJEMPLO 4.5 Utilización del método de las corrientes de malla con fuentes dependientes

Utilice el método de análisis de circuitos basado en las corrientes de malla para determinar la potencia disipada en la resistencia de  $4\ \Omega$  en el circuito mostrado en la Figura 4.23.

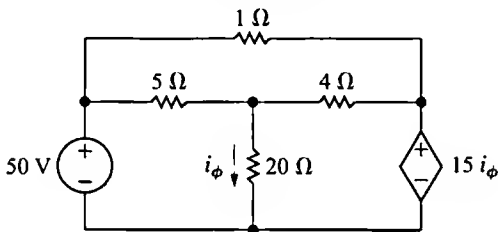


Figura 4.23. Circuito del Ejemplo 4.5.

#### SOLUCIÓN

Este circuito tiene seis ramas en las que se desconoce la corriente y cuatro nodos. Por tanto, necesitamos tres corrientes de malla para describir el circuito. Dichas corrientes están definidas en el circuito mostrado en la Figura 4.24. Las tres ecuaciones correspondientes a las corrientes de malla son

$$\begin{aligned} 50 &= 5(i_1 - i_2) + 20(i_1 - i_3), \\ 0 &= 5(i_2 - i_1) + 1i_2 + 4(i_2 - i_3), \\ 0 &= 20(i_3 - i_1) + 4(i_3 - i_2) + 15i_\phi. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Ahora, expresamos la corriente de rama que controla la fuente de tensión dependiente en términos de las corrientes de malla, de la forma siguiente:

$$i_\phi = i_1 - i_3, \quad (4.35)$$

que es la ecuación suplementaria impuesta por la presencia de la fuente dependiente. Sustituyendo la Ecuación 4.35 en las Ecuaciones 4.34 y agru-

pando los coeficientes de  $i_1$ ,  $i_2$  e  $i_3$  en cada ecuación, se obtiene

$$50 = 25i_1 - 5i_2 - 20i_3,$$

$$0 = -5i_1 + 10i_2 - 4i_3,$$

$$0 = -5i_1 - 4i_2 + 9i_3.$$

Puesto que estamos calculando la potencia disipada en la resistencia de  $4\ \Omega$ , calculamos las corrientes de malla  $i_2$  e  $i_3$ :

$$i_2 = 26\text{ A},$$

$$i_3 = 28\text{ A}.$$

La corriente en la resistencia de  $4\ \Omega$ , orientada de izquierda a derecha, es  $i_3 - i_2$ , que es igual a 2 A. Por tanto, la potencia disipada es

$$p_{4\Omega} = (i_3 - i_2)^2(4) = (2)^2(4) = 16\text{ W}.$$

¿Qué hubiera pasado si no se nos hubiera dicho que usáramos el método de las corrientes de malla? ¿Habría elegido el método de las tensiones de nodo? El problema se reduce a calcular una tensión de nodo desconocida, debido a la presencia de dos fuentes de tensión entre nodos esenciales. Más adelante explicaremos con más detalle el modo de tomar este tipo de decisiones.

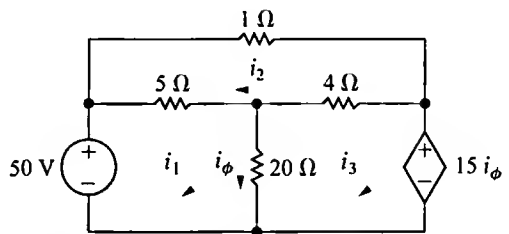


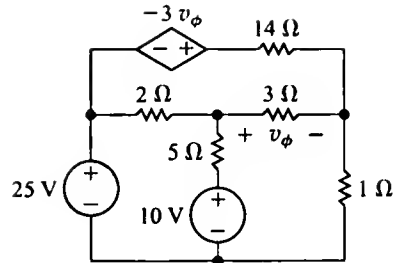
Figura 4.24. El circuito mostrado en la Figura 4.23, con las tres corrientes de malla.

#### Evaluación del objetivo 2

- Comprender y ser capaz de utilizar el método de las corrientes de malla.

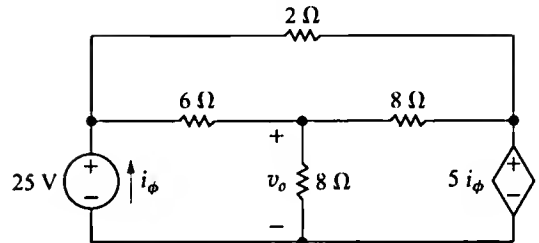
- 4.8. a) Determine el número de ecuaciones de corriente de malla necesarias para resolver el circuito mostrado.
- b) Utilice el método de las corrientes de malla para calcular cuánta potencia se está entregando a la fuente de tensión dependiente.

**RESPUESTA** (a) 3; (b)  $-36$  W.



- 4.9. Utilice el método de las corrientes de malla para calcular  $v_o$  en el circuito mostrado.

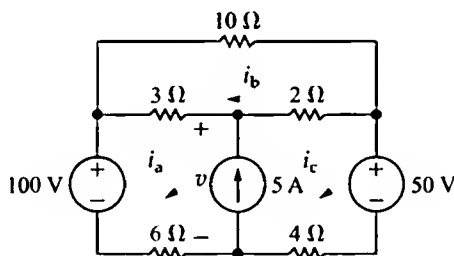
**RESPUESTA** 16 V.



**NOTA** Trate también de resolver los Problemas 4.33 y 4.34 del capítulo.

## 4.7. Método de las corrientes de malla: algunos casos especiales

Cuando una rama incluye una fuente de corriente, el método de las corrientes de malla requiere algunas manipulaciones adicionales. El circuito mostrado en la Figura 4.25 ilustra la naturaleza del problema.



**Figura 4.25.** Un circuito que ilustra el análisis de mallas cuando una rama contiene una fuente de corriente independiente.

Hemos definido las corrientes de malla  $i_a$ ,  $i_b$  e  $i_c$ , así como la tensión en bornes de la fuente de corriente de 5 A, con el fin de facilitar la explicación. Observe que el circuito contiene cinco ramas esenciales en las que la corriente es desconocida y cuatro nodos esenciales. Por tanto, necesitamos escribir dos  $[5-(4-1)]$  ecuaciones de corriente de malla para resolver el circuito. La presencia de la fuente de corriente reduce las tres corrientes de malla desconocidas a sólo dos, ya que restringe la diferencia entre  $i_a$  e  $i_c$ , imponiendo que sea igual a 5 A. Por tanto, si conocemos  $i_a$ , sabemos cuál es el valor de  $i_c$ , y viceversa.

Sin embargo, cuando intentamos sumar las tensiones alrededor de la malla a o la malla c, debemos introducir en las ecuaciones la tensión desconocida en bornes de la fuente de corriente de 5 A. Así, para la malla a:

$$100 = 3(i_a - i_b) + v + 6i_a, \quad (4.36)$$

y para la malla c:

$$-50 = 4i_c - v + 2(i_c - i_b). \quad (4.37)$$

Ahora sumamos las Ecuaciones 4.36 y 4.37 para eliminar  $v$  y obtenemos

$$50 = 9i_a - 5i_b + 6i_c. \quad (4.38)$$

Sumando las tensiones alrededor de la malla b se obtiene

$$0 = 3(i_b - i_a) + 10i_b + 2(i_b - i_c). \quad (4.39)$$

Reducimos las Ecuaciones 4.38 y 4.39 a dos ecuaciones con dos incógnitas utilizando la restricción de que

$$i_c - i_a = 5. \quad (4.40)$$

Dejamos al lector la verificación de que, cuando se combina la Ecuación 4.40 con las Ecuaciones 4.38 y 4.39, las soluciones correspondientes a las tres corrientes de malla son

$$i_a = 1,75 \text{ A}, \quad i_b = 1,25 \text{ A} \quad \text{e} \quad i_c = 6,75 \text{ A}.$$

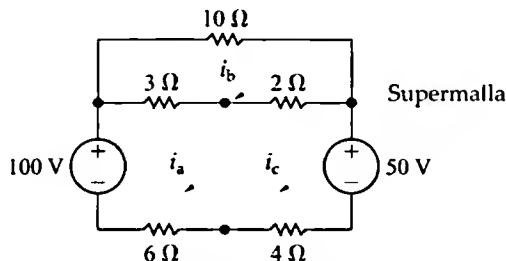
## Concepto de supermalla

Podemos deducir la Ecuación 4.38 sin introducir la tensión desconocida  $v$ , utilizando el concepto de supermalla. Para crear una supermalla, eliminamos mentalmente la fuente de corriente del circuito, evitando simplemente esta rama a la hora de escribir las ecuaciones de las corrientes de malla. Entonces expresamos las tensiones alrededor de la supermalla en términos de las corrientes de malla originales. La Figura 4.26 ilustra el concepto de supermalla. Cuando se suman las tensiones alrededor de la supermalla (como se denota mediante la línea punteada), obtenemos la ecuación

$$-100 + 3(i_a - i_b) + 2(i_c - i_b) + 50 + 4i_c + 6i_a = 0, \quad (4.41)$$

que se reduce a

$$50 = 9i_a - 5i_b + 6i_c. \quad (4.42)$$



**Figura 4.26.** El circuito mostrado en la Figura 4.25, ilustrando el concepto de una supermalla.

Observe que las Ecuaciones 4.42 y 4.38 son idénticas. Así, la supermalla ha eliminado la necesidad de introducir la tensión desconocida en bornes de la fuente de corriente. Una vez más, recalquemos que el tomarse el tiempo necesario para examinar el circuito con cuidado e identificar este tipo de atajos suele permitir simplificar considerablemente el análisis.

## Análisis del circuito amplificador mediante las corrientes de malla

Podemos utilizar el circuito que introdujimos por vez primera en la Sección 2.5 (Figura 2.24) para ilustrar cómo se aplica el método de las corrientes de malla cuando una rama contiene una fuente de corriente dependiente. La Figura 4.27 muestra dicho circuito, en el que hemos denominado a las tres corrientes de malla  $i_a$ ,  $i_b$  e  $i_c$ . Este circuito tiene cuatro nodos esenciales y cinco ramas esenciales en las que no se conoce el valor de la corriente. Por tanto, sabemos que el circuito puede analizarse en términos de dos  $[5 - (4 - 1)]$  ecuaciones de corriente de malla. Aunque hemos definido tres corrientes de malla en la Figura 4.27, la fuente de corriente dependiente impone una restricción entre las corrientes de malla  $i_a$  e  $i_c$ , por lo que sólo hay dos corrientes de malla desconocidas. Utilizando el concepto de supermalla, redibujamos el circuito como se muestra en la Figura 4.28.

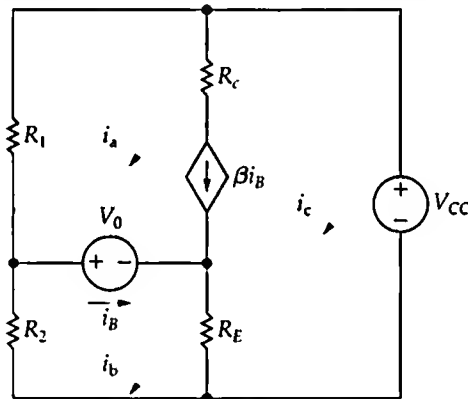


Figura 4.27. El circuito mostrado en la Figura 2.24, con las corrientes de malla  $i_a$ ,  $i_b$  e  $i_c$ .

Ahora sumamos las tensiones alrededor de la supermalla en términos de las corrientes de mallas  $i_a$ ,  $i_b$  e  $i_c$  para obtener

$$R_1 i_a + v_{CC} + R_E (i_c - i_b) - V_0 = 0. \quad (4.43)$$

La ecuación de la malla b es

$$R_2 i_b + V_0 + R_E (i_b - i_c) = 0. \quad (4.44)$$

La restricción impuesta por la fuente de corriente dependiente es la siguiente:

$$\beta i_B = i_a - i_c. \quad (4.45)$$

La corriente de rama que controla la fuente de corriente dependiente, expresada en función de las corrientes de malla, es

$$i_B = i_b - i_a. \quad (4.46)$$

A partir de las Ecuaciones 4.45 y 4.46, obtenemos

$$i_c = (1 + \beta) i_a - \beta i_b. \quad (4.47)$$

Ahora utilizamos la Ecuación 4.47 para eliminar  $i_c$  de las Ecuaciones 4.43 y 4.44:

$$[R_1 + (1 + \beta)R_E]i_a - (1 + \beta)R_E i_b = V_0 - V_{CC}, \quad (4.48)$$

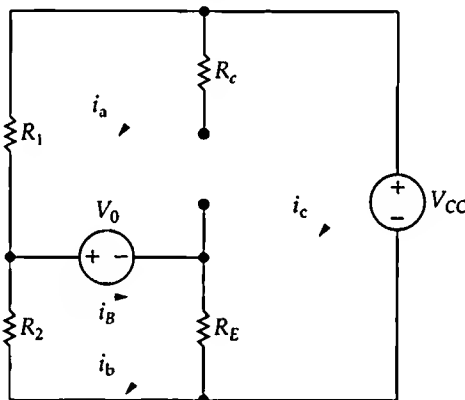
$$-(1 + \beta)R_E i_a + [R_2 + (1 + \beta)R_E]i_b = -V_0. \quad (4.49)$$

Puede verificar que la resolución de las Ecuaciones 4.48 y 4.49 nos da los siguientes valores de  $i_a$  e  $i_b$ :

$$i_a = \frac{V_0 R_2 - V_{CC} R_2 - V_{CC} (1 + \beta) R_E}{R_1 R_2 + (1 + \beta) R_E (R_1 + R_2)}, \quad (4.50)$$

$$i_b = \frac{-V_0 R_1 - (1 + \beta) R_E V_{CC}}{R_1 R_2 + (1 + \beta) R_E (R_1 + R_2)}. \quad (4.51)$$

También dejamos al lector la verificación de que, cuando se utilizan las Ecuaciones 4.50 y 4.51 para calcular  $i_b$ , el resultado es el mismo que el proporcionado por la Ecuación 2.25.



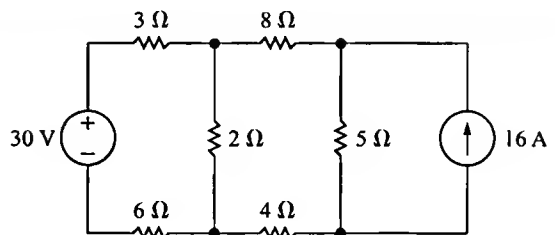
**Figura 4.28.** El circuito mostrado en la Figura 4.27, con la supermalla creada por la presencia de la fuente de corriente dependiente.

## Evaluación del objetivo 2

- Comprender y ser capaz de utilizar el método de las corrientes de malla.

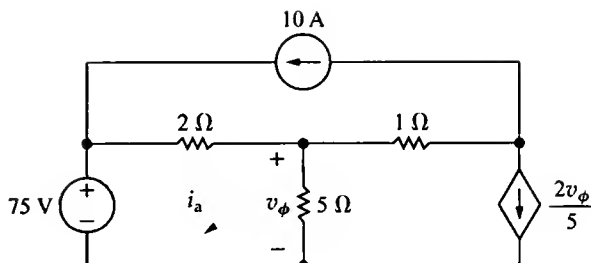
**4.10.** Utilice el método de las corrientes de malla para calcular la potencia disipada en la resistencia de  $2\ \Omega$  en el circuito mostrado.

**RESPUESTA** 72 W.



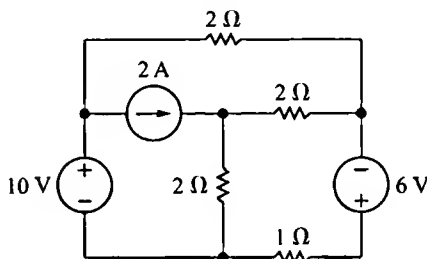
- 4.11. Utilice el método de las corrientes de malla para calcular la corriente de malla  $i_a$  en el circuito mostrado.

**RESPUESTA** 15 A.



- 4.12. Utilice el método de las corrientes de malla para calcular la potencia disipada en la resistencia de  $1\ \Omega$  en el circuito mostrado.

**RESPUESTA** 36 W.



**NOTA** Trate también de resolver los Problemas 4.37, 4.38, 4.43 y 4.46 del capítulo.

## 4.8. Comparación entre los métodos de las tensiones de nodo y de las corrientes de malla

La mayor ventaja tanto del método de las tensiones de nodo como del de las corrientes de malla es que permiten reducir el número de ecuaciones simultáneas que hay que manipular. Ambos métodos requieren también que el analista sea bastante sistemático a la hora de organizar y escribir estas ecuaciones. Entonces, resulta natural preguntarse: «¿Cuándo es preferible el método de las tensiones de nodo al del las corrientes de malla, y viceversa?». Como podría sospecharse, no existe una respuesta perfectamente definida a esta pregunta. Sin embargo, hacerse algunas preguntas puede ayudarle a identificar el método más eficiente antes de embarcarse en el proceso de resolución:

- ¿Alguno de los dos métodos le proporciona un menor número de ecuaciones que resolver?
- ¿Contiene el circuito algún supernodo? Si es así, la utilización del método de las tensiones de nodo le permitirá reducir el número de ecuaciones.
- ¿Contiene el circuito alguna supermalla? Si es así, la utilización del método de las corrientes de malla le permitirá reducir el número de ecuaciones.
- ¿Se puede obtener la solución pedida resolviendo sólo una parte del circuito? Si es así, ¿qué método es más eficiente para resolver sólo la parte relevante del circuito?

Quizá la observación más importante es que, en cualquier situación, conviene dedicar algo de tiempo a pensar en el problema en relación con los diversos enfoques analíticos disponibles. Los Ejemplos 4.6 y 4.7 ilustran el proceso de decisión entre los métodos de las tensiones de nodo y de las corrientes de malla.



### EJEMPLO 4.6 Comparación entre el método de las tensiones de nodo y el de las corrientes de malla

Calcule la potencia disipada en la resistencia de  $300\ \Omega$  en el circuito mostrado en la Figura 4.29.

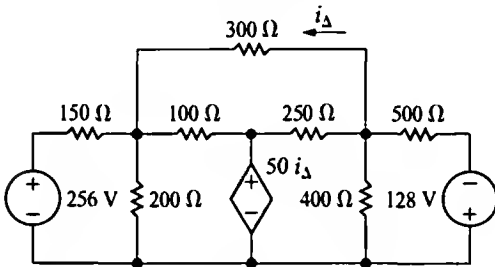


Figura 4.29. Circuito del Ejemplo 4.6.

#### SOLUCIÓN

Para calcular la potencia disipada en la resistencia de  $300\ \Omega$ , necesitamos determinar la corriente en la resistencia o la tensión que cae en la misma. El método de las corrientes de malla nos proporcionará la corriente de la resistencia; este enfoque requiere resolver un sistema de cinco ecuaciones de malla, como se muestra en la Figura 4.30. Al escribir las cinco ecuaciones, debemos incluir la restricción  $i_\Delta = -i_b$ .

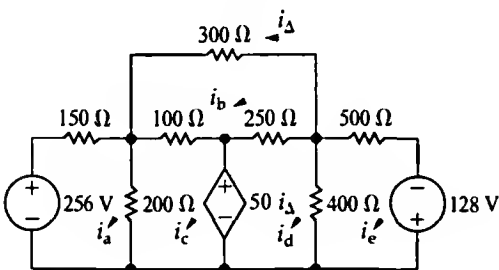


Figura 4.30. El circuito mostrado en la Figura 4.29, con las cinco corrientes de malla.

Antes de seguir avanzando, examinemos también el circuito según el método de las tensiones de nodo. Observe que, una vez que conocemos las tensiones de nodo, podemos calcular la corriente en la resistencia de  $300\ \Omega$  o la tensión que cae en la misma. Este circuito tiene cuatro

nodos esenciales y, por tanto, sólo se necesitan tres ecuaciones de tensión de nodo para describir el circuito. Debido a que la fuente de tensión dependiente está conectada entre dos nodos esenciales, sólo necesitamos sumar las corrientes de dos nodos. Por tanto, el problema se reduce a escribir dos ecuaciones de tensión de nodo y una ecuación de restricción. Puesto que el método de las tensiones de nodo sólo requiere dos ecuaciones, será el enfoque que debemos seguir.

Una vez tomada la decisión de utilizar el método de las tensiones de nodo, el siguiente paso consiste en seleccionar un nodo de referencia. Son dos los nodos esenciales del circuito de la Figura 4.29 que merecen ser considerados. El primero es el nodo de referencia de la Figura 4.31. Si se selecciona este nodo, una de las tensiones de nodo desconocidas es la tensión que cae en la resistencia de  $300\ \Omega$ ,  $v_2$  en la Figura 4.31. Una vez que conozcamos esta tensión, calcularemos la potencia en la resistencia de  $300\ \Omega$  utilizando la expresión

$$p_{300\ \Omega} = v_2^2 / 300.$$

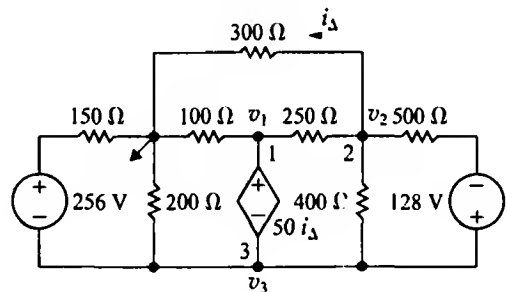


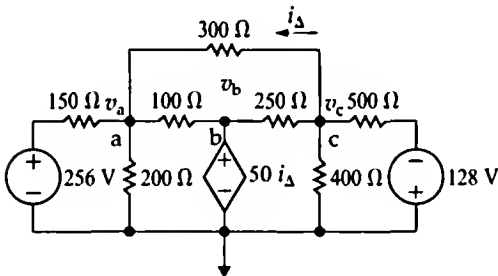
Figura 4.31. El circuito mostrado en la Figura 4.29, con un nodo de referencia.

Observe que, además de seleccionar el nodo de referencia, hemos definido las tres tensiones de nodo  $v_1$ ,  $v_2$  y  $v_3$  y hemos indicado que los nodos 1 y 3 forman el supernodo, porque están conectados por una fuente de tensión dependiente.

te. El convenio es que las tensiones de nodo representan un incremento con respecto al nodo de referencia; por tanto, en la Figura 4.31, no hemos indicado las referencias de polaridad de las tensiones de nodo en el diagrama del circuito.

El segundo nodo que merece nuestra consideración como nodo de referencia es el nodo inferior del circuito, como se muestra en la Figura 4.32. Se trata de una elección atractiva, porque es el nodo que tiene más ramas conectadas y las ecuaciones de tensión de nodo son, por tanto, más fáciles de escribir. Sin embargo, para calcular la corriente o la tensión en la resistencia de  $300\ \Omega$  se requeriría un cálculo adicional después de haber determinado las tensiones de nodo  $v_a$  y  $v_c$ . Por ejemplo, la corriente en la resistencia de  $300\ \Omega$  es  $(v_c - v_a)/300$ , mientras que la tensión que cae en la resistencia es  $v_c - v_a$ .

Comparemos estos dos posibles nodos de referencia por medio de los siguientes conjuntos de ecuaciones. El primer conjunto corresponde al circuito mostrado en la Figura 4.31, mientras que el segundo conjunto está basado en el circuito mostrado en la Figura 4.32.



**Figura 4.32.** El circuito mostrado en la Figura 4.29, con un nodo de referencia alternativo.

#### EJEMPLO 4.7 Comparación entre los métodos de las tensiones de nodo y de las corrientes de malla

Calcule la tensión  $v_o$  en el circuito mostrado en la Figura 4.33.

#### SOLUCIÓN

A primera vista, el método de las tensiones de nodo parece recomendable, porque podemos de-

#### ■ Conjunto 1 (Figura 4.31)

En el supernodo,

$$\frac{v_1}{100} + \frac{v_1 - v_2}{250} + \frac{v_3}{200} + \frac{v_3 - v_2}{400} + \frac{v_3 - (v_2 + 128)}{500} + \frac{v_3 + 256}{150} = 0.$$

En  $v_2$ ,

$$\frac{v_2}{300} + \frac{v_2 - v_1}{250} + \frac{v_2 - v_3}{400} + \frac{v_2 + 128 - v_3}{500} = 0.$$

A partir del supernodo, la ecuación de restricción es

$$v_3 = v_1 - 50i_\Delta = v_1 - \frac{v_2}{6}.$$

#### ■ Conjunto 2 (Figura 4.32)

En  $v_a$ ,

$$\frac{v_a}{200} + \frac{v_a - 256}{150} + \frac{v_a - v_b}{100} + \frac{v_a - v_c}{300} = 0.$$

En  $v_c$ ,

$$\frac{v_c}{400} + \frac{v_c + 128}{500} + \frac{v_c - v_b}{250} + \frac{v_c - v_a}{300} = 0.$$

A partir del supernodo, la ecuación de restricción es

$$v_b = 50i_\Delta = \frac{50(v_c - v_a)}{300} = \frac{v_c - v_a}{6}.$$

Puede verificar que la resolución de cualquiera de los dos sistemas de ecuaciones nos da una potencia disipada de 16,57 W en la resistencia de  $300\ \Omega$ .

finir la tensión desconocida como una tensión de nodo, seleccionando como nodo de referencia el terminal inferior de la fuente de corriente dependiente. El circuito tiene cuatro nodos esenciales y dos fuentes dependientes controladas por tensión, por lo que el método de las tensiones de nodo

requerirá la manipulación de tres ecuaciones de tensión de nodo y dos ecuaciones de restricción.

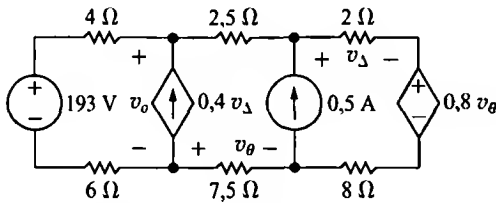


Figura 4.33. Circuito del Ejemplo 4.7.

Volvamos ahora nuestra atención al método de las corrientes de malla y veamos cómo se aplicaría al cálculo de  $v_o$ . El circuito contiene tres mallas y podemos utilizar la de la izquierda para calcular  $v_o$ . Si denotamos mediante  $i_a$  la corriente de malla de la izquierda, entonces  $v_o = 193 - 10i_a$ . La presencia de las dos fuentes de corriente reduce el problema a manipular una única ecuación de supermalla y dos ecuaciones de restricción. Por tanto, la técnica más atractiva en este caso es el método de las corrientes de malla.

Para ayudarle a comparar los dos enfoques, vamos a resumir ambos métodos. Las ecuaciones de corriente de malla están basadas en el circuito mostrado en la Figura 4.34, mientras que las ecuaciones de tensión de nodo están basadas en el circuito mostrado en la Figura 4.35. La ecuación de la supermalla es

$$193 = 10i_a + 10i_b + 10i_c + 0.8v_\theta$$

y las ecuaciones de restricción son

$$i_b - i_a = 0.4v_\Delta = 0.8i_c;$$

$$v_\theta = -7.5i_b;$$

$$i_c - i_b = 0.5.$$

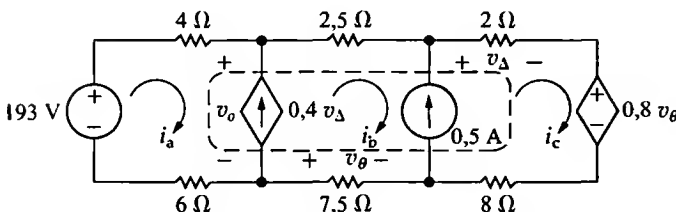


Figura 4.34. El circuito mostrado en la Figura 4.33, con las tres corrientes de malla.

Utilicemos las ecuaciones de restricción para escribir la ecuación de la supermalla en función de  $i_a$ :

$$160 = 80i_a, \quad \text{o} \quad i_a = 2 \text{ A},$$

$$v_o = 193 - 20 = 173 \text{ V}.$$

Las ecuaciones de tensión de nodo son

$$\frac{v_o - 193}{10} - 0.4v_\Delta + \frac{v_o - v_a}{2.5} = 0,$$

$$\frac{v_a - v_o}{2.5} - 0.5 + \frac{v_a - (v_b + 0.8v_\theta)}{10} = 0,$$

$$\frac{v_b}{7.5} + 0.5 + \frac{v_b + 0.8v_\theta - v_a}{10} = 0.$$

Las ecuaciones de restricción son

$$v_\theta = -v_b, \quad v_\Delta = \left[ \frac{v_a - (v_b + 0.8v_\theta)}{10} \right] 2.$$

Utilizamos las ecuaciones de restricción para reducir las ecuaciones de tensión de nodo a un sistema de tres ecuaciones con  $v_o$ ,  $v_a$  y  $v_b$  como incógnitas. Puede verificar que el método de las tensiones de nodo también nos da la solución  $v_o = 173 \text{ V}$ .

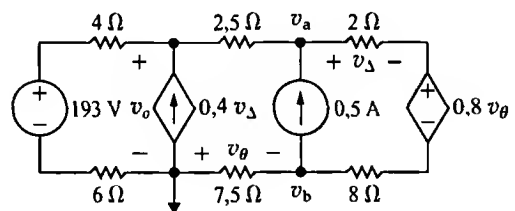


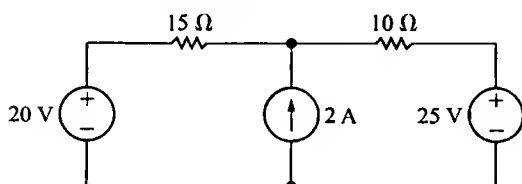
Figura 4.35. El circuito mostrado en la Figura 4.33, con las tensiones de nodo indicadas.

### Evaluación del objetivo 3

- Elegir entre el método de las tensiones de nodo y el de las corrientes de malla.

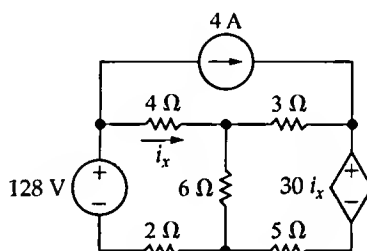
4.13. Calcule la potencia suministrada por la fuente de corriente de 2 A en el circuito mostrado.

**RESPUESTA** 70 W.



4.14. Calcule la potencia suministrada por la fuente de corriente de 4 A en el circuito mostrado.

**RESPUESTA** 40 W.



**NOTA** Trate también de resolver los Problemas 4.52 y 4.54 del capítulo.

## 4.9. Transformación de fuentes

Aunque los métodos de las tensiones de nodo y de las corrientes de malla constituyen técnicas muy potentes para la resolución de circuitos, nos interesa ver si existen otros métodos que puedan usarse para simplificar los circuitos. Dentro de nuestra lista de técnicas de simplificación ya tenemos las reducciones serie-paralelo y las transformaciones  $\Delta$ -Y. Vamos a ampliar nuestra lista con una nueva técnica, que es la de transformación de fuentes. Una **transformación de fuente**, mostrada en la Figura 4.36, permite sustituir una fuente de tensión en serie con una resistencia por una fuente de corriente en paralelo con la misma resistencia, o viceversa. La flecha de doble sentido indica que la transformación de fuentes es bidireccional, es decir, que podemos comenzar con cualquiera de las dos configuraciones y determinar la otra.

Necesitamos averiguar la relación entre  $v_s$  e  $i_s$  que garantice que las dos configuraciones de la Figura 4.36 sean equivalentes con respecto a los nodos a y b. La equivalencia se consigue si cualquier resistencia de carga  $R_L$  se ve atravesada por la misma corriente, y cae en ella por tanto la misma tensión, bien se la conecte entre los nodos a y b de la Figura 4.36(a) o de la Figura 4.36(b).

Suponga que conectamos  $R_L$  entre los nodos a y b de la Figura 4.36(a). Utilizando la ley de Ohm, la corriente que atravesará  $R_L$  será

$$i_L = \frac{v_s}{R + R_L}. \quad (4.52)$$

Ahora suponga que conectamos la misma resistencia  $R_L$  entre los nodos a y b de la Figura 4.36(b). Utilizando las reglas de división de corriente, la corriente que atravesará  $R_L$  será

$$i_L = \frac{R}{R + R_L} i_s. \quad (4.53)$$

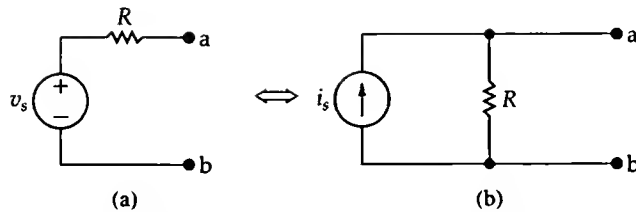


Figura 4.36. Transformaciones de fuentes.

Si los dos circuitos de la Figura 4.36 son equivalentes, estas corrientes que atraviesan las resistencias deben ser iguales. Igualando los lados derechos de las Ecuaciones 4.52 y 4.53 y simplificando, se obtiene

$$i_s = \frac{v_s}{R}. \quad (4.54)$$

Cuando se satisface la Ecuación 4.54 para los circuitos de la Figura 4.36, la corriente que pasa por  $R_L$  será la misma para ambos circuitos y para todos los valores de  $R_L$ . Si la corriente que atraviesa  $R_L$  es la misma en ambos circuitos, entonces la caída de tensión en  $R_L$  será también la misma y los circuitos serán equivalentes en los nodos a y b.

Si invertimos la polaridad de  $v_s$ , la orientación de  $i_s$  también deberá ser invertida para mantener la equivalencia.

El Ejemplo 4.8 ilustra la utilidad de realizar transformaciones de fuentes con el fin de simplificar un problema de análisis de circuitos.

#### EJEMPLO 4.8 Utilización de transformaciones de fuentes para resolver un circuito

- Para el circuito mostrado en la Figura 4.37, calcule la potencia asociada con la fuente de 6 V.
- Indique si la fuente de 6 V está absorbiendo o entregando la potencia calculada en el apartado (a).

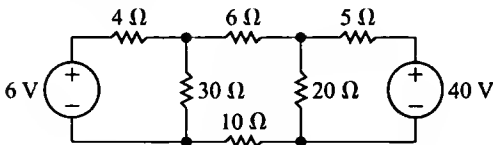


Figura 4.37. Circuito del Ejemplo 4.8.

#### SOLUCIÓN

- Si estudiamos el circuito mostrado en la Figura 4.37, sabiendo que lo que nos interesa es calcular la potencia asociada con la

fuentes de 6 V, son varios los enfoques que se nos vienen a la cabeza. El circuito tiene cuatro nodos esenciales y seis ramas esenciales en las que no conocemos el valor de la corriente. Por tanto, podemos calcular la corriente en la rama que contiene la fuente de 6 V resolviendo tres  $[6 - (4 - 1)]$  ecuaciones de corriente de malla o tres  $[4 - 1]$  ecuaciones de tensión de nodo. Si elegimos el método de las corrientes de malla, una de las corrientes que hay que calcular es la corriente de malla correspondiente a la rama de la fuente de 6 V. Si elegimos el método de las tensiones de nodo, una de las tensiones que hay que determinar es la que cae en la resistencia de 30 Ω, a partir de la cual podremos calcular la corriente de rama correspondiente a la fuente de 6 V. Pero, si nos centramos en sólo una de las

corrientes de rama, podemos simplificar primero el circuito utilizando la técnica de transformación de fuentes.

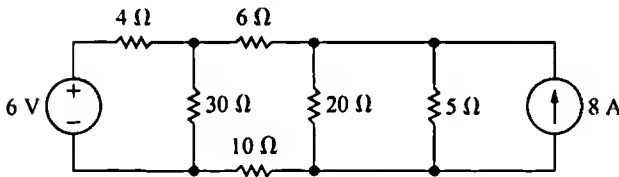
Debemos reducir el circuito de forma tal que se preserve la identidad de la rama que contiene la fuente de 6 V. Sin embargo, no hay ninguna razón para preservar la de la rama que contiene la fuente de 40 V. Si comenzamos por esa rama, podemos transformar la fuente de 40 V, en serie con la resistencia de 5  $\Omega$ , en una fuente de corriente de 8 A en paralelo con una resistencia de 5  $\Omega$ , como se muestra en la Figura 4.38(a).

A continuación, podemos sustituir la combinación en paralelo de las resistencias de 20  $\Omega$  y de 5  $\Omega$  por una resistencia de 4  $\Omega$ . Esa resistencia de 4  $\Omega$  está en paralelo con la fuente de 8 A y puede, por tanto, sustituirse por una fuente de 32 V en serie con

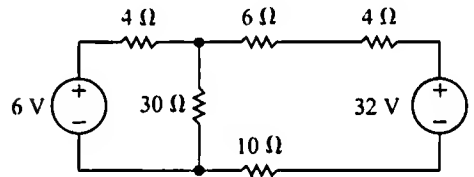
una resistencia de 4  $\Omega$ , como se muestra en la Figura 4.38(b). La fuente de 32 V está en serie con una resistencia de 20  $\Omega$ , por lo que puede sustituirse por una fuente de corriente de 1,6 A en paralelo con 20  $\Omega$ , como se muestra en la Figura 4.38(c). Ahora, podemos reducir las resistencias en paralelo de 20  $\Omega$  y 30  $\Omega$  a una única resistencia de 12  $\Omega$ . La combinación en paralelo de la fuente de corriente de 1,6 A y la resistencia de 12  $\Omega$  se transforma en una fuente de tensión de 19,2 V en serie con 12  $\Omega$ . La Figura 4.38(d) muestra el resultado de esta última transformación. La corriente en la dirección de la caída de tensión en bornes de la fuente de 6 V es  $(19,2 - 6)/16$  o 0,825 A. Por tanto, la potencia asociada con la fuente de 6 V es

$$p_{6V} = (0,825)(6) = 4,95 \text{ W.}$$

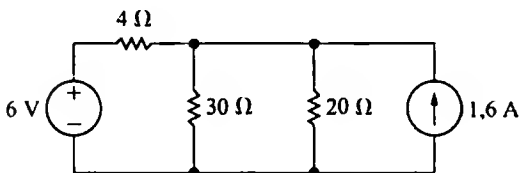
b) La fuente de tensión está absorbiendo potencia.



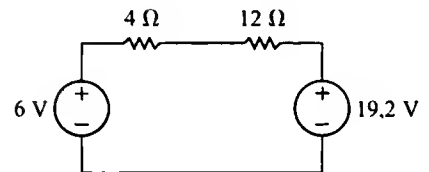
(a) Primer paso



(b) Segundo paso



(c) Tercer paso

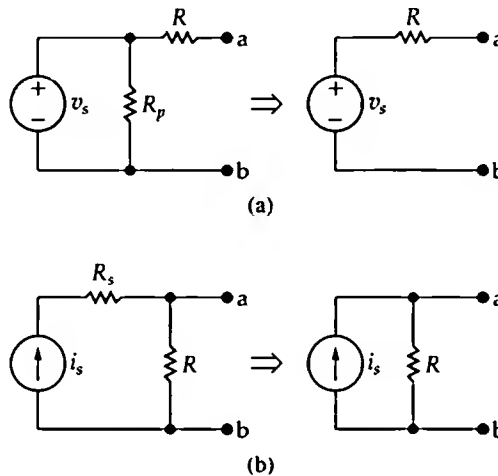


(d) Cuarto paso

Figura 4.38. Simplificación paso a paso del circuito mostrado en la Figura 4.37.

Una pregunta que surge al utilizar las transformaciones de fuentes mostradas en las Figura 4.38 es la siguiente: «¿Qué sucede si hay una resistencia  $R_p$  en paralelo con la fuente de tensión o una resistencia  $R_s$  en serie con la fuente de corriente?». En ambos casos, la resistencia no tiene ningún efecto sobre el circuito equivalente que predice el comportamiento con respecto a los terminales a y b. La Figura 4.39 resume esta situación.

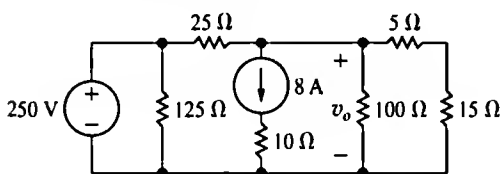
Los dos circuitos mostrados en la Figura 4.39(a) son equivalentes con respecto a los terminales a y b, porque producen la misma tensión y la misma corriente en cualquier resistencia  $R_L$  que se inserte entre los nodos a y b. Lo mismo puede decirse de los circuitos de la Figura 4.39(b). El Ejemplo 4.9 ilustra una aplicación de los circuitos equivalentes mostrados en la Figura 4.39.



**Figura 4.39.** Circuitos equivalentes que contienen una resistencia en paralelo con una fuente de tensión o en serie con una fuente de corriente.

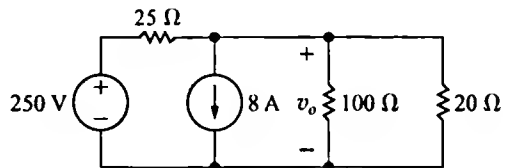
#### EJEMPLO 4.9 Utilización de técnicas especiales de transformación de fuentes

- Utilice la técnica de transformación de fuentes para calcular la tensión  $v_o$  en el circuito mostrado en la Figura 4.40.
- Calcule la potencia generada por la fuente de tensión de 250 V.
- Calcule la potencia generada por la fuente de corriente de 8 A.



**Figura 4.40.** Circuito del Ejemplo 4.9.

125  $\Omega$  está conectada en bornes de la fuente de tensión de 250 V y la resistencia de 10  $\Omega$  está conectada en serie con la fuente de corriente de 8 A. También sustituimos las resistencias conectadas en serie por una única resistencia de 20  $\Omega$ . La Figura 4.41 muestra el circuito simplificado.



**Figura 4.41.** Una versión simplificada del circuito mostrado en la Figura 4.40.

#### SOLUCIÓN

- Comenzamos eliminando las resistencias de 125  $\Omega$  y 10  $\Omega$ , porque la resistencia de

Ahora utilizamos una transformación de fuente para sustituir la fuente de 250 V y la resistencia de 25  $\Omega$  por una fuente de 10 A en paralelo con la resistencia de 25  $\Omega$ ,

como se muestra en la Figura 4.42. Con esto podemos simplificar el circuito de dicha figura utilizando la ley de Kirchhoff de las corrientes para combinar las fuentes de corriente en paralelo en una única fuente. Las resistencias en paralelo se combinan en una única resistencia. La Figura 4.43 muestra el resultado. Por tanto,  $v_o = 20$  V.

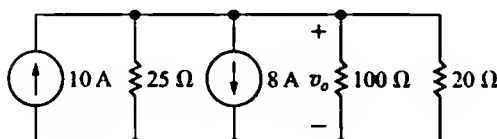


Figura 4.42. El circuito mostrado en la Figura 4.41 después de una transformación de fuente.

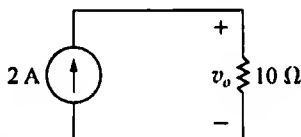


Figura 4.43. El circuito mostrado en la Figura 4.42 después de combinar las fuentes y las resistencias.

- b) La corriente suministrada por la fuente de 250 V es igual a la corriente que atraviesa la resistencia de  $125 \Omega$  más la corriente en la resistencia de  $25 \Omega$ . Por tanto,

$$i_s = \frac{250}{125} + \frac{250 - 20}{25} = 11,2 \text{ A.}$$

En conclusión, la potencia generada por la fuente de tensión es

$$p_{250V}(\text{desarrollada}) = (250)(11,2) = 2800 \text{ W.}$$

- c) Para calcular la potencia generada por la fuente de corriente de 8 A, calculemos primero la tensión en bornes de la fuente. Si representamos mediante  $v_s$  dicha tensión, siendo positiva en el terminal superior de la fuente, obtenemos

$$v_s + 8(10) = v_o = 20 \quad \text{o} \quad v_s = -60 \text{ V,}$$

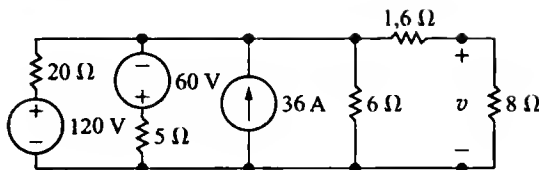
y la potencia generada por la fuente de 8 A es de 480 W. Observe que las resistencias de  $125 \Omega$  y de  $10 \text{ A}$  no afectan al valor de  $v_o$ , pero sí a los cálculos de potencia.

## Evaluación del objetivo 4

- Comprender el concepto de transformación de fuentes.

- 4.15. a) Utilice una serie de transformaciones de fuentes para calcular la tensión  $v$  en el circuito mostrado.  
b) ¿Cuánta potencia entrega la fuente de 120 V al circuito?

RESPUESTA (a) 48 V; (b) 374,4 W.



NOTA Trate también de resolver los Problemas 4.55 y 4.58 del capítulo.

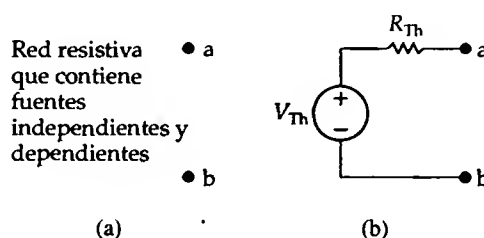
## 4.10. Equivalentes de Thévenin y de Norton

En algunas ocasiones, durante el análisis de circuitos, nos interesa concentrarnos en lo que sucede en un par específico de terminales. Por ejemplo, cuando enchufamos una tostadora a la red eléctrica, lo que nos interesa principalmente son la tensión y la corriente en los terminales de la tostadora. No es



normal que nos interese el efecto que la conexión de la tostadora tiene sobre las tensiones o corrientes en otros puntos del circuito de la red eléctrica. Podemos ampliar este interés en el comportamiento en los terminales a un conjunto de aparatos eléctricos, cada uno de los cuales requiera una potencia distinta. Entonces nos interesará saber cómo cambian las tensiones y corrientes suministradas por la red eléctrica a medida que conectamos unos aparatos u otros. En otras palabras, nos interesa concentrarnos en el comportamiento del circuito de la red eléctrica, pero sólo en los terminales donde conectamos los aparatos.

Los equivalentes de Thévenin y Norton son técnicas de simplificación de circuitos que se concentran en el comportamiento en los terminales y son, por tanto, de gran ayuda durante el análisis. Aunque aquí hablaremos de estas técnicas en relación con los circuitos resistivos, los circuitos equivalentes de Thévenin y de Norton pueden utilizarse para representar cualquier circuito compuesto por elementos lineales.



**Figura 4.44.** (a) Circuito general. (b) Equivalente de Thévenin del circuito.

La mejor forma de describir los circuitos equivalentes de Thévenin es haciendo referencia a la Figura 4.44, que representa cualquier circuito compuesto por fuentes (tanto dependientes como independientes) y resistencias. Las letras a y b denotan el par de terminales de interés. La Figura 4.44(b) muestra el equivalente de Thévenin. Por tanto, un **circuito equivalente de Thévenin** es una fuente de tensión independiente  $V_{Th}$  en serie con una resistencia  $R_{Th}$ , con las que se sustituye una interconexión de fuentes y resistencias. Esta combinación en serie de  $V_{Th}$  y  $R_{Th}$  es equivalente al circuito original en el sentido de que, si conectamos la misma carga entre los terminales a y b de ambos circuitos, obtenemos la misma tensión y corriente en los terminales de la carga. Esta equivalencia se cumple para todos los posibles valores de la resistencia de carga.

Para representar el circuito original mediante su equivalente de Thévenin, tenemos que ser primero capaces de determinar la tensión de Thévenin  $V_{Th}$  y la resistencia de Thévenin  $R_{Th}$ . En primer lugar, observemos que, si la resistencia de carga es infinitamente grande, tenemos una condición de circuito abierto. La tensión de circuito abierto en los terminales a y b del circuito mostrado en la Figura 4.44(b) es  $V_{Th}$ . Por hipótesis, esta tensión debe ser la misma que la tensión en circuito abierto en los terminales a y b del circuito original. Por tanto, para calcular la tensión de Thévenin  $V_{Th}$ , basta con hallar la tensión de circuito abierto en el circuito original.

Si reducimos la resistencia de carga a cero, tenemos una condición de cortocircuito. Si cortocircuitamos los terminales a y b del circuito equivalente de Thévenin, la corriente de cortocircuito, dirigida desde a hacia b, será

$$i_{sc} = \frac{V_{Th}}{R_{Th}}. \quad (4.55)$$

Por hipótesis, esta corriente de cortocircuito debe ser idéntica a la corriente de cortocircuito ~~existen~~te en la red original cuando se cortocircuitan los terminales a y b. A partir de la Ecuación 4.55,

$$R_{Th} = \frac{V_{Th}}{i_{sc}}. \quad (4.56)$$

Por tanto, la resistencia de Thévenin es el cociente entre la tensión de circuito abierto y la corriente de cortocircuito.

## Determinación de un equivalente de Thévenin

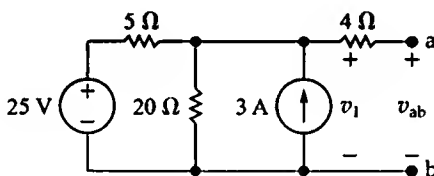
Para determinar el equivalente de Thévenin del circuito mostrado en la Figura 4.45, calculamos primero la tensión  $v_{ab}$  en circuito abierto. Observe que, cuando los terminales a y b están abiertos, no hay ninguna corriente atravesando la resistencia de  $4\ \Omega$ . Por tanto, la tensión  $v_{ab}$  en circuito abierto es idéntica a la tensión en bornes de la fuente de corriente de  $3\text{ A}$ , que hemos designado como  $v_1$ . Calculamos la tensión  $v_1$  resolviendo una única ecuación de tensión de nodo. Si elegimos el nodo inferior como nodo de referencia, obtenemos

$$\frac{v_1 - 25}{5} + \frac{v_1}{20} - 3 = 0. \quad (4.57)$$

Despejando  $v_1$ , se tiene que

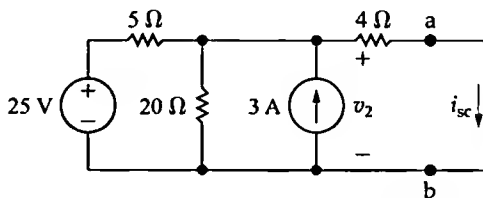
$$v_1 = 32\text{ V}. \quad (4.58)$$

Por tanto, la tensión de Thévenin del circuito es de  $32\text{ V}$ .



**Figura 4.45.** Circuito utilizado para ilustrar la técnica de los equivalentes de Thévenin.

El paso siguiente consiste en cortocircuitar los terminales y calcular la corriente de cortocircuito resultante. La Figura 4.46 muestra el circuito en estas condiciones. Observe que la corriente de cortocircuito va en la dirección de la caída de tensión en circuito abierto entre los terminales a y b. Si la corriente de cortocircuito va en la dirección del incremento de tensión en circuito abierto entre los terminales, es preciso insertar en signo menos la Ecuación 4.56.



**Figura 4.46.** El circuito mostrado en la Figura 4.45, con los terminales a y b cortocircuitados.

La corriente de cortocircuito ( $i_{sc}$ ) puede calcularse fácilmente una vez que conocemos  $v_2$ . Por tanto, el problema se reduce a calcular el valor  $v_2$  en condiciones de cortocircuito. De nuevo, si utilizamos el nodo inferior como nodo de referencia, la ecuación correspondiente a  $v_2$  es

$$\frac{v_2 - 25}{5} + \frac{v_2}{20} - 3 + \frac{v_2}{4} = 0. \quad (4.59)$$

Despejando  $v_2$  en la Ecuación 4.59, tenemos que

$$v_2 = 16 \text{ V}. \quad (4.60)$$

Por tanto, la corriente de cortocircuito es

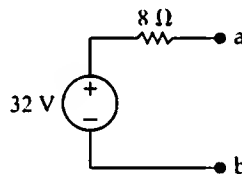
$$i_{sc} = \frac{16}{4} = 4 \text{ A}. \quad (4.61)$$

Ahora calculamos la resistencia de Thévenin sustituyendo los **resultados numéricos de las Ecuaciones 4.58 y 4.61** en la Ecuación 4.56:

$$R_{th} = \frac{V_{th}}{i_{sc}} = \frac{32}{4} = 8 \Omega. \quad (4.62)$$

La Figura 4.47 muestra el equivalente de Thévenin del circuito de la Figura 4.45.

Puede verificar que, si conectamos una resistencia de  $24 \Omega$  entre los terminales a y b de la Figura 4.45, la tensión que cae en la resistencia será de  $24 \text{ V}$  y la corriente que la atraviesa será de  $1 \text{ A}$ , exactamente lo mismo que con el circuito equivalente de Thévenin de la Figura 4.47. Esta misma equivalencia entre los circuitos de las Figuras 4.45 y 4.47 se cumple para cualquier valor de resistencia que conectemos entre los nodos a y b.



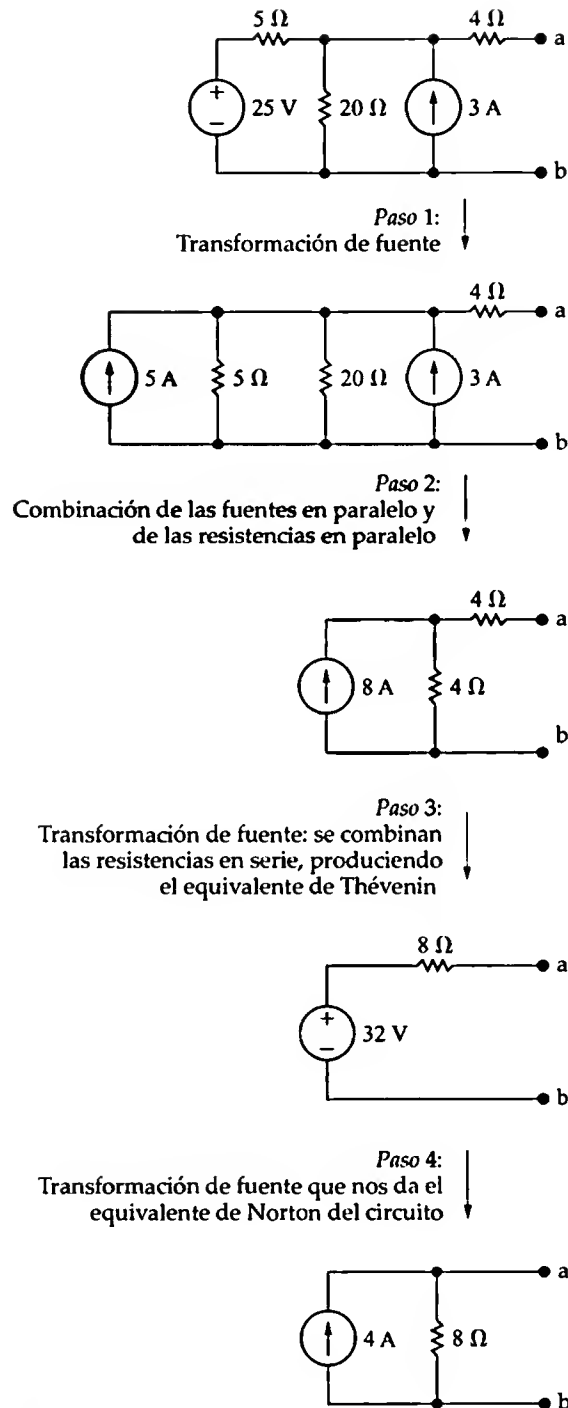
**Figura 4.47.** Equivalente de Thévenin del circuito mostrado en la Figura 4.45.

## Equivalente de Norton

Un **circuito equivalente de Norton** está compuesto por una fuente de corriente independiente en paralelo con la resistencia equivalente de Norton. Podemos calcular los correspondientes valores a partir del circuito equivalente de Thévenin, simplemente realizando una transformación de fuente. Por tanto, la corriente de Norton es igual a la corriente de cortocircuito entre los terminales de interés, y la resistencia de Norton es idéntica a la resistencia de Thévenin.

## Utilización de transformaciones de fuentes

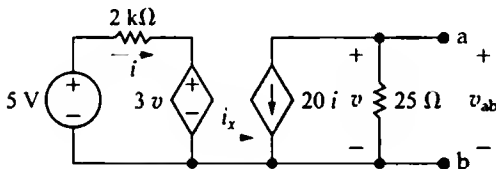
En ocasiones, podemos utilizar las transformaciones de fuentes para calcular un circuito equivalente de Thévenin o de Norton. Por ejemplo, podemos deducir los equivalentes de Thévenin y de Norton del circuito mostrado en la Figura 4.45 realizando la serie de transformaciones de fuentes mostrada en la Figura 4.48. Esta técnica es especialmente útil cuando la red sólo contiene fuentes independientes. La presencia de fuentes dependientes requiere retener la identidad de las tensiones y/o corrientes de control y esta restricción suele impedir continuar con el proceso de reducción del circuito mediante transformaciones de fuentes. Analizaremos el problema de calcular el equivalente de Thévenin cuando un circuito contiene fuentes dependientes en el Ejemplo 4.10.



**Figura 4.48.** Deducción paso a paso de los equivalentes de Thévenin y de Norton del circuito mostrado en la Figura 4.45.

### EJEMPLO 4.10 Determinación del equivalente de Thévenin de un circuito con una fuente dependiente

Calcular el equivalente de Thévenin del circuito con fuente dependiente mostrado en la Figura 4.49.



**Figura 4.49.** Circuito utilizado para ilustrar el cálculo de un equivalente de Thévenin cuando el circuito contiene fuentes dependientes.

#### SOLUCIÓN

El primer paso al analizar el circuito de la Figura 4.49 consiste en reconocer que la corriente designada como  $i_x$  debe ser cero (observe la ausencia de un camino de retorno para  $i_x$  que entre hacia la parte izquierda del circuito). La tensión de circuito abierto o de Thévenin será la tensión que caiga en la resistencia de  $25 \Omega$ . Si  $i_x = 0$ ,

$$V_{Th} = v_{ab} = (-20i)(25) = -500i.$$

La corriente  $i$  es

$$i = \frac{5 - 3v}{2000} = \frac{5 - 3V_{Th}}{2000}.$$

Al escribir la ecuación correspondiente a  $i$ , usamos el hecho de que la tensión de Thévenin es igual a la tensión de control. Combinando estas dos ecuaciones, obtenemos

$$V_{Th} = -5 \text{ V}.$$

Para calcular la corriente de cortocircuito, unimos los terminales a y b. En estas condiciones, la tensión de control  $v$  se reduce a cero. Por tanto, con los terminales cortocircuitados, el circuito mostrado en la Figura 4.49 se transforma en el que se indica en la Figura 4.50. Puesto que el cortocircuito está en paralelo con la resistencia de  $25 \Omega$ , toda la corriente de la fuente de corriente

dependiente aparecerá a través del cortocircuito, por lo que

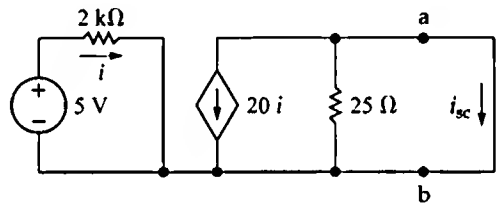
$$i_{sc} = -20i.$$

Como la tensión que controla la fuente de tensión dependiente se ha reducido a cero, la corriente que controla la fuente de corriente dependiente será

$$i = \frac{5}{2000} = 2.5 \text{ mA}.$$

Combinando estas dos ecuaciones, se obtiene una corriente de cortocircuito igual a

$$i_{sc} = -20(2.5) = -50 \text{ mA}.$$

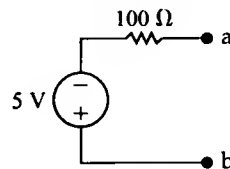


**Figura 4.50.** El circuito mostrado en la Figura 4.49, con los terminales a y b cortocircuitados.

A partir de los valores de  $i_{sc}$  y  $V_{Th}$ , obtenemos

$$R_{Th} = \frac{V_{Th}}{i_{sc}} = \frac{-5}{-50} \times 10^3 = 100 \Omega.$$

La Figura 4.51 ilustra el equivalente de Thévenin del circuito mostrado en la Figura 4.49. Observe que las marcas de polaridad de referencia en la fuente de tensión de Thévenin de la Figura 4.51 concuerdan con la ecuación precedente que nos daba el valor de  $V_{Th}$ .



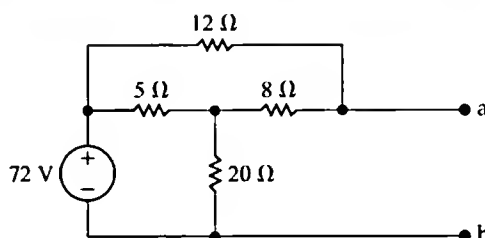
**Figura 4.51.** Equivalente de Thévenin del circuito mostrado en la Figura 4.49.

## Evaluación del objetivo 5

- Comprender los equivalentes de Thévenin y de Norton.

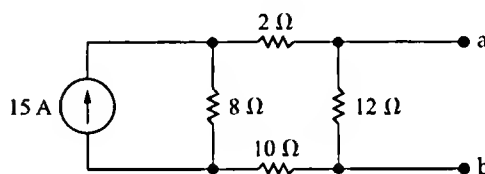
4.16. Calcule el circuito equivalente de Thévenin con respecto a los terminales a y b para el circuito mostrado.

**RESPUESTA**  $V_{ab} = V_{Th} = 64,8 \text{ V}$ ,  
 $R_{Th} = 6 \Omega$ .



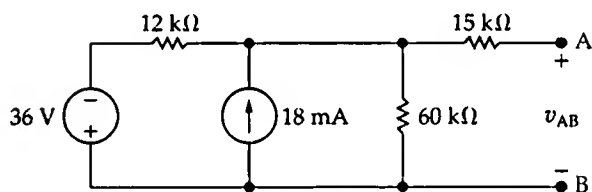
4.17. Calcule el circuito equivalente de Norton con respecto a los terminales a y b para el circuito mostrado.

**RESPUESTA**  $I_N = 6 \text{ A}$  (dirigida hacia a),  $R_N = 7,5 \Omega$ .



4.18. Se utiliza un voltímetro con una resistencia interna de  $100 \text{ k}\Omega$  para medir la tensión  $v_{AB}$  en el circuito mostrado. ¿Qué es lo que leerá el voltímetro?

**RESPUESTA**  $120 \text{ V}$ .

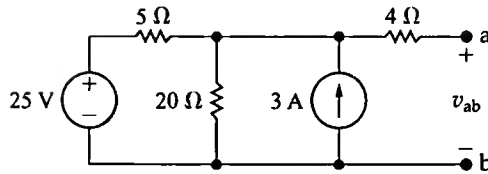


**NOTA** Trate también de resolver los Problemas 4.59, 4.62 y 4.63 del capítulo.

## 4.11. Más aspectos del cálculo de equivalentes de Thévenin

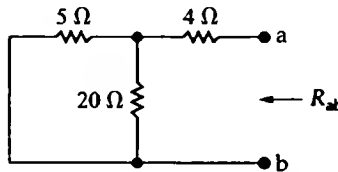
La técnica de determinación de  $R_{Th}$  que hemos explicado e ilustrado en la Sección 4.10 no siempre constituye el método más sencillo disponible. Hay otros dos métodos que son generalmente más simples de utilizar. El primero resulta útil si la red contiene sólo fuentes independientes. Para calcular  $R_{Th}$  en una de dichas redes, primero desactivamos todas las fuentes independientes y luego calculamos la resistencia que se ve en la red desde el par de terminales designado. Una fuente de tensión se desactiva sustituyéndola por un cortocircuito. Una fuente de corriente se desactiva sustituyéndola por un circuito abierto. Por ejemplo, considere el circuito mostrado en la Figura 4.52. Desactivar las fuentes independientes simplifica el circuito, dejándolo como se muestra en la Figura 4.53. La resistencia que se ve mirando hacia los terminales a y b se denota mediante  $R_{ab}$ , que está compuesta por la resistencia de  $4 \Omega$  en serie con la combinación en paralelo de las resistencias de  $5 \Omega$  y de  $20 \Omega$ . Por tanto,

$$R_{ab} = R_{Th} = 4 + \frac{5 \times 20}{25} = 8 \Omega. \quad (4.63)$$



**Figura 4.52.** Circuito utilizado para ilustrar un equivalente de Thévenin.

Observe que el cálculo de  $R_{Th}$  mediante la Ecuación 4.63 es mucho más simple que mediante las Ecuaciones 4.57-4.62.



**Figura 4.53.** El circuito de la Figura 4.52 después de desactivar las fuentes independientes.

Si el circuito o red contiene fuentes dependientes, existe otro procedimiento alternativo para determinar la resistencia de Thévenin  $R_{Th}$ . Primero desactivamos todas las fuentes independientes y luego aplicamos una fuente de tensión de prueba o una fuente de corriente de prueba a los terminales de Thévenin a y b. La resistencia de Thévenin es igual al cociente entre la tensión en bornes de la fuente de prueba y la corriente entregada por dicha fuente de prueba. El Ejemplo 4.11 ilustra este procedimiento alternativo de cálculo de  $R_{Th}$ , utilizando el mismo circuito que en el Ejemplo 4.10.

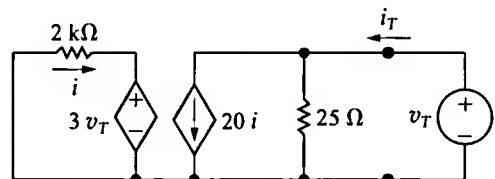
### EJEMPLO 4.11 Determinación del equivalente de Thévenin mediante una fuente de prueba

Calcule la resistencia de Thévenin  $R_{Th}$  para el circuito de la Figura 4.49 utilizando el método alternativo descrito, consistente en conectar una fuente de prueba.

#### SOLUCIÓN

Primero desactivamos la fuente de tensión independiente del circuito y luego excitamos el circuito desde los terminales a y b con una fuente de tensión de prueba o con una fuente de corriente de prueba. Si aplicamos una fuente de tensión de prueba, sabremos la tensión de la fuente de tensión dependiente y, por tanto, la corriente de control  $i$ . En consecuencia, vamos a optar por utilizar una fuente de tensión de prueba. La Figura 4.54

muestra el circuito empleado para calcular la resistencia de Thévenin.



**Figura 4.54.** Un método alternativo para calcular la resistencia de Thévenin.

La fuente de tensión de prueba aplicada externamente se denota como  $v_T$ , y la corriente que entrega al circuito se ha designado como  $i_T$ . Para

calcular la resistencia de Thévenin, simplemente resolvemos el circuito mostrado en la Figura 4.54 para hallar el cociente entre la tensión y la corriente en la fuente de prueba; es decir,  $R_{Th} = v_T/i_T$ . A partir de la Figura 4.54,

$$i_T = \frac{v_T}{25} + 20i, \quad (4.64)$$

$$i = \frac{-3v_T}{2} \text{ mA}. \quad (4.65)$$

Entonces sustituimos la Ecuación 4.65 en la

Ecuación 4.64 y despejamos en la expresión resultante el cociente  $v_T/i_T$ :

$$i_T = \frac{v_T}{25} - \frac{60v_T}{2000}, \quad (4.66)$$

$$\frac{i_T}{v_T} = \frac{1}{25} - \frac{6}{200} = \frac{50}{5000} = \frac{1}{100}. \quad (4.67)$$

A partir de las Ecuaciones 4.66 y 4.67,

$$R_{Th} = \frac{v_T}{i_T} = 100 \, \Omega. \quad (4.68)$$

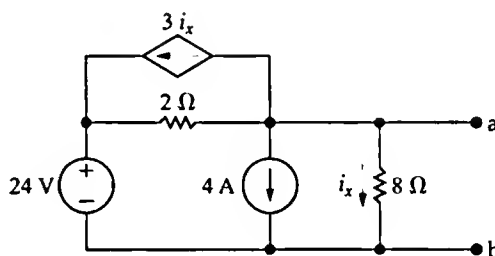
En general, estos cálculos son más sencillos que los necesarios para determinar la corriente de cortocircuito. Además, en una red que sólo contenga resistencias y fuentes dependientes, es obligatorio utilizar el método alternativo, porque el cociente entre la tensión de Thévenin y la corriente de cortocircuito es indeterminado, es decir, se trata de un cociente 0/0.

## Evaluación del objetivo 5

- Comprender los equivalentes de Thévenin y de Norton.

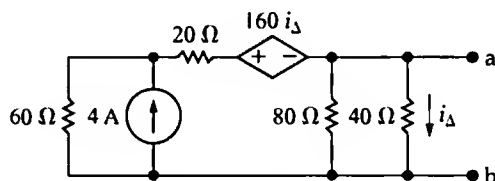
4.19. Calcule el circuito equivalente de Thévenin con respecto a los terminales a y b para el circuito mostrado.

**RESPUESTA**  $V_{Th} = v_{ab} = 8 \text{ V}$ ,  
 $R_{Th} = 1 \, \Omega$ .



4.20. Calcule el circuito equivalente de Thévenin con respecto a los terminales a y b para el circuito mostrado. (Sugerencia: defina la tensión en el nodo de la izquierda como  $v$  y escriba dos ecuaciones de nodo con  $V_{Th}$  como tensión del nodo derecho).

**RESPUESTA**  $V_{Th} = v_{ab} = 30 \text{ V}$ ,  
 $R_{Th} = 10 \, \Omega$ .

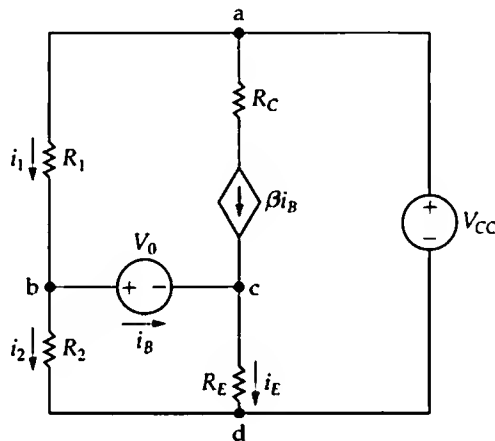


**NOTA** Trate también de resolver los Problemas 4.65 y 4.73 del capítulo.



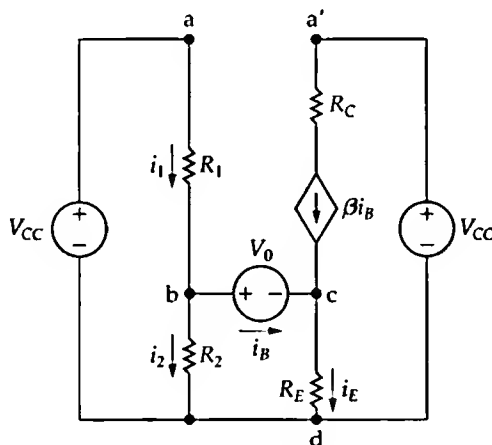
## Utilización del equivalente de Thévenin en el circuito amplificador

En ocasiones, podemos utilizar un equivalente de Thévenin para reducir una parte de un circuito, con el fin de simplificar en gran medida el análisis de la red completa. Volvamos al circuito que hemos introducido por primera vez en la Sección 2.5 y que hemos vuelto a analizar en las Secciones 4.4 y 4.7. Para facilitar las explicaciones, hemos vuelto a dibujar el circuito y hemos identificado las corrientes de rama que nos interesan en la Figura 4.55.



**Figura 4.55.** Aplicación de un equivalente de Thévenin en el análisis de circuitos.

Como hemos visto en nuestro análisis anterior,  $i_B$  es la clave para calcular las otras corrientes de rama. Volvemos a dibujar el circuito como se muestra en la Figura 4.56 como preparación para sustituir el subcircuito a la izquierda de  $V_0$  por su equivalente de Thévenin. El lector debe ser capaz de verificar que esta modificación no tiene ningún efecto sobre las corrientes de rama  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $i_B$  e  $i_E$ .



**Figura 4.56.** Una versión modificada del circuito mostrado en la Figura 4.55.

Ahora sustituimos el circuito formado por  $V_{CC}$ ,  $R_1$  y  $R_2$  por un equivalente de Thévenin con respecto a los terminales b y d. La tensión y la resistencia de Thévenin son

$$V_{Th} = \frac{V_{CC}R_2}{R_1 + R_2}, \quad (4.69)$$

$$R_{Th} = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}. \quad (4.70)$$

Con el equivalente de Thévenin, el circuito de la Figura 4.56 se transforma en el que se muestra en la Figura 4.57.

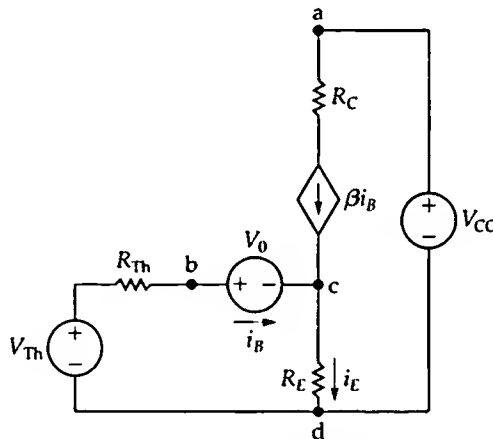
Ahora escribimos una ecuación para  $i_B$  simplemente sumando las tensiones alrededor de la malla de la izquierda. Al escribir esta ecuación de malla, usamos el hecho de que  $i_E = (1 + \beta)i_B$ . Por tanto,

$$V_{Th} = R_{Th}i_B + V_0 + R_E(1 + \beta)i_B, \quad (4.71)$$

de donde

$$i_B = \frac{V_{Th} - V_0}{R_{Th} + (1 + \beta)R_E}. \quad (4.72)$$

Cuando sustituimos las Ecuaciones 4.69 y 4.70 en la Ecuación 4.72, llegamos a la misma expresión que ya se obtuvo en la Ecuación 2.25. Observe que, al incorporar el equivalente de Thévenin al circuito original, podemos obtener la solución correspondiente a  $i_B$  escribiendo una única ecuación.



**Figura 4.57.** El circuito mostrado en la Figura 4.56, modificado mediante un equivalente de Thévenin.

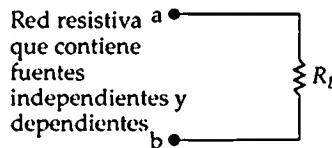
## 4.12. Transferencia máxima de potencia

El análisis de circuitos juega un importante papel en el estudio de sistemas diseñados para transferir potencia entre una fuente y una carga. Vamos a analizar el tema de la transferencia de potencia en función de dos tipos básicos de sistemas. El primero pone el énfasis en la eficiencia de la transferencia de potencia. Las redes eléctricas son un buen ejemplo de este tipo, porque su objetivo principal es la generación, transmisión y distribución de grandes cantidades de potencia eléctrica. Si una red eléctrica no es eficiente, un gran porcentaje de la potencia generada se perderá durante los procesos de transmisión y distribución, resultando completamente inútil.

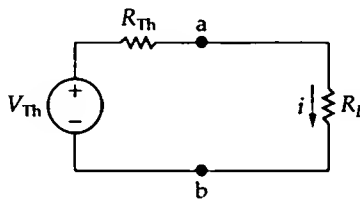
El segundo tipo básico de sistema pone el énfasis en la cantidad de potencia transferida. Los sistemas de comunicación y de instrumentación son buenos ejemplos, porque en la transmisión de información o de datos mediante señales eléctricas, la potencia disponible en el transmisor o detector está limitada. Por tanto, resulta deseable transmitir la mayor parte posible de esta potencia al receptor o a la carga. En este tipo de aplicaciones, la cantidad de potencia que se transfiere es pequeña, por lo que la eficiencia de la transferencia no constituye un problema principal. Vamos a considerar ahora el problema de la transferencia máxima de potencia en sistemas que pueden ser modelados mediante un circuito puramente resistivo.

La mejor forma de describir la condición de transferencia máxima de potencia es con la ayuda del circuito mostrado en la Figura 4.58. Supongamos una red resistiva que contiene fuentes dependientes e independientes y un par de terminales designado, a y b, a los que se conecta una carga  $R_L$ . El problema consiste en determinar el valor de  $R_L$  que permite una entrega máxima de potencia a la carga. El primer paso del proceso consiste en reconocer que una red resistiva siempre puede sustituirse por su equivalente de Thévenin. Por tanto, redibujamos el circuito de la Figura 4.58 como el que se muestra en la Figura 4.59. Sustituir la red original por su equivalente de Thévenin simplifica enormemente la tarea de calcular  $R_L$ . Para determinar el valor de  $R_L$ , necesitamos expresar la potencia disipada en  $R_L$  en función de los tres parámetros del circuito  $V_{Th}$ ,  $R_{Th}$  y  $R_L$ . Así,

$$p = i^2 R_L = \left( \frac{V_{Th}}{R_{Th} + R_L} \right)^2 R_L. \quad (4.73)$$



**Figura 4.58.** Circuito para describir la condición de transferencia máxima de potencia.



**Figura 4.59.** Circuito utilizado para determinar el valor de  $R_L$  que permite una transferencia máxima de potencia.

A continuación, tenemos en cuenta el hecho de que, para cualquier circuito dado,  $V_{Th}$  y  $R_{Th}$  serán fijas. Por tanto, la potencia disipada está en función de la única variable  $R_L$ . Para calcular el valor de  $R_L$  que maximiza la potencia, utilizamos resultados del cálculo elemental. Comenzamos escribiendo una ecuación que nos dé la derivada de  $p$  con respecto a  $R_L$ :

$$\frac{dp}{dR_L} = V_{Th}^2 \left[ \frac{(R_{Th} + R_L)^2 - R_L \cdot 2(R_{Th} + R_L)}{(R_{Th} + R_L)^4} \right]. \quad (4.74)$$

La derivada será cero y  $p$  será máxima cuando

$$(R_{Th} + R_L)^2 = 2R_L(R_{Th} + R_L). \quad (4.75)$$

Resolviendo la Ecuación 4.75, se obtiene

✦ **CONDICIÓN DE TRANSFERENCIA MÁXIMA DE POTENCIA**  $R_L = R_{Th}. \quad (4.76)$

Por tanto, la transferencia máxima de potencia se produce cuando la resistencia de carga  $R_L$  es igual a la resistencia de Thévenin  $R_{Th}$ . Para calcular la potencia máxima entregada a  $R_L$ , simplemente sustituimos la Ecuación 4.76 en la Ecuación 4.73:

$$p_{\max} = \frac{V_{Th}^2 R_L}{(2R_L)^2} = \frac{V_{Th}^2}{4R_L}. \quad (4.77)$$

El Ejemplo 4.12 ilustra el análisis de un circuito cuando se ajusta la resistencia de carga para obtener una transferencia máxima de potencia.

### EJEMPLO 4.12 Cálculo de la condición de transferencia máxima de potencia

- a) Para el circuito mostrado en la Figura 4.60, calcule el valor de  $R_L$  que da como resultado una transferencia máxima de potencia a la carga.

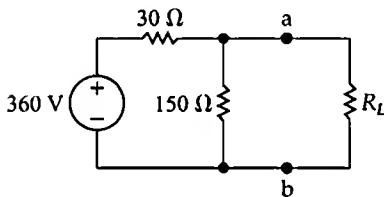


Figura 4.60. Circuito del Ejemplo 4.12.

- b) Calcule la potencia máxima que puede entregarse a  $R_L$ .
- c) Cuando se ajusta  $R_L$  para transferencia máxima de potencia, ¿qué porcentaje de la potencia suministrada por la fuente de 360 V se disipa en  $R_L$ ?

La resistencia de Thévenin es

$$R_{Th} = \frac{(150)(30)}{180} = 25 \Omega.$$

Sustituyendo el circuito a la izquierda de los terminales a y b por su equivalente de Thévenin nos da el circuito mostrado en la Figura 4.61, que indica que  $R_L$  tiene que ser igual a 25 Ω para que la transferencia de potencia sea máxima.

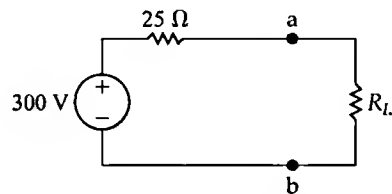


Figura 4.61. Reducción del circuito mostrado en la Figura 4.60 por medio de un equivalente de Thévenin.

### SOLUCIÓN

- a) La tensión de Thévenin del circuito a la izquierda de los terminales a y b es

$$V_{Th} = \frac{150}{180}(360) = 300 \text{ V}.$$

- b) La potencia máxima que puede entregarse a  $R_L$  es

$$p_{\max} = \left(\frac{300}{50}\right)^2 (25) = 900 \text{ W}.$$

- c) Cuando  $R_L$  es igual a 25 Ω, la tensión  $v_{ab}$  es

$$v_{ab} = \left(\frac{300}{50}\right)(25) = 150 \text{ V.}$$

A partir de la Figura 4.60, cuando  $v_{ab}$  es igual a 150 V, la corriente en la fuente de tensión, en la dirección del incremento de tensión en bornes de la fuente, es

$$i_s = \frac{360 - 150}{30} = \frac{210}{30} = 7 \text{ A.}$$

Por tanto, la fuente **está entregando** 2520 W al circuito, es decir,

$$p_s = -i_s(360) = -2520 \text{ W.}$$

El porcentaje de la potencia de la fuente entregada a la carga es

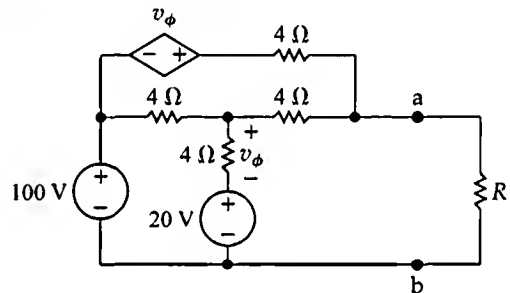
$$\frac{900}{2520} \times 100 = 35,71\%.$$

### Evaluación del objetivo 6

- Conocer la condición de máxima transferencia de potencia a una carga resistiva y calcular dicha potencia.

- 4.21. a) Calcule el valor de  $R$  que permite al circuito mostrado entregar una potencia máxima a los terminales a y b.  
b) Calcule la máxima potencia entregada a  $R$ .

**RESPUESTA** (a) 3  $\Omega$ ; (b) 1,2 kW.



- 4.22. Suponga que el circuito del Problema de evaluación 4.21 está entregando una potencia máxima a la resistencia de carga  $R$ .  
a) ¿Cuánta potencia estará entregando a la red la fuente de 100 V?

- b) Repita el apartado (a) para la fuente de tensión dependiente.  
c) ¿Qué porcentaje de la potencia total generada por estas dos fuentes se entrega a la resistencia de carga  $R$ ?

**RESPUESTA** (a) 3000 W; (b) 800 W;  
(c) 31,58%.

**NOTA** Trate también de resolver los Problemas 4.75 y 4.76 del capítulo.

## 4.13. Superposición

Los sistemas lineales obedecen el principio de **superposición**, que establece que, cuando se excita un sistema lineal mediante más de una fuente de energía independiente, la respuesta total es la suma de las respuestas individuales. Una respuesta individual es el resultado de la actuación de una única fuente independiente. Puesto que estamos tratando con circuitos formados por elementos lineales de circuito interconectados, podemos aplicar el principio de superposición directamente al análisis de tales circuitos cuando éstos están excitados por más de una fuente de energía independiente. Por el momento, res-

tringiremos nuestro análisis a las redes resistivas simples; sin embargo, el principio es aplicable a cualquier sistema lineal.

La superposición se aplica tanto en el análisis como en el diseño de circuitos. Al analizar un circuito complejo con múltiples fuentes independientes de tensión y de corriente, normalmente habrá un número menor de ecuaciones y éstas serán más simples de resolver cuando se consideren por separado los efectos de las distintas fuentes independientes. Por tanto, la aplicación de la superposición puede simplificar el análisis de los circuitos. Sin embargo, tenga presente que, en ocasiones, la aplicación del principio de superposición complica en la práctica el análisis, produciendo un sistema de ecuaciones para resolver más complicado que el que se obtendría con un método alternativo. La superposición sólo es necesaria si las fuentes independientes en un circuito son fundamentalmente distintas. En estos primeros capítulos, todas las fuentes independientes son fuentes de continua, por lo que no es necesario aplicar el principio de superposición. Si introducimos aquí este principio es como anticipación de otros capítulos posteriores, en los que los circuitos sí necesitarán que lo apliquemos.

La superposición se aplica en los diseños para sintetizar una respuesta deseada de un circuito que no puede conseguirse utilizando una única fuente. Si la respuesta deseada del circuito puede escribirse como suma de dos o más términos, se la puede implementar incluyendo una fuente independiente para cada uno de los términos que compongan la respuesta. Esta técnica de diseño de circuitos con respuesta compleja permite a los diseñadores trabajar con varios diseños simples, en lugar de con un único diseño complejo.

Vamos a ilustrar el principio de superposición utilizándolo para calcular las corrientes de rama en el circuito mostrado en la Figura 4.62. Comencemos calculando las corrientes de rama resultantes de la fuente de tensión de 120 V. Denotaremos dichas corrientes mediante un símbolo de prima. Sustituyendo la fuente de corriente ideal por un circuito abierto, podemos desactivar dicha fuente, como se muestra en la Figura 4.63. Las corrientes de rama en este circuito son las resultantes, exclusivamente, de la fuente de tensión.

Podemos calcular fácilmente las corrientes de rama del circuito de la Figura 4.63 una vez que sepamos la tensión de nodo en bornes de la resistencia de  $3\ \Omega$ . Si designamos esta tensión como  $v_1$ , podemos escribir

$$\frac{v_1 - 120}{6} + \frac{v_1}{3} + \frac{v_1}{2 + 4} = 0, \quad (4.78)$$

de donde

$$v_1 = 30\text{ V}. \quad (4.79)$$

Ahora podemos escribir directamente las expresiones de las corrientes de rama  $i'_1 - i'_4$

$$i'_1 = \frac{120 - 30}{6} = 15\text{ A}, \quad (4.80)$$

$$i'_2 = \frac{30}{3} = 10\text{ A}, \quad (4.81)$$

$$i'_3 = i'_4 = \frac{30}{6} = 5\text{ A}. \quad (4.82)$$

Para calcular la componente de la corriente de rama debida a la fuente de corriente, desactivamos la fuente de tensión ideal y resolvemos el circuito mostrado en la Figura 4.64. La notación de doble prima utilizada para las corrientes indica que son las componentes de la corriente total resultantes de la fuente de corriente ideal.

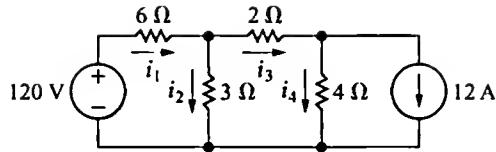


Figura 4.62. Circuito utilizado para ilustrar el principio de superposición.

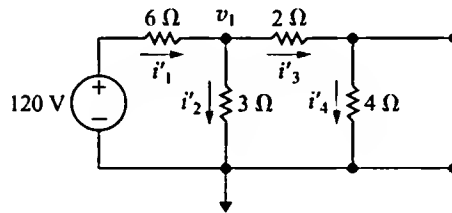


Figura 4.63. El circuito mostrado en la Figura 4.62, con la fuente de corriente desactivada.

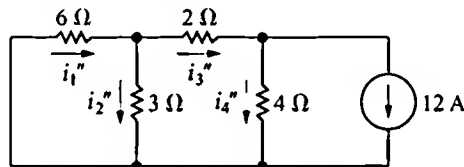


Figura 4.64. El circuito mostrado en la Figura 4.62, con la fuente de tensión desactivada.

Determinamos las corrientes de rama en el circuito mostrado en la Figura 4.64 calculando primero las tensiones de nodo en bornes de las resistencias de 3 y 4 Ω, respectivamente. La Figura 4.65 muestra las dos tensiones de nodo. Las dos ecuaciones de tensión de nodo que describen el circuito serán

$$\frac{v_3}{3} + \frac{v_3}{6} + \frac{v_3 - v_4}{2} = 0, \quad (4.83)$$

$$\frac{v_4 - v_3}{2} + \frac{v_4}{4} + 12 = 0. \quad (4.84)$$

Resolviendo el sistema formado por las Ecuaciones 4.83 y 4.84, obtenemos los valores de  $v_3$  y  $v_4$ , que son

$$v_3 = -12 \text{ V}, \quad (4.85)$$

$$v_4 = -24 \text{ V}. \quad (4.86)$$

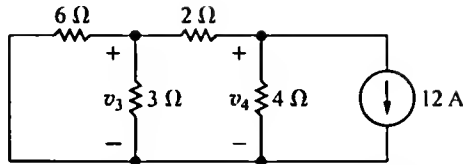
Ahora podemos escribir directamente las corrientes de rama  $i_1''$  a  $i_4''$  en términos de las tensiones de nodo  $v_3$  y  $v_4$ :

$$i_1'' = \frac{-v_3}{6} = \frac{12}{6} = 2 \text{ A}, \quad (4.87)$$

$$i_2'' = \frac{v_3}{3} = \frac{-12}{3} = -4 \text{ A}, \quad (4.88)$$

$$i_3'' = \frac{v_3 - v_4}{2} = \frac{-12 + 24}{2} = 6 \text{ A}, \quad (4.89)$$

$$i_4'' = \frac{v_4}{4} = \frac{-24}{4} = -6 \text{ A}. \quad (4.90)$$



**Figura 4.65.** El circuito mostrado en la Figura 4.64, indicando las tensiones de nodo  $v_3$  y  $v_4$ .

Para calcular las corrientes de rama en el circuito original, es decir, las corrientes  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $i_3$  e  $i_4$  de la Figura 4.62, simplemente sumamos las corrientes proporcionadas por las Ecuaciones 4.87-4.90 a las corrientes dadas por las Ecuaciones 4.80-4.82:

$$i_1 = i_1' + i_1'' = 15 + 2 = 17 \text{ A}, \quad (4.91)$$

$$i_2 = i_2' + i_2'' = 10 - 4 = 6 \text{ A}, \quad (4.92)$$

$$i_3 = i_3' + i_3'' = 5 + 6 = 11 \text{ A}, \quad (4.93)$$

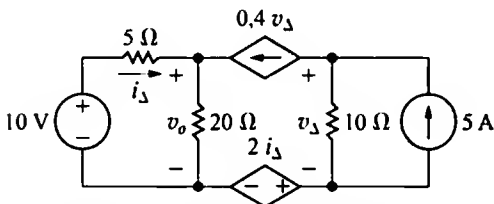
$$i_4 = i_4' + i_4'' = 5 - 6 = -1 \text{ A}. \quad (4.94)$$

El lector puede verificar que las corrientes dadas por las Ecuaciones 4.91-4.94 son los valores correctos para las corrientes de rama del circuito mostrado en la Figura 4.62.

Cuando se aplica el principio de superposición a circuitos lineales que contengan fuentes tanto dependientes como independientes, es necesario tener en cuenta que las fuentes dependientes nunca se desactivan. El Ejemplo 4.13 ilustra la aplicación del principio de superposición cuando un circuito contiene fuentes tanto dependientes como independientes.

#### EJEMPLO 4.13 Utilización del principio de superposición para resolver un circuito

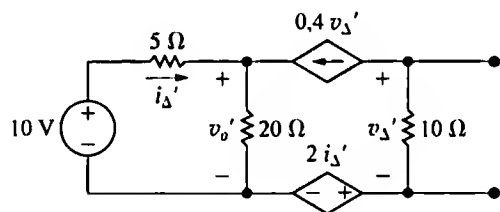
Utilice el principio de superposición para calcular  $v_o$  en el circuito mostrado en la Figura 4.66.



**Figura 4.66.** Circuito del Ejemplo 4.13.

#### SOLUCIÓN

Comenzamos calculando la componente de  $v_o$  que resulta de la fuente de 10 V. La Figura 4.67 muestra el circuito correspondiente. Con la fuente de 5 A desactivada,  $v_\Delta'$  debe ser igual a



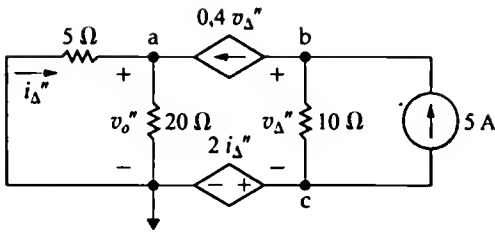
**Figura 4.67.** El circuito mostrado en la Figura 4.66, con la fuente de 5 A desactivada.

$(-0.4v_\Delta')(10)$ . Por tanto,  $v_\Delta'$  debe ser cero, la rama que contiene las dos fuentes dependientes está abierta y

$$v_o' = \frac{20}{25}(10) = 8 \text{ V}.$$

Cuando se desactiva la fuente de 10 V, el circuito se reduce al que se muestra en la Figura 4.68.





**Figura 4.68.** El circuito mostrado en la Figura 4.66, con la fuente de 10 V desactivada.

Hemos añadido un nodo de referencia y las designaciones de nodo a, b y c para facilitar la explicación. Sumando las corrientes que salen del nodo a, se obtiene

$$\frac{v_o''}{20} + \frac{v_o''}{5} - 0,4v_A'' = 0, \quad \text{o} \quad 5v_o'' - 8v_A'' = 0.$$

Sumando las corrientes que salen del nodo b, tenemos

$$0,4v_A'' + \frac{v_b - 2i_D''}{10} - 5 = 0, \quad \text{o}$$

$$4v_A'' + v_b - 2i_D'' = 50.$$

Ahora utilizamos

$$v_b = 2i_D'' + v_A''$$

para calcular el valor de  $v_A''$ . De esta forma,

$$5v_A'' = 50, \quad \text{o} \quad v_A'' = 10 \text{ V}.$$

A partir de la ecuación del nodo a,

$$5v_o'' = 80, \quad \text{o} \quad v_o'' = 16 \text{ V}.$$

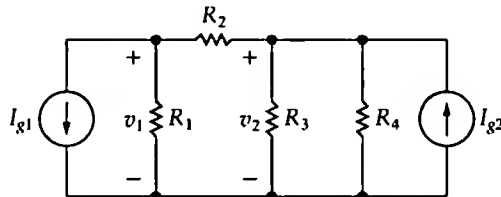
El valor de  $v_o$  es la suma de  $v_o'$  y  $v_o''$ , es decir, 24 V.

**NOTA** Evalúe su comprensión de este material intentando resolver los Problemas 4.87 y 4.88 del capítulo.

## Perspectiva práctica

### Circuitos con resistencias realistas

No resulta posible fabricar componentes eléctricos que sean perfectamente idénticos. Por ejemplo, las resistencias producidas mediante un mismo proceso de fabricación pueden tener valores que varíen hasta en un 20%. Por tanto, al crear un sistema eléctrico, el diseñador debe considerar el impacto que la variación de los componentes tiene sobre las prestaciones del sistema. Una forma de evaluar este impacto es proceder a realizar un análisis de sensibilidad. El análisis de sensibilidad permite al diseñador calcular el impacto de las variaciones de los valores de los componentes sobre el comportamiento del sistema. Vamos a ver cómo esta información permite al diseñador especificar una tolerancia aceptable de los valores de cada uno de los componentes del sistema.



**Figura 4.69.** Circuito utilizado para introducir el análisis de sensibilidad.

Considere el circuito de la Figura 4.69. Para ilustrar el análisis de sensibilidad, investigaremos la sensibilidad de las tensiones de nodo  $v_1$  y  $v_2$  a los cambios en el valor de la resistencia  $R_1$ . Utilizando el análisis de nodos, podemos deducir las expresiones de  $v_1$  y  $v_2$  en función de las resistencias del circuito y de las corrientes de las fuentes. Los resultados se indican en las Ecuaciones 4.95 y 4.96:

$$v_1 = \frac{R_1 \{R_3 R_4 I_{g2} - [R_2(R_3 + R_4) + R_3 R_4] I_{g1}\}}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4) + R_3 R_4}, \quad (4.95)$$

$$v_2 = \frac{R_3 R_4 [(R_1 + R_2) I_{g2} - R_1 I_{g1}]}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4) + R_3 R_4}. \quad (4.96)$$

La sensibilidad de  $v_1$  con respecto a  $R_1$  se calcula diferenciando la Ecuación 4.95 con respecto a  $R_1$ . De modo similar, la sensibilidad de  $v_2$  con respecto a  $R_1$  se calcula diferenciando la Ecuación 4.96 con respecto a  $R_1$ . Si hacemos esto, obtenemos

$$\frac{dv_1}{dR_1} = \frac{[R_3 R_4 + R_2(R_3 + R_4)] \{R_3 R_4 I_{g2} - [R_3 R_4 + R_2(R_3 + R_4)] I_{g1}\}}{[(R_1 + R_2)(R_3 + R_4) + R_3 R_4]^2}, \quad (4.97)$$

$$\frac{dv_2}{dR_1} = \frac{R_3 R_4 \{R_3 R_4 I_{g2} - [R_2(R_3 + R_4) + R_3 R_4] I_{g1}\}}{[(R_1 + R_2)(R_3 + R_4) + R_3 R_4]^2}. \quad (4.98)$$

Vamos a considerar ahora un ejemplo con valores reales de componentes, para ilustrar el uso de las Ecuaciones 4.97 y 4.98.

## EJEMPLO

Suponga que los valores nominales de los componentes del circuito de la Figura 4.69 son:  $R_1 = 25 \Omega$ ;  $R_2 = 5 \Omega$ ;  $R_3 = 50 \Omega$ ;  $R_4 = 75 \Omega$ ;  $I_{g1} = 12 \text{ A}$ , e  $I_{g2} = 16 \text{ A}$ . Utilice el análisis de sensibilidad para predecir los valores de  $v_1$  y  $v_2$  si el valor de  $R_1$  difiere en un 10% de su valor nominal.

## SOLUCIÓN

A partir de las Ecuaciones 4.95 y 4.96, calculamos los valores nominales de  $v_1$  y  $v_2$ , que son

$$v_1 = \frac{25\{2750(16) - [5(125) + 3750]12\}}{30(125) + 3750} = 25 \text{ V} \quad (4.99)$$

y

$$v_2 = \frac{3750[30(16) - 25(12)]}{30(125) + 3750} = 90 \text{ V} \quad (4.100)$$

Ahora, a partir de las Ecuaciones 4.97 y 4.98, podemos calcular la sensibilidad de  $v_1$  y  $v_2$  con respecto a los cambios de  $R_1$ . Nos queda:

$$\frac{dv_1}{dR_1} = \frac{[3750 + 5(125)] - \{3750(16) - [3750 + 5(125)]12\}}{[(30)(125) + 3750]^2} = \frac{7}{12} \text{ V}/\Omega. \quad (4.101)$$

y

$$\frac{dv_2}{dR_1} = \frac{3750\{3750(16) - [5(125) + 3750]12\}}{(7500)^2} = 0,5 \text{ V}/\Omega. \quad (4.102)$$

¿Cómo utilizamos los resultados dados por las Ecuaciones 4.101 y 4.102? Suponga que  $R_1$  es un 10% inferior a su valor nominal, es decir,  $R_1 = 22,5 \Omega$ . Entonces  $\Delta R_1 = -2,5 \Omega$  y la Ecuación 4.101 predice que  $\Delta v_1$  será

$$\Delta v_1 = \left(\frac{7}{12}\right)(-2,5) = -1,4583 \text{ V.}$$

Por tanto, si  $R_1$  es un 10% inferior a su valor nominal, nuestro análisis predice que  $v_1$  será

$$v_1 = 25 - 1,4583 = 23,5417 \text{ V.} \quad (4.103)$$

De forma similar, para la Ecuación 4.102 tenemos que

$$\begin{aligned} \Delta v_2 &= 0,5(-2,5) = -1,25 \text{ V,} \\ v_2 &= 90 - 1,25 = 88,75 \text{ V.} \end{aligned} \quad (4.104)$$

Intentemos confirmar los resultados de las Ecuaciones 4.103 y 4.104 substituyendo el valor  $R_1 = 22,5 \Omega$  en las Ecuaciones 4.95 y 4.96. Al hacerlo, los resultados son

$$v_1 = 23,4780 \text{ V,} \quad (4.105)$$

$$v_2 = 88,6960 \text{ V.} \quad (4.106)$$

¿Por qué hay una diferencia entre los valores predichos a partir del análisis de sensibilidad y los valores exactos calculados al substituir  $R_1$  en las ecuaciones de  $v_1$  y  $v_2$ ? Podemos ver en las Ecuaciones 4.97 y 4.98 que la sensibilidad de  $v_1$  y  $v_2$  con respecto a  $R_1$  está en función de  $R_1$ , porque  $R_1$  aparece en el denominador tanto de la Ecuación 4.97 como de la Ecuación 4.98. Esto quiere decir que, a medida que varía  $R_1$ , las sensibilidades cambian, por lo que no cabe esperar que las Ecuaciones 4.97 y 4.98 nos den el resultado exacto para variaciones grandes de  $R_1$ . Observe que, para una variación del 10% en el valor de  $R_1$ , el porcentaje de error entre los valores predichos y los valores exactos de  $v_1$  y  $v_2$  es pequeño. Específicamente, el porcentaje de error de  $v_1 = 0,2713\%$  y el porcentaje de error de  $v_2 = 0,0676\%$ .

A partir de este ejemplo, podemos ver que se requiere una gran cantidad de trabajo para poder determinar la sensibilidad de  $v_1$  y  $v_2$  a los cambios en los restantes valores de componentes, es decir,  $R_2$ ,  $R_3$ ,  $R_4$ ,  $I_{g1}$  e  $I_{g2}$ . Afortunadamente, PSpice tiene una función de análisis de sensibilidad que realiza dicho trabajo por nosotros. La función de análisis de sensibilidad de PSpice calcula dos tipos de sensibilidad. La primera se conoce con el nombre sensibilidad de una unidad, y la segunda se denomina sensibilidad del 1%. En nuestro circuito de ejemplo, un cambio de una unidad en una resistencia cambiaría su valor en 1  $\Omega$ , mientras que un cambio de una unidad en una fuente de corriente cambiaría su valor en un 1 A. Por contraste, un análisis de sensibilidad del 1% determina cuál es el efecto de cambiar los valores de las resistencias o de las fuentes en un 1% con respecto a sus valores nominales.

El resultado del análisis de sensibilidad mediante PSpice del circuito de la Figura 4.69 es el que se muestra en la Tabla 4.2. Puesto que estamos analizando un circuito lineal, podemos usar el principio de superposición para predecir los valores de  $v_1$  y  $v_2$  en caso de que cambie el valor de más de un componente. Por ejemplo, supongamos que  $R_1$  decrece hasta asumir el valor de 24  $\Omega$  y que  $R_2$  se decrementa hasta 4  $\Omega$ . A partir de la Tabla 4.2, podemos combinar la sensibilidad de  $v_1$  a los cambios de una unidad de  $R_1$  y  $R_2$  para obtener

$$\frac{\Delta v_1}{\Delta R_1} + \frac{\Delta v_1}{\Delta R_2} = 0,5833 - 5,417 = -4,8337 \text{ V}/\Omega.$$

De modo similar,

$$\frac{\Delta v_2}{\Delta R_1} + \frac{\Delta v_2}{\Delta R_2} = 0,5 + 6,5 = 7,0 \text{ V}/\Omega.$$

Por tanto, si  $R_1$  y  $R_2$  se reducen en  $1 \Omega$ , podemos predecir que

$$v_1 = 25 + 4,8227 = 29,8337 \text{ V},$$

$$v_2 = 90 - 7 = 83 \text{ V}.$$

Si sustituimos  $R_1 = 24 \Omega$  y  $R_2 = 4 \Omega$  en las Ecuaciones 4.95 y 4.96 obtenemos

$$v_1 = 29,793 \text{ V},$$

$$v_2 = 82,759 \text{ V}.$$

En ambos casos, nuestras predicciones difieren sólo en una fracción de voltio de los valores reales de las tensiones de nodo.

Los diseñadores de circuito utilizan los resultados del análisis de sensibilidad para determinar qué variación en el valor de un componente tiene un mayor impacto sobre el comportamiento del circuito. Como podemos ver en el análisis de sensibilidad de PSpice presentado en la Tabla 4.2, las tensiones de nodo  $v_1$  y  $v_2$  son mucho más sensibles a los cambios en  $R_2$  que a los cambios en  $R_1$ . Específicamente,  $v_1$  es (5,417/0,5833) o aproximadamente 9 veces más sensible a los cambios en  $R_2$  que a los cambios en  $R_1$ , mientras que  $v_2$  es (6,5/0,5) o 13 veces más sensible a los cambios en  $R_2$  que a los cambios en  $R_1$ . Por tanto, en nuestro circuito de ejemplo, la tolerancia de  $R_2$  debe ser más estricta que la tolerancia de  $R_1$ , si es que es importante que  $v_1$  y  $v_2$  se mantengan próximas a sus valores nominales.

Tabla 4.2. Resultados del análisis de sensibilidad mediante PSpice.

NOMBRE DEL ELEMENTO	VALOR DEL ELEMENTO	SENSIBILIDAD DEL ELEMENTO (VOLTIOS/UNIDAD)	SENSIBILIDAD NORMALIZADA (VOLTIOS/PORCENTAJE)
<i>(a) Sensibilidades CC de la tensión de nodo V1</i>			
R1	25	0,5833	0,1458
R2	5	-5,417	-0,2708
R3	50	0,45	0,225
R4	75	0,2	0,15
IG1	12	-14,58	-1,75
IG2	16	12,5	2
<i>(b) Sensibilidades de la salida V2</i>			
R1	25	0,5	0,125
R2	5	6,5	0,325
R3	50	0,54	0,27
R4	75	0,24	0,18
IG1	12	-12,5	-1,5
IG2	16	15	2,4

**NOTA** Evalúe su comprensión de esta Perspectiva práctica tratando de resolver los Problemas 4.101-4.103 del capítulo.

## RESUMEN

- Para los temas de este capítulo, es necesario dominar ciertos términos básicos y los conceptos que éstos representan. Dichos términos son los de **nodo**, **nodo esencial**, **camino**, **rama**, **rama esencial**, **mallla y circuito planar**. La Tabla 4.1 proporciona definiciones y ejemplos de estos términos (véase la página 115).
- En este capítulo se han introducido dos nuevas técnicas de análisis de circuitos:
  - El **método de las tensiones de nodo** funciona con circuitos tanto planares como no planares. Se elige un nodo de referencia entre los nodos esenciales, se asignan variables de tensión a los restantes nodos esenciales y se utiliza la ley de Kirchhoff de las corrientes para escribir una ecuación por cada variable de tensión. El número de ecuaciones es  $n_e - 1$ , siendo  $n_e$  el número de nodos esenciales (véase la página 118).
  - El **método de las corrientes de malla** sólo es aplicable a los circuitos planares. Se asignan corrientes de malla a cada una de las mallas del circuito y se utiliza la ley de Kirchhoff de las tensiones para escribir una ecuación por cada malla. El número de ecuaciones es  $b - (n - 1)$ , donde  $b$  es el número de ramas en el que se desconoce la corriente y  $n$  es el número de nodos. Las corrientes de malla se utilizan para calcular las corrientes de rama (véase la página 127).
- En este capítulo se han introducido varias técnicas nuevas de simplificación de circuitos:
  - Las **transformaciones de fuente** nos permiten intercambiar una fuente de tensión ( $v_s$ ) y una resistencia en serie

( $R$ ) por una fuente de corriente ( $i_s$ ) y una resistencia en paralelo ( $R$ ) y viceversa. Las combinaciones deben ser equivalentes en términos de su corriente y su tensión en los terminales. La equivalencia en los terminales se cumple siempre que

$$i_s = \frac{v_s}{R}.$$

(Véase la página 140).

- Los **equivalentes de Thévenin y los equivalentes de Norton** nos permiten simplificar un circuito compuesto por fuentes y resistencias, para obtener un circuito equivalente compuesto de una fuente de tensión y una resistencia en serie (**Thévenin**) o una fuente de corriente y una resistencia en paralelo (**Norton**). El circuito simplificado y el circuito original deben ser equivalentes en términos de su tensión y su corriente en los terminales. Por tanto, tenga presente que (1) la tensión de Thévenin ( $V_{Th}$ ) es la tensión en circuito abierto entre los terminales del circuito original; (2) la resistencia de Thévenin ( $R_{Th}$ ) es el cociente de la tensión de Thévenin y la corriente de cortocircuito entre los terminales del circuito original; y (3) el equivalente de Norton se obtiene realizando una transformación de fuente sobre un equivalente de Thévenin (véase la página 144).
- La **transferencia máxima de potencia** es una técnica para calcular el valor máximo de  $p$  que puede entregarse a una carga  $R_L$ . La transferencia máxima de potencia se produce cuando  $R_L = R_{Th}$ , que es la resistencia de Thévenin vista desde la resis-

cia  $R_L$ . La ecuación de la potencia máxima transferida es

$$p = \frac{V_{Th}^2}{4R_L}.$$

(Véase la página 154).

- En un circuito con múltiples fuentes independientes, la técnica de **superposición**

nos permite activar una fuente cada vez y sumar las tensiones y corrientes resultantes para determinar las tensiones y corrientes que existen cuando están activas todas las fuentes independientes. Las fuentes dependientes nunca se desactivan al aplicar el principio de superposición.

(Véase la página 157).

## PROBLEMAS

- 4.1. Para el circuito mostrado en la Figura P4.1, indique el valor numérico del número de (a) ramas, (b) ramas en las que no se conoce la corriente, (c) ramas esenciales, (d) ramas esenciales en las que no se conoce la corriente, (e) nodos, (f) nodos esenciales y (g) mallas.
- 4.2. a) ¿Cuántas partes separadas tiene el circuito de la Figura P4.2?  
 b) ¿Cuántos nodos?  
 c) ¿Cuántas ramas hay?  
 d) Suponga que el nodo inferior de cada parte del circuito se une mediante un conductor. Repita los cálculos de los apartados (a)-(c).

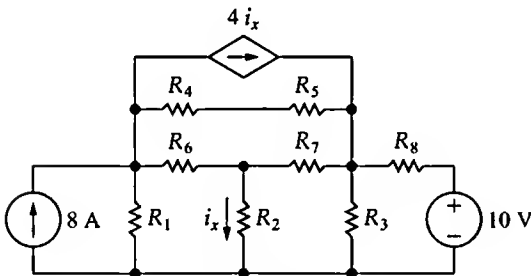


Figura P4.1.

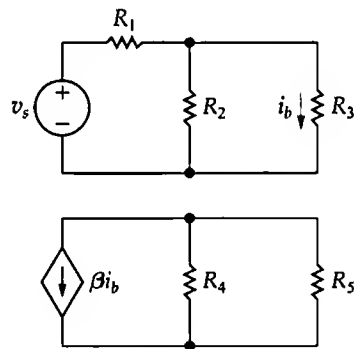


Figura P4.2

- 4.3. a) Si sólo se identifican las ramas y nodos esenciales en el circuito de la Figura P4.1, ¿cuántas ecuaciones son necesarias para describir el circuito?  
 b) ¿Cuántas de estas ecuaciones pueden determinarse utilizando la ley de Kirchhoff de las corrientes?  
 c) ¿Cuántas deben determinarse utilizando la ley de Kirchhoff de las tensiones?  
 d) ¿Qué dos mallas deben evitarse para aplicar la ley de las tensiones?
- 4.4. Suponga que la corriente  $i_x$  en el circuito de la Figura P4.4 es conocida. También se conoce el valor de las resistencias  $R_1$ - $R_5$ .
- a) ¿Cuántas corrientes desconocidas hay?

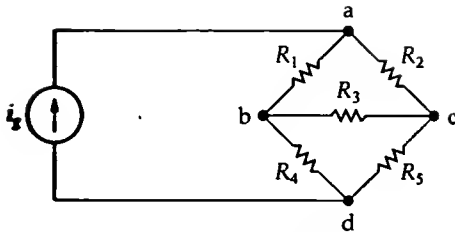


Figura P4.4

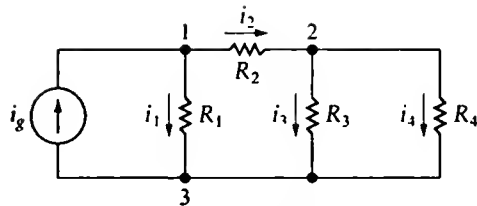


Figura P4.5

- b) ¿Cuántas ecuaciones independientes pueden escribirse utilizando la ley de Kirchhoff de las corrientes?
- c) Escriba un conjunto independiente de ecuaciones mediante la ley de Kirchhoff de las tensiones.
- d) ¿Cuántas ecuaciones independientes pueden deducirse aplicando la ley de Kirchhoff de las tensiones?
- e) Escriba un conjunto de ecuaciones independientes aplicando la ley de Kirchhoff de las tensiones.

4.5 Definimos las corrientes salientes de los nodos como positivas.

- a) Suma las corrientes en cada nodo del circuito mostrado en la Figura P4.5.
- b) Demuestre que cualquiera de las ecuaciones del apartado (a) puede deducirse a partir de las dos ecuaciones restantes.

4.6 Utilice el método de las tensiones de nodo para calcular  $v_o$  en el circuito de la Figura P4.6.

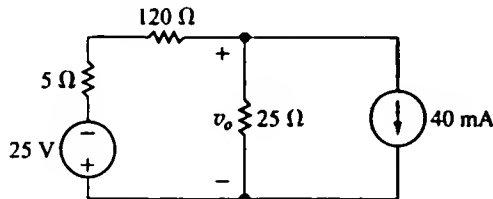


Figura P4.6

- 4.7 a) Calcule la potencia generada por la fuente de corriente de 40 mA en el circuito de la Figura P4.6.
- b) Calcule la potencia generada por la fuente de tensión de 25 V en el circuito de la Figura P4.6.
- c) Verifique que la potencia total generada es igual a la potencia total disipada.



Se conecta en serie una resistencia de 100 Ω con la fuente de corriente de 40 mA del circuito de la Figura P4.6.



- a) Calcule  $v_o$ .
- b) Calcule la potencia generada por la fuente de corriente de 40 mA.
- c) Calcule la potencia generada por la fuente de tensión de 25 V.
- d) Verifique que la potencia total generada es igual a la potencia total disipada.
- e) ¿Qué efecto tendrá sobre el valor de  $v_o$  una resistencia finita conectada en serie con la fuente de 40 mA?

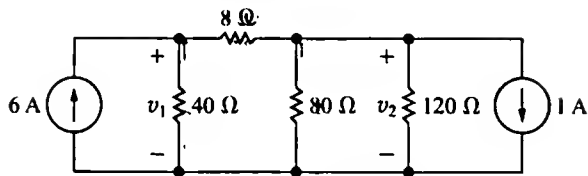


Figura P4.9

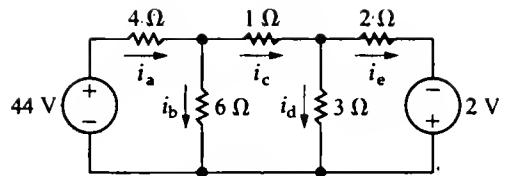


Figura P4.10

4.9. Utilice el método de las tensiones de nodo para calcular  $v_1$  y  $v_2$  en el circuito mostrado en la Figura P4.9.



4.10. a) Utilice el método de las tensiones de nodo para calcular las corrientes de rama  $i_a$ - $i_e$  en el circuito mostrado en la Figura P4.10.



b) Calcule la potencia total generada en el circuito.

4.11. El circuito mostrado en la Figura P4.11 es un modelo en continua de un circuito de distribución de energía doméstico.



a) Utilice el método de las tensiones de nodo para calcular las corrientes de nodo  $i_1$ - $i_6$ .

b) Compruebe la solución obtenida para las corrientes de rama demostrando que la potencia total disipada es igual a la potencia total generada.

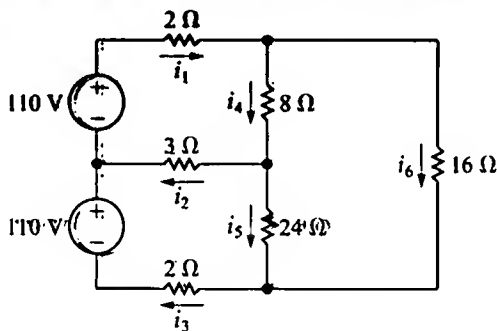


Figura P4.11

4.12. Utilice el método de las tensiones de nodo para calcular  $v_1$  y  $v_2$  en el circuito de la Figura P4.12.



4.13. Utilice el método de las tensiones de nodo para calcular cuánta potencia extrae la fuente de 2 A del circuito de la Figura P4.13.

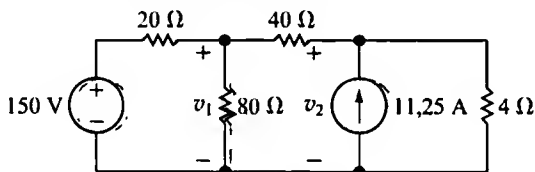


Figura P4.12

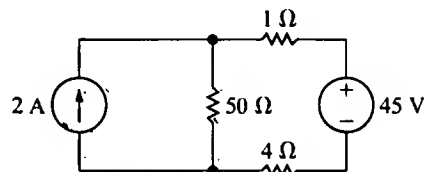


Figura P4.13

4.14. a) Utilice el método de las tensiones de nodo para calcular  $v_1$ ,  $v_2$  y  $v_3$  en el circuito de la Figura P4.14.





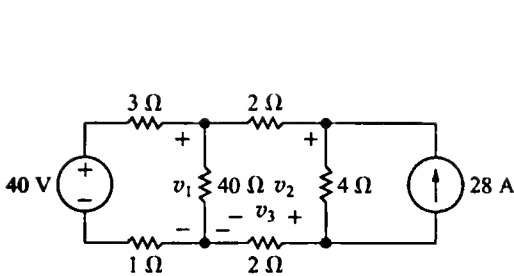


Figura P4.14

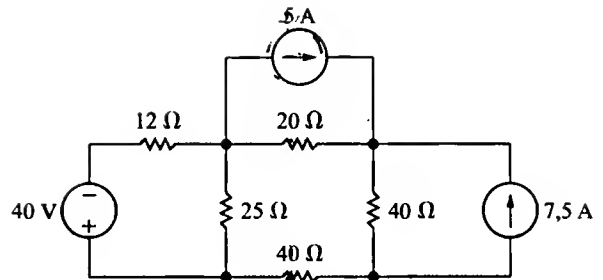


Figura P4.15

b) ¿Cuánta potencia entrega al circuito la fuente de corriente de 28 A?

**4.15.** Utilice el método de las tensiones de nodo para calcular la potencia total disipada en el circuito de la Figura P4.15.

**4.16.** a) Utilice el método de las tensiones de nodo para demostrar que la tensión de salida  $v_o$  en el circuito de la Figura P4.16 es igual al valor medio de las tensiones de las fuentes.

b) Calcule  $v_o$  si  $v_1 = 120$  V,  $v_2 = 60$  V y  $v_3 = -30$  V.

**4.17.** a) Utilice el método de las tensiones de nodo para calcular  $v_o$  en el circuito de la Figura P4.17.

b) Calcule la potencia absorbida por la fuente dependiente.

c) Calcule la potencia total generada por las fuentes independientes.

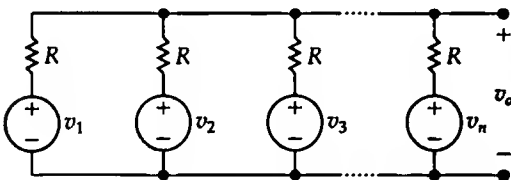


Figura P4.16

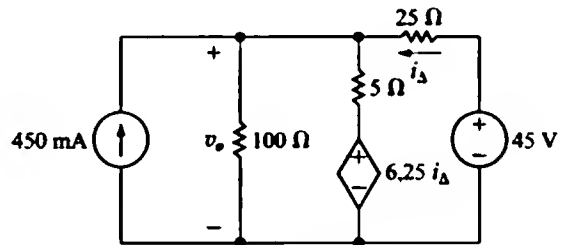


Figura P4.17

**4.18.** a) Calcule las tensiones de nodo de  $v_1$ ,  $v_2$  y  $v_3$  en el circuito de la Figura P4.18.

b) Calcule la potencia total disipada en el circuito.

**4.19.** Utilice el método de las tensiones de nodo para calcular la potencia generada por la fuente de tensión dependiente en el circuito de la Figura P4.19.

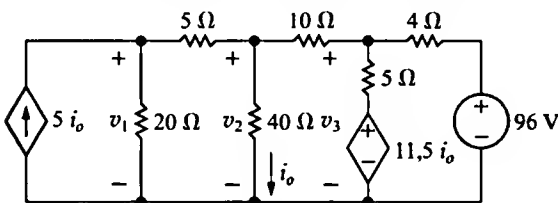


Figura P4.18

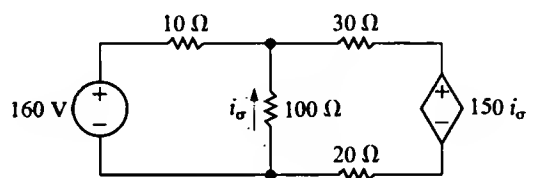


Figura P4.19

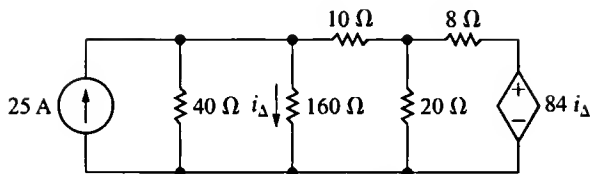


Figura P4.20

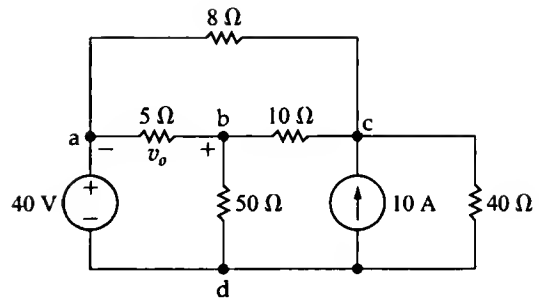


Figura P4.21

4.20. a) Utilice el método de las tensiones de nodo para calcular la potencia total generada en el circuito de la Figura P4.20.



b) Compruebe su respuesta calculando la potencia total absorbida en el circuito.

4.21. Utilice el método de las tensiones de nodo para calcular el valor de  $v_o$  en el circuito de la Figura P4.21.



4.22. Utilice el método de las tensiones de nodo para calcular  $i_o$  en el circuito de la Figura P4.22.

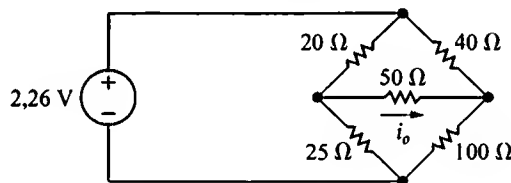


Figura P4.22

4.23. a) Utilice el método de las tensiones de nodo para calcular la potencia disipada en la resistencia de 2 Ω en el circuito de la Figura P4.23.

b) Calcule la potencia suministrada por la fuente de 230 V.

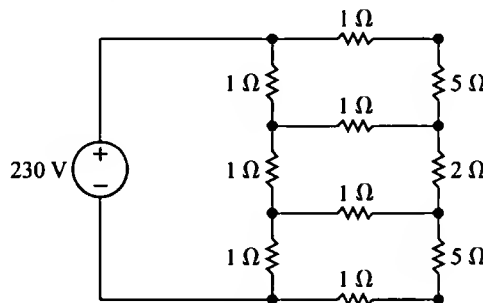


Figura P4.23

4.24. a) Utilice el método de las tensiones de nodo para calcular las corrientes de rama  $i_1$ ,  $i_2$  e  $i_3$  en el circuito de la Figura P4.24.



b) Compruebe la solución obtenida para  $i_1$ ,  $i_2$  e  $i_3$  demostrando que la potencia disipada en el circuito es igual a la potencia generada.

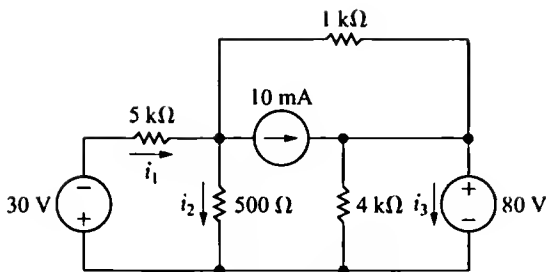


Figura P4.24

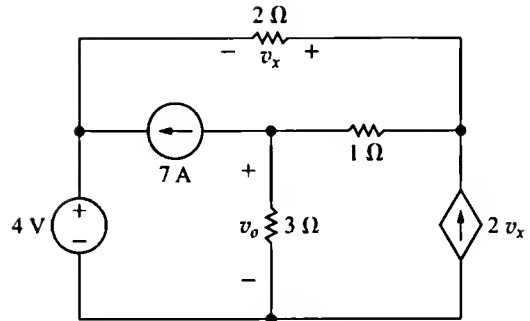


Figura P4.25

4.25. Utilice el método de las tensiones de nodo para calcular el valor de  $v_o$  en el circuito de la Figura P4.25.

4.26. Utilice el método de las tensiones de nodo para calcular  $v_1$  y la potencia generada por la fuente de tensión de 25 V en el circuito de la Figura P4.26.

4.27. Utilice el método de las tensiones de nodo para calcular el valor de  $v_o$  en el circuito de la Figura P4.27.

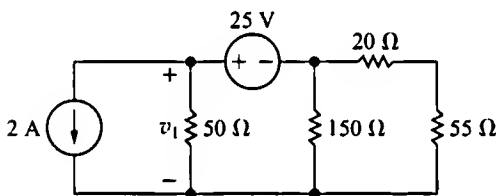


Figura P4.26

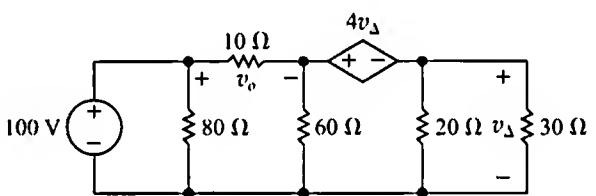


Figura P4.27

4.28. Suponga que está trabajando como ingeniero de proyectos y que asigna a uno de sus subordinados la tarea de analizar el circuito mostrado en la Figura P4.28. El nodo de referencia y los números de nodo indicados en la figura han sido asignados por el analista. Su solución proporciona los valores de 108 V y 81,6 V para  $v_3$  y  $v_4$ , respectivamente.

Compruebe estos valores calculando la potencia total generada en el circuito y comparándola con la potencia total disipada. ¿Está de acuerdo con la solución calculada por el analista?

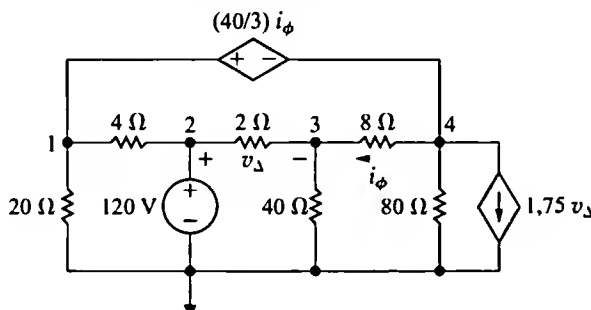


Figura P4.28

- 4.29. Utilice el método de las tensiones de nodo para calcular la potencia generada por la fuente de 60 V en el circuito de la Figura P4.29.

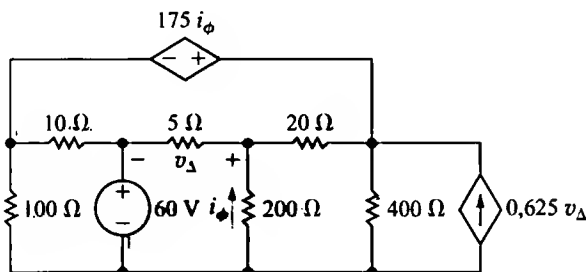


Figura P4.29

- 4.30. Demuestre que, cuando se calcula  $i_B$  a partir de las Ecuaciones 4.16, 4.17 y 4.19, el resultado es idéntico a la Ecuación 2.25.

- 4.31. a) Utilice el método de las corrientes de malla para calcular las corrientes de rama  $i_a$ ,  $i_b$  e  $i_c$  en el circuito de la Figura P4.31.



- b) Repita el apartado (a) si se invierte la polaridad de la fuente de 60 V.

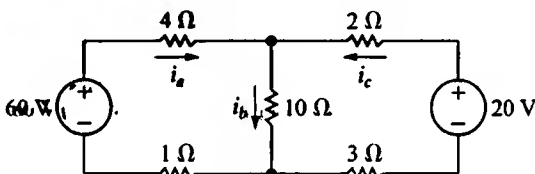


Figura P4.31

- 4.32. a) Utilice el método de las corrientes de malla para calcular la potencia total generada en el circuito de la Figura P4.32.



- b) Compruebe su respuesta demostrando que la potencia total generada es igual a la potencia total disipada.

- 4.33. Utilice el método de las corrientes de malla para calcular la potencia disipada en la resistencia de 20 Ω en el circuito de la Figura P4.33.



- 4.34. Utilice el método de las corrientes de malla para calcular la potencia entregada por la fuente de tensión dependiente en el circuito mostrado en la Figura P4.34.

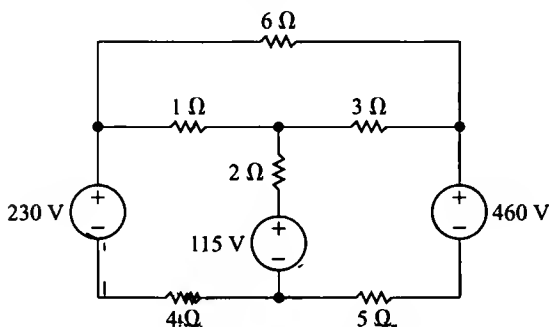


Figura P4.32

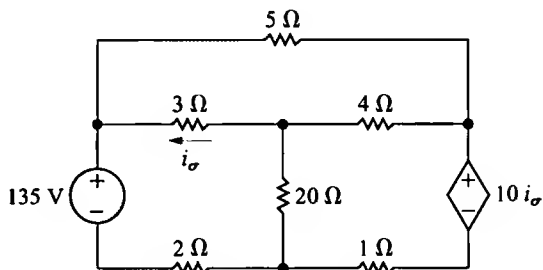


Figura P4.33

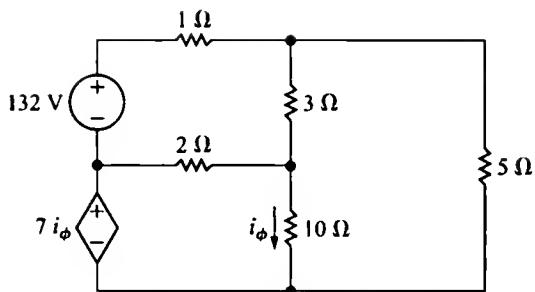


Figura P4.34

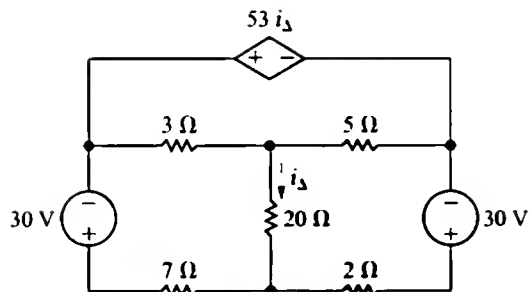


Figura P4.35

**4.35.** Utilice el método de las corrientes de malla para calcular la potencia generada en la fuente de tensión dependiente en el circuito mostrado en la Figura P4.35.

**4.36.** a) Utilice el método de las corrientes de malla para calcular  $v_o$  en el circuito de la Figura P4.36.  
b) Calcule la potencia generada por la fuente dependiente.

**4.37.** a) Utilice el método de las corrientes de malla para calcular la potencia que entrega la fuente de corriente de 30 A al circuito de la Figura P4.37.  
b) Calcule la potencia total entregada al circuito.

c) Compruebe los cálculos demostrando que la potencia total generada en el circuito es igual a la potencia total disipada.

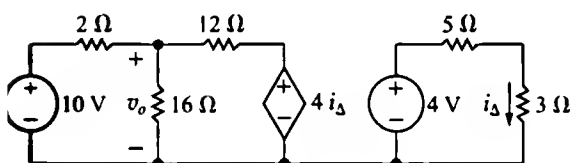


Figura P4.36

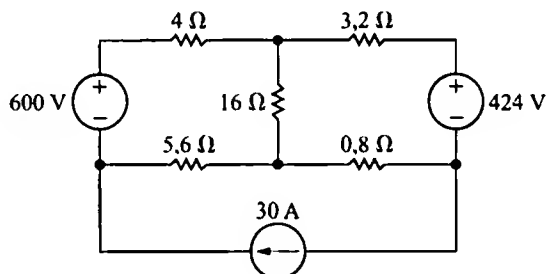


Figura P4.37

**4.38.** a) Utilice el método de las corrientes de malla para calcular  $i_Δ$  en el circuito de la Figura P4.38.  
b) Calcule la potencia entregada por la fuente de corriente independiente.  
c) Calcule la potencia entregada por la fuente de tensión dependiente.

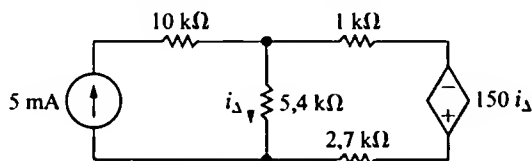


Figura P4.38

**4.39.** Utilice el método de las corrientes de malla para calcular la potencia total generada en el circuito de la Figura P4.39.

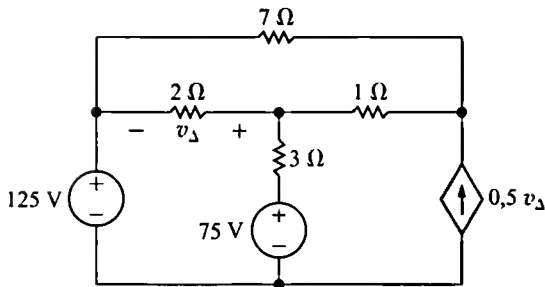


Figura P4.39

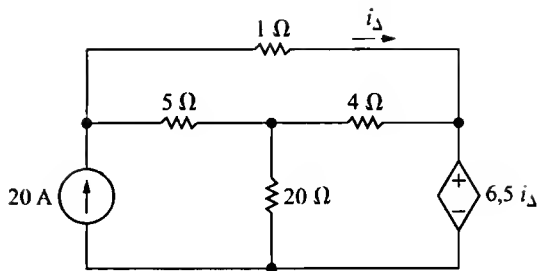


Figura P4.40

4.40. Utilice el método de las corrientes de malla para calcular la potencia total generada por la fuente de 20 A en el circuito de la Figura P4.40.

4.41. a) Utilice el método de las corrientes de malla para calcular la potencia entregada a la resistencia de 2 Ω en el circuito de la Figura P4.41.

b) ¿Qué porcentaje de la potencia total generada en el circuito se entrega a la resistencia de 2 Ω?

4.42. a) Utilice el método de las corrientes de malla para determinar qué fuentes del circuito de la Figura P4.42 están entregando potencia.

b) Calcule la potencia total disipada en el circuito.

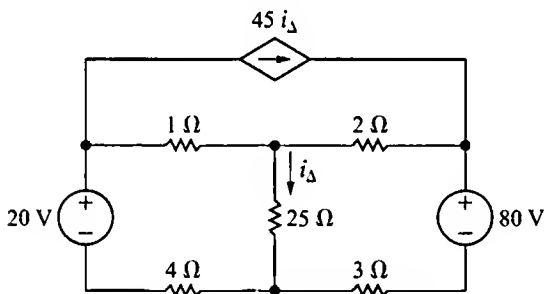


Figura P4.41

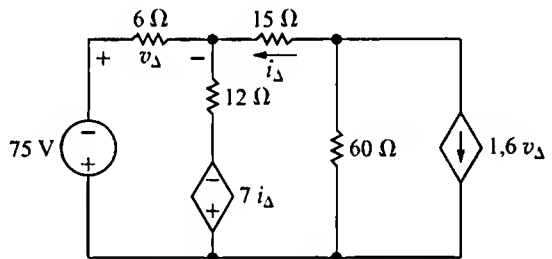


Figura P4.42

4.43. Utilice el método de las corrientes de malla para calcular la potencia total disipada en el circuito de la Figura P4.43.

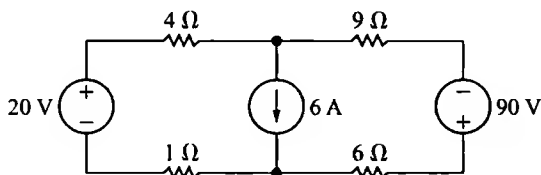


Figura P4.43

4.44. Suponga que la fuente de 20 V del circuito de la Figura P4.43 se incrementa a 120 V. Calcule la potencia total disipada en el circuito.

4.45. a) Suponga que la fuente de 20 V del circuito de la Figura P4.43 se cambia por otra de 60 V. Calcule la potencia total disipada en el circuito.

- b) Repita el apartado (a) si se sustituye la fuente de corriente de 6 A por un cortocircuito.  
 c) Explique por qué son iguales las respuestas a los apartados (a) y (b).

- 4.46. a) Utilice el método de las corrientes de malla para calcular las corrientes de rama  $i_a$ - $i_e$  en el circuito de la Figura P4.46.  
☐ b) Compruebe la solución demostrando que la potencia total generada en el circuito es igual a la potencia total disipada.
- 4.47. a) Calcule las corrientes de rama  $i_a$ - $i_e$  para el circuito mostrado en la Figura P4.47.  
☐ b) Compruebe su respuesta demostrando que la potencia total generada es igual a la potencia total disipada.

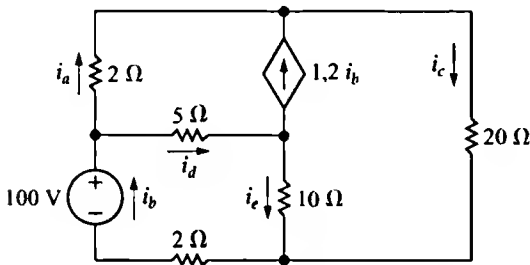


Figura P4.46

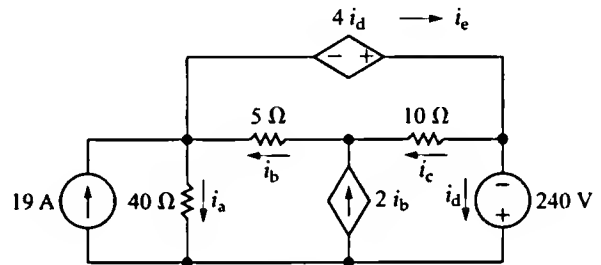


Figura P4.47

- 4.48. El circuito de la Figura P4.48 es una versión para corriente continua de un sistema de distribución típico de tres hilos. Las resistencias  $R_a$ ,  $R_b$  y  $R_c$  representan las resistencias de los tres conductores que conectan las tres cargas  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$  a la tensión de alimentación de 125/250 V. Las resistencias  $R_1$  y  $R_2$  representan cargas conectadas a los circuitos de 125 V, mientras que  $R_3$  representa una carga conectada al circuito de 250 V.
- a) Calcule  $v_1$ ,  $v_2$  y  $v_3$ .  
 b) Calcule la potencia entregada a  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$ .  
 c) ¿Qué porcentaje de la potencia total generada por las fuentes se entrega a las cargas?  
 d) La rama  $R_b$  representa el conductor neutro en el circuito de distribución. ¿Qué efecto adverso se produciría si el conductor neutro quedara en circuito abierto? (*Sugerencia*: calcule  $v_1$  y  $v_2$  y tenga en cuenta que los aparatos o cargas diseñados para utilizarse en este circuito estarán preparados para una tensión nominal de 125 V).

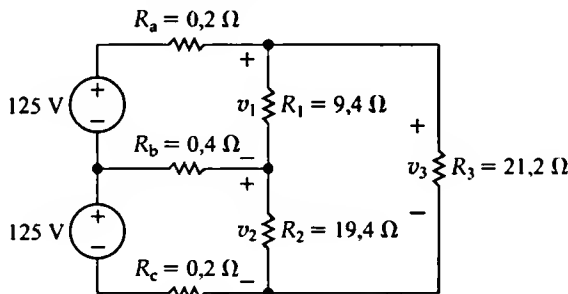


Figura P4.48

- 4.49. Demuestre que, siempre que  $R_1 = R_2$  en el circuito de la Figura P4.48, la corriente en el conductor neutro es cero. (*Sugerencia*: calcule la corriente del conductor neutro en función de  $R_1$  y  $R_2$ ).

4.50. La fuente variable de corriente continua del circuito de la Figura P4.50 se ajusta para que la potencia generada por la fuente de corriente de 4 A sea cero. Calcule el valor de  $i_{cc}$ .

4.51. La fuente variable de tensión continua del circuito de la Figura P4.51 se ajusta de modo que  $i_o$  sea cero.

a) Calcule el valor de  $V_{cc}$ .

b) Compruebe la solución demostrando que la potencia generada es igual a la potencia disipada.

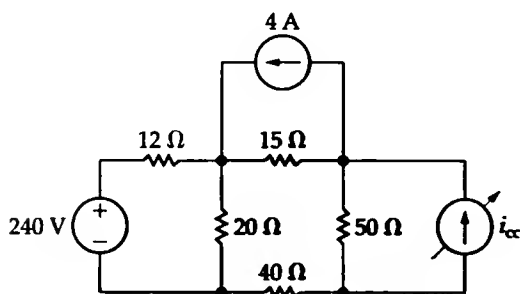


Figura P4.50

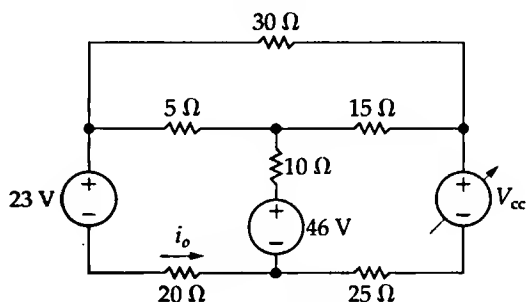


Figura P4.51

4.52. Suponga que le piden calcular la potencia disipada en la resistencia de  $10\ \Omega$  en el circuito de la Figura P4.52.

a) ¿Qué método de análisis de circuitos recomendaría? Explique su respuesta.

b) Utilice dicho método recomendado de análisis para calcular la potencia disipada en la resistencia de  $10\ \Omega$ .

c) ¿Cambiaría su recomendación si el problema fuera la determinación de la potencia generada por la fuente de corriente de 4 A? Explique su respuesta.

d) Calcule la potencia entregada por la fuente de corriente de 4 A.

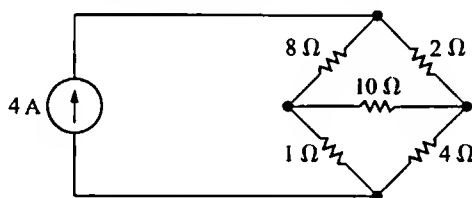


Figura P4.52

4.53. Se coloca una resistencia de  $20\ \Omega$  en paralelo con la fuente de corriente de 4 A del circuito de la Figura P4.52. Suponga que le piden que calcule la potencia generada por la fuente de corriente.

a) ¿Qué método de análisis de circuitos recomendaría? Explique su respuesta.

b) Calcule la potencia generada por la fuente de corriente.

4.54. a) Para calcular la potencia absorbida por la fuente de 20 V en el circuito de la Figura P4.54, ¿utilizaría el método de las tensiones de nodo o el de las corrientes de malla? Explique su respuesta.

b) Utilice el método seleccionado en el apartado (a) para calcular la potencia.

4.55. a) Utilice una serie de transformaciones de fuentes para calcular la corriente  $i_o$  en el circuito de la Figura P4.55.



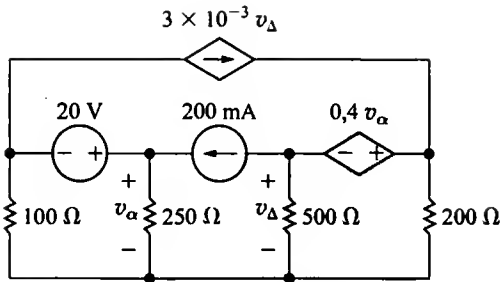


Figura P4.54

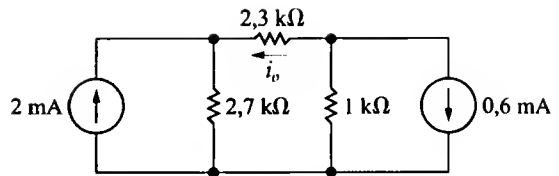


Figura P4.55

b) Compruebe su solución utilizando el método de las tensiones de nodo para calcular  $i_o$ .

4.56. a) Calcule la corriente en la resistencia de  $5 \text{ k}\Omega$  en el circuito de la Figura P4.56, realizando una sucesión de transformaciones de fuentes apropiadas.



b) Utilizando el resultado obtenido en el apartado (a), retroceda en el circuito hasta calcular la potencia generada por la fuente de  $120 \text{ V}$ .

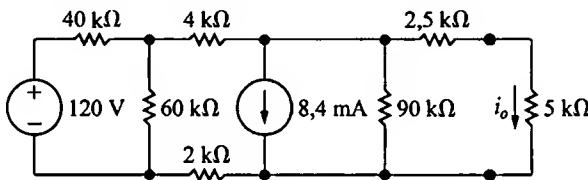


Figura P4.56

4.57. a) Utilice la técnica de transformación de fuentes para calcular  $v_o$  en el circuito de la Figura P4.57.



b) Calcule la potencia generada por la fuente de  $520 \text{ V}$ .

c) Calcule la potencia generada por la fuente de corriente de  $1 \text{ A}$ .

d) Verifique que la potencia total generada es igual a la potencia total disipada.

4.58. a) Utilice una serie de transformaciones de fuentes para calcular  $i_o$  en el circuito de la Figura P4.58.



b) Verifique su solución utilizando el método de las corrientes de malla para calcular  $i_o$ .

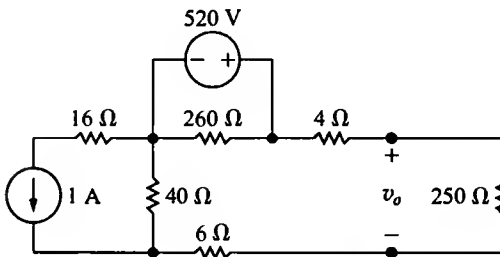


Figura P4.57

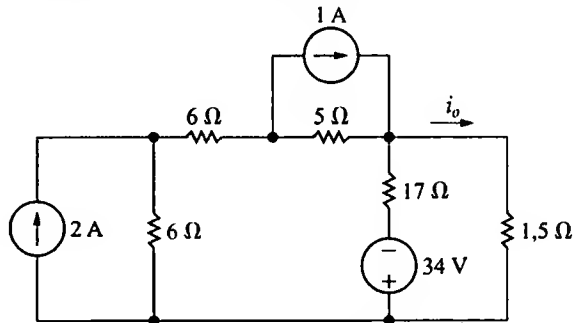


Figura P4.58

4.59. Calcule el equivalente de Thévenin con respecto a los terminales a y b del circuito de la Figura P4.59.



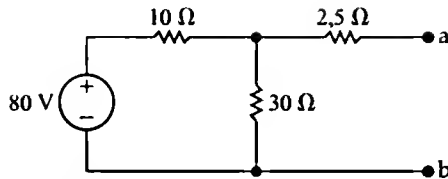


Figura P4.59

4.60. Calcule el equivalente de Thévenin con respecto a los terminales a y b del circuito de la Figura P4.60.



4.61. Calcule el equivalente de Thévenin con respecto a los terminales a y b del circuito de la Figura P4.61.

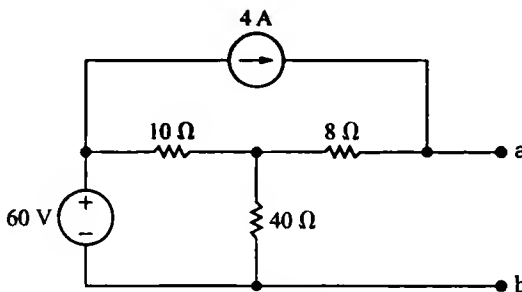


Figura P4.60

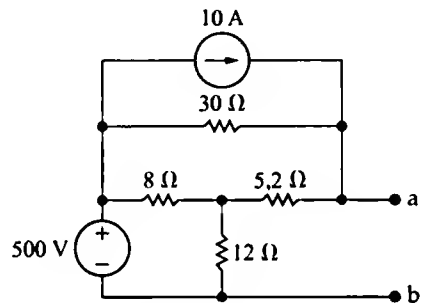


Figura P4.61

4.62. Calcule el equivalente de Norton con respecto a los terminales a y b del circuito de la Figura P4.62.



4.63. Se utiliza un voltímetro con una resistencia de  $85,5 \text{ k}\Omega$  para medir la tensión  $v_{ab}$  en el circuito de la Figura P4.63.



- ¿Qué lectura proporciona el voltímetro?
- ¿Cuál es el porcentaje de error en la lectura del voltímetro, si definimos el porcentaje de error como  $[(\text{medido} - \text{real})/\text{real}] \times 100$ ?

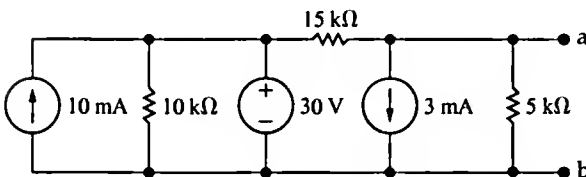


Figura P4.62

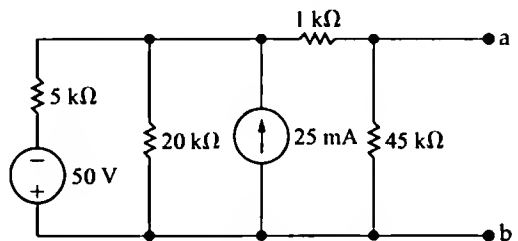


Figura P4.63

4.64. a) Calcule el equivalente de Thévenin con respecto a los terminales a y b para el circuito de la Figura P4.64, calculando la tensión en circuito abierto y la corriente en cortocircuito.



- Calcule la resistencia de Thévenin eliminando las fuentes independientes. Compare el resultado con la resistencia de Thévenin calculada en el apartado (a).

4.65. Calcule el equivalente de Thévenin con respecto a los terminales a y b para el circuito de la Figura P4.65.



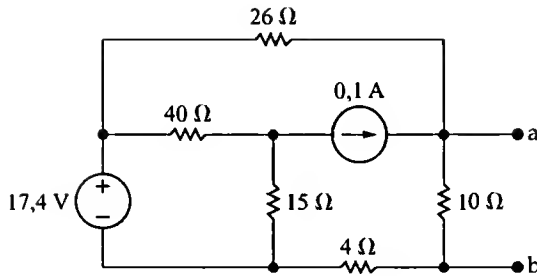


Figura P4.64

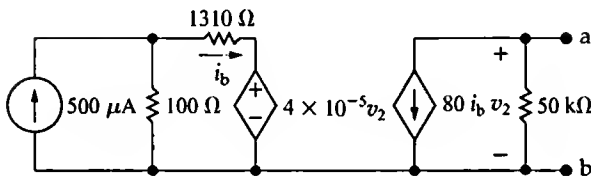


Figura P4.65

4.66. Una batería de automóvil, cuando se la conecta a una radio de automóvil, proporciona 12,72 V a la radio. Cuando se la conecta a un par de faros, proporciona 12 V a los mismos. Suponga que se puede modelar la radio como una resistencia de  $6,36 \Omega$  y que los faros pueden modelarse como una resistencia de  $0,60 \Omega$ . ¿Cuáles son los equivalentes de Thévenin y de Norton de la batería?

4.67. Determine  $i_o$  y  $v_o$  en el circuito mostrado en la Figura P4.67 cuando  $R_o$  es 0, 2, 6, 10, 15, 20, 30, 40, 50 y  $70 \Omega$ .

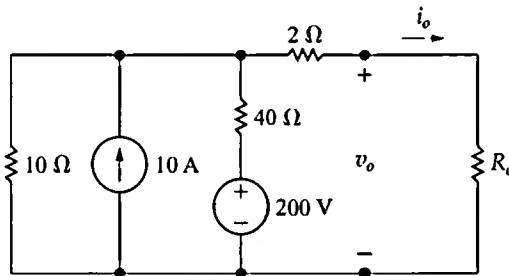


Figura P4.67

4.68. Calcule el equivalente de Thévenin con respecto a los terminales a y b para el circuito de la



Figura P4.68.

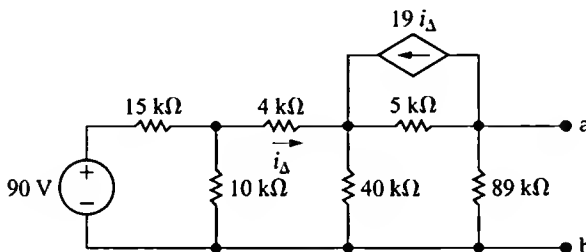


Figura P4.68

4.69. Cuando se utiliza un voltímetro para medir la tensión  $v_e$  en la Figura P4.69, el voltímetro marca



5,5 V.

- a) ¿Cuál es la resistencia del voltímetro?  
 b) ¿Cuál es el porcentaje de error en la medida de tensión?

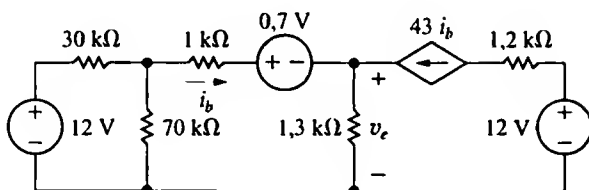


Figura P4.69

- 4.70. Cuando se utiliza un amperímetro para medir la corriente  $i_\phi$  en el circuito mostrado en la Figura P4.70, el aparato marca 6 A.



- a) ¿Cuál es la resistencia del amperímetro?  
 b) ¿Cuál es el porcentaje de error en la medida de corriente?

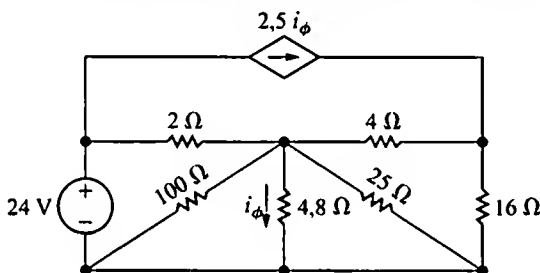


Figura P4.70

- 4.71. El equivalente de Thévenin también puede determinarse a partir de las medidas realizadas en el par de terminales de interés. Suponga que se han realizado las siguientes medidas en los terminales a y b del circuito de la Figura P4.71.

- Cuando se conecta una resistencia de  $20\text{ k}\Omega$  a los terminales a y b, la tensión medida  $v_{ab}$  es de 100 V.
- Al conectar una resistencia de  $50\text{ k}\Omega$  a los terminales a y b, la tensión medida es de 200 V.
- Calcule el equivalente de Thévenin de la red con respecto a los terminales a y b.

- 4.72. El puente de Wheatstone del circuito mostrado en la Figura P4.72 está equilibrado cuando  $R_3$  es igual a  $500\text{ }\Omega$ . Si el galvanómetro tiene una resistencia de  $50\text{ }\Omega$ , ¿cuánta corriente detectará el galvanómetro cuando se desequilibre el puente, fijando  $R_3$  en  $501\text{ }\Omega$ ? (Sugerencia: calcule el equivalente de Thévenin con respecto a los terminales del galvanómetro cuando  $R_3 = 501\text{ }\Omega$ . Observe que, una vez que hemos determinado este equivalente de Thévenin, resulta fácil averiguar la magnitud de la corriente de desequilibrio en la rama del galvanómetro para diferentes resistencias del galvanómetro).

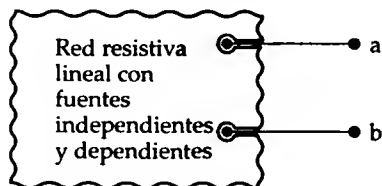


Figura P4.71

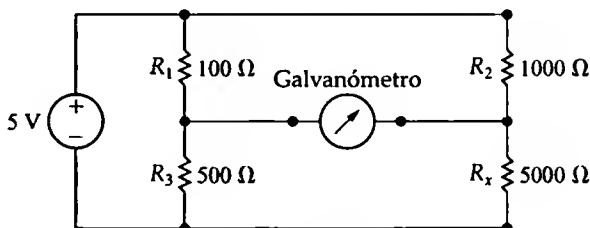


Figura P4.72

- 4.73. Calcule el equivalente de Thévenin con respecto a los terminales a y b en el circuito de la Figura P4.73.



- 4.74. Calcule el equivalente de Thévenin con respecto a los terminales a y b para el circuito mostrado en la Figura P4.74.

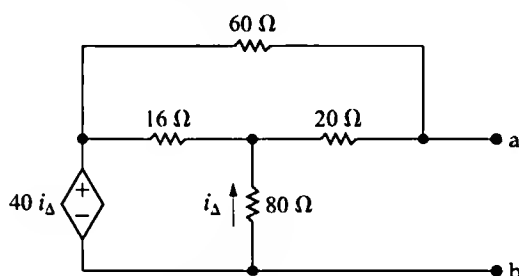


Figura P4.73

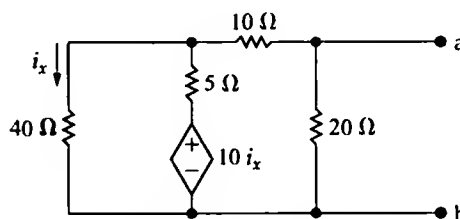


Figura P4.74

- 4.75. La resistencia variable ( $R_o$ ) en el circuito de la Figura P4.75 se ajusta hasta que la potencia disipada en la resistencia es de 250 W. Calcule los valores de  $R_o$  que satisfacen esta condición.



- 4.76. La resistencia variable ( $R_L$ ) en el circuito de la Figura P4.76 se ajusta para conseguir una transferencia máxima de potencia a  $R_L$ .



- a) Calcule el valor numérico de  $R_L$ .  
b) Calcule la máxima potencia transferida a  $R_L$ .

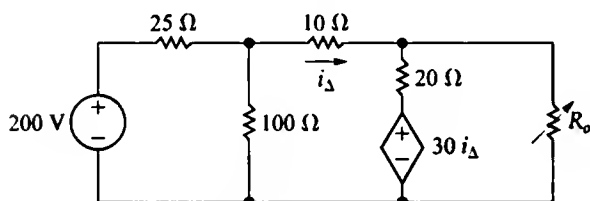


Figura P4.75

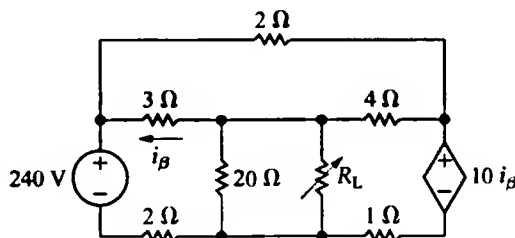


Figura P4.76

- 4.77. La resistencia variable del circuito de la Figura P4.77 se ajusta hasta conseguir una transferencia máxima de potencia a  $R_o$ .



- a) Calcule el valor de  $R_o$ .  
b) Calcule la potencia máxima que puede entregarse a  $R_o$ .

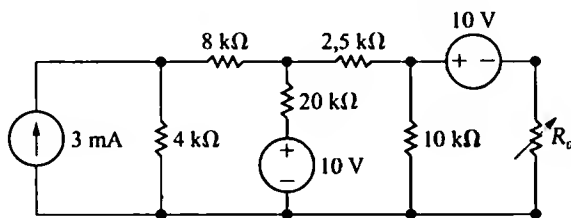


Figura P4.77

- 4.78. ¿Qué porcentaje de la potencia total generada en el circuito de la Figura P4.77 se entrega a  $R_o$  cuando se fija  $R_o$  para transferencia máxima de potencia?



- 4.79. Se conecta una resistencia variable  $R_o$  entre los terminales a y b del circuito de la Figura P4.68. ☐ La resistencia variable se ajusta hasta conseguir una transferencia máxima de potencia a  $R_o$ .
- Calcule el valor de  $R_o$ .
  - Calcule la potencia máxima que puede entregarse a  $R_o$ .
  - Calcule el porcentaje de la potencia total generada en el circuito que se entrega a  $R_o$ .
- 4.80. ☐ a) Calcule la potencia entregada para cada valor de  $R_o$  usado en el Problema 4.67.  
b) Dibuje una gráfica de la potencia entregada a  $R_o$  en función de la resistencia  $R_o$ .  
c) ¿Para qué valor de  $R_o$  es máxima la potencia entregada a dicha resistencia?
- 4.81. ☐ La resistencia variable ( $R_o$ ) del circuito de la Figura P4.81 se ajusta para conseguir una transferencia máxima de potencia a  $R_o$ . ¿Qué porcentaje de la potencia total generada en el circuito se entrega a  $R_o$ ?

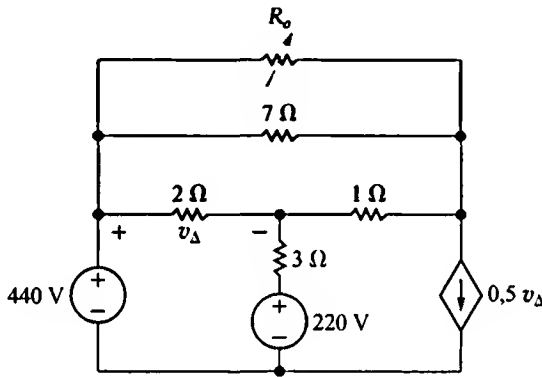


Figura P4.81

- 4.82. ☐ La resistencia variable ( $R_o$ ) del circuito de la Figura P4.82 se ajusta hasta conseguir una transferencia máxima de potencia a  $R_o$ .
- Calcule el valor de  $R_o$ .
  - Calcule la potencia máxima que puede entregarse a  $R_o$ .

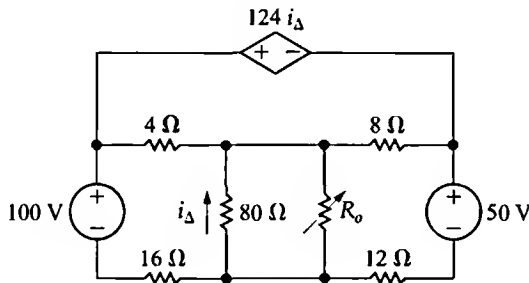


Figura P4.82

- 4.83. ☐ ¿Qué porcentaje de la potencia total generada en el circuito de la Figura P4.82 se entrega a  $R_o$ ?
- 4.84. ☐ La resistencia variable ( $R_o$ ) del circuito de la Figura P4.84 se ajusta hasta que absorbe una potencia máxima del circuito.
- Calcule el valor de  $R_o$ .

- b) Calcule la potencia máxima.  
 c) Calcule el porcentaje de la potencia total generada en el circuito que se entrega a  $R_o$ .

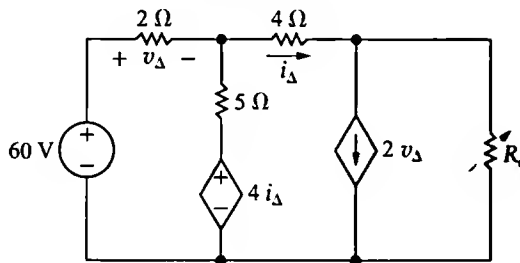


Figura P4.84

4.85. La resistencia variable del circuito de la Figura P4.85 se ajusta hasta conseguir una transferencia máxima de potencia a  $R_o$ .



- a) Calcule el valor numérico de  $R_o$ .  
 b) Calcule la potencia máxima entregada a  $R_o$ .  
 c) ¿Cuánta potencia entrega la fuente de 280 V al circuito cuando se ajusta  $R_o$  con el valor calculado en el apartado (a)?

4.86. a) Calcule el valor de la resistencia variable  $R_o$  en el circuito de la Figura P4.86 que permite obtener una disipación máxima de potencia en la resistencia de 8 Ω. (*Sugerencia: las conclusiones precipitadas pueden ser peligrosas para su carrera profesional*).



- b) ¿Cuál es la máxima potencia que puede entregarse a la resistencia de 8 Ω?

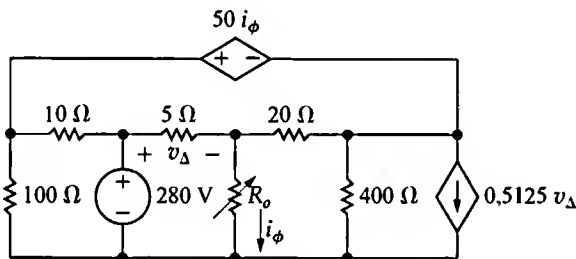


Figura P4.85

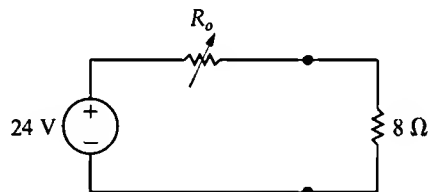


Figura P4.86

- 4.87. a) Utilice el principio de superposición para calcular la tensión  $v$  en el circuito de la Figura P4.87.  
 b) Calcule la potencia disipada en la resistencia de 10 Ω.

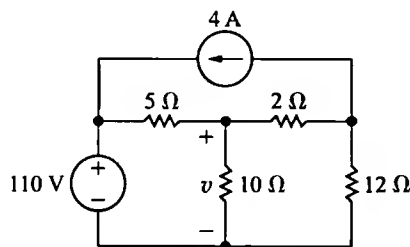


Figura P4.87

4.88. Utilice el principio de superposición para calcular la tensión  $v$  en el circuito de la Figura P4.88.

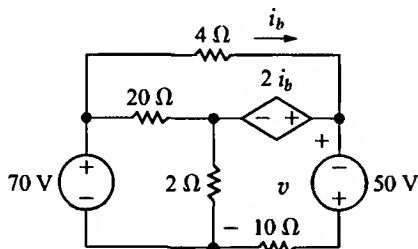


Figura P4.88

4.89. Utilice el principio de superposición para calcular la tensión  $v_o$  en el circuito de la Figura P4.89.



4.90. Utilice el principio de superposición para calcular la tensión  $v_o$  en el circuito de la Figura P4.90.

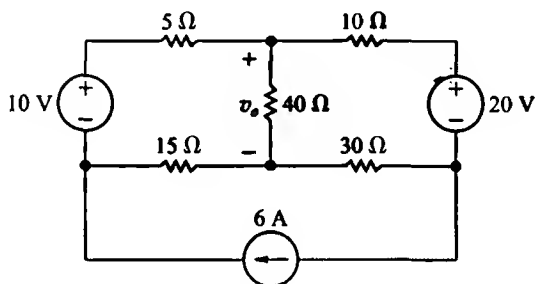


Figura P4.89

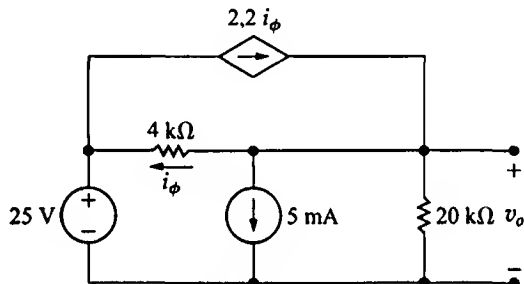


Figura P4.90

4.91. Utilice el principio de superposición para calcular  $i_o$  y  $v_o$  en el circuito de la Figura P4.91.

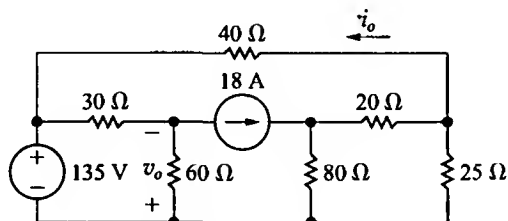


Figura 4.91

4.92. Utilice el principio de superposición para calcular la corriente  $i_o$  en el circuito de la Figura P4.92.

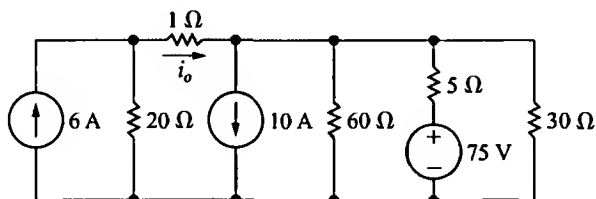


Figura P4.92



- 4.93. a) En el circuito de la Figura P4.93, antes de conectar la fuente de corriente de 5 mA a los terminales a y b, se calcula la corriente  $i_o$  y se ve que es igual a 3,5 mA. Utilice el principio de superposición para calcular el valor de  $i_o$  después de conectar la fuente de corriente.
- b) Verifique su solución calculando  $i_o$  cuando las tres fuentes están actuando simultáneamente.

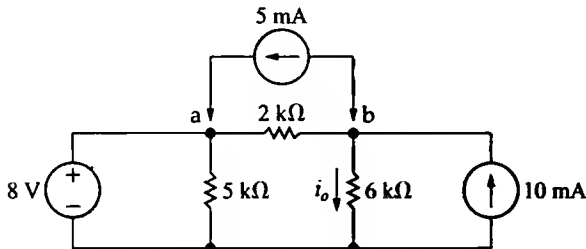


Figura P4.93.

- 4.94. Las medidas de laboratorio realizadas sobre una fuente de tensión continua dan una tensión en los terminales igual a 75 V cuando no hay ninguna carga conectada a la fuente y de 60 V cuando la fuente está cargada con una resistencia de 20  $\Omega$ .
- a) ¿Cuál es el equivalente de Thévenin de la fuente de tensión continua con respecto a sus terminales?
- b) Demuestre que la resistencia de Thévenin de la fuente está dada por la expresión

$$R_{Th} = \left( \frac{v_m}{v_o} - 1 \right) R_L,$$

donde

$v_{Th}$  = tensión de Thévenin

$v_o$  = tensión en los terminales correspondiente a la resistencia de carga  $R_L$ .

- 4.95. Se conectan dos fuentes de tensión continua ideales mediante conductores eléctricos que tienen una resistencia de  $r \Omega/\text{m}$ , como se muestra en la Figura P4.95. Una carga con una resistencia de  $R \Omega$  se puede mover entre las dos fuentes de tensión. Sea  $x$  la distancia entre la carga y la fuente  $v_1$  y sea  $L$  la distancia entre las dos fuentes.
- a) Demuestre que

$$v = \frac{v_1 RL + R(v_2 - v_1)x}{RL + 2rLx - 2rx^2}.$$

- b) Demuestre que la tensión  $v$  será mínima cuando

$$x = \frac{L}{v_2 - v_1} \left[ -v_1 \pm \sqrt{v_1 v_2 - \frac{R}{2rL} (v_1 - v_2)^2} \right].$$

- c) Calcule  $x$  cuando  $L = 16 \text{ km}$ ,  $v_1 = 1000 \text{ V}$ ,  $v_2 = 1200 \text{ V}$ ,  $R = 3,9 \Omega$  y  $r = 5 \times 10^{-5} \Omega/\text{m}$ .
- d) ¿Cuál es el valor mínimo de  $v$  para el circuito del apartado (c)?

- 4.96. Suponga que su supervisor le pide que determine la potencia generada por la fuente de 1 V en el circuito de la Figura P4.96. Antes de calcular la potencia generada por la fuente de 1 V, el supervisor le pide que escriba una propuesta donde se indique cómo piensa resolver el problema.

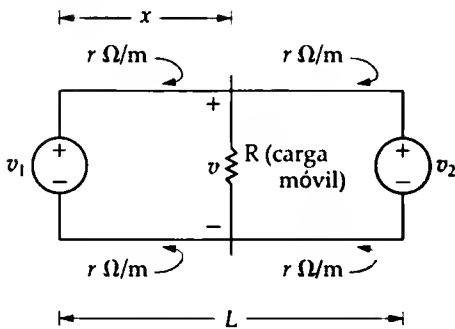


Figura P4.95

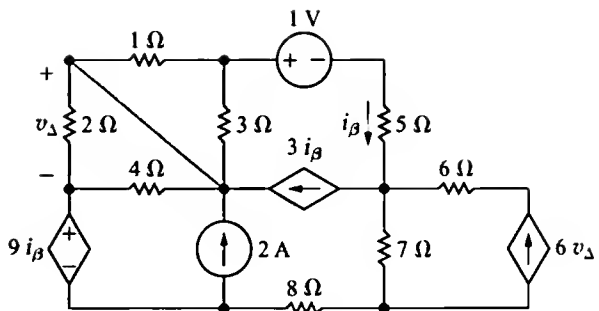


Figura P4.96

Además, le pide que explique los motivos que le han llevado a elegir el método de resolución propuesto.

- Describa su plan de ataque, explicando su razonamiento.
- Utilice el método esbozado en el apartado (a) para calcular la potencia generada por la fuente de 1 V.

4.97. Calcule la potencia absorbida por la fuente de corriente de 5 A en el circuito de la Figura P4.97.

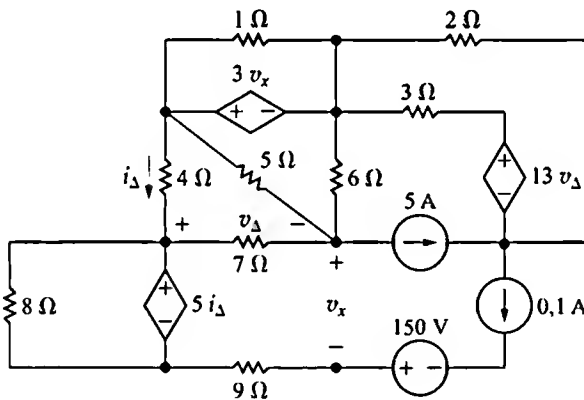


Figura P4.97

4.98. Calcule  $v_1$ ,  $v_2$  y  $v_3$  en el circuito de la Figura P4.98.

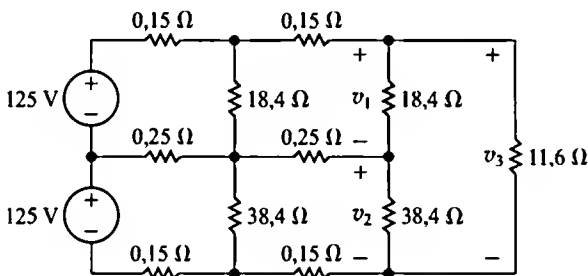


Figura P4.98

4.99. Calcule  $i_1$  en el circuito de la Figura P4.99.

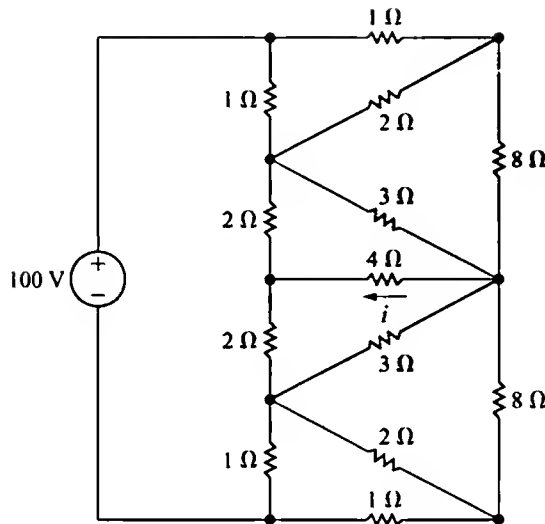


Figura P4.99

4.100. Para el circuito de la Figura 4.69, deduzca las ecuaciones que proporcionan la sensibilidad de  $v_1$  y  $v_2$  frente a las variaciones en las corrientes de fuente  $I_{g1}$  e  $I_{g2}$ .

4.101. Suponga que los valores nominales de los componentes del circuito de la Figura 4.69 son:  $R_1 = 25 \Omega$ ;  $R_2 = 5 \Omega$ ;  $R_3 = 50 \Omega$ ;  $R_4 = 75 \Omega$ ;  $I_{g1} = 12 \text{ A}$  e  $I_{g2} = 16 \text{ A}$ . Prediga cuáles serán los valores de  $v_1$  y  $v_2$  si  $I_{g1}$  decrece hasta 11 A y todos los demás componentes permanecen con sus valores nominales. Compruebe sus predicciones utilizando una herramienta como PSpice o MATLAB.



4.102. Repita el Problema 4.101 si se incrementa  $I_{g2}$  hasta 17 A y si todos los demás componentes conservan sus valores nominales. Compruebe sus predicciones utilizando una herramienta como PSpice o MATLAB.



4.103. Repita el Problema 4.101 si  $I_{g1}$  se reduce hasta 11 A y si  $I_{g2}$  se incrementa hasta 17 A. Compruebe sus predicciones utilizando una herramienta como PSpice o MATLAB.



4.104. Utilice los resultados proporcionados en la Tabla 4.2 para predecir los valores de  $v_1$  y  $v_2$  si  $R_1$  y  $R_3$  se incrementan un 10% con respecto a sus valores nominales y si  $R_2$  y  $R_4$  se reducen un 10% por debajo de sus valores nominales.  $I_{g1}$  e  $I_{g2}$  conservan sus valores nominales. Compare los valores predichos para  $v_1$  y  $v_2$  con los valores reales.



# CAPÍTULO

# 5 El amplificador operacional

## Contenido del capítulo

- 5.1. Terminales del amplificador operacional
- 5.2. Tensiones y corrientes en los terminales
- 5.3. El circuito amplificador inversor
- 5.4. Circuito amplificador sumador
- 5.5. Circuito amplificador no inversor
- 5.6. Circuito amplificador diferencial
- 5.7. Un modelo más realista del amplificador operacional

El circuito electrónico conocido como amplificador operacional ha cobrado una importancia cada vez mayor. Sin embargo, un análisis detallado de este circuito requiere una comprensión de dispositivos electrónicos tales como diodos y transistores. El lector puede estar preguntándose, entonces, por qué presentamos este circuito antes de hablar de los componentes electrónicos que lo forman. Son varias las razones para ello. En primer lugar, resulta perfectamente posible apreciar el modo en que puede usarse un amplificador operacional como bloque componente de otros circuitos más complejos centrándose simplemente en su comportamiento en los terminales. En un nivel introductorio, no hace falta comprender completamente la operación de los componentes electrónicos que gobiernan el comportamiento en los terminales. En segundo lugar, el modelo de circuito del amplificador operacional requiere el uso de una fuente dependiente, así que el lector tendrá la posibilidad de utilizar este tipo de fuente en un circuito práctico, en lugar de como un componente de circuito abstracto. En tercer lugar, puede combinarse el amplificador operacional con resistencias para realizar varias funciones muy útiles, como por ejemplo cambios de escala, sumas, cambios de signo y restas. Finalmente, después de introducir las bobinas y condensadores en el Capítulo 6, podemos mostrar cómo utilizar el amplificador operacional para diseñar circuitos integradores y diferenciadores.

Nuestro enfoque sobre el comportamiento en los terminales del amplificador operacional implica adoptar una visión de caja negra de su operación; es decir, no nos interesa la estructura interna del amplificador ni las corrientes y tensiones que existen dentro de esta estructura. Lo que hay que tener en mente es que el comportamiento interno del amplificador es el responsable de las restricciones de tensión y de corriente impuestas en los terminales (por el momento, pedimos al lector que acepte estas restricciones como un acto de fe).

## Perspectiva práctica

### Galgas extensométricas

¿Cómo puede medirse la curvatura sufrida por una barra de metal como la mostrada en la figura, sin entrar en contacto físico con dicha barra? Un método sería utilizar una galga extensométrica. La galga extensométrica es un tipo de **transductor**, es decir, un dispositivo que mide una magnitud convirtiéndola a otra forma más conveniente. La magnitud que queremos medir en la barra metálica es el ángulo de curvatura, pero resulta muy difícil medir el ángulo directamente, y ello podría ser incluso peligroso. En lugar de eso, conectamos una galga extensométrica (mostrada en el dibujo) a la barra metálica. Una galga extensométrica es una rejilla de hilos conductores muy finos cuya resistencia cambia cuando se alargan o se acortan los hilos:

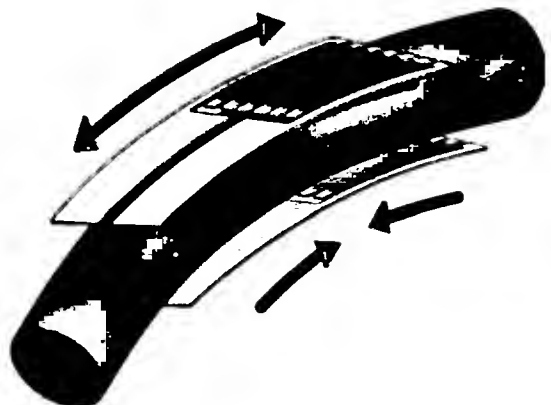
$$\Delta R = 2R \frac{\Delta L}{L}$$

donde  $R$  es la resistencia de la galga en reposo,  $\Delta L/L$  es la relación de alargamiento de la galga (es decir, su «extensión»), la constante 2 es típica del fabricante de la galga y  $\Delta R$  es el cambio de resistencia debido a la curvatura de la barra. Normalmente, se fijan pares de galgas extensométricas en lados opuestos de la barra. Cuando la barra se dobla, los hilos de una de las galgas se alargan y se hacen más finos, incrementando la resistencia, mientras que los de la otra galga se hacen más cortos y gruesos, disminuyendo la resistencia.

Pero ¿cómo podemos medir el cambio de resistencia? Una posible forma sería utilizar un óhmetro. Sin embargo, el cambio de resistencia experimentando por la galga extensométrica es, normalmente, mucho más pequeño de lo que se puede medir con precisión con un óhmetro. Normalmente, el par de galgas extensométricas se conectan para formar un puente de Wheatstone, midiéndose la diferencia de tensión entre los dos brazos del puente. Para poder realizar

### Objetivos del capítulo

1. Ser capaz de nombrar los cinco terminales de los amplificadores operacionales y describir y utilizar las restricciones de tensión y de corriente y las simplificaciones resultantes que conducen al amplificador operacional ideal.
2. Ser capaz de analizar circuitos simples que contengan amplificadores operacionales ideales y saber reconocer los siguientes circuitos de amplificador operacional: amplificador inversor, amplificador sumador, amplificador no inversor y amplificador diferencial.
3. Comprender el modelo más realista de un amplificador operacional y ser capaz de utilizar este modelo para analizar circuitos simples que contengan amplificadores operacionales.



una medida precisa de la diferencia de tensión, utilizamos un circuito amplificador operacional para amplificar, o incrementar, esa diferencia de tensión. Después de introducir el amplificador operacional y algunos de los circuitos más importantes que emplean este tipo de dispositivos, presentaremos el circuito utilizado con las galgas extensométricas para medir la curvatura en una barra metálica.

El circuito amplificador operacional comenzó su andadura como componente básico de las computadoras analógicas. Se denominaba *operacional* porque se utilizaba para implementar las operaciones matemáticas de integración, diferenciación, suma, cambio de signo y cambio de escala. Después, el rango de aplicaciones se extendió más allá de la implementación de operaciones matemáticas, pese a lo cual sigue persistiendo el nombre original del circuito. Los ingenieros y técnicos son conocidos por tener la manía de crear nuevas palabras de jerga técnica; debido a ello, el amplificador operacional se conoce también con el nombre de **op amp** en la literatura técnica.

## 5.1. Terminales del amplificador operacional

Puesto que queremos concentrarnos en el comportamiento en los terminales del amplificador operacional, comenzaremos indicando cuáles son los terminales en un dispositivo comercialmente disponible. En 1968, Fairchild Semiconductor introdujo un amplificador operacional que ha gozado de una amplia aceptación: el  $\mu A741$  (el prefijo  $\mu A$  era utilizado por Fairchild para indicar que el amplificador estaba fabricado como un microcircuito). Este amplificador está disponible en varios tipos de encapsulado. Para nuestras explicaciones, vamos a suponer un encapsulado de tipo DIP<sup>1</sup> de ocho terminales. La Figura 5.1 muestra una vista superior del encapsulado, con las designaciones de los terminales. Los terminales que más nos interesan son:

- Entrada inversora
- Entrada no inversora
- Salida
- Alimentación positiva ( $V^+$ )
- Alimentación negativa ( $V^-$ )

Los tres terminales restantes no nos interesan mucho. Los terminales de anulación de offset pueden utilizarse en un circuito auxiliar para compensar la degradación de las prestaciones debido al envejecimiento o a las imperfecciones del proceso de fabricación. Sin embargo, esa degradación es despreciable en la mayoría de los casos, por lo que los terminales de anulación del offset se dejan sin usar en muchas ocasiones y juegan un papel secundario en el análisis de circuitos. El terminal 8 no tiene ningún interés, simplemente porque se trata de un terminal no utilizado; NC significa no conectado, lo que quiere decir que dicho terminal no tiene conexión con el circuito amplificador.

La Figura 5.2 muestra un símbolo de circuito ampliamente utilizado para los amplificadores operacionales y que contiene los cinco terminales que nos interesan. La utilización de etiquetas textuales para los terminales resulta poco conveniente en los diagramas de circuito, por lo que simplificaremos las asignaciones de los terminales de la forma siguiente. El terminal de la entrada no inversora se designará mediante un signo más (+) y el terminal de la entrada inversora se designará mediante un signo menos (-). Los terminales de alimentación, que se dibujan siempre fuera del triángulo, están marca-

---

<sup>1</sup> DIP es la abreviatura de *dual in-line package* (encapsulado de doble hilera). Esto quiere decir que los terminales a cada lado del encapsulado están alineados, como también lo están los terminales situados en lados opuestos del encapsulado.

dos como  $V^+$  y  $V^-$ . El terminal situado en el vértice de la caja triangular siempre se considera el terminal de salida. La Figura 5.3 muestra estas designaciones simplificadas.

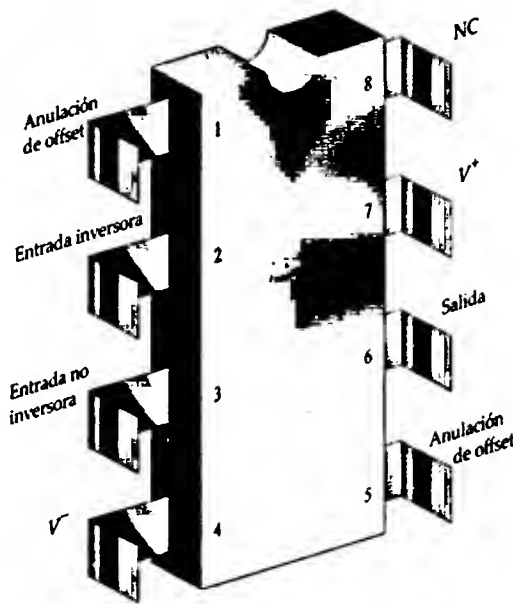


Figura 5.1. Encapsulado DIP de ocho terminales (vista superior).

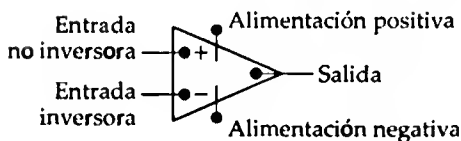


Figura 5.2. Símbolo de circuito para un amplificador operacional (op amp).

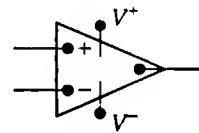


Figura 5.3. Símbolo de circuito simplificado de un amplificador operacional.

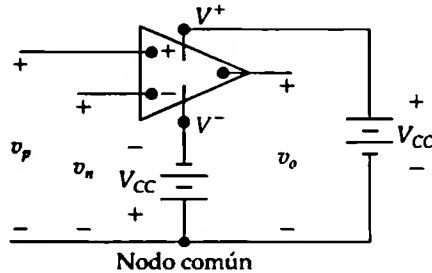
## 5.2. Tensiones y corrientes en los terminales

Nos encontramos ya en condiciones de presentar las tensiones y corrientes en los terminales que utilizaremos para describir el comportamiento del amplificador operacional. Las variables de tensión se miden con respecto a un nodo de referencia común<sup>2</sup>. La Figura 5.4 muestra las variables de tensión, con sus polaridades de referencia.

Todas las tensiones se consideran como incrementos de tensión con respecto al nodo común. Este convenio es el mismo que hemos utilizado en el método de las tensiones de nodo para el análisis de circuitos. Una tensión de alimentación positiva ( $V_{CC}$ ) está conectada entre  $V^+$  y el nodo común. Otra ten-

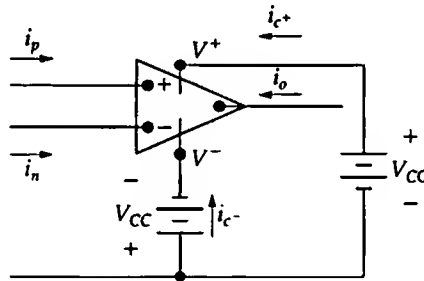
<sup>2</sup> El nodo común es externo al amplificador operacional. Es el terminal de referencia del circuito en el que esté incluido el amplificador operacional.

sión de alimentación negativa ( $-V_{CC}$ ) está conectada entre  $V^-$  y el nodo común. La tensión entre el terminal de la entrada inversora y el nodo común se denota mediante  $v_n$ . La tensión existente entre el terminal de la entrada no inversora y el nodo común se designa  $v_p$ . La tensión existente entre el terminal de salida y el nodo común se ha etiquetado como  $v_o$ .

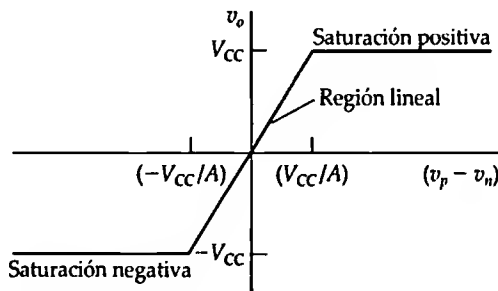


**Figura 5.4.** Variables de tensión de los terminales.

La Figura 5.5 muestra las variables de corriente con sus direcciones de referencia. Observe que las direcciones de referencia de la corriente son siempre entrantes en los terminales del amplificador operacional:  $i_n$  es la corriente que entra por el terminal de la entrada inversora;  $i_p$  es la corriente que entra por el terminal de la entrada no inversora;  $i_o$  es la corriente que entra por el terminal de salida;  $i_{c+}$  es la corriente que entra por el terminal de alimentación positiva, e  $i_{c-}$  es la corriente que entra por el terminal de alimentación negativa.



**Figura 5.5.** Variables de corriente de los terminales.



**Figura 5.6.** Característica de transferencia de tensión de un amplificador operacional.

El comportamiento en los terminales del amplificador operacional como elemento de circuito lineal está caracterizado por una serie de restricciones relativas a las tensiones y corrientes de entrada.



La restricción de la tensión se deduce de la característica de transferencia de tensión del circuito integrado amplificador operacional, que se muestra en la Figura 5.6.

La característica de transferencia de tensión describe cómo varía la tensión de salida en función de las tensiones de entrada; es decir, cómo se transfiere la tensión desde la entrada a la salida. Observe que, para el amplificador operacional, la tensión de salida es una función de la diferencia existente entre las tensiones de entrada,  $v_p - v_n$ . La ecuación de la característica de transferencia de tensión es

$$v_o = \begin{cases} -V_{CC} & A(v_p - v_n) < -V_{CC}, \\ A(v_p - v_n) & -V_{CC} \leq A(v_p - v_n) \leq +V_{CC}, \\ +V_{CC} & A(v_p - v_n) > +V_{CC}. \end{cases} \quad (5.1)$$

Vemos, por la Figura 5.6 y la Ecuación 5.1, que el amplificador operacional tiene tres regiones distintas de operación. Cuando la magnitud de la diferencia de tensión de entrada ( $|v_p - v_n|$ ) es pequeña, el amplificador operacional se comporta como un dispositivo lineal, ya que la tensión de salida es una función lineal de las tensiones de entrada. Fuera de esta región lineal, la salida del amplificador operacional se satura y el amplificador operacional se comporta como un dispositivo no lineal, porque la tensión de salida deja de ser función lineal de las tensiones de entrada. Cuando está operando linealmente, la tensión de salida del amplificador operacional es igual a la diferencia de sus tensiones de entrada multiplicada por la constante de amplificación o ganancia,  $A$ .

Cuando restringimos el amplificador operacional a su región de operación lineal, se impone una restricción a las tensiones de entrada  $v_p$  y  $v_n$ . La restricción está basada en valores numéricos típicos de  $V_{CC}$  y  $A$  en la Ecuación 5.1. Para la mayoría de los amplificadores operacionales, las tensiones continuas de alimentación recomendadas raramente exceden los 20 V y la ganancia  $A$  raramente es inferior a 10.000, o  $10^4$ . Podemos ver en la Figura 5.6 y en la Ecuación 5.1 que, en la región lineal, la magnitud de la diferencia entre las tensiones de entrada ( $|v_p - v_n|$ ) debe ser inferior a  $20/10^4$  o 2 mV.

Normalmente, las tensiones de nodo en los circuitos que estamos estudiando son mucho mayores de 2 mV, por lo que una diferencia de tensión inferior a 2 mV significa que las dos tensiones son esencialmente iguales. Por tanto, cuando un amplificador operacional está restringido a su región de operación lineal y las tensiones de nodo son muy superiores a 2 mV, la restricción impuesta a las tensiones de entrada del amplificador operacional es

✦ **RESTRICCIÓN DE LAS TENSIONES DE ENTRADA PARA EL AMPLIFICADOR OPERACIONAL IDEAL**

$$v_p = v_n. \quad (5.2)$$

Observe que la Ecuación 5.2 caracteriza la relación entre las tensiones de entrada para un amplificador operacional ideal, es decir, un amplificador operacional cuya ganancia  $A$  sea infinita.

La restricción de las tensiones de entrada expresada en la Ecuación 5.2 se denomina condición de *cortocircuito virtual* en la entrada del amplificador operacional. Resulta natural preguntarse cómo puede mantenerse el cortocircuito virtual en la entrada del amplificador operacional, para garantizar la operación lineal, cuando el amplificador operacional está integrado en un circuito. La respuesta es que se realimenta una señal desde el terminal de salida al terminal de la entrada inversora. Esta configuración se conoce con el nombre de **realimentación negativa**, porque la señal realimentada desde la salida se resta de la señal de entrada. Esta realimentación negativa hace que la diferencia entre las tensiones de entrada decrezca. Puesto que la tensión de salida es proporcional a la diferencia entre las

tensiones de entrada, la tensión de salida también decrece y el amplificador operacional opera en su región lineal.

Si un circuito que contenga el amplificador operacional no proporciona un camino de realimentación negativa desde la salida del amplificador operacional hasta la entrada inversora, el amplificador operacional normalmente tenderá a saturarse. La diferencia entre las tensiones de entrada debe ser extremadamente pequeña para que no se llegue a la saturación en ausencia de realimentación negativa. Pero, aunque el circuito proporcione un camino de realimentación negativa para el amplificador operacional, no está garantizada la operación lineal. En consecuencia, ¿cómo sabemos si el amplificador operacional está operando en su región lineal?

La respuesta es que no lo sabemos. La forma de tratar con este dilema es suponer que el amplificador está operando en la región lineal, realizar el análisis del circuito y luego comprobar los resultados para ver si hay alguna contradicción. Por ejemplo, suponga que un amplificador operacional en un circuito está operando en su región lineal y que calculamos la tensión de salida del amplificador operacional, que resulta ser de 10 V. Al examinar el circuito, descubrimos que  $V_{CC}$  es de 6 V, lo que da como resultado una contradicción, porque la tensión de salida del amplificador operacional no puede ser superior a  $V_{CC}$ . Por tanto, nuestra suposición de que estaba operando linealmente es inválida y la salida del amplificador operacional debe estar saturada en 6 V.

Hemos identificado una restricción aplicable a las tensiones de entrada que está basada en la característica de transferencia de tensión del circuito integrado amplificador operacional, partiendo del supuesto de que el amplificador operacional está restringido a su región de operación lineal y considerando valores típicos de  $V_{CC}$  y  $A$ . La Ecuación 5.2 representa la restricción de tensión de un amplificador operacional ideal, es decir, con un valor de  $A$  infinito.

Volvamos ahora nuestra atención a la restricción que puede imponerse a las corrientes de entrada. El análisis del circuito integrado amplificador operacional revela que la resistencia equivalente vista por los terminales de entrada del amplificador operacional es muy grande, normalmente de 1 M $\Omega$  o incluso más. Idealmente, la resistencia de entrada equivalente es infinita, lo que da como resultado la restricción para las corrientes:

$$\begin{array}{l} \text{RESTRICCIÓN DE LAS CORRIENTES DE} \\ \text{ENTRADA PARA EL AMPLIFICADOR} \\ \text{OPERACIONAL IDEAL} \end{array} \quad i_p = i_n = 0. \quad (5.3)$$

Observe que la restricción de las corrientes no está basada en la suposición de que el amplificador operacional esté limitado a su región de operación lineal, a diferencia de lo que sucedía con la restricción de las tensiones. Juntas, las Ecuaciones 5.2 y 5.3 definen las restricciones aplicables al comportamiento en los terminales que define nuestro modelo de amplificador operacional ideal.

A partir de la ley de Kirchhoff de las corrientes, sabemos que la suma de las corrientes que entran en el amplificador operacional es cero, o

$$i_p + i_n + i_o + i_{c+} + i_{c-} = 0. \quad (5.4)$$

Sustituyendo la restricción dada por la Ecuación 5.3 en la Ecuación 5.4, obtenemos

$$i_o = -(i_{c+} + i_{c-}). \quad (5.5)$$

La importancia de la Ecuación 5.5 es que nos dice que, aunque la corriente en los terminales de entrada sea despreciable, puede seguir existiendo una corriente apreciable en el terminal de salida.

Antes de comenzar a analizar circuitos que contengan amplificadores operacionales, vamos a simplificar un poco más el símbolo del circuito. Si sabemos que el amplificador está operando dentro de

su región lineal, las tensiones de continua  $\pm V_{CC}$  no entran en las ecuaciones del circuito. En este caso, podemos eliminar del símbolo los terminales de alimentación y eliminar del circuito los terminales correspondientes a las alimentaciones continuas, como se muestra en la Figura 5.7. Sin embargo, conviene hacer una advertencia: como hemos omitido los terminales de alimentación, se corre el riesgo de suponer, a partir del símbolo, que  $i_p + i_n + i_o = 0$ . Ya hemos visto que esto no es así, es decir,  $i_p + i_n + i_o + i_{c+} + i_{c-} = 0$ . En otras palabras, la restricción  $i_p = i_n = 0$  del modelo ideal de amplificador operacional no implica que  $i_o = 0$ .

Observe que las tensiones de alimentación positiva y negativa no tienen por qué tener la misma magnitud. En la región de operación lineal,  $v_o$  debe estar comprendida entre las dos tensiones de alimentación. Por ejemplo, si  $V^+ = 15 \text{ V}$  y  $V^- = -10 \text{ V}$ , entonces  $-10 \text{ V} \leq v_o \leq 15 \text{ V}$ . Tenga también en cuenta que el valor de  $A$  no es constante en todas las condiciones de operación. Por ahora, sin embargo, vamos a suponer que lo es. La explicación de cómo y por qué puede variar el valor de  $A$  debemos dejarla hasta después de haber estudiado los componentes y dispositivos electrónicos utilizados para fabricar un amplificador.

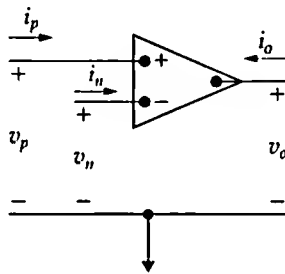


Figura 5.7. Símbolo del amplificador operacional en el que se han eliminado los terminales de alimentación.

El Ejemplo 5.1 ilustra el modo correcto de aplicar las Ecuaciones 5.2 y 5.3. Cuando utilizemos estas ecuaciones para predecir el comportamiento de un circuito que contenga un amplificador operacional, estaremos utilizando en la práctica un modelo ideal del dispositivo.

### EJEMPLO 5.1 Análisis de un circuito amplificador operacional

El amplificador operacional del circuito mostrado en la Figura 5.8 es ideal.

- Calcule  $v_o$  si  $v_a = 1 \text{ V}$  y  $v_b = 0 \text{ V}$ .
- Repita el apartado (a) para  $v_a = 1 \text{ V}$  y  $v_b = 2 \text{ V}$ .
- Si  $v_a = 1,5 \text{ V}$ , especifique el rango de  $v_b$  que evita que el amplificador se sature.

### SOLUCIÓN

- Puesto que existe un camino de realimentación negativa desde la salida del amplifi-

cador operacional hasta su entrada inversora a través de la resistencia de  $100 \text{ k}\Omega$ , vamos a suponer que el amplificador operacional está restringido a su región de operación lineal. Podemos escribir una ecuación de tensión de nodo en el terminal de la entrada inversora. La tensión en el terminal de la entrada inversora es 0, ya que  $v_p = v_b = 0$  (como se indica en el enunciado del problema) y  $v_n = v_p$  por la restricción de tensión dada por la Ecuación 5.2.

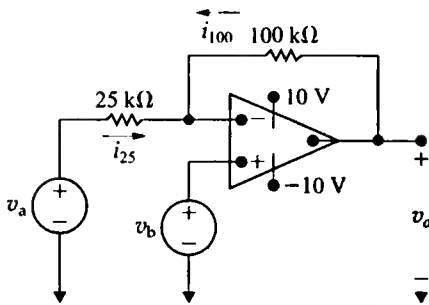


Figura 5.8. Circuito del Ejemplo 5.1.

La ecuación de tensión del nodo  $v_n$  será, por tanto,

$$i_{25} + i_{100} = i_n.$$

Aplicando la ley de Ohm,

$$i_{25} = (v_a - v_n) / 25 = \frac{1}{25} \text{ mA},$$

$$i_{100} = (v_o - v_n) / 100 = v_o / 100 \text{ mA}.$$

La restricción de corriente requiere que  $i_n = 0$ . Sustituyendo los valores de las tres corrientes en la ecuación de tensión del nodo, obtenemos

$$\frac{1}{25} + \frac{v_o}{100} = 0.$$

Por tanto,  $v_o$  es  $-4$  V. Observe que, como  $v_o$  está comprendida entre  $\pm 10$  V, el ampli-

ficador operacional se encuentra en su región lineal de operación.

- b) Utilizando el mismo procedimiento que en el apartado (a), obtenemos

$$v_p = v_b = v_n = 2 \text{ V},$$

$$i_{25} = \frac{v_a - v_n}{25} = \frac{1 - 2}{25} = -\frac{1}{25} \text{ mA},$$

$$i_{100} = \frac{v_o - v_n}{100} = \frac{v_o - 2}{100} \text{ mA},$$

$$i_{25} = -i_{100}.$$

Por tanto,  $v_o = 6$  V. De nuevo,  $v_o$  está entre  $\pm 10$  V.

- c) Como antes,  $v_n = v_p = v_b$  e  $i_{25} = -i_{100}$ . Como  $v_a = 1,5$  V,

$$\frac{1,5 - v_b}{25} = -\frac{v_o - v_b}{100}.$$

Despejando  $v_b$  en función de  $v_o$ , obtenemos

$$v_b = \frac{1}{5}(6 + v_o).$$

Ahora, para que el amplificador se encuentre dentro de la región lineal de operación,  $-10 \text{ V} \leq v_o \leq 10 \text{ V}$ . Sustituyendo estos límites de  $v_o$  en la expresión de  $v_b$ , vemos que  $v_b$  está limitada a

$$-0,8 \text{ V} \leq v_b \leq 3,2 \text{ V}.$$

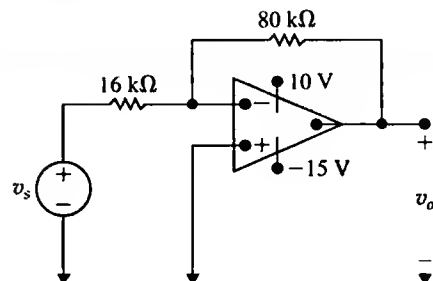
### Evaluación del objetivo 1

- Utilizar las restricciones de tensión y de corriente en un amplificador operacional ideal.

5.1. Suponga que el amplificador operacional del circuito mostrado es ideal.

- a) Calcule  $v_o$  para los siguientes valores de  $v_s$ : 0,4; 2,0; 3,5; -0,6; -1,6 y -2,4 V.  
b) Especifique el rango de  $v_s$  requerido para evitar la saturación del amplificador.

**RESPUESTA** (a) -2, -10, -15, 3, 8 y 10 V; (b)  $-2 \text{ V} \leq v_s \leq 3 \text{ V}$ .



**NOTA** Trate también de resolver los Problemas 5.1-5.3 del capítulo.

## 5.3. El circuito amplificador inversor

Estamos ya en condiciones de analizar la operación de algunos circuitos importantes basados en amplificador operacional, utilizando las Ecuaciones 5.2 y 5.3 para modelar el comportamiento del propio dispositivo. La Figura 5.9 muestra un circuito amplificador inversor. Suponemos que el amplificador operacional está operando en su región lineal. Observe que, además del amplificador operacional, el circuito está compuesto por dos resistencias ( $R_f$  y  $R_s$ ), una fuente de tensión como señal ( $v_s$ ) y un cortocircuito conectado entre el terminal de la entrada no inversora y el nodo común.

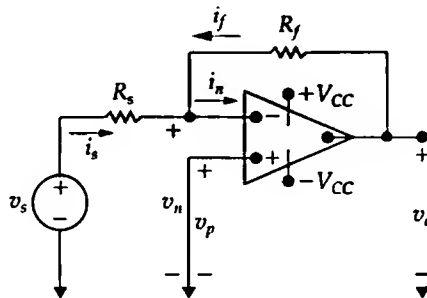


Figura 5.9. Circuito amplificador inversor.

Analicemos ahora este circuito, suponiendo que tenemos un amplificador operacional ideal. El objetivo es obtener una expresión de la tensión de salida,  $v_o$ , en función de la tensión de fuente,  $v_s$ . Emplearemos una única ecuación de tensión de nodo en el terminal inversor del amplificador operacional, que será

$$i_s + i_f = i_n. \quad (5.6)$$

La restricción de tensión de la Ecuación 5.2 hace que  $v_n = 0$ , dado que  $v_p = 0$ . Por tanto,

$$i_s = \frac{v_s}{R_s}, \quad (5.7)$$

$$i_f = \frac{v_o}{R_f}. \quad (5.8)$$

Ahora invocamos la restricción indicada en la Ecuación 5.3, es decir,

$$i_n = 0. \quad (5.9)$$

Sustituyendo las Ecuaciones 5.7-5.9 en la Ecuación 5.6, obtenemos el resultado deseado:

$$\spadesuit \quad \text{ECUACIÓN DEL AMPLIFICADOR INVERSOR} \quad v_o = \frac{-R_f}{R_s} v_s. \quad (5.10)$$

Observe que la tensión de salida es una réplica invertida y cambiada de escala de la entrada. La inversión de signo entre la entrada y la salida es, por supuesto, la razón para denominar a este circuito *amplificador inversor*. El factor de escala, o ganancia, es el cociente  $R_f/R_s$ .

El resultado dado por la Ecuación 5.10 sólo es válido si el amplificador operacional mostrado en el circuito de la Figura 5.9 es ideal; es decir, si  $A$  es infinita y la resistencia de entrada es infinita. Para un amplificador operacional práctico, la Ecuación 5.10 constituye una aproximación, usualmente bastan-

te buena (profundizaremos en esto más adelante). La Ecuación 5.10 es importante porque nos dice que, si la ganancia del amplificador operacional  $A$  es grande, podemos fijar la ganancia del amplificador inversor mediante las resistencias externas  $R_f$  y  $R_s$ . El límite superior de la ganancia,  $R_f/R_s$ , está determinado por las tensiones de alimentación y por el valor de la tensión de señal  $v_s$ . Si suponemos tensiones de alimentación simétricas, es decir,  $V^+ = -V^- = V_{CC}$ , obtenemos,

$$|v_o| \leq V_{CC}, \quad \left| \frac{R_f}{R_s} v_s \right| \leq V_{CC}, \quad \frac{R_f}{R_s} \leq \left| \frac{V_{CC}}{v_s} \right|. \quad (5.11)$$

Por ejemplo, si  $V_{CC} = 15 \text{ V}$  y  $v_s = 10 \text{ mV}$ , el cociente  $R_f/R_s$  debe ser inferior a 1500.

En el circuito amplificador inversor mostrado en la Figura 5.9, la resistencia  $R_f$  proporciona la conexión de alimentación negativa. Es decir, conecta el terminal de salida con el terminal de la entrada inversora. Si eliminamos  $R_f$ , el camino de realimentación queda abierto y decimos que el amplificador estará operando en **lazo abierto**. La Figura 5.10 muestra la operación en lazo abierto.

La ruptura del camino de realimentación cambia drásticamente el comportamiento del circuito. En primer lugar, la tensión de salida será ahora

$$v_o = -Av_n. \quad (5.12)$$

suponiendo, como antes, que  $V^+ = -V^- = V_{CC}$ ; entonces,  $|v_n| < V_{CC}/A$  para poder mantenernos en la región de operación lineal. Puesto que la corriente de la entrada inversora es prácticamente igual a cero, la caída de tensión en bornes de  $R_s$  es prácticamente cero y la tensión de la entrada inversora es casi igual a la tensión de señal,  $v_s$ ; es decir  $v_n \approx v_s$ . Por tanto, el amplificador operacional puede operar en lazo abierto en el modo lineal sólo si  $|v_s| < V_{CC}/A$ . Si  $|v_s| > V_{CC}/A$ , el amplificador operacional simplemente se satura. En particular, si  $v_s < -V_{CC}/A$ , el amplificador operacional se satura en  $+V_{CC}$  y si  $v_s > V_{CC}/A$ , el amplificador operacional se satura en  $-V_{CC}$ . Puesto que la relación mostrada en la Ecuación 5.12 se aplica cuando no hay camino de realimentación, el valor de  $A$  se denomina a menudo **ganancia en lazo abierto** del amplificador operacional.

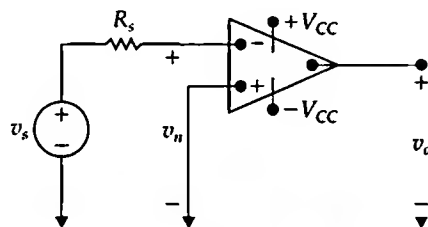


Figura 5.10. Amplificador inversor operando en lazo abierto.

## Evaluación del objetivo 2

■ Ser capaz de analizar circuitos simples que contengan amplificadores operacionales ideales.

- 5.2. La fuente de tensión  $v_s$  en el circuito del Problema de evaluación 5.1 tiene un valor de  $-640 \text{ mV}$ . Sustituimos la resistencia de realimentación de  $80 \text{ k}\Omega$  por una resis-

cia variable  $R_x$ . ¿Qué rango de valores de  $R_x$  permite al amplificador inversor operar en su región lineal?

**RESPUESTA**  $0 \leq R_x \leq 250 \text{ k}\Omega$ .

**NOTA** Trate también de resolver los Problemas 5.6 y 5.7 del capítulo.

## 5.4. Circuito amplificador sumador

La tensión de salida en un amplificador sumador es una suma cambiada de escala y cambiada de signo de las tensiones aplicadas a la entrada del amplificador. La Figura 5.11 muestra un amplificador sumador con tres tensiones de entrada.

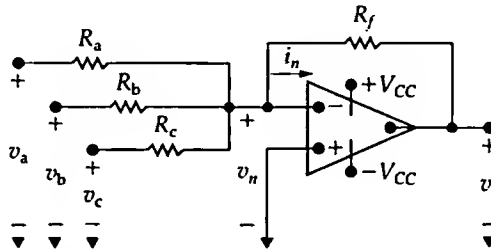


Figura 5.11. Un amplificador sumador.

Podemos obtener la relación entre la tensión de salida  $v_o$  y las tres tensiones de entrada  $v_a$ ,  $v_b$  y  $v_c$ , sumando las corrientes que salen del terminal de la entrada inversora:

$$\frac{v_n - v_a}{R_a} + \frac{v_n - v_b}{R_b} + \frac{v_n - v_c}{R_c} + \frac{v_n - v_o}{R_f} + i_n = 0. \quad (5.13)$$

Suponiendo un multiplicador operacional ideal, podemos utilizar las restricciones de tensión y de corriente junto con la condición de masa impuesta en  $v_p$  por el circuito, para ver que  $v_n = v_p = 0$  e  $i_n = 0$ . Esto reduce la Ecuación 5.13 a

### ✦ ECUACIÓN DEL AMPLIFICADOR SUMADOR INVERSOR

$$v_o = -\left(\frac{R_f}{R_a} v_a + \frac{R_f}{R_b} v_b + \frac{R_f}{R_c} v_c\right). \quad (5.14)$$

La Ecuación 5.14 indica que la tensión de salida es una suma invertida y cambiada de escala de las tres tensiones de entrada.

Si  $R_a = R_b = R_c = R_s$ , entonces la Ecuación 5.14 se reduce a

$$v_o = -\frac{R_f}{R_s}(v_a + v_b + v_c). \quad (5.15)$$

Finalmente, si hacemos  $R_f = R_s$ , la tensión de salida es simplemente la suma invertida de las tensiones de entrada. Es decir,

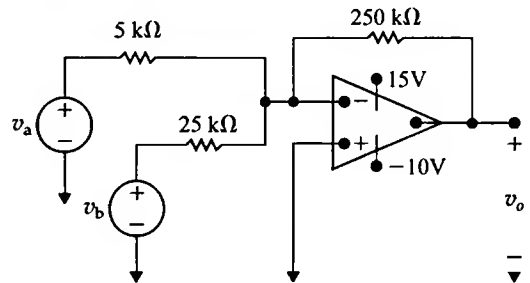
$$v_o = -(v_a + v_b + v_c) \quad (5.16)$$

Aunque hemos ilustrado el amplificador sumador con sólo tres señales de entrada, el número de tensiones de entrada puede aumentarse según sea necesario. Por ejemplo, pueden sumarse 16 señales de audio grabadas por separado con el fin de formar una única señal de audio. La configuración de amplificador sumador de la Figura 5.11 podría incluir 16 valores de resistencia de entrada distintos, de modo que cada una de las pistas de audio de entrada apareciera en la señal de salida con un factor de amplificación distinto. El amplificador sumador juega, así, el papel de un mezclador de audio. Al igual que sucede con los circuitos de amplificador inversor, los factores de escala en los circuitos de amplificador sumador están determinados por las resistencias externas  $R_f$ ,  $R_a$ ,  $R_b$ ,  $R_c$ , ...,  $R_n$ .

## Evaluación del objetivo 2

- Ser capaz de analizar circuitos simples que contengan amplificadores operacionales ideales.

- 5.3. a) Calcule  $v_o$  en el circuito mostrado si  $v_a = 0,1 \text{ V}$  y  $v_b = 0,25 \text{ V}$ .  
 b) Si  $v_b = 0,25 \text{ V}$ , ¿qué valor máximo puede tener  $v_a$  antes de que el amplificador operacional se sature?  
 c) Si  $v_a = 0,10 \text{ V}$ , ¿qué valor máximo puede tener  $v_b$  antes de que el amplificador operacional se sature?  
 d) Repita los apartados (a), (b) y (c) invirtiendo la polaridad de  $v_b$ .



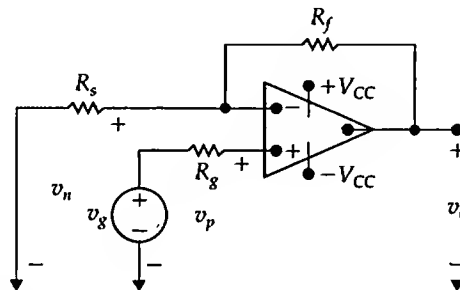
**RESPUESTA** (a)  $-7,5 \text{ V}$ ; (b)  $0,15 \text{ V}$ ;  
 (c)  $0,5 \text{ V}$ ; (d)  $-2, 5, 0,25 \text{ y } 2 \text{ V}$ .

**NOTA** Trate también de resolver los Problemas 5.16, 5.17 y 5.19 del capítulo.

## 5.5. Circuito amplificador no inversor

La Figura 5.12 muestra un circuito amplificador no inversor. La fuente de señal está representada por  $v_g$  en serie con la resistencia  $R_g$ . Al calcular la expresión de la tensión de salida en función de la tensión de fuente, suponemos un amplificador operacional ideal que esté operando dentro de su región lineal. Así, como antes, utilizaremos las Ecuaciones 5.2 y 5.3 como base para el análisis. Puesto que la corriente de entrada del amplificador operacional es cero, podemos escribir  $v_p = v_g$  y, a partir de la Ecuación 5.2,  $v_n = v_g$  también. Ahora, puesto que la corriente de entrada es cero ( $i_n = i_p = 0$ ), las resistencias  $R_f$  y  $R_s$  forman un divisor de tensión no cargado para  $v_o$ . Por tanto,

$$v_n = v_g = \frac{v_o R_s}{R_s + R_f}. \quad (5.17)$$



**Figura 5.12.** Un amplificador no inversor.

Despejando  $v_o$  en la Ecuación 5.17, obtenemos la ecuación buscada:

➤ **ECUACIÓN DEL AMPLIFICADOR NO INVERSOR**

$$v_o = \frac{R_s + R_f}{R_s} v_g. \quad (5.18)$$



La operación en la región lineal requiere que

$$\frac{R_s + R_f}{R_s} < \left| \frac{V_{CC}}{v_g} \right|.$$

Observe de nuevo que, debido a la suposición de que estamos usando un amplificador operacional ideal, podemos expresar la tensión de salida en función de la tensión de entrada y de las resistencias externas, en este caso  $R_s$  y  $R_f$ .

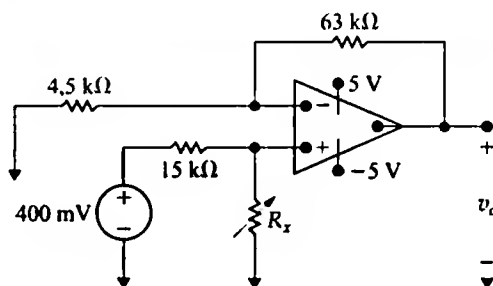
## Evaluación del objetivo 2

- Ser capaz de analizar circuitos simples que contengan amplificadores operacionales ideales.

5.4. Suponga que el amplificador operacional del circuito mostrado es ideal.

- Calcule la tensión de salida cuando se fija la resistencia variable en  $60 \text{ k}\Omega$ .
- ¿Cuál es el valor máximo de  $R_x$  antes de que el amplificador se sature?

RESPUESTA (a)  $4,8 \text{ V}$ ; (b)  $75 \text{ k}\Omega$ .



**NOTA** Trate también de resolver los Problemas 5.22 y 5.23 del capítulo.

## 5.6. Circuito amplificador diferencial

La tensión de salida de un amplificador diferencial es proporcional a la diferencia existente entre las dos tensiones de entrada. Como ilustración, vamos a analizar el circuito amplificador diferencial mostrado en la Figura 5.13, suponiendo un amplificador operacional ideal que esté operando en su región lineal. Podemos deducir la relación existente entre  $v_o$  y las dos tensiones de entrada  $v_a$  y  $v_b$  sumando las corrientes que salen del nodo de la entrada inversora:

$$\frac{v_n - v_a}{R_a} + \frac{v_n - v_o}{R_b} + i_n = 0. \quad (5.19)$$

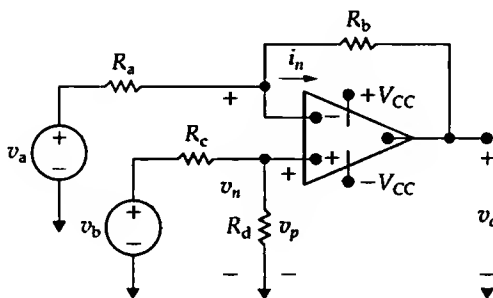


Figura 5.13. Amplificador diferencial.

Puesto que el amplificador operacional es ideal, utilizaremos las restricciones de tensión y de corriente para ver que

$$i_n = i_p = 0, \quad (5.20)$$

$$v_n = v_p = \frac{R_d}{R_c + R_d} v_b. \quad (5.21)$$

Combinando las Ecuaciones 5.19, 5.20 y 5.21, obtenemos la relación deseada:

$$v_o = \frac{R_d(R_a + R_b)}{R_a(R_c + R_d)} v_b - \frac{R_b}{R_a} v_a. \quad (5.22)$$

La Ecuación 5.22 muestra que la tensión de salida es proporcional a la diferencia entre una réplica de  $v_b$  cambiada de escala y otra réplica de  $v_a$  cambiada de escala. En general, el factor de escala aplicado a  $v_b$  no tiene por qué ser el mismo que el aplicado a  $v_a$ . Sin embargo, el factor de escala aplicado a cada tensión de entrada puede hacerse igual si se cumple que

$$\frac{R_a}{R_b} = \frac{R_c}{R_d}. \quad (5.23)$$

Cuando se satisface la Ecuación 5.23, la expresión que nos da la tensión de salida se reduce a

✦ **ECUACIÓN SIMPLIFICADA DEL AMPLIFICADOR DIFERENCIAL** 
$$v_o = \frac{R_b}{R_a} (v_b - v_a). \quad (5.24)$$

La Ecuación 5.24 indica que la tensión de salida puede hacerse igual a una réplica cambiada de escala de la diferencia existente entre las tensiones de entrada  $v_a$  y  $v_b$ . Como en los circuitos de amplificador ideal anteriores, el factor de escala puede fijarse mediante las resistencias externas. Además, la relación entre la tensión de salida y las tensiones de entrada no se ve afectada por la conexión de una resistencia de carga distinta de cero a la salida del amplificador.

## Evaluación del objetivo 2

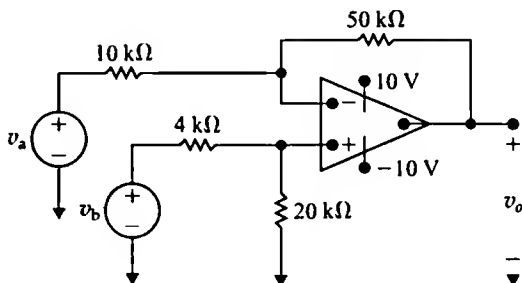
- Ser capaz de analizar circuitos simples que contengan amplificadores operacionales ideales.

5.5. a) En el amplificador diferencial mostrado,  $v_b = 4,0$  V. ¿Qué rango de valores de  $v_a$  proporcionará una operación lineal?

b) Repita el apartado (a) reduciendo la resistencia de  $20$  k $\Omega$  a  $8$  k $\Omega$ .

**RESPUESTA** (a)  $2$  V  $\leq v_a \leq 6$  V;

(b)  $1,2$  V  $\leq v_a \leq 5,2$  V.



**NOTA** Trate también de resolver los Problemas 5.29-5.31 del capítulo.

## Amplificador diferencial: otra perspectiva

Podemos examinar más en detalle el comportamiento de un amplificador diferencial si volvemos a definir su entrada en términos de otras dos tensiones. La primera es la tensión en **modo diferencial**, que es la diferencia entre las dos tensiones de entrada de la Figura 5.13:

$$v_{dm} = v_b - v_a. \quad (5.25)$$

La segunda es la tensión en **modo común**, que es la media de las dos tensiones de entrada en la Figura 5.13:

$$v_{cm} = (v_a + v_b)/2. \quad (5.26)$$

Utilizando las Ecuaciones 5.25 y 5.26, podemos ahora representar las tensiones de entrada originales,  $v_a$  y  $v_b$ , en términos de las tensiones de modo diferencial y de modo común,  $v_{dm}$  y  $v_{cm}$ :

$$v_a = v_{cm} - \frac{1}{2}v_{dm}, \quad (5.27)$$

$$v_b = v_{cm} + \frac{1}{2}v_{dm}. \quad (5.28)$$

Sustituyendo las Ecuaciones 5.27 y 5.28 en la Ecuación 5.22, se obtiene la salida del amplificador diferencial en términos de las tensiones en modo diferencial y en modo común:

$$\begin{aligned} v_o = & \left[ \frac{R_a R_d - R_b R_c}{R_a (R_c + R_d)} \right] v_{cm} \\ & + \left[ \frac{R_d (R_a + R_b) + R_b (R_c + R_d)}{2 R_a (R_c + R_d)} \right] v_{dm}, \end{aligned} \quad (5.29)$$

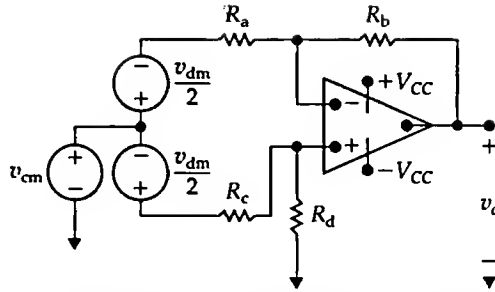
$$= A_{cm} v_{cm} + A_{dm} v_{dm}, \quad (5.30)$$

donde  $A_{cm}$  es la ganancia en modo común y  $A_{dm}$  es la ganancia en modo diferencial. Ahora, si hacemos  $R_c = R_a$  y  $R_d = R_b$ , que son los posibles valores de  $R_c$  y  $R_d$  que satisfacen la Ecuación 5.23, se obtiene a partir de la Ecuación 5.29:

$$v_o = (0)v_{cm} + \left( \frac{R_b}{R_a} \right) v_{dm}. \quad (5.31)$$

Por tanto, un amplificador diferenciador ideal tiene  $A_{cm} = 0$ , amplificando sólo la parte de modo diferencial de la tensión de entrada y eliminando la parte en modo común de dicha tensión. La Figura 5.14 muestra un circuito amplificador diferencial en el que se han definido sendas tensiones de entrada en modo diferencial y en modo común, en lugar de  $v_a$  y  $v_b$ .

La Ecuación 5.30 proporciona un dato importante sobre la función del amplificador diferencial, ya que en muchas aplicaciones es la señal en modo diferencial la que contiene la información de interés, mientras que la señal en modo común es el ruido normalmente presente en todas las señales eléctricas. Por ejemplo, un electrodo electrocardiográfico mide las tensiones que nuestro cuerpo produce para regular el latido cardíaco. Estas tensiones tienen una magnitud muy pequeña comparadas con el ruido eléctrico que el electrodo capta de fuentes tales como las lámparas y los equipos eléctricos. El ruido aparece como señal de modo común en la tensión medida, mientras que las tensiones que regulan el ritmo cardíaco forman la parte en modo diferencial. Así, un amplificador diferencial ideal amplificaría únicamente las tensiones que nos interesan y suprimiría el ruido superpuesto a ellas.



**Figura 5.14.** Un amplificador diferencial con tensiones de entrada en modo común y en modo diferencial.

### Medida de las prestaciones de un amplificador diferencial: tasa de rechazo en modo común

Un amplificador diferencial ideal tiene una ganancia en modo común igual a cero y una ganancia en modo diferencial distinta de cero (usualmente muy grande). Hay dos factores que influyen sobre la ganancia ideal en modo común: las desadaptaciones de las resistencias (es decir, cuando no se satisface la Ecuación 5.23) y la utilización de un amplificador operacional no ideal (es decir, cuando no se satisface la Ecuación 5.20). Vamos a centrarnos aquí en ver cuál es el efecto de las desadaptaciones de las resistencias sobre las prestaciones de un amplificador diferencial.

Suponga que elegimos valores de resistencias que no satisfagan exactamente la Ecuación 5.23. En lugar de ello, supongamos que la relación entre las resistencias  $R_a$ ,  $R_b$ ,  $R_c$  y  $R_d$  es

$$\frac{R_a}{R_b} = (1 - \epsilon) \frac{R_c}{R_d},$$

de modo que

$$R_a = (1 - \epsilon) R_c \quad \text{y} \quad R_b = R_d, \quad (5.32)$$

o

$$R_d = (1 - \epsilon) R_b \quad \text{y} \quad R_a = R_c, \quad (5.33)$$

donde  $\epsilon$  es un valor muy pequeño. Podemos ver el efecto de esta desadaptación de las resistencias sobre la ganancia en modo común del amplificador diferencial sustituyendo la Ecuación 5.23 en la Ecuación 5.29 y simplificando la expresión de  $A_{cm}$ :

$$A_{cm} = \frac{R_a(1 - \epsilon)R_b - R_aR_b}{R_a[R_a + (1 - \epsilon)R_b]} \quad (5.34)$$

$$= \frac{-\epsilon R_b}{R_a + (1 - \epsilon)R_b} \quad (5.35)$$

$$\approx \frac{-\epsilon R_b}{R_a + R_b}. \quad (5.36)$$

Podemos realizar la aproximación de la que se ha obtenido la Ecuación 5.36 porque  $\epsilon$  es muy pequeño y, por tanto,  $(1 - \epsilon)$  es aproximadamente 1 en el denominador de la Ecuación 5.35. Observe que,

cuando las resistencias del amplificador diferencial satisfacen la Ecuación 5.23,  $\varepsilon = 0$  y la Ecuación 5.36 nos da  $A_{cm} = 0$ .

Ahora, calculemos el efecto de la desadaptación de las resistencias sobre la ganancia en modo diferencial, sustituyendo la Ecuación 5.33 en la Ecuación 5.29 y simplificando la expresión correspondiente a  $A_{dm}$ :

$$A_{dm} = \frac{(1-\varepsilon)R_b(R_a + R_b) + R_b[R_a + (1-\varepsilon)R_b]}{2R_a[R_a + (1-\varepsilon)R_b]} \quad (5.37)$$

$$= \frac{R_b}{R_a} \left[ 1 - \frac{(\varepsilon/2)R_a}{R_a + (1-\varepsilon)R_b} \right] \quad (5.38)$$

$$\approx \frac{R_b}{R_a} \left[ 1 - \frac{(\varepsilon/2)R_a}{R_a + R_b} \right]. \quad (5.39)$$

Hemos utilizado el mismo razonamiento para la aproximación de la que se ha obtenido la Ecuación 5.39 que en el cálculo de  $A_{cm}$ . Cuando las resistencias del amplificador diferencial satisfacen la Ecuación 5.23,  $\varepsilon = 0$  y la Ecuación 5.39 nos da  $A_{dm} = R_b/R_a$ .

Puede utilizarse la tasa de rechazo en modo común (CMRR, common mode rejection ratio) para medir hasta qué punto es ideal un amplificador diferencial. Dicha tasa se define como el cociente entre la ganancia en modo diferencial y la ganancia en modo común:

$$CMRR = \frac{|A_{dm}|}{|A_{cm}|}. \quad (5.40)$$

Cuanto mayor sea el valor del CMRR, más próximo será el comportamiento del amplificador diferencial al ideal. Podemos ver el efecto que la desadaptación de las resistencias tiene sobre el CMRR sustituyendo las Ecuaciones 5.36 y 5.39 en la Ecuación 5.40:

$$CMRR \approx \left| \frac{\frac{R_b}{R_a} [1 - (R_a \varepsilon / 2) / (R_a + R_b)]}{-\varepsilon R_b / (R_a + R_b)} \right| \quad (5.41)$$

$$\approx \left| \frac{R_a (1 - \varepsilon / 2) + R_b}{-\varepsilon R_a} \right| \quad (5.42)$$

$$\approx \left| \frac{1 + R_b / R_a}{-\varepsilon} \right|. \quad (5.43)$$

A partir de la Ecuación 5.43, vemos que, si las resistencias del amplificador diferencial están adaptadas,  $\varepsilon = 0$  y  $CMRR = \infty$ . Incluso si las resistencias están desadaptadas, podemos mitigar el impacto de la desadaptación haciendo que la ganancia en modo diferencial ( $R_b/R_a$ ) sea muy grande, con lo que el CMRR también lo será.

Ya hemos dicho que otra de las razones para que la ganancia en modo común no sea cero es el utilizar un amplificador operacional no ideal. Observe que el propio amplificador operacional es un amplificador diferencial, porque en la región de operación lineal su salida es proporcional a la diferencia

existente entre sus entradas, es decir,  $v_o = A(v_p - v_n)$ . La salida de un amplificador operacional no ideal no es estrictamente proporcional a la diferencia existente entre las entradas (entrada en modo diferencial) sino que también está compuesta de una señal en modo común. Las desadaptaciones internas entre los componentes del circuito integrado hacen que el comportamiento del amplificador operacional no sea ideal, de la misma forma que las desadaptaciones de las resistencias en el circuito amplificador diferencial hacen que su comportamiento se aleje del ideal. Aunque un análisis de los amplificadores operacionales no ideales cae fuera del ámbito de este libro, sí conviene hacer notar que el valor de CMRR se utiliza a menudo a la hora de evaluar hasta qué punto es ideal el comportamiento de un amplificador operacional. De hecho, es una de las principales formas de comparar en la práctica los distintos amplificadores operacionales.

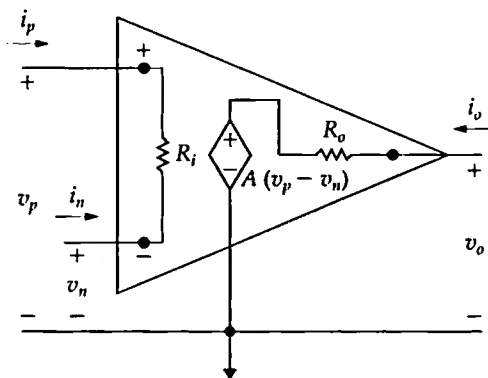
**NOTA** Evalúe su comprensión de este material tratando de resolver los Problemas 5.37 y 5.38 del capítulo.

## 5.7. Un modelo más realista del amplificador operacional

Ahora vamos a considerar un modelo más realista que predice el comportamiento de un amplificador operacional en su región lineal de operación. Dicho modelo incluye tres modificaciones con respecto al amplificador operacional ideal: (1) una resistencia de entrada finita,  $R_i$ ; (2) una ganancia en lazo abierto finita,  $A$ ; y (3) una resistencia de salida distinta de cero,  $R_o$ . El circuito mostrado en la Figura 5.15 ilustra este modelo más realista.

Cuando utilicemos el circuito equivalente mostrado en la Figura 5.15, ya no podremos realizar las suposiciones de que  $v_n = v_p$  (Ecuación 5.2) y de que  $i_n = i_p = 0$  (Ecuación 5.3). Además, la Ecuación 5.1 deja de ser válida debido a la presencia de la resistencia de salida distinta de cero,  $R_o$ . Otra forma de comprender el circuito mostrado en la Figura 5.15 consiste en invertir nuestro proceso de razonamiento. Es decir, podemos ver que el circuito se reduce al modelo ideal cuando  $R_i \rightarrow \infty$ ,  $A \rightarrow \infty$  y  $R_o \rightarrow 0$ . Para el amplificador operacional  $\mu A741$ , los valores típicos de  $R_i$ ,  $A$  y  $R_o$  son  $2 \text{ M}\Omega$ ,  $10^5$  y  $75 \Omega$ , respectivamente.

Aunque la presencia de  $R_i$  y de  $R_o$  hace que el análisis de circuitos que contengan amplificadores operacionales sea más tedioso, dicho análisis sigue siendo sencillo. Como ilustración, vamos a analizar un amplificador inversor y otro no inversor, utilizando el circuito equivalente mostrado en la Figura 5.15. Comencemos con el amplificador inversor.



**Figura 5.15.** Un circuito equivalente para un amplificador operacional.

## Análisis del circuito amplificador inversor utilizando el modelo más realista de amplificador operacional

Si utilizamos el circuito de amplificador operacional mostrado en la Figura 5.15, el circuito del amplificador inversor es el que se muestra en la Figura 5.16. Como antes, nuestro objetivo es obtener una expresión de la tensión de salida  $v_o$ , en función de la tensión de fuente,  $v_s$ . Podemos obtener la expresión deseada escribiendo las dos ecuaciones de tensión de nodo que describen el circuito y luego resolviendo el sistema de ecuaciones resultante, para obtener el valor de  $v_o$ . En la Figura 5.16, los dos nodos están designados como a y b. Observe también que  $v_p = 0$  debido a la conexión externa en cortocircuito existente en el terminal de la entrada no inversora. Las dos ecuaciones de tensión de nodo son las siguientes:

$$\text{nodo a: } \frac{v_n - v_s}{R_s} + \frac{v_n}{R_i} + \frac{v_n - v_o}{R_f} = 0, \quad (5.44)$$

$$\text{nodo b: } \frac{v_o - v_n}{R_f} + \frac{v_o - A(-v_n)}{R_o} = 0. \quad (5.45)$$

Reordenamos las Ecuaciones 5.44 y 5.45 para obtener de forma directa el valor de  $v_o$  por el método de Cramer:

$$\left( \frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_f} \right) v_n - \frac{1}{R_f} v_o = \frac{1}{R_s} v_s, \quad (5.46)$$

$$\left( \frac{A}{R_o} - \frac{1}{R_f} \right) v_n + \left( \frac{1}{R_f} + \frac{1}{R_o} \right) v_o = 0. \quad (5.47)$$

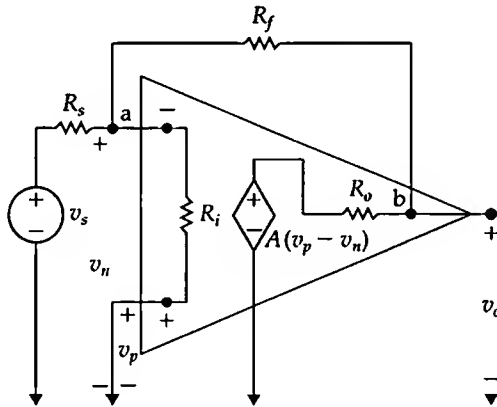


Figura 5.16. Un circuito amplificador inversor.

Despejando  $v_o$ , obtenemos

$$v_o = \frac{-A + (R_o / R_f)}{\frac{R_s}{R_f} \left( 1 + A + \frac{R_o}{R_i} \right) + \left( \frac{R_s}{R_i} + 1 \right) + \frac{R_o}{R_f}} v_s. \quad (5.48)$$

Observe que la Ecuación 5.48 se reduce a la Ecuación 5.10 cuando  $R_o \rightarrow 0$ ,  $R_i \rightarrow \infty$  y  $A \rightarrow \infty$ .

Si el amplificador inversor mostrado en la Figura 5.16 tuviera en los terminales de salida una resistencia de carga de  $R_L$  ohmios, la relación entre  $v_o$  y  $v_s$  sería

$$v_o = \frac{-A + (R_o / R_f)}{\frac{R_s}{R_f} \left( 1 + A + \frac{R_o}{R_i} + \frac{R_o}{R_L} \right) + \left( 1 + \frac{R_o}{R_L} \right) \left( 1 + \frac{R_s}{R_i} \right) + \frac{R_o}{R_f}} v_s. \quad (5.49)$$

## Análisis del circuito amplificador no inversor utilizando el modelo más realista de amplificador operacional

Cuando utilizamos el circuito equivalente mostrado en la Figura 5.15 para analizar un amplificador no inversor, se obtiene el circuito mostrado en la Figura 5.17. Aquí, la fuente de tensión  $v_g$ , en serie con la resistencia  $R_g$ , representa la fuente de señal. La resistencia  $R_L$  denota la carga del amplificador. Nuestro análisis consistirá en la deducción de una expresión que nos de  $v_o$  en función de  $v_g$ . Podemos hacer esto escribiendo las ecuaciones de tensión de nodo en los nodos a y b. En el nodo a,

$$\frac{v_n}{R_s} + \frac{v_n - v_g}{R_g + R_i} + \frac{v_n - v_o}{R_f} = 0, \quad (5.50)$$

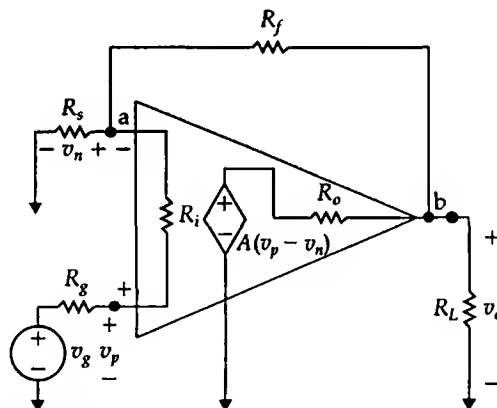


Figura 5.17. Un circuito amplificador no inversor.

y en el nodo b,

$$\frac{v_o - v_n}{R_f} + \frac{v_o}{R_L} + \frac{v_o - A(v_p - v_n)}{R_o} = 0. \quad (5.51)$$

Puesto que la corriente en  $R_g$  es la misma que en  $R_i$ , tenemos

$$\frac{v_p - v_g}{R_g} = \frac{v_n - v_g}{R_i + R_g}. \quad (5.52)$$

Utilizamos la Ecuación 5.52 para eliminar  $v_p$  de la Ecuación 5.51, lo que nos da una pareja de ecuaciones en las que aparecen las tensiones desconocidas  $v_n$  y  $v_o$ . Con estas manipulaciones algebraicas se obtiene



$$v_n \left( \frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_g + R_i} + \frac{1}{R_f} \right) - v_o \left( \frac{1}{R_f} \right) = v_s \left( \frac{1}{R_s + R_i} \right) \quad (5.53)$$

$$\begin{aligned} v_n \left[ \frac{AR_i}{R_o(R_i + R_g)} - \frac{1}{R_f} \right] + v_o \left( \frac{1}{R_f} + \frac{1}{R_o} + \frac{1}{R_L} \right) \\ = v_s \left[ \frac{AR_i}{R_o(R_i + R_g)} \right] \end{aligned} \quad (5.54)$$

Despejando  $v_o$ , resulta

$$v_o = \frac{[(R_f + R_s) + (R_s R_o / AR_i)] v_g}{R_s + \frac{R_o}{A} (1 + K_r) + \frac{R_f R_s + (R_f + R_s)(R_i + R_g)}{AR_i}} \quad (5.55)$$

donde

$$K_r = \frac{R_s + R_g}{R_i} + \frac{R_f + R_s}{R_L} + \frac{R_f R_s + R_f R_g + R_g R_s}{R_i R_L}$$

Observe que la Ecuación 5.55 se reduce a la Ecuación 5.18 cuando  $R_o \rightarrow 0$ ,  $A \rightarrow \infty$  y  $R_i \rightarrow \infty$ . Para el amplificador no inversor sin carga ( $R_L = \infty$ ), la Ecuación 5.55 se simplifica, dando

$$v_o = \frac{[(R_f + R_s) + (R_s R_o / AR_i)] v_g}{R_s + \frac{R_o}{A} \left( 1 + \frac{R_s + R_g}{R_i} \right) + \frac{1}{AR_i} [R_f R_s + (R_f + R_s)(R_i + R_g)]} \quad (5.56)$$

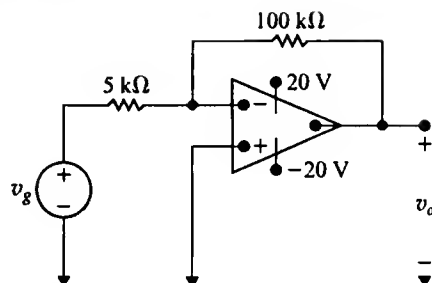
Observe que, al deducir la Ecuación 5.56 a partir de la Ecuación 5.55,  $K_r$  se reduce a  $(R_s + R_g)/R_i$ .

### Evaluación del objetivo 3

- Comprender el modelo más realista del amplificador operacional.

5.6. El amplificador inversor en el circuito mostrado tiene una resistencia de entrada de 500 kΩ, una resistencia de salida de 5 kΩ y una ganancia en lazo abierto de 300.000. Suponga que el amplificador está operando en su región lineal.

- Calcule la ganancia de tensión ( $v_o/v_g$ ) del amplificador.
- Calcule el valor de  $v_n$  en microvoltios cuando  $v_g = 1$  V.
- Calcule la resistencia vista por la fuente de señal ( $v_g$ ).



- Repita los puntos (a)-(c) usando el modelo ideal de amplificador operacional.

**RESPUESTA** (a) -19,9985; (b) 69,995 μV; (c) 5000,35 Ω; (d) -20,0 μV, 5 kΩ.

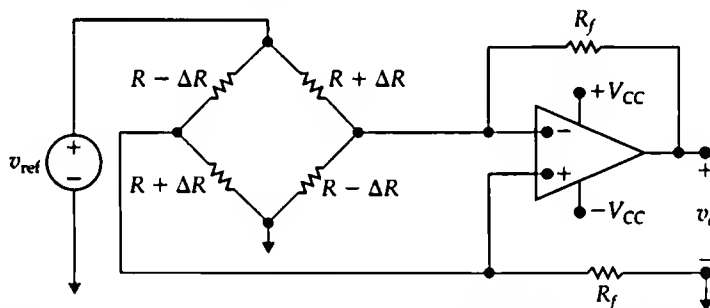
**NOTA** Trate también de resolver los Problemas 5.39 y 5.40 del capítulo.

## Perspectiva práctica

### Galgas extensométricas

Los cambios en la forma de los sólidos elásticos tienen una gran importancia para los ingenieros que diseñan estructuras que se tuercen, que se estiran o que se doblan al verse sujetas a fuerzas externas. La estructura de un aeroplano es un buen ejemplo de estructura en la que los ingenieros deben tomar en consideración los esfuerzos elásticos. La aplicación inteligente de galgas extensométricas requiere información acerca de la estructura física de la galga, de los métodos de fijarla a la superficie de la estructura y de la orientación de la galga en relación con las fuerzas ejercidas sobre la estructura. Nuestro propósito en esta sección es resaltar que las medidas con galgas extensométricas tienen una gran importancia en aplicaciones de ingeniería y que el conocimiento de los circuitos eléctricos es fundamental para su uso adecuado.

El circuito mostrado en la Figura 5.18 proporciona una forma de medir el cambio en la resistencia experimentado por las galgas extensométricas en aplicaciones como la descrita al principio del capítulo. Como veremos, este circuito es el familiar amplificador diferencial, con el puente de la galga extensométrica que proporciona las dos tensiones cuya diferencia se quiere amplificar. El par de galgas que se alargan al doblar la barra de metal tienen los valores  $R + \Delta R$  en el puente que sirve como entrada al amplificador diferencial, mientras que el par de galgas que se acortan tienen el valor  $R - \Delta R$ . Analizaremos este circuito para descubrir la relación entre la tensión de salida,  $v_o$ , y el cambio en la resistencia,  $\Delta R$ , experimentado por las galgas extensométricas.



**Figura 5.18.** Un circuito con amplificador operacional utilizado para medir el cambio en la resistencia de una galga extensométrica.

Para comenzar, suponga que el amplificador operacional es ideal. Si escribimos las ecuaciones derivadas de la aplicación de la ley de Kirchhoff de las corrientes a los terminales de las entradas inversora y no inversora del amplificador operacional, vemos que

$$\frac{v_{\text{ref}} - v_n}{R + \Delta R} = \frac{v_n}{R + \Delta R} + \frac{v_n - v_o}{R_f}, \quad (5.57)$$

$$\frac{v_{\text{ref}} - v_p}{R - \Delta R} = \frac{v_p}{R + \Delta R} + \frac{v_p}{R_f}. \quad (5.58)$$

Ahora, reordenemos la Ecuación 5.58 para obtener el valor de la tensión en el terminal no inversor del amplificador operacional:

$$v_p = \frac{v_{ref}}{(R - \Delta R) \left( \frac{1}{R + \Delta R} + \frac{1}{R - \Delta R} + \frac{1}{R_f} \right)}. \quad (5.59)$$

Como de costumbre, supondremos que el amplificador operacional está operando en su región lineal, por lo que  $v_p = v_n$  y la expresión de  $v_p$  dada por la Ecuación 5.59 vale también para  $v_n$ . Por tanto, podemos sustituir  $v_n$  por el lado derecho de la Ecuación 5.59 en la Ecuación 5.57 y despejar  $v_o$ . Después de algunas manipulaciones algebraicas,

$$v_o = \frac{R_f(2\Delta R)}{R^2 - (\Delta R)^2} v_{ref}. \quad (5.60)$$

Puesto que el cambio en el valor de la resistencia experimentado por las galgas extensométricas es muy pequeño,  $(\Delta R)^2 \ll R^2$ , por lo que  $R^2 - (\Delta R)^2 \approx R^2$  y la Ecuación 5.60 queda

$$v_o \approx \frac{R_f}{R} 2\delta v_{ref}, \quad (5.61)$$

donde  $\delta = \Delta R/R$ .

**NOTA** Evalúe su comprensión de esta Perspectiva práctica tratando de resolver el Problema 5.48 del capítulo.

## RESUMEN

- La ecuación que define la característica de transferencia de tensión del amplificador ideal es

$$v_o = \begin{cases} -V_{CC}, & A(v_p - v_n) < -V_{CC}, \\ A(v_p - v_n), & -V_{CC} \leq A(v_p - v_n) \leq +V_{CC}, \\ +V_{CC}, & A(v_p - v_n) > +V_{CC}, \end{cases}$$

donde  $A$  es una constante de proporcionalidad conocida como ganancia en lazo abierto y  $V_{CC}$  representa las tensiones de alimentación (véase la página 193).

- Un camino de realimentación entre la salida de un amplificador operacional y su entrada inversora puede restringir la operación del amplificador operacional a su región lineal, donde  $v_o = A(v_p - v_n)$  (véase la página 193).
- Existe una restricción aplicable a las tensiones cuando el amplificador operacional está limitado a su región de operación lineal

debido a la utilización de valores típicos de  $V_{CC}$  y  $A$ . Si hacemos las suposiciones implícitas en el modelo ideal (lo que quiere decir que  $A$  se asume como infinita), el modelo de amplificador operacional ideal está caracterizado por la restricción de tensión

$$v_p = v_n.$$

(Véase la página 193).

- Asimismo existe una restricción relativa a las corrientes que caracteriza el modelo de amplificador operacional ideal, porque la resistencia ideal de entrada del circuito integrador amplificador operacional es infinita. Esta restricción relativa a las corrientes está dada por

$$i_p = i_n = 0.$$

(Véase la página 194).

- Hemos presentado tanto un modelo de amplificador operacional ideal muy simple, como otro modelo más realista. Las

diferencias entre los dos modelos son las siguientes:

MODELO SIMPLIFICADO	MODELO MÁS REALISTA
Resistencia de entrada infinita	Resistencia de entrada finita
Ganancia en lazo abierto infinita	Ganancia en lazo abierto finita
Resistencia de salida cero	Resistencia de salida distinta de cero

(Véase la página 206).

- Un amplificador inversor es un circuito basado en amplificador operacional que produce una tensión de salida que es una réplica invertida y cambiada de escala de la entrada (véase la página 197).
- Un amplificador sumador es un circuito basado en amplificador operacional que produce una tensión de salida que es la suma de las tensiones de entrada cambiada de escala (véase la página 199).
- Un amplificador no inversor es un circuito basado en amplificador operacional que produce una tensión de salida que es una réplica cambiada de escala de la tensión de entrada (véase la página 200).

- Un amplificador diferencial es un circuito basado en amplificador operacional que produce una tensión de salida que es una réplica cambiada de escala de la diferencia existente entre las tensiones de entrada (véase la página 201).
- Las dos entradas de tensión a un amplificador diferencial pueden usarse para calcular las tensiones de entrada en modo común y en modo diferencial,  $v_{cm}$  y  $v_{dm}$ . La salida del amplificador diferencial puede escribirse en la forma

$$v_o = A_{cm}v_{cm} + A_{dm}v_{dm},$$

donde  $A_{cm}$  es la ganancia en modo común y  $A_{dm}$  es la ganancia en modo diferencial (véase la página 203).

- En un amplificador diferencial ideal,  $A_{cm} = 0$ . Para medir cuánto se aproxima un amplificador diferencial al ideal, utilizamos la tasa de rechazo en modo común:

$$CMRR = \frac{|A_{dm}|}{|A_{cm}|}.$$

Un amplificador diferencial ideal tiene un valor de CMRR infinito (véase la página 205).

## PROBLEMAS

5.1. El amplificador operacional en el circuito de la Figura P5.1 es ideal.

- 
- a) Etiquete los cinco terminales del amplificador operacional con sus respectivos nombres.
  - b) ¿Qué restricción aplicable al amplificador operacional ideal determina el valor de  $i_n$ ? ¿Cuál es este valor?
  - c) ¿Qué restricción aplicable al amplificador operacional ideal determina el valor de  $(v_p - v_n)$ ? ¿Cuál es este valor?
  - d) Calcule  $v_o$ .

5.2. El amplificador operacional en el circuito de la Figura P5.2 es ideal.

- 
- a) Calcule  $v_o$  si  $v_a = 4 \text{ V}$  y  $v_b = 0 \text{ V}$ .
  - b) Calcule  $v_o$  si  $v_a = 2 \text{ V}$  y  $v_b = 0 \text{ V}$ .

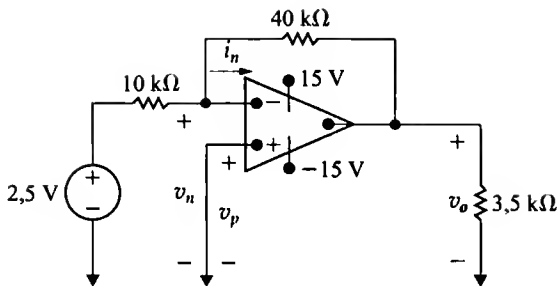


Figura P5.1

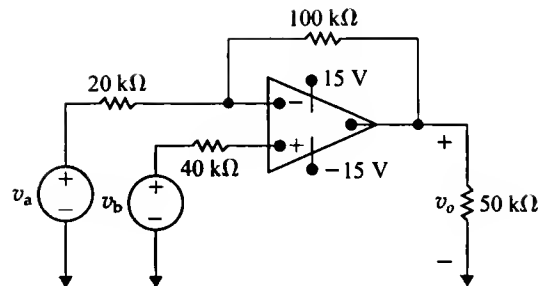


Figura P5.2

c) Calcule  $v_o$  si  $v_a = 2$  V y  $v_b = 1$  V.

d) Calcule  $v_o$  si  $v_a = 1$  V y  $v_b = 2$  V.

e) Si  $v_b = 1,6$  V, especifique el rango de  $v_a$  que permite que el amplificador no se sature.

5.3. Calcule  $i_o$  en el circuito de la Figura P5.3 si el amplificador operacional es ideal.



5.4. Un voltímetro con una lectura a fondo de escala de 10 V se utiliza para medir la tensión de salida en el circuito de la Figura P5.4. ¿Cuál es la lectura del voltímetro? Suponga que el amplificador operacional es ideal.

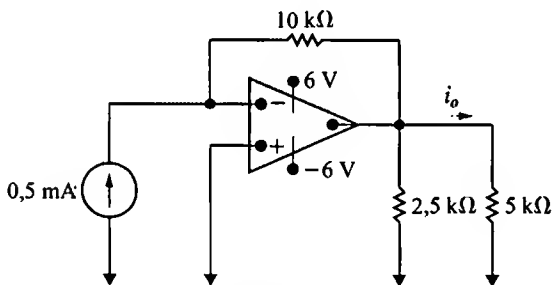


Figura P5.3

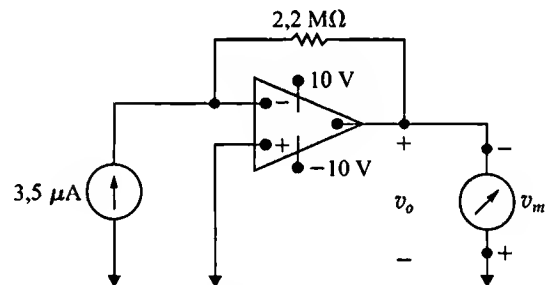


Figura P5.4

5.5. El amplificador operacional del circuito de la Figura P5.5 es ideal. Calcule los valores siguientes:



a)  $v_a$

b)  $v_o$

c)  $i_a$

d)  $i_o$

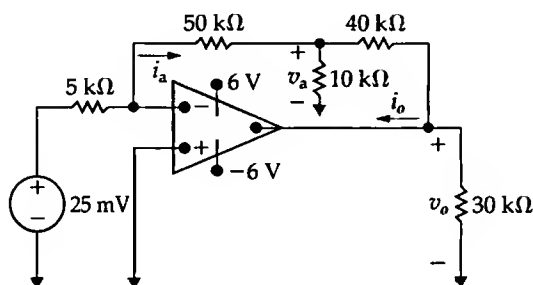


Figura P5.5

- 5.6. a) Diseñe un amplificador inversor utilizando un amplificador operacional ideal que tenga una ganancia de 6. Utilice sólo resistencias de  $20\text{ k}\Omega$ .  
 ❖ b) Si quisiera amplificar una señal de entrada de 3 V utilizando el circuito diseñado en el apartado (a), ¿cuáles son las tensiones de alimentación más pequeñas que podrían usarse?

5.7. El amplificador operacional en el circuito de la Figura P5.7 es ideal.



- a) ¿Qué configuración de circuito basado en amplificador operacional es ésta?  
 b) Calcule  $v_o$ .

5.8. Calcule  $i_L$  (en microamperios) en el circuito de la Figura P5.8.

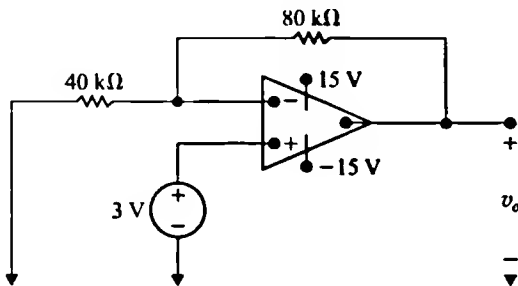


Figura P5.7

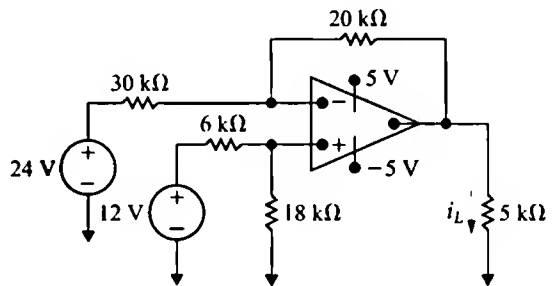


Figura P5.8

5.9. Un diseñador de circuitos afirma que el circuito de la Figura P5.9 produce una tensión de salida capaz de variar entre  $\pm 5$  cuando  $v_x$  varía entre 0 y 5 V. Suponga que el amplificador operacional es ideal.



- a) Dibuje una gráfica de la tensión de salida  $v_o$  en función de la tensión de entrada  $v_x$  para  $0 \leq v_x \leq 5\text{ V}$ .  
 b) ¿Está de acuerdo con la afirmación del diseñador?

5.10. a) El amplificador operacional en el circuito de la Figura P5.10 es ideal. La resistencia ajustable  $R_\Delta$  tiene un valor máximo de  $100\text{ k}\Omega$  y  $\alpha$  está restringida al rango  $0,2 \leq \alpha \leq 1,0$ . Calcule el rango de  $v_o$  si  $v_x = 40\text{ mV}$ .



- b) Si  $\alpha$  no estuviera restringida, ¿para qué valor de  $\alpha$  se saturaría el amplificador operacional?

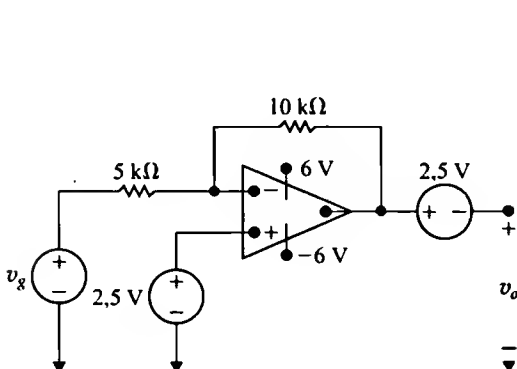


Figura P5.9

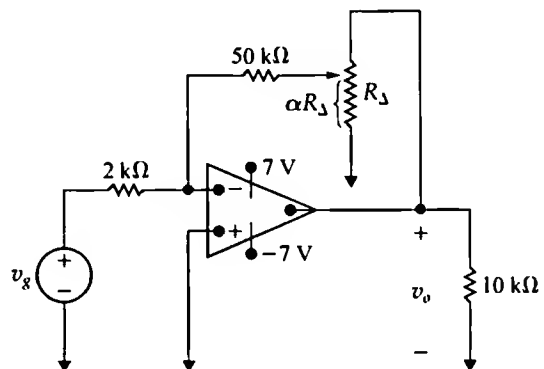


Figura P5.10

5.11. El amplificador operacional en el circuito de la Figura P5.11 es ideal.



- a) Calcule el rango de valores de  $\sigma$  para el que el amplificador operacional no se satura.  
b) Calcule  $i_o$  (en microamperios) cuando  $\sigma = 0,272$ .

5.12. a) Demuestre que, cuando el amplificador operacional ideal de la Figura P5.12 está operando en su región lineal,

$$i_a = \frac{3v_g}{R}.$$

- b) Demuestre que el amplificador operacional ideal se saturará cuando

$$R_a = \frac{R(\pm V_{CC} - 2v_g)}{3v_g}.$$

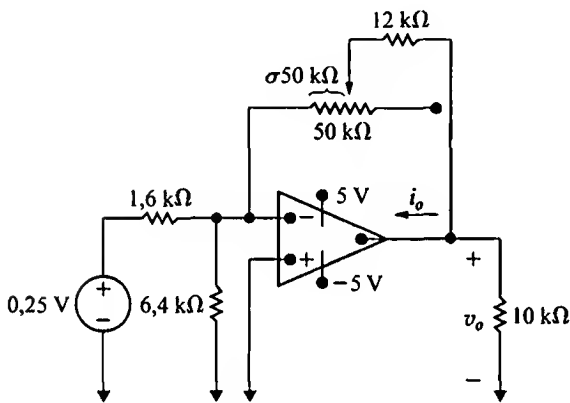


Figura P5.11

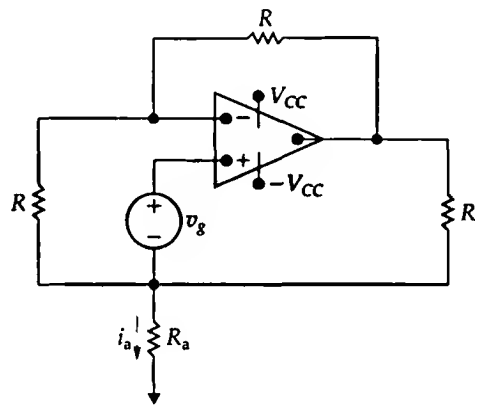


Figura P5.12

5.13. El circuito de la parte izquierda de la Figura P5.13 es una fuente de corriente constante para un rango limitado de valores de la resistencia de  $R_L$ .



- a) Calcule el valor de  $i_L$  para  $R_L = 4 \text{ k}\Omega$ .  
b) Calcule el valor máximo de  $R_L$  para el que  $i_L$  tendrá el valor calculado en el apartado (a).  
c) Suponga que  $R_L = 16 \text{ k}\Omega$ . Explique la operación del circuito. Puede asumir que  $i_p = i_n \approx 0$  en todas las condiciones de operación.  
d) Dibuje  $i_L$  en función de  $R_L$  para  $0 \leq R_L \leq 16 \text{ k}\Omega$ .

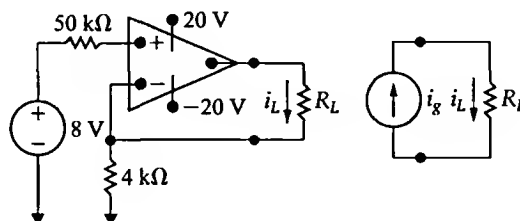


Figura P5.13.

5.14. Los amplificadores operacionales del circuito de la Figura-P5.14 son ideales.



- Calcule  $i_a$ .
- Calcule el valor de la tensión de la fuente de la izquierda para el que  $i_a = 0$ .

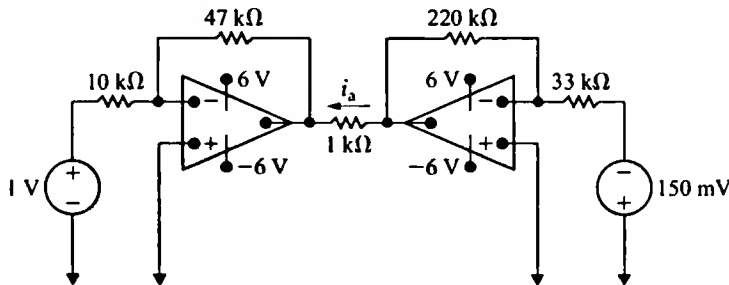


Figura P5.14

5.15. Suponga que el amplificador operacional ideal del circuito de la Figura P5.15 está operando en su región lineal.



- Calcule la potencia entregada a la resistencia de  $600 \Omega$ .
- Repita el apartado (a) eliminando el amplificador operacional del circuito, es decir, conectando la resistencia de  $600 \Omega$  en serie con la fuente de tensión y la resistencia de  $29,4 \text{ k}\Omega$ .
- Calcule el cociente entre la potencia calculada en el apartado (a) y la calculada en el apartado (b).
- ¿Tiene alguna utilidad la inserción del amplificador operacional entre la fuente y la carga? Explique su respuesta.

5.16. El amplificador operacional en el circuito de la Figura P5.16 es ideal.



- ¿Qué configuración de circuito es la mostrada en esta figura?
- Calcule  $v_o$  si  $v_a = 1,2 \text{ V}$ ,  $v_b = -1,5 \text{ V}$  y  $v_c = 4 \text{ V}$ .
- Las tensiones  $v_a$  y  $v_c$  permanecen a  $1,2 \text{ V}$  y  $4 \text{ V}$ , respectivamente. ¿Cuáles son los límites para  $v_b$  si el amplificador operacional debe operar dentro de su región lineal?

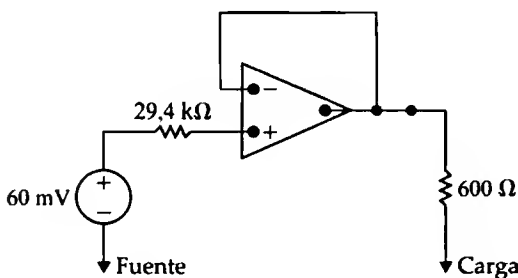


Figura P5.15

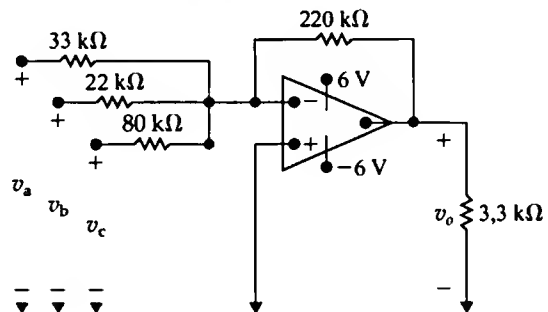


Figura P5.16

5.17. a) El amplificador operacional en el circuito de la Figura P5.17 es ideal. Calcule  $v_o$  si  $v_a = 4 \text{ V}$ ,  $v_b = 9 \text{ V}$ ,  $v_c = 13 \text{ V}$  y  $v_d = 8 \text{ V}$ .





- b) Suponga que  $v_b$ ,  $v_c$  y  $v_d$  retienen sus valores indicados en el apartado (a). Especifique el rango de  $v_a$  que permite al amplificador operacional operar dentro de su región lineal.

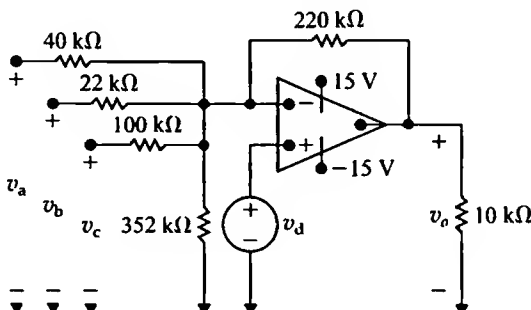


Figura P5.17

- 5.18. La resistencia de realimentación de  $220 \text{ k}\Omega$  del circuito de la Figura P5.17 se sustituye por una resistencia variable  $R_f$ . Las tensiones  $v_a$ - $v_d$  tienen los mismos valores indicados en el Problema 5.17(a).

- a) ¿Qué valor de  $R_f$  hará que el amplificador operacional se sature? Observe que  $0 \leq R_f \leq \infty$ .  
 b) Cuando  $R_f$  tiene el valor determinado en el apartado (a), ¿cuál es la corriente (en microamperios) que entra por el terminal de salida del amplificador operacional?

- 5.19. Diseñe un amplificador sumador inversor tal que

$$v_o = -(2v_a + 4v_b + 6v_c + 8v_d).$$

Si elegimos la resistencia de realimentación ( $R_f$ ) con un valor de  $48 \text{ k}\Omega$ , dibuje un diagrama de circuito del amplificador y especifique los valores de  $R_a$ ,  $R_b$ ,  $R_c$  y  $R_d$ .

- 5.20. Suponga que el amplificador operacional ideal del circuito mostrado en la Figura P5.20 está operando en su región lineal.

- a) Demuestre que  $v_o = [(R_1 + R_2)/R_1]v_s$ .  
 b) ¿Qué sucede si  $R_1 \rightarrow \infty$  y  $R_2 \rightarrow 0$ ?  
 c) Explique por qué este circuito se denomina seguidor de tensión cuando  $R_1 = \infty$  y  $R_2 = 0$ .

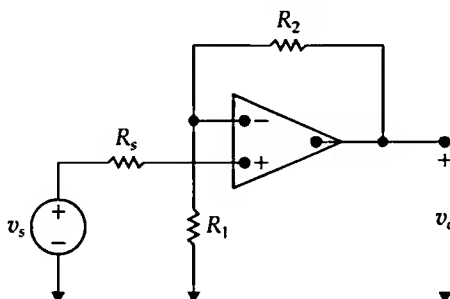


Figura P5.20

- 5.21. Examine el circuito de la Figura 5.11, en el que el amplificador operacional se supone que es ideal. Dados los valores  $R_a = 3 \text{ k}\Omega$ ,  $R_b = 5 \text{ k}\Omega$ ,  $R_c = 25 \text{ k}\Omega$ ,  $v_a = 150 \text{ mV}$ ,  $v_b = 100 \text{ mV}$ ,

$v_c = 250 \text{ mV}$  y  $V_{CC} = \pm 6 \text{ V}$ , especifique el rango de  $R_f$  para el que el amplificador operacional opera dentro de su región lineal.

5.22. El amplificador operacional en el circuito de la Figura P5.22 es ideal.

- ¿Qué configuración de circuito basado en amplificador operacional es ésta?
- Calcule  $v_o$  en términos de  $v_s$ .
- Calcule el rango de valores de  $v_s$  que permite que  $v_o$  no se sature y el amplificador operacional permanezca en su región lineal de operación.

5.23. El amplificador operacional en el circuito de la Figura P5.23 es ideal.



- Calcule  $v_o$  cuando  $v_s$  es igual 4 V.
- Especifique el rango de valores de  $v_s$  que permite que el amplificador operacional opere en modo lineal.
- Suponga que  $v_s$  es igual a 2 V y que se sustituye la resistencia de  $63 \text{ k}\Omega$  por una resistencia variable. ¿Qué valor de la resistencia variable hará que el amplificador operacional se sature?

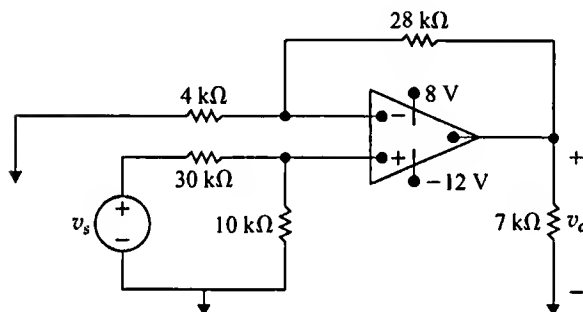


Figura P5.22

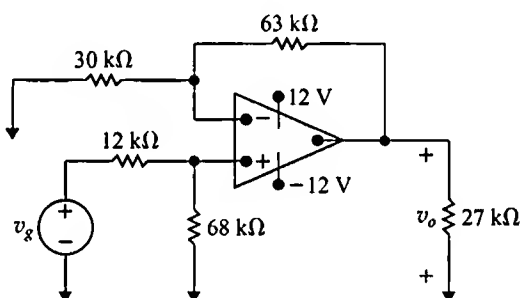


Figura P5.23

5.24. El amplificador operacional en el circuito de la Figura P5.24 es ideal.



- ¿Qué configuración de circuito basado en amplificador operacional es ésta?
- Calcule  $v_o$  en términos de  $v_s$ .
- Calcule el rango de valores de  $v_s$  para el que  $v_o$  no se sature y el amplificador operacional permanece en su región lineal de operación.

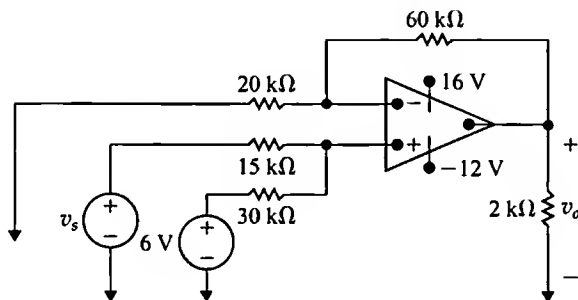


Figura P5.24

5.25. El amplificador operacional en el circuito de la Figura P5.25 es ideal. Las tensiones de señal  $v_a$  y  $v_b$  son de 400 mV y 1200 mV, respectivamente.

- ¿Qué configuración de circuito basado en amplificador operacional es ésta?
- Calcule  $v_o$  en voltios.
- Calcule  $i_a$  e  $i_b$  en microamperios.
- ¿Cuáles son los factores de ponderación asociados con  $v_a$  y  $v_b$ ?

5.26. El amplificador operacional del circuito amplificador sumador no inversor de la Figura P5.26 es ideal.

- Especifique los valores de  $R_f$ ,  $R_b$  y  $R_c$  de modo que

$$v_o = 3v_a + 2v_b + v_c.$$

- Calcule (en microamperios)  $i_a$ ,  $i_b$ ,  $i_c$ ,  $i_g$  e  $i_s$  cuando  $v_a = 0,80$  V,  $v_b = 1,5$  V y  $v_c = 2,1$  V.

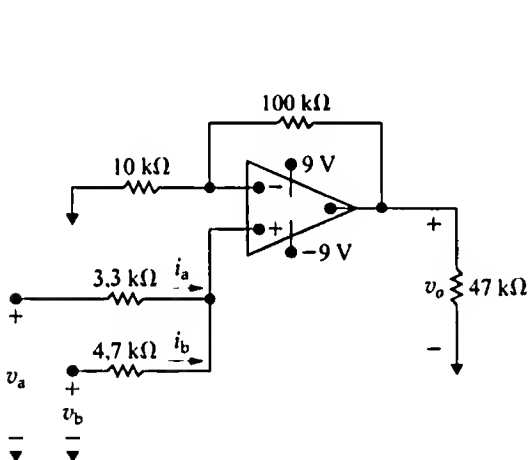


Figura P5.25

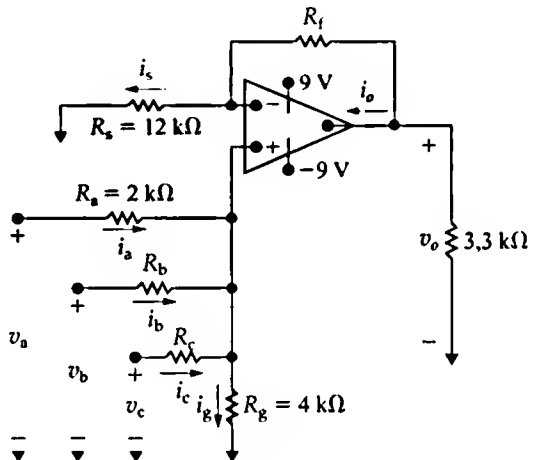


Figura P5.26

5.27. El circuito de la Figura P5.27 es un amplificador sumador no inversor. Suponga que el amplificador operacional es ideal. Diseñe el circuito de modo que  $v_o = 5v_a + 4v_b + v_c$ .

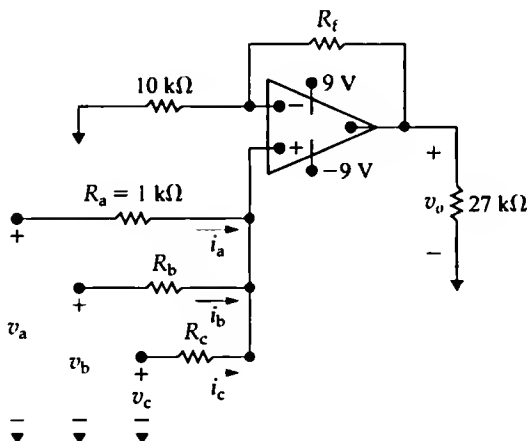


Figura P5.27

- a) Especifique los valores numéricos de  $R_b$ ,  $R_c$  y  $R_f$ .  
 b) Calcule (en microamperios)  $i_a$ ,  $i_b$  e  $i_c$  cuando  $v_a = 0,5$  V,  $v_b = 1,0$  V y  $v_c = 1,5$  V.
- 5.28. a) Utilice el principio de superposición para deducir la Ecuación 5.22.  
 b) Deduzca las Ecuaciones 5.23 y 5.24.
- 5.29. El amplificador operacional en el circuito de la Figura P5.29 es ideal. Calcule el valor de  $R_f$  que permitirá obtener la ecuación
- $$v_o = 5 - 4 v_a$$
- para este circuito.
- 5.30. El amplificador operacional del circuito sumador-restador mostrado en la Figura P5.30 es ideal.
- ☐ a) Calcule  $v_o$  cuando  $v_a = 0,5$  V,  $v_b = 0,3$  V,  $v_c = 0,6$  V y  $v_d = 0,8$  V.  
 b) Si  $v_a$ ,  $v_b$  y  $v_d$  se mantienen constantes, ¿qué valores de  $v_c$  harán que no se sature el amplificador operacional?

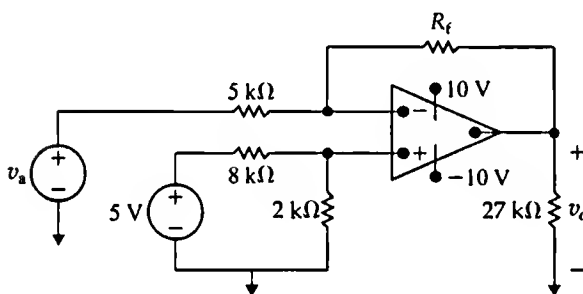


Figura P5.29

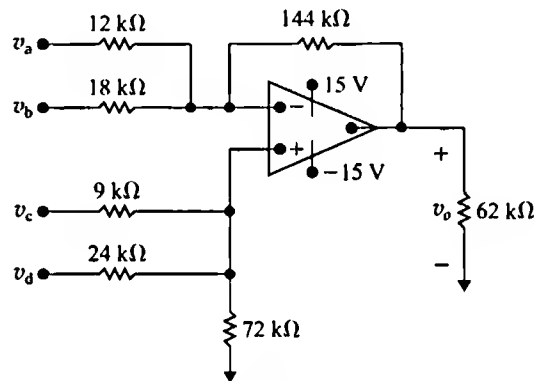


Figura P5.30

- 5.31. Las resistencias del amplificador diferencial mostrado en la Figura 5.13 son  $R_a = 10$  kΩ,  $R_b = 100$  kΩ,  $R_c = 33$  kΩ y  $R_d = 47$  kΩ. Las tensiones de señal  $v_a$  y  $v_b$  son 0,67 y 0,8 V, respectivamente, y  $V_{CC} = \pm 5$  V.
- ☐ a) Calcule  $v_o$ .  
 b) ¿Cuál es la resistencia vista por la fuente de señal  $v_a$ ?  
 c) ¿Cuál es la resistencia vista por la fuente de señal  $v_b$ ?
- 5.32. Diseñe el circuito amplificador diferencial de la Figura P5.32 de modo que  $v_o = 10(v_b - v_a)$  y que la fuente de tensión  $v_b$  vea una resistencia de entrada de 220 kΩ. Especifique los valores de  $R_a$ ,  $R_b$  y  $R_f$ . Utilice el modelo ideal para el amplificador operacional.
- ☐ 5.33. Seleccione los valores de  $R_b$  y  $R_f$  en el circuito de la Figura P5.33 de modo que
- $$v_o = 2000(i_b - i_a).$$
- ☐ El amplificador operacional es ideal.
- 5.34. Diseñe un amplificador diferencial (Figura 5.13) que satisfaga el siguiente criterio:  $v_o = 3v_b - 4v_a$ . La resistencia vista por la fuente de señal  $v_b$  es de 470 kΩ y la resistencia vista por la fuente de señal  $v_a$  es de 22 kΩ cuando la tensión de salida  $v_o$  es cero. Especifique los valores de  $R_a$ ,  $R_b$ ,  $R_c$  y  $R_d$ .

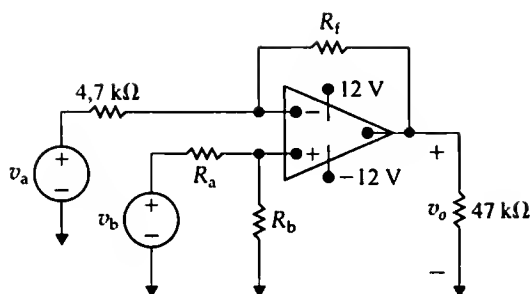


Figura P5.32

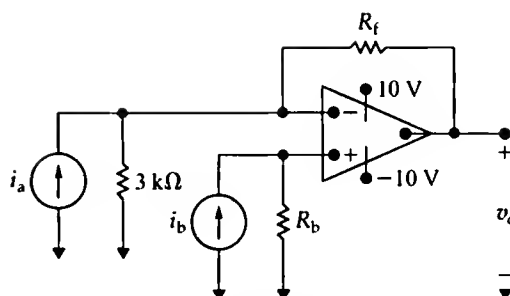


Figura P5.33

5.35. El amplificador operacional en el circuito de la Figura P5.35 es ideal.

- Dibuje  $v_o$  en función  $\alpha$  cuando  $R_f = 4R_1$  y  $v_g = 2$  V. Utilice incrementos de 0,1 y observe que, por hipótesis,  $0 \leq \alpha \leq 1,0$ .
- Escriba una ecuación para la línea recta dibujada en el apartado (a). Calcule la pendiente y el punto de intersección de la línea en función de  $v_g$  y del cociente  $R_f/R_1$ .
- Utilizando los resultados del apartado (b), seleccione los valores de  $v_g$  y del cociente  $R_f/R_1$  de modo que  $v_o = -6\alpha + 4$ .

5.36. La resistencia  $R_f$  del circuito de la Figura P5.36 se ajusta hasta que el amplificador operacional ideal se satura. Indique el valor de  $R_f$  en kilohmios.

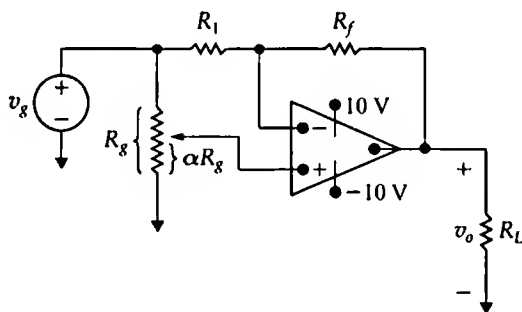


Figura P5.35

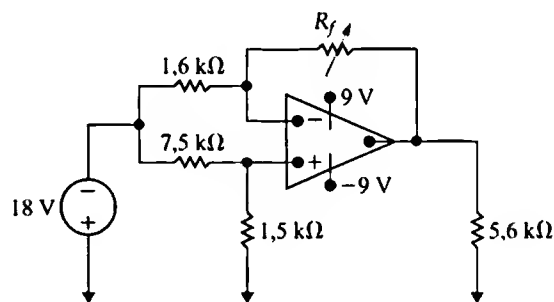


Figura P5.36

5.37. En el amplificador diferencial mostrado en la Figura P5.37, calcule (a) la ganancia en modo diferencial, (b) la ganancia en modo común y (c) el valor de CMRR.

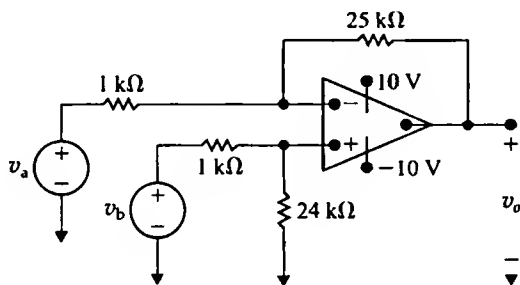


Figura P5.37

- 5.38. En el amplificador diferencial mostrado en la Figura P5.38, ¿qué rango de valores de  $R_x$  da un valor de  $CMRR \geq 1000$ ?

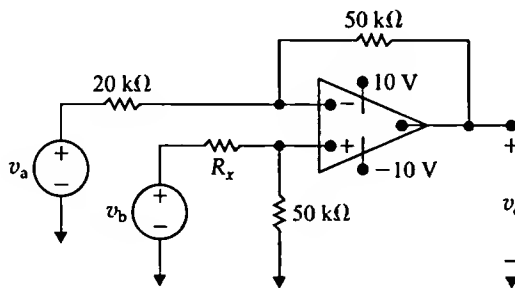


Figura P5.38

- 5.39. Repita el Problema de evaluación 5.6, supuesto que se carga el amplificador inversor con una resistencia de  $1 \text{ k}\Omega$ . ☐
- 5.40. El amplificador operacional del circuito amplificador inversor de la Figura P5.40 tiene una resistencia de entrada de  $400 \text{ k}\Omega$ , una resistencia de salida de  $5 \text{ k}\Omega$  y una ganancia en lazo abierto de 20.000. Suponga que el amplificador operacional está operando en su región lineal. ☐
- Calcule la ganancia de tensión ( $v_o/v_g$ ).
  - Calcule las tensiones de las entradas inversora y no inversora,  $v_n$  y  $v_p$  (en milivoltios) si  $v_g = 1 \text{ V}$ .
  - Calcule la diferencia ( $v_p - v_n$ ) en microvoltios cuando  $v_g = 1 \text{ V}$ .
  - Calcule el consumo de corriente en picoamperios de la fuente de señal  $v_g$  cuando  $v_g = 1 \text{ V}$ .
  - Repita los apartados (a)-(d) suponiendo un amplificador operacional ideal.

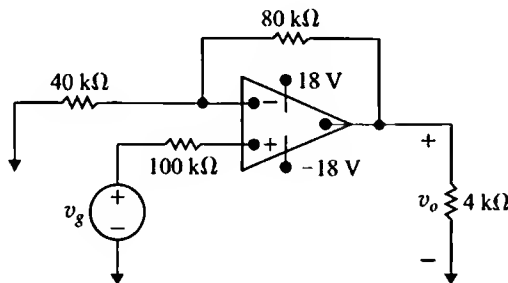


Figura P5.40

- 5.41. a) Calcule el circuito equivalente de Thévenin con respecto a los terminales de salida a y b para el amplificador inversor de la Figura P5.41. La fuente de tensión continua tiene un valor de  $880 \text{ mV}$ . El amplificador operacional tiene una resistencia de entrada de  $500 \text{ k}\Omega$ , una resistencia de salida de  $2 \text{ k}\Omega$  y una ganancia en lazo abierto de 100.000. ☐
- ¿Cuál es la resistencia de salida del amplificador inversor?
  - ¿Cuál es la resistencia (en ohmios) vista por la fuente de señal  $v_g$  cuando la carga en los terminales a y b es de  $330 \Omega$ ?
- 5.42. Repita el Problema 5.41 suponiendo un amplificador operacional ideal. ☐

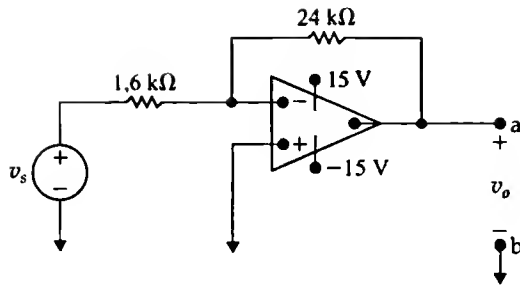


Figura P5.41

5.43. Suponga que la resistencia de entrada al amplificador operacional de la Figura P5.43 es infinita y que su resistencia de salida es cero.

- Calcule  $v_o$  en función de  $v_g$  y de la ganancia en lazo abierto  $A$ .
- ¿Cuál es el valor de  $v_o$  si  $v_g = 0,4$  y  $A = 90$ ?
- ¿Cuál es el valor de  $v_o$  si  $v_g = 0,4$  y  $A = \infty$ ?
- ¿Qué valor tendría que tener  $A$  para que  $v_o$  tenga un valor que sea el 95% del calculado en el apartado (c)?

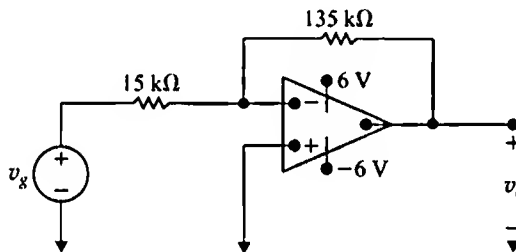


Figura P5.43

5.44. Deduzca la Ecuación 5.60.

5.45. Los dos amplificadores operacionales del circuito de la Figura P5.45 son ideales. Calcule  $v_{o1}$  y  $v_{o2}$ .

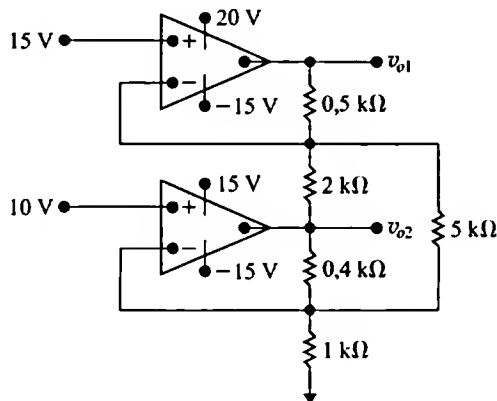


Figura P5.45.

5.46. La tensión de señal  $v_g$  en el circuito mostrado en la Figura P5.46 está descrita por las siguientes ecuaciones:

$$v_g = 0, \quad t \leq 0,$$

$$v_g = 10 \sin(\pi/3)t \text{ V}, \quad 0 \leq t \leq \infty.$$

Dibuje  $v_o$  en función de  $t$ , suponiendo que el amplificador operacional es ideal.

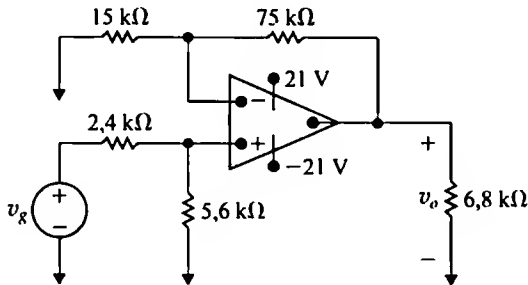
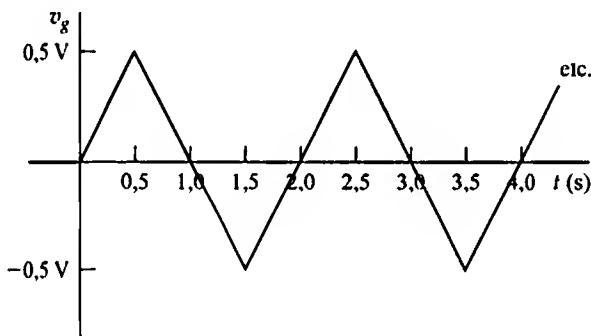
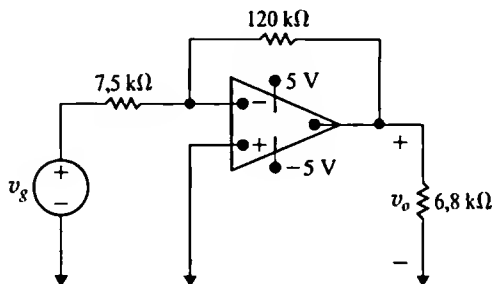


Figura P5.46

- 5.47. La tensión  $v_g$  mostrada en la Figura P5.47(a) se aplica al amplificador inversor mostrado en la Figura P5.47(b). Dibuje  $v_o$  en función de  $t$ , suponiendo que el amplificador operacional es ideal.



(a)



(b)

Figura P5.47

- 5.48. Suponga que las galgas extensométricas del puente de la Figura 5.18 tienen el valor  $120 \Omega \pm 1\%$ . Las tensiones de alimentación del amplificador operacional son de  $\pm 15 \text{ V}$  y la tensión de referencia,  $v_{\text{ref}}$ , se toma de la alimentación positiva.

a) Calcule el valor de  $R_f$  que hace que, cuando la galga extensométrica que se está alargando alcance máxima longitud, la tensión de salida sea de 5 V.



- b) Suponga que podemos medir con precisión cambios de 50 mV en la tensión de salida. ¿Qué cambio en la resistencia de la galga extensométrica podría detectarse, en miliohmios?

- 5.49. a) Para el circuito mostrado en la Figura P5.49, demuestre que, si  $\Delta R \ll R$ , la tensión de salida del amplificador operacional es aproximadamente



$$v_o \approx \frac{R_f}{R^2} \frac{(R + R_f)}{(R + 2R_f)} (-\Delta R) v_{in}.$$

- b) Calcule  $v_o$  si  $R_f = 470 \text{ k}\Omega$ ,  $R = 10 \text{ k}\Omega$ ,  $\Delta R = 95 \text{ }\Omega$  y  $v_{in} = 15 \text{ V}$ .  
c) Calcule el valor real de  $v_o$  en el apartado (b).

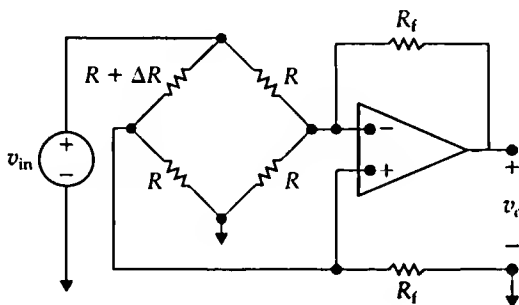


Figura P5.49

- 5.50. a) Si definimos el porcentaje de error como



$$\% \text{ error} = \left[ \frac{\text{valor aproximado}}{\text{valor real}} - 1 \right] \times 100,$$

demuestre que el porcentaje de error en la aproximación de  $v_o$  en el Problema 5.49 es

$$\% \text{ error} = \frac{\Delta R}{R} \frac{(R + R_f)}{(R + 2R_f)} \times 100.$$

- b) Calcule el porcentaje de error de  $v_o$  para el Problema 5.49.

- 5.51. Suponga que el porcentaje de error en la aproximación de  $v_o$  en el circuito de la Figura P.49 no debe exceder el 1%. ¿Cuál es el máximo cambio porcentual en  $R$  que puede tolerarse?



- 5.52. Suponga que la resistencia de la rama variable del circuito en puente de la Figura P5.49 es  $R - \Delta R$ .



- a) ¿Cuál es la expresión de  $v_o$  si  $\Delta R \ll R$ ?  
b) ¿Cuál es la expresión del error porcentual de  $v_o$  en función de  $R$ ,  $R_f$  y  $\Delta R$ ?  
c) Suponga que la resistencia de la rama variable del circuito en puente de la Figura P5.49 es de  $9810 \text{ }\Omega$  y que los valores de  $R$ ,  $R_f$  y  $v_{in}$  son iguales que en el Problema 5.49(b). ¿Cuál es el valor aproximado de  $v_o$ ?  
d) ¿Cuál es el porcentaje de error en la aproximación de  $v_o$  cuando la resistencia de la rama variable es de  $9810 \text{ }\Omega$ ?

## CAPÍTULO

# 6

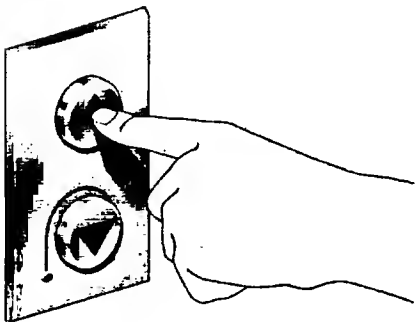
# Inductancia, capacitancia e inductancia mutua

### Contenido del capítulo

- 6.1. La bobina
- 6.2. El condensador
- 6.3. Combinaciones serie-paralelo de bobinas y condensadores
- 6.4. Inductancia mutua
- 6.5. Un examen más detallado de la inductancia mutua

Comenzamos este capítulo introduciendo los dos últimos elementos de circuito ideales mencionados en el Capítulo 2, es decir, las bobinas y los condensadores. Las técnicas de análisis de circuitos introducidas en los Capítulos 3 y 4 se aplican también a los circuitos que contienen bobinas y condensadores. Por tanto, una vez que comprendamos el comportamiento en los terminales de estos elementos en términos de la corriente y la tensión, podremos usar las leyes de Kirchhoff para describir las interconexiones con los otros elementos básicos. Al igual que otros componentes, las bobinas y condensadores son más fáciles de describir en términos de variables del circuito que en función de variables de campo electromagnético. Sin embargo, antes de centrarnos en las descripciones de los circuitos, conviene realizar un breve repaso de los conceptos de campo electromagnético que subyacen a estos elementos de circuito básicos.

Una bobina es un componente eléctrico que se opone a los cambios en la corriente eléctrica. Está compuesta de un arrollamiento de hilo metálico alrededor de un núcleo de soporte cuyo material puede ser magnético o no magnético. El comportamiento de las bobinas está basado en fenómenos asociados con los campos magnéticos. Las fuentes de los campos magnéticos son las cargas en movimiento, es decir, la corriente eléctrica. Si la corriente varía con el tiempo, el campo magnético también lo hace. Un campo magnético que varía con el tiempo induce una tensión en cualquier conductor que se encuentre en dicho campo. El parámetro de circuito denominado **inductancia** relaciona la tensión inducida con la corriente. Trataremos esta relación cuantitativa en la Sección 6.1.

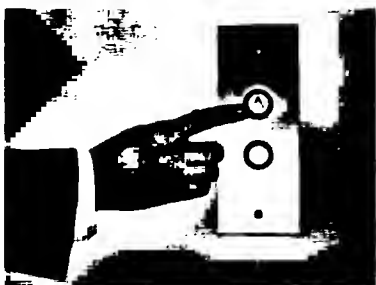


## Perspectiva práctica

### Conmutadores de proximidad

Los dispositivos eléctricos que utilizamos en nuestra vida cotidiana contienen muchos conmutadores. La mayoría de los conmutadores son mecánicos, como por ejemplo el utilizado en la linterna presentada en el Capítulo 2. Los conmutadores mecánicos incorporan un actuador que puede apretarse, extraerse, deslizarse o rotarse, haciendo que dos piezas de metal conductor se toquen y creando así un cortocircuito. Algunas veces, los diseñadores prefieren utilizar conmutadores sin partes móviles, para incrementar la seguridad, la fiabilidad, la conveniencia o la elegancia de sus productos. Dichos conmutadores se denominan conmutadores de proximidad. Los conmutadores de proximidad pueden emplear sensores de distintos tipos de tecnologías. Por ejemplo, algunas puertas de ascensores permanecen abiertas mientras se obstruya el trayecto de un haz luminoso.

Otro tipo de tecnología de sensor utilizada en los conmutadores de proximidad detecta a las personas respondiendo a las perturbaciones que éstas causan en los campos eléctricos. Estos tipos de conmutador de proximidad se utilizan en algunas lámparas de sobremesa que se encienden y apagan cuando se las toca y en los botones de los ascensores que no tienen partes móviles (como los mostrados en la fotografía). El conmutador está basado en un condensador. Como veremos en este capítulo, un condensador es un elemento de circuito cuyas características de comportamiento en los terminales están determinadas por campos eléctricos. Cuando se toca un conmutador de proximidad capacitivo, se produce un cambio en el valor de un condensador, lo que provoca un cambio de tensión que activa el conmutador. El diseño de un conmutador capacitivo sensible al tacto será el tema de la sección de Perspectiva práctica que se incluye al final del capítulo.



### Objetivos del capítulo

1. Conocer y ser capaz de utilizar las ecuaciones de la tensión, la corriente, la potencia y la energía en una bobina; comprender cómo se comporta una bobina en presencia de una corriente constante y la necesidad de que la corriente sea continua en una bobina.
2. Conocer y ser capaz de utilizar las ecuaciones de la tensión, la corriente, la potencia y la energía en un condensador; comprender cómo se comporta un condensador en presencia de una tensión constante y la necesidad de que la tensión sea continua en un condensador.
3. Ser capaz de combinar bobinas, junto con sus condiciones iniciales, tanto en serie como en paralelo, para formar una única bobina equivalente con su respectiva condición inicial; ser capaz de combinar condensadores, junto con sus condiciones iniciales, tanto en serie como en paralelo, para formar un único condensador equivalente con su respectiva condición inicial.
4. Comprender el concepto básico de inductancia mutua y ser capaz de escribir las ecuaciones de las corrientes de malla para un circuito que contenga bobinas magnéticamente acopladas, utilizando correctamente el convenio de puntos.

Un condensador es un componente eléctrico compuesto de dos conductores separados por un aislante o material dieléctrico. El condensador es el único dispositivo, además de las baterías, que puede almacenar carga eléctrica. El comportamiento de los condensadores está basado en fenómenos asociados con los campos eléctricos. La fuente de los campos eléctricos es la separación de las cargas o tensión. Si la tensión varía con el tiempo, el campo eléctrico también lo hace. Un campo eléctrico que varía con el tiempo produce una corriente de desplazamiento en el espacio ocupado por el campo. El parámetro de circuito denominado **capacidad** relaciona la corriente de desplazamiento con la tensión, siendo la corriente de desplazamiento igual a la corriente de conducción en los terminales del condensador. Hablaremos de esta relación cuantitativa en la Sección 6.2. La Sección 6.3 describe las técnicas utilizadas para simplificar circuitos que contengan combinaciones en serie o en paralelo de bobinas o condensadores.

La energía puede almacenarse tanto en campos eléctricos como en campos magnéticos. Por tanto, no debería resultar sorprendente saber que las bobinas y los condensadores son capaces de almacenar energía. Por ejemplo, puede almacenarse energía en una bobina y luego liberarla para generar una chispa de descarga. También puede almacenarse energía en un condensador y luego liberarla para iluminar el flash de una cámara fotográfica. En las bobinas y condensadores ideales, sólo se puede extraer una cantidad de energía igual a la que haya sido almacenada. Puesto que las bobinas y condensadores no pueden generar por sí mismos energía, se los clasifica como **elementos pasivos**.

En las Secciones 6.4 y 6.5 consideraremos la situación en la que dos circuitos están enlazados por un campo magnético, por lo que se dice que están magnéticamente acoplados. En este caso, la tensión inducida en el segundo circuito puede ponerse en relación con la corriente variable del primer circuito mediante un parámetro denominado **inductancia mutua**. La importancia práctica del acoplamiento magnético se verá cuando estudiemos las relaciones entre la corriente, la tensión, la potencia y varios nuevos parámetros específicos de la inductancia mutua. Presentaremos en este capítulo estas relaciones y luego estudiaremos su utilidad en un dispositivo denominado transformador en los Capítulos 9 y 10.

## 6.1. La bobina

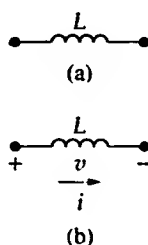
La inductancia es el parámetro de circuito utilizado para describir las bobinas. La inductancia se simboliza mediante la letra  $L$ , se mide en henrios (H) y se representa gráficamente mediante un hilo arrollado, lo que sirve de recordatorio de que la inductancia es una consecuencia de la presencia de un conductor dentro de un campo magnético. La Figura 6.1(a) muestra una bobina. Asignando la dirección de referencia de la corriente en dirección de la caída de tensión en bornes de los terminales de la bobina, como se muestra en la Figura 6.1(b), se obtiene

$$\text{Ecuación } v\text{-}i \text{ DE LA BOBINA} \quad v = L \frac{di}{dt}, \quad (6.1)$$

donde  $v$  se mide en voltios,  $L$  en henrios,  $i$  en amperios y  $t$  en segundos. La Ecuación 6.1 refleja el convenio de signos pasivo mostrado en la Figura 6.1; es decir, la referencia de la corriente está en la dirección de la caída de tensión en bornes de la bobina. Si la referencia de la corriente estuviera en la dirección del incremento de tensión, la Ecuación 6.1 se escribiría con un signo menos.

Observe en la Ecuación 6.1 que la tensión en bornes de los terminales de una bobina es proporcional a la velocidad de variación de la corriente que atraviesa la bobina. Podemos hacer dos observaciones importantes al respecto. En primer lugar, si la corriente es constante, la tensión en bornes de una bobina ideal es cero. Por tanto, una bobina se comporta como un cortocircuito en presencia de una

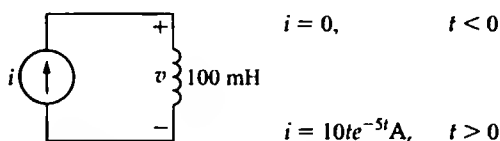
corriente continua o constante. En segundo lugar, la corriente no puede cambiar de manera instantánea en una bobina, es decir, la corriente no puede cambiar un cierto valor finito en un tiempo cero. La Ecuación 6.1 nos dice que este cambio requeriría una tensión infinita, y las tensiones infinitas no son posibles en la práctica. Por ejemplo, cuando alguien abre el conmutador en un circuito inductivo en un sistema real, la corriente continúa fluyendo inicialmente por el aire a través del conmutador; a este fenómeno se lo denomina *arco voltaico*. Este tipo de descargas a través del conmutador evitan que la corriente caiga a cero instantáneamente. La conmutación de circuitos inductivos constituye un problema importante en la ingeniería, porque las descargas y los ciclos de tensión deben controlarse para evitar daños a los equipos. El primer paso para comprender la naturaleza de este problema consiste en dominar el material introductorio presentado en éste y en los dos capítulos siguientes. El Ejemplo 6.1 ilustra la aplicación de la Ecuación 6.1 a un circuito simple.



**Figura 6.1.** (a) Símbolo gráfico de una bobina con una inductancia de  $L$  henrios.  
(b) Asignación de la tensión y la corriente de referencia a la bobina, según el convenio de signos pasivo.

### EJEMPLO 6.1 Determinación de la tensión en los terminales de una bobina a partir de la corriente

La fuente de corriente independiente del circuito mostrado en la Figura 6.2 genera una corriente igual a cero para  $t < 0$  y un pulso  $10te^{-5t}$  A para  $t > 0$ .

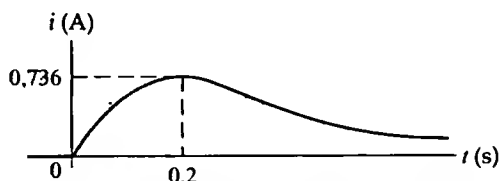


**Figura 6.2.** Circuito del Ejemplo 6.1.

- Dibuje la forma de onda de la corriente.
- ¿En qué instante es máxima la corriente?
- Expresa la tensión en los terminales de la bobina de 100 mH en función del tiempo.
- Dibuje la forma de onda de la tensión.
- ¿Tienen la tensión y la corriente su máximo en el mismo instante?

- ¿En qué instante cambia de polaridad la tensión?
- ¿Hay en algún momento algún cambio instantáneo de tensión en bornes de la bobina? Si es así, ¿en qué instante?

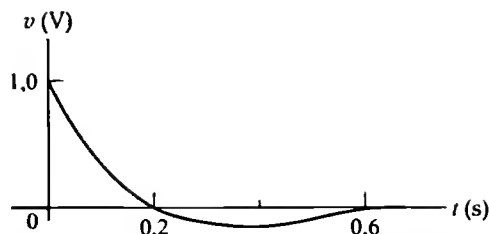
### SOLUCIÓN



**Figura 6.3.** Forma de onda de la corriente para el Ejemplo 6.1.

- La Figura 6.3 muestra la forma de onda de la corriente.

- b)  $di/dt = 10(-5te^{-5t} + e^{-5t}) = 10e^{-5t}(1 - 5t)$  A/s;  $di/dt = 0$  cuando  $t = \frac{1}{5}$  s. (Véase la Figura 6.3).
- c)  $v = L di/dt = (0,1) 10e^{-5t}(1 - 5t) = e^{-5t}(1 - 5t)$  V,  $t > 0$ ;  $v = 0$ ,  $t < 0$ .
- d) La Figura 6.4 muestra la forma de onda de la tensión.
- e) No; la tensión es proporcional a  $di/dt$ , no a  $i$ .
- f) En 0,2 s, que corresponde al momento en que  $di/dt$  está pasando por cero y cambiando de signo.



**Figura 6.4.** Forma de onda de la tensión para el Ejemplo 6.1.

- g) Sí, en  $t = 0$ . Observe que la tensión puede cambiar instantáneamente en bornes de los terminales de una bobina.

## Corriente en una bobina en función de la tensión de la misma

La Ecuación 6.1 expresa la tensión en bornes de los terminales de una bobina en función de la corriente que la atraviesa. También resulta conveniente poder expresar la corriente en función de la tensión. Para calcular  $i$  en función de  $v$ , comenzamos multiplicando ambos lados de la Ecuación 6.1 por el diferencial de tiempo  $dt$ :

$$v dt = L \left( \frac{di}{dt} \right) dt. \quad (6.2)$$

Multiplicando la velocidad con la que  $i$  varía con respecto a  $t$  por un diferencial de tiempo se genera un diferencial de  $i$ , por lo que escribimos la Ecuación 6.2 como

$$v dt = L di. \quad (6.3)$$

A continuación integramos ambos lados de la Ecuación 6.3. Por comodidad, vamos a intercambiar los dos lados de la ecuación y escribiremos

$$L \int_{i(t_0)}^{i(t)} dx = \int_{t_0}^t v d\tau. \quad (6.4)$$

Observe que utilizamos  $x$  y  $\tau$  como variables de integración, mientras que  $i$  y  $t$  se convierten en límites de las integrales. Entonces, a partir de la Ecuación 6.4,

$$\text{Ecuación } v\text{-}i \text{ DE LA BOBINA} \quad i(t) = \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v d\tau + i(t_0), \quad (6.5)$$

donde  $i(t)$  es la corriente correspondiente a  $t$  e  $i(t_0)$  es el valor de la corriente de la bobina en el momento de iniciar la integración, es decir, en  $t_0$ . En muchas aplicaciones prácticas,  $t_0$  es cero y la Ecuación 6.5 se transforma en

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t v d\tau + i(0). \quad (6.6)$$

Las Ecuaciones 6.1 y 6.5 nos dan la relación existente entre la tensión y la corriente en los terminales de una bobina. La Ecuación 6.1 expresa la tensión en función de la corriente, mientras que la Ecuación 6.5 expresa la corriente en función de la tensión. En ambas ecuaciones, la dirección de refe-

rencia de la corriente está en la dirección de la caída de tensión entre los terminales. Observe que  $i(t_0)$  tiene su propio signo algebraico. Si la corriente inicial se encuentra en la misma dirección de referencia de  $i$ , se tratará de una magnitud positiva. Si la corriente inicial está en la dirección opuesta, se tratará de una magnitud negativa. El Ejemplo 6.2 ilustra la aplicación de la Ecuación 6.5.

### EJEMPLO 6.2 Determinación de la corriente en los terminales de una bobina a partir de la tensión

El pulso de tensión aplicado a la bobina de 100 mH mostrada en la Figura 6.5 es 0 para  $t < 0$  y está dado por la expresión

$$v(t) = 20te^{-10t} \text{ V}$$

para  $t > 0$ . Suponga también que  $i = 0$  para  $t \leq 0$ .

- Dibuje la tensión en función del tiempo.
- Calcule la corriente de la bobina en función del tiempo.
- Dibuje la corriente en función del tiempo.

#### SOLUCIÓN

- La tensión en función del tiempo se muestra en la Figura 6.6.
- La corriente en la bobina es 0 en  $t = 0$ . Por tanto, la corriente para  $t > 0$  es

$$\begin{aligned} i &= \frac{1}{0,1} \int_0^t 20\tau e^{-10\tau} d\tau + 0 \\ &= 200 \left[ \frac{-e^{-10\tau}}{100} (10\tau + 1) \right]_0^t \\ &= 2(1 - 10te^{-10t} - e^{-10t}) \text{ A}, \quad t > 0. \end{aligned}$$

- La Figura 6.7 muestra la corriente en función del tiempo.

Observe, en el Ejemplo 6.2, que  $i$  se aproxima a un valor constante de 2 A a medida que se incrementa  $t$ . Hablaremos más acerca de este resultado después de analizar el tema de la energía almacenada en una bobina.

### Potencia y energía en una bobina

Las ecuaciones de la potencia y energía en una bobina pueden derivarse directamente de las ecuaciones que relacionan la corriente y la tensión. Si la referencia de la corriente está en la dirección de la caída de tensión entre los terminales de la bobina, la potencia será

$$p = vi. \quad (6.7)$$

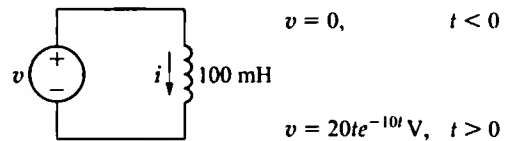


Figura 6.5. Circuito del Ejemplo 6.2.

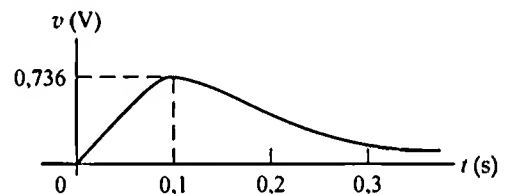


Figura 6.6. Forma de onda de la tensión para el Ejemplo 6.2.

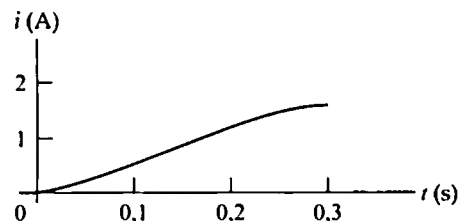


Figura 6.7. Forma de onda de la corriente para el Ejemplo 6.2.

Recuerde que la potencia se mide en vatios, la tensión en voltios y la corriente en amperios. Si expresamos la tensión de la bobina en función de la corriente que la atraviesa, la Ecuación 6.7 se convierte en:

$$\text{POTENCIA EN UNA BOBINA} \quad p = Li \frac{di}{dt}. \quad (6.8)$$

También podemos expresar la corriente en función de la tensión:

$$p = v \left[ \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v d\tau + i(t_0) \right]. \quad (6.9)$$

La Ecuación 6.8 resulta útil para expresar la energía almacenada en la bobina. La potencia es la velocidad a la que se gasta la energía, por lo que

$$p = \frac{dw}{dt} = Li \frac{di}{dt}. \quad (6.10)$$

Multiplicando ambos lados de la Ecuación 6.10 por un diferencial de tiempo, obtenemos la relación diferencial

$$dw = Li di. \quad (6.11)$$

Ambos lados de la Ecuación 6.11 pueden integrarse, partiendo de la suposición de que la referencia de energía cero se corresponde con una corriente de valor cero en la bobina. Así,

$$\int_0^w dx = L \int_0^i y dy.$$

$$\text{ENERGÍA EN UNA BOBINA} \quad w = \frac{1}{2} Li^2. \quad (6.12)$$

Como antes, utilizamos símbolos diferentes de integración para evitar la confusión con los límites impuestos a las integrales. En la Ecuación 6.12, la energía está expresada en julios, la inductancia en henrios y la corriente en amperios. Para ilustrar la aplicación de las Ecuaciones 6.7 y 6.12, vamos a analizar de nuevo los Ejemplos 6.1 y 6.2 por medio del Ejemplo 6.3.

### EJEMPLO 6.3 Determinación de la tensión, la potencia y la energía en una bobina

- |  |   |
|--|---|
| <p>a) Para el Ejemplo 6.1, dibuje <math>i</math>, <math>v</math>, <math>p</math> y <math>w</math> en función del tiempo. Alinee las gráficas verticalmente para facilitar la visualización del comportamiento de cada variable.</p> <p>b) ¿En qué intervalo de tiempo se está almacenando energía en la bobina?</p> <p>c) ¿En qué intervalo de tiempo se está extrayendo energía de la bobina?</p> <p>d) ¿Cuáles es la máxima energía almacenada en la bobina?</p> | <p>e) Evalúe las integrales <math>\int_{0.1}^{0.2} p dt</math> y <math>\int_{0.2}^{\infty} p dt</math> y comente su significado.</p> <p>f) Repita los apartados (a)-(c) para el Ejemplo 6.2.</p> <p>g) En el Ejemplo 6.2, ¿por qué hay una corriente sostenida en la bobina a medida que la tensión se aproxima a cero?</p> |
|--|---|



## SOLUCIÓN

- a) Las gráficas de  $i$ ,  $v$ ,  $p$  y  $w$  pueden obtenerse directamente de las expresiones de  $i$  y de  $v$  obtenidas en el Ejemplo 6.1 y se muestran en la Figura 6.8. En particular,  $p = vi$  y  $w = (\frac{1}{2})Li^2$ .

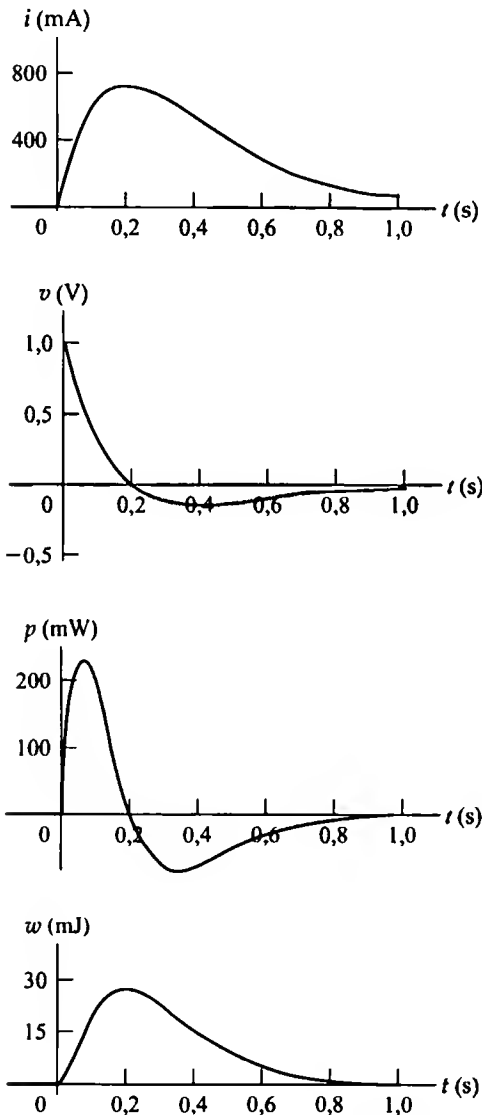


Figura 6.8. Las variables  $i$ ,  $v$ ,  $p$  y  $w$  en función de  $t$  para el Ejemplo 6.1.

- b) Una curva de energía creciente indica que se está almacenando energía. Por tanto, se

estará almacenando energía durante el intervalo de tiempo que va de 0 a 0,2 s. Observe que esto se corresponde con el intervalo en el que  $p > 0$ .

- c) Una curva de energía decreciente indica que se está extrayendo energía. Por tanto, se estará extrayendo energía en el intervalo de tiempo que va de 0,2 s a  $\infty$ . Observe que esto se corresponde con el intervalo en el que  $p < 0$ .

- d) A partir de la Ecuación 6.12, vemos que la energía tiene su máximo cuando la corriente es máxima; un vistazo a la gráfica nos confirma este hecho. Del Ejemplo 6.1 obtenemos que la corriente máxima = 0,736 A. Por tanto,  $w_{\text{máx}} = 27,07$  mJ.

- e) A partir del Ejemplo 6.1,

$$i = 10te^{-5t} \text{ A} \quad \text{y} \quad v = e^{-5t}(1 - 5t) \text{ V.}$$

Por tanto,

$$p = vi = 10te^{-5t} - 50t^2e^{-10t} \text{ W.}$$

Así que

$$\begin{aligned} \int_0^{0.2} p \, dt &= 10 \left[ \frac{e^{-10t}}{100} (-10t - 1) \right]_0^{0.2} \\ &\quad - 50 \left\{ \frac{t^2 e^{-10t}}{-10} + \frac{2}{10} \left[ \frac{e^{-10t}}{100} (-10t - 1) \right] \right\}_0^{0.2} \\ &= 0,2e^{-2} = 27,07 \text{ mJ,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{0.2}^{\infty} p \, dt &= 10 \left[ \frac{e^{-10t}}{100} (-10t - 1) \right]_{0.2}^{\infty} \\ &\quad - 50 \left\{ \frac{t^2 e^{-10t}}{-10} + \frac{2}{10} \left[ \frac{e^{-10t}}{100} (-10t - 1) \right] \right\}_{0.2}^{\infty} \\ &= -0,2e^{-2} = -27,07 \text{ mJ.} \end{aligned}$$

Basándonos en la definición de  $p$ , el área situada bajo la gráfica de  $p$  en función de  $t$  representa la energía gastada en el intervalo de integración. Por tanto, la integración de la potencia entre 0 y 0,2 s representa la

energía almacenada en la bobina durante ese intervalo de tiempo. La integral de  $p$  en el intervalo  $0,2 \text{ s} \rightarrow \infty$  es la energía extraída. Observe que en este intervalo de tiempo se extrae toda la energía originalmente almacenada; es decir, después de que pase el pico de corriente, ya no se almacena energía en la bobina.

- f) Las gráficas de  $i$ ,  $v$ ,  $p$  y  $w$  pueden obtenerse directamente de las expresiones correspondientes a  $v$  e  $i$  dadas en el Ejemplo 6.2; esas gráficas se muestran en la Figura 6.9. Observe que, en este caso, la potencia es

siempre positiva, por lo que siempre se está almacenando energía durante el pulso de tensión.

- g) La aplicación del pulso de tensión almacena energía en la bobina. Puesto que la bobina es ideal, la energía no puede disiparse después de que la tensión caiga a cero. Por tanto, circulará una corriente sostenida en el circuito. Una bobina sin pérdidas es, obviamente, un elemento de circuito ideal; las bobinas reales requieren que se incluya una resistencia en el modelo de circuito (hablaremos de esto más adelante).

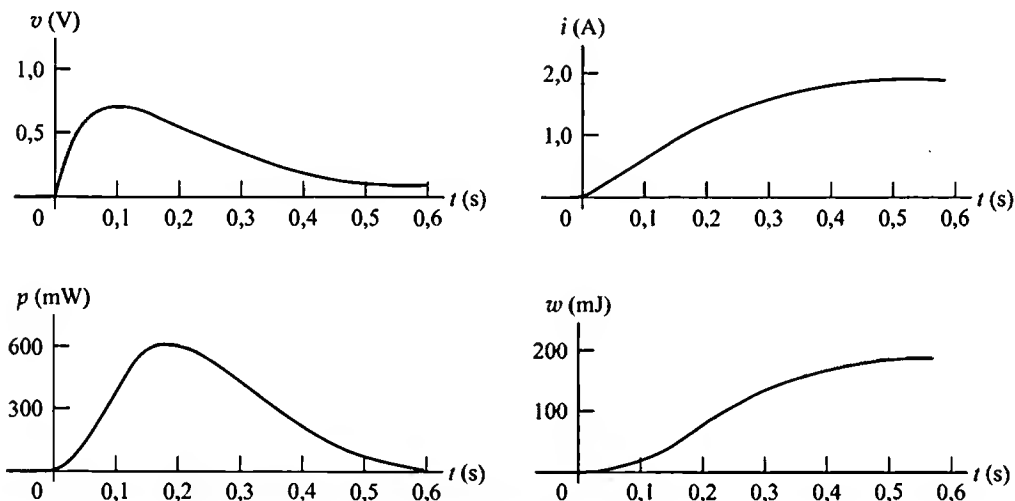


Figura 6.9. Las variables  $i$ ,  $v$ ,  $p$  y  $w$  en función de  $t$  para el Ejemplo 6.2.

### Evaluación del objetivo 1

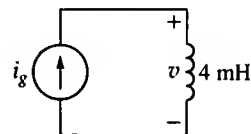
- Conocer y ser capaz de utilizar las ecuaciones de la tensión, la corriente, la potencia y la energía en una bobina.

- 6.1. La fuente de corriente en el circuito mostrado genera el impulso de corriente

$$i_g(t) = 0, \quad t < 0,$$

$$i_g(t) = 8e^{-300t} - 8e^{-1200t} \text{ A}, \quad t \geq 0.$$

Calcule (a)  $v(0)$ ; (b) el instante de tiempo, superior a cero, en que la tensión  $v$  pasa por cero; (c) la expresión de la potencia



entregada a la bobina; (d) el instante en que la potencia entregada a la bobina es máxima; (e) la potencia máxima; (f) la energía máxima almacenada en la bobina,

y (g) el instante de tiempo en que la energía almacenada es máxima.

### RESPUESTA

(a) 28,8 V;

(b) 1,54 ms;

(c)  $-76,8e^{-600t} + 384e^{-1500t} - 307,2e^{-2400t}$  W,  $t \geq 0$ ;

(d) 411,05  $\mu$ s;

(e) 32,72 W;

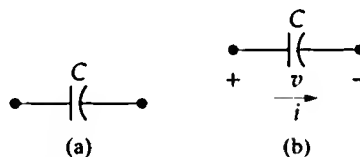
(f) 28,57 mJ; (g) 1,54 ms.

**NOTA** Trate también de resolver los Problemas 6.1 y 6.3 del capítulo.

## 6.2. El condensador

El parámetro de circuito de la capacidad está representado por la letra  $C$ , se mide en faradios (F) y se simboliza gráficamente mediante dos cortas placas paralelas conductoras, como se muestra en la Figura 6.10(a). Puesto que el faradio es una cantidad extremadamente grande de capacidad, los valores prácticos de los condensadores suelen estar en el rango de los picofaradios (pF) o microfaradios ( $\mu$ F).

El símbolo gráfico de un condensador es un recordatorio de que siempre existe una capacidad cuando hay conductores eléctricos separados por un material dieléctrico o aislante. Esta condición implica que la carga eléctrica no es transportada a través del condensador. Aunque aplicar una tensión a los terminales del condensador no puede hacer que una carga se desplace a través del dieléctrico, sí puede desplazar una carga dentro del dieléctrico. A medida que varía la tensión con el tiempo, el desplazamiento de carga también lo hace, provocando lo que se conoce con el nombre de **corriente de desplazamiento**.



**Figura 6.10.** (a) Símbolo de circuito para un condensador. (b) Asignación de la tensión y la corriente de referencia al condensador, según el convenio de signos pasivo.

En los terminales, la corriente de desplazamiento es indistinguible de una corriente de conducción. La corriente es proporcional a la tasa con que varía a lo largo del tiempo la tensión en el condensador; matemáticamente:

$$\text{Ecuación } i-v \text{ DE UN CONDENSADOR} \quad i = C \frac{dv}{dt}, \quad (6.13)$$

donde  $i$  se mide en amperios,  $C$  en faradios,  $v$  en voltios y  $t$  en segundos.

La Ecuación 6.13 refleja el convenio de signos pasivo mostrado en la Figura 6.10(b); es decir, la corriente de referencia está en la dirección de la caída de tensión en bornes del condensador. Si la corriente de referencia estuviera en la dirección del incremento de tensión, la Ecuación 6.13 se escribiría con un signo menos.

Hay dos observaciones importantes que se siguen de la Ecuación 6.13. En primer lugar, la tensión no puede cambiar instantáneamente entre los terminales de un condensador. La Ecuación 6.13 indica que dicho cambio produciría una corriente infinita, lo cual es una imposibilidad física. En segundo lugar, si la tensión entre terminales es constante, la corriente en el condensador es cero. La razón se

halla en que no puede establecerse una corriente de conducción en el material dieléctrico del condensador. Sólo una tensión que varíe con el tiempo puede provocar una corriente de desplazamiento. Por tanto, los condensadores se comportan como circuitos abiertos en presencia de una tensión constante.

La Ecuación 6.13 nos da la corriente del condensador en función de su tensión. También puede resultar útil expresar la tensión en función de la corriente. Para ello, multiplicamos ambos lados de la Ecuación 6.13 por un diferencial de tiempo  $dt$  e integramos los diferenciales resultantes:

$$i dt = C dv \quad \text{o} \quad \int_{v(t_0)}^{v(t)} dx = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i d\tau.$$

Realizando la integración en el lado izquierdo de la segunda ecuación, se obtiene

$$\Rightarrow \text{ECUACIÓN } v\text{-}i \text{ DE UN CONDENSADOR} \quad v(t) = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i d\tau + v(t_0). \quad (6.14)$$

En muchas aplicaciones prácticas de la Ecuación 6.14, el instante inicial es cero, es decir,  $t_0 = 0$ . En este caso, la Ecuación 6.14 queda

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i d\tau + v(0). \quad (6.15)$$

Podemos deducir fácilmente las ecuaciones de la potencia y la energía para un condensador. A partir de la definición de la potencia,

$$\Rightarrow \text{ECUACIÓN DE LA POTENCIA PARA UN CONDENSADOR} \quad p = vi = Cv \frac{dv}{dt}, \quad (6.16)$$

o bien

$$p = i \left[ \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i d\tau + v(t_0) \right]. \quad (6.17)$$

Combinando la definición de la energía con la Ecuación 6.16 se obtiene

$$dw = C v dv,$$

de donde

$$\int_0^w dx = C \int_0^v y dy,$$

o bien

$$\Rightarrow \text{ECUACIÓN DE LA ENERGÍA DE UN CONDENSADOR} \quad w = \frac{1}{2} C v^2. \quad (6.18)$$

En la deducción de la Ecuación 6.18, la referencia de energía cero se corresponde con una tensión cero.

Los Ejemplos 6.4 y 6.5 ilustran la aplicación de las ecuaciones de la corriente, la tensión, la potencia y la energía de un condensador.

### EJEMPLO 6.4 Determinación de la corriente, la tensión, la potencia y la energía de un condensador

Aplicamos el pulso de tensión descrito por las ecuaciones siguientes entre los terminales de un condensador de  $0,5 \mu\text{F}$ :

$$v(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \text{ s}; \\ 4t \text{ V}, & 0 \text{ s} \leq t \leq 1 \text{ s}; \\ 4e^{-(t-1)} \text{ V}, & t \geq 1 \text{ s}. \end{cases}$$

- Deduzca las expresiones correspondientes a la corriente, la potencia y la energía del condensador.
- Dibuje la tensión, la corriente, la potencia y la energía en función del tiempo. Alinee las gráficas verticalmente.
- Especifique el intervalo de tiempo durante el cual se está almacenando energía en el condensador.
- Especifique el intervalo de tiempo durante el cual se está extrayendo energía del condensador.
- Evalúe las integrales

$$\int_0^1 p \, dt \quad \text{y} \quad \int_1^\infty p \, dt$$

y explique su significado.

#### SOLUCIÓN

- A partir de la Ecuación 6.13,

$$i = \begin{cases} (0,5 \times 10^{-6})(0) = 0, & t < 0 \text{ s}; \\ (0,5 \times 10^{-6})(4) = 2 \mu\text{A}, & 0 \text{ s} < t < 1 \text{ s}; \\ (0,5 \times 10^{-6})(-4e^{-(t-1)}) = -2e^{-(t-1)} \mu\text{A}, & t > 1 \text{ s}. \end{cases}$$

La expresión de la potencia se calcula a partir de la Ecuación 6.16:

$$p = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \text{ s}; \\ 4t(2) = 8t \mu\text{W}, & 0 \text{ s} \leq t < 1 \text{ s}; \\ (4e^{-(t-1)})(-2e^{-(t-1)}) = -8e^{-2(t-1)} \mu\text{W}, & t > 1 \text{ s}. \end{cases}$$

La expresión de la energía se sigue directamente de la Ecuación 6.18:

$$w = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \text{ s}; \\ \frac{1}{2}(0,5)16t^2 = 4t^2 \mu\text{J}, & 0 \text{ s} \leq t < 1 \text{ s}; \\ \frac{1}{2}(0,5)16e^{-2(t-1)} = 4e^{-2(t-1)} \mu\text{J}, & t \geq 1 \text{ s}. \end{cases}$$

- La Figura 6.11 muestra la tensión, la corriente, la potencia y la energía en función del tiempo.

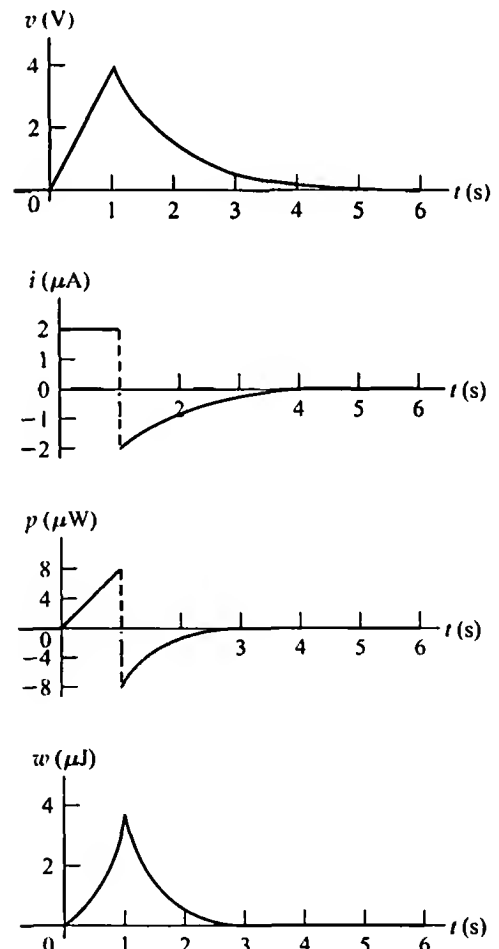


Figura 6.11. Las variables  $v$ ,  $i$ ,  $p$  y  $w$  en función de  $t$  para el Ejemplo 6.4.

- c) Se estará almacenando energía en el condensador mientras la potencia sea positiva. Por tanto, se almacena energía en el intervalo 0-1 s.
- d) El condensador estará entregando energía siempre que la potencia sea negativa. Por tanto, se extrae energía del condensador para todo  $t$  mayor de 1 s.
- e) La integral de  $p \, dt$  es la energía asociada con el intervalo de tiempo correspondiente a los límites de la integral. Por tanto, la primera integral representa la energía almacenada en el condensador entre 0 y 1 s, mientras que la segunda integral representa la

energía devuelta por el condensador en el intervalo que va de 1 s a  $\infty$ :

$$\int_0^1 p \, dt = \int_0^1 8t \, dt = 4t^2 \Big|_0^1 = 4 \, \mu\text{J},$$

$$\begin{aligned} \int_1^\infty p \, dt &= \int_1^\infty (-8e^{-2(t-1)}) \, dt = \\ &= (-8) \frac{e^{-2(t-1)}}{-2} \Big|_1^\infty = -4 \, \mu\text{J}. \end{aligned}$$

La tensión aplicada al condensador vuelve a cero según se va incrementando el tiempo, por lo que la energía devuelta por este condensador ideal debe ser igual a la energía almacenada.

### EJEMPLO 6.5 Cálculo de $v$ , $p$ y $w$ para un condensador en presencia de un pulso triangular de corriente

Aplicamos un pulso triangular de corriente a un condensador de  $0,2 \, \mu\text{F}$  inicialmente descargado. El pulso de corriente está descrito por

$$i(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0; \\ 5000t \, \text{A}, & 0 \leq t \leq 20 \, \mu\text{s}; \\ 0,2 - 5000t \, \text{A}, & 20 \leq t \leq 40 \, \mu\text{s}; \\ 0, & t \geq 40 \, \mu\text{s}; \end{cases}$$

- a) Escriba las expresiones correspondientes a la tensión, la potencia y la energía del condensador para cada uno de los cuatro intervalos de tiempo con los que se ha descrito la corriente.
- b) Dibuje  $i$ ,  $v$ ,  $p$  y  $w$  en función de  $t$ . Alinee las gráficas como se ha especificado en los ejemplos precedentes.
- c) ¿Por qué conserva el condensador una tensión después de que la corriente vuelva a cero?

### SOLUCIÓN

- a) Para  $t < 0$ ,  $v$ ,  $p$  y  $w$  son todas cero.  
Para  $0 \leq t \leq 20 \, \mu\text{s}$ ,

$$v = 5 \times 10^6 \int_0^t 5000\tau \, d\tau + 0 = 12,5 \times 10^9 t^2 \, \text{V},$$

$$p = vi = 62,5 \times 10^{12} t^3 \, \text{W},$$

$$w = \frac{1}{2} C v^2 = 15,625 \times 10^{12} t^4 \, \text{J}.$$

Para  $20 \, \mu\text{s} \leq t \leq 40 \, \mu\text{s}$ ,

$$v = 5 \times 10^6 \int_{20\mu\text{s}}^t (0,2 - 5000\tau) \, d\tau + 5.$$

(Observe que 5 V es la tensión del condensador al final del intervalo precedente). Entonces,

$$v = (10^6 t - 12,5 \times 10^9 t^2 - 10) \, \text{V},$$

$$p = vi,$$

$$\begin{aligned} &= (62,5 \times 10^{12} t^3 - 7,5 \times 10^9 t^2 + \\ &\quad + 2,5 \times 10^5 t - 2) \, \text{W}, \end{aligned}$$

$$w = \frac{1}{2} C v^2,$$

$$\begin{aligned} &= (15,625 \times 10^{12} t^4 - 2,5 \times 10^9 t^3 + \\ &\quad + 0,125 \times 10^6 t^2 - 2t + 10^{-5}) \, \text{J}. \end{aligned}$$

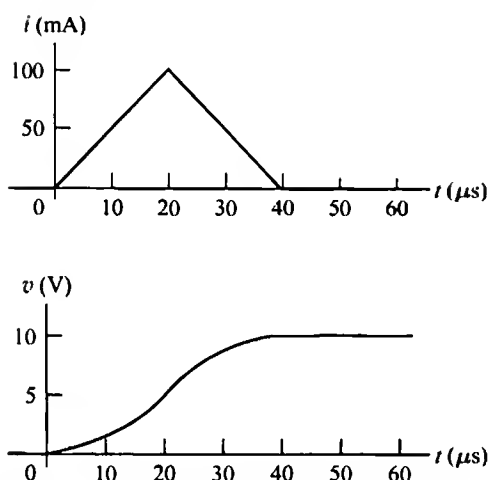
Para  $t \geq 40 \mu\text{s}$ ,

$$v = 10 \text{ V},$$

$$p = vi = 0,$$

$$w = \frac{1}{2}Cv^2 = 10 \mu\text{J}.$$

- b) La corriente de excitación y la tensión, potencia y energía resultantes son las que se muestran en la Figura 6.12.



- c) Observe que la potencia siempre es positiva mientras dura el pulso de corriente, lo que significa que se está almacenando energía de modo continuo en el condensador. Cuando la corriente vuelve a cero, la energía almacenada queda atrapada, porque el condensador ideal no ofrece ningún medio para disipar energía. Por tanto, el condensador conserva una tensión después de que  $i$  vuelva a cero.

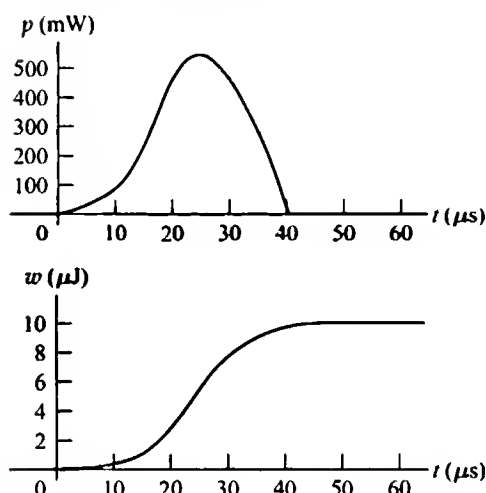
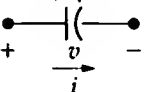


Figura 6.12. Las variables  $i$ ,  $v$ ,  $p$  y  $w$  en función de  $t$  para el Ejemplo 6.5.

## Evaluación del objetivo 2

- Conocer y ser capaz de utilizar las ecuaciones de la tensión, la corriente, la potencia y la energía de un condensador.

- 6.2. La tensión entre los terminales del condensador de  $0,6 \mu\text{F}$  mostrado en la figura es 0 para  $t < 0$  y  $40e^{-15.000t}$  sen  $30.000t$  V para  $t \geq 0$ . Calcule (a)  $i(0)$ ; (b) la potencia suministrada al condensador en  $t = \pi/80$  ms; y (c) la energía almacenada en el condensador en  $t = \pi/80$  ms.

0,6  $\mu\text{F}$       **RESPUESTA** (a) 0,72 A;  
 (b) -649,2 mW;  
 +      -      (c) 126,13  $\mu\text{J}$ .

- 6.3. La corriente en el condensador del Problema de evaluación 6.2 es 0 para  $t < 0$  y  $3 \cos 50.000t$  A para  $t \geq 0$ . Calcule (a)  $v(t)$ ; (b) la potencia máxima entregada al condensador en cualquier instante de tiempo; y (c) la energía máxima almacenada en el condensador en cualquier instante de tiempo.

**RESPUESTA** (a)  $100 \text{ sen } 50.000t$  V,  $t \geq 0$ ; (b) 150 W; (c) 3 mJ.

**NOTA** Trate también de resolver los Problemas 6.14 y 6.15 del capítulo.

### 6.3. Combinaciones serie-paralelo de bobinas y condensadores

Al igual que las combinaciones serie-paralelo de resistencias pueden reducirse a una única resistencia equivalente, las combinaciones serie-paralelo de bobinas o condensadores puede reducirse a una única bobina o condensador. La Figura 6.13 muestra un conjunto de bobinas en serie. Aquí, las bobinas están obligadas a transportar la misma corriente; por tanto, definimos una única corriente para la combinación en serie. Las caídas de tensión en bornes de las bobinas individuales son

$$v_1 = L_1 \frac{di}{dt}, \quad v_2 = L_2 \frac{di}{dt} \quad \text{y} \quad v_3 = L_3 \frac{di}{dt}.$$

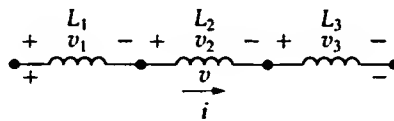


Figura 6.13. Bobinas en serie.

La tensión en bornes de la conexión en serie es

$$v = v_1 + v_2 + v_3 = (L_1 + L_2 + L_3) \frac{di}{dt},$$

a partir de lo cual debería resultar obvio que la inductancia equivalente de una serie de bobinas conectadas en serie es la suma de las inductancias individuales. Para  $n$  bobinas en serie,

#### COMBINACIÓN DE BOBINAS EN SERIE

$$L_{eq} = L_1 + L_2 + L_3 + \cdots + L_n. \quad (6.19)$$

Si las bobinas originales transportan una corriente inicial  $i(t_0)$ , la bobina equivalente transporta la misma corriente inicial. La Figura 6.14 muestra el circuito equivalente para una serie de bobinas en serie que transportan una corriente inicial.

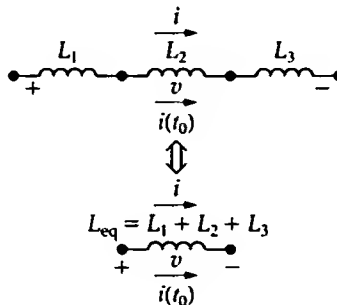
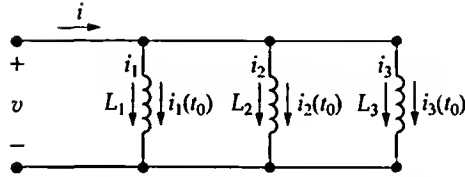


Figura 6.14. Un circuito equivalente para bobinas en serie que transportan una corriente inicial  $i(t_0)$ .

Las bobinas en paralelo tienen la misma tensión entre sus terminales. En el circuito equivalente, la corriente en cada bobina está en función de la tensión entre los terminales y de la corriente inicial que atraviesa la bobina. La Figura 6.15 muestra tres bobinas en paralelo. Aquí, las corrientes de las bobinas individuales son



$$\begin{aligned}
 i_1 &= \frac{1}{L_1} \int_{t_0}^t v \, d\tau + i_1(t_0), \\
 i_2 &= \frac{1}{L_2} \int_{t_0}^t v \, d\tau + i_2(t_0), \\
 i_3 &= \frac{1}{L_3} \int_{t_0}^t v \, d\tau + i_3(t_0).
 \end{aligned} \tag{6.20}$$



**Figura 6.15.** Tres bobinas en paralelo.

La corriente en los terminales de las tres bobinas en paralelo es la suma de las corrientes de todas las bobinas:

$$i = i_1 + i_2 + i_3. \tag{6.21}$$

Sustituyendo la Ecuación 6.20 en la Ecuación 6.21 se obtiene

$$i = \left( \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} \right) \int_{t_0}^t v \, d\tau + i_1(t_0) + i_2(t_0) + i_3(t_0). \tag{6.22}$$

Ahora podemos interpretar la Ecuación 6.22 en términos de una única bobina; es decir,

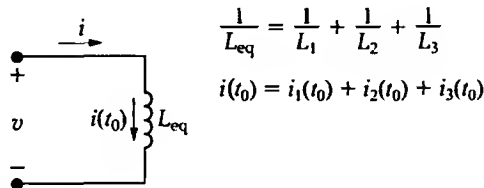
$$i = \frac{1}{L_{eq}} \int_{t_0}^t v \, d\tau + i(t_0). \tag{6.23}$$

Comparando la Ecuación 6.23 con la Ecuación 6.22, vemos que

$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} \tag{6.24}$$

$$i(t_0) = i_1(t_0) + i_2(t_0) + i_3(t_0). \tag{6.25}$$

La Figura 6.16 muestra el circuito equivalente de las tres bobinas en paralelo de la Figura 6.15.



**Figura 6.16.** Un circuito equivalente para tres bobinas en paralelo.

Los resultados expresados en las Ecuaciones 6.24 y 6.25 pueden ampliarse a  $n$  bobinas en paralelo:

✦ **COMBINACIÓN DE BOBINAS EN PARALELO**

$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \cdots + \frac{1}{L_n} \quad (6.26)$$

✦ **CORRIENTE INICIAL DE LA BOBINA EQUIVALENTE**

$$i(t_0) = i_1(t_0) + i_2(t_0) + \cdots + i_n(t_0). \quad (6.27)$$

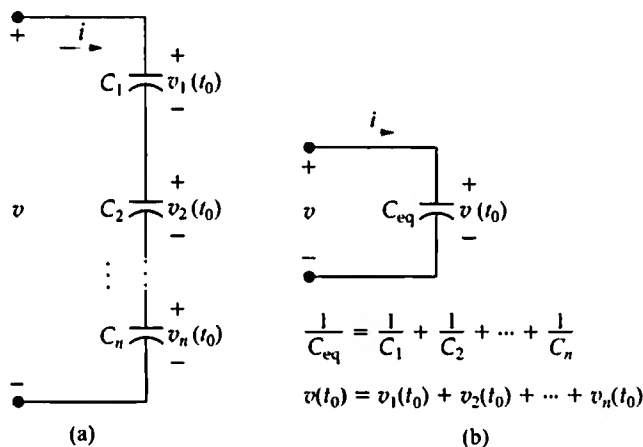
Los condensadores conectados en serie pueden reducirse a un único condensador equivalente. El recíproco de la capacidad equivalente es igual a la suma de los recíprocos de las capacidades individuales. Si cada condensador tiene su propia tensión inicial, la tensión inicial en el condensador equivalente es la suma algebraica de las tensiones iniciales de los condensadores individuales. La Figura 6.17 y las siguientes ecuaciones resumen estas observaciones:

✦ **COMBINACIÓN DE CONDENSADORES EN SERIE**

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n}, \quad (6.28)$$

✦ **TENSIÓN INICIAL DEL CONDENSADOR EQUIVALENTE**

$$v(t_0) = v_1(t_0) + v_2(t_0) + \cdots + v_n(t_0). \quad (6.29)$$



**Figura 6.17.** Un circuito equivalente para condensadores conectados en serie. (a) Los condensadores en serie. (b) El circuito equivalente.

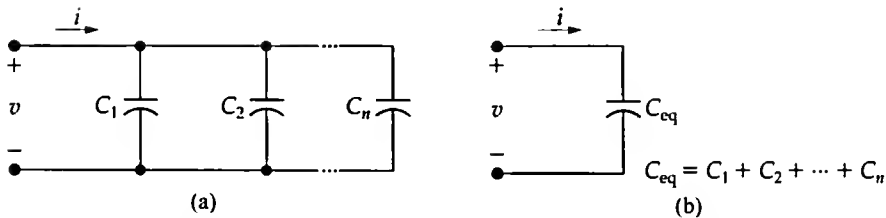
Dejamos como ejercicio para el lector la deducción del circuito equivalente para un conjunto de condensadores conectados en serie. (Véase el Problema 6.30).

La capacidad equivalente de una serie de condensadores conectados en paralelo es simplemente la suma de las capacidades de los condensadores individuales, como muestran la Figura 6.18 y la siguiente ecuación:

✦ **COMBINACIÓN DE CONDENSADORES EN PARALELO**

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 + \cdots + C_n. \quad (6.30)$$

Los condensadores conectados en paralelo deben tener la misma tensión entre sus terminales. Por tanto, si existe una tensión inicial en bornes de los condensadores originales conectados en paralelo, esta misma tensión inicial aparecerá en el condensador equivalente  $C_{eq}$ . Dejamos como ejercicio al lec-



**Figura 6.18.** Un circuito equivalente para condensadores conectados en paralelo.  
(a) Condensadores en paralelo. (b) El circuito equivalente.

tor la deducción del circuito equivalente para una serie de condensadores en paralelo. (Véase el Problema 6.31).

Hablaremos más en detalle acerca de los circuitos equivalentes serie-paralelo de bobinas y condensadores en el Capítulo 7, en el que interpretaremos estos resultados basándonos en su aplicación práctica.

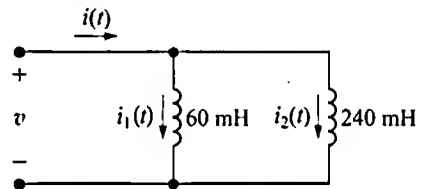
### Evaluación del objetivo 3

- Ser capaz de combinar bobinas o condensadores en serie y en paralelo para formar una única bobina o condensador equivalente.

**6.4.** Los valores iniciales de  $i_1$  e  $i_2$  en el circuito mostrado son  $+3$  A y  $-5$  A, respectivamente. La tensión en los terminales de las bobinas en paralelo para  $t \geq 0$  es  $-30e^{-5t}$  mV.

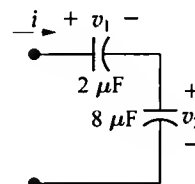
- a) Si sustituimos las bobinas en paralelo por una única bobina, ¿cuál será su inductancia?
- b) ¿Cuál es la corriente inicial y su dirección de referencia en la bobina equivalente?
- c) Utilice la bobina equivalente para calcular  $i(t)$ .
- d) Calcule  $i_1(t)$  e  $i_2(t)$ . Verifique que las soluciones para  $i_1(t)$ ,  $i_2(t)$  e  $i(t)$  satisfacen la ley de Kirchhoff de las corrientes.

**RESPUESTA** (a) 48 mH; (b) 2 A, hacia arriba; (c)  $0,125e^{-5t} - 2,125$  A,  $t \geq 0$ ;  
(d)  $i_1(t) = 0,1e^{-5t} + 2,9$  A,  $i_2(t) = 0,025e^{-5t} - 5,025$  A,  $t \geq 0$ .



- 6.5.** La corriente en los terminales de los condensadores mostrados es de  $240e^{-10t}$   $\mu$ A para  $t \geq 0$ . Los valores iniciales de  $v_1$  y  $v_2$  son  $-10$  V y  $-5$  V, respectivamente. Calcule la energía total atrapada en los condensadores cuando  $t \rightarrow \infty$ . (Sugerencia: no combine los condensadores en serie; calcule la energía atrapada en cada uno de ellos y luego sume los valores).

**RESPUESTA** 20  $\mu$ J.



**NOTA** Trate también de resolver los Problemas 6.21, 6.22, 6.26 y 6.27 del capítulo.

## 6.4. Inductancia mutua

El campo magnético que hemos considerado en nuestro estudio de las bobinas en la Sección 6.1 estaba restringido a un único circuito. Allí dijimos que la inductancia es el parámetro que relaciona una tensión con una corriente variable en el tiempo que existe en el mismo circuito; en este sentido, resulta más preciso denominar a la inductancia mediante el término autoinductancia.

Vamos a considerar ahora la situación en la que hay dos circuitos enlazados por un campo magnético. En este caso, la tensión inducida en el segundo circuito puede ser puesta en relación con la corriente variable en el tiempo que existe en el primer circuito, utilizando para ello un parámetro que se denomina inductancia mutua. El circuito mostrado en la Figura 6.19 representa dos bobinas acopladas magnéticamente. La autoinductancia de las dos bobinas se denomina en la figura  $L_1$  y  $L_2$ , mientras que la inductancia mutua se ha denominado  $M$ . La flecha bidireccional asociada con  $M$  indica el par de bobinas que presentan este valor de inductancia mutua. Esta notación es particularmente necesaria en aquellos circuitos que contengan más de una pareja de bobinas acopladas magnéticamente.

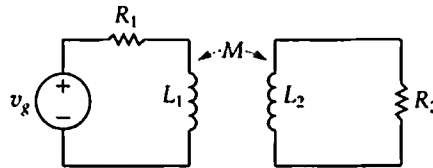


Figura 6.19. Dos bobinas acopladas magnéticamente.

La forma más fácil de analizar circuitos que contengan inductancias mutuas consiste en utilizar las corrientes de malla. El problema consiste en escribir las ecuaciones de circuito en términos de las corrientes que atraviesan las bobinas. En primer lugar, seleccione la dirección de referencia para la corriente de cada bobina. La Figura 6.20 muestra sendas corrientes de referencia arbitrariamente seleccionadas. Después de elegir las direcciones de referencia para  $i_1$  e  $i_2$ , sume las tensiones existentes alrededor de cada camino cerrado. Debido a la inductancia mutua  $M$ , habrá dos tensiones en bornes de cada bobina, una tensión autoinducida y una tensión de inducción mutua. La tensión autoinducida es el producto de la autoinductancia de la bobina y de la primera derivada de la corriente que atraviesa dicha bobina. La tensión de inducción mutua es el producto de la inductancia mutua de las bobinas y de la primera derivada de la corriente existente en la otra bobina. Considere la bobina de la izquierda en la Figura 6.20, cuya autoinductancia tiene el valor  $L_1$ . La tensión autoinducida en bornes de esta bobina es  $L_1(di_1/dt)$  y la tensión de inducción mutua es  $M(di_2/dt)$ . Pero, ¿qué sucede con las polaridades de estas dos tensiones?

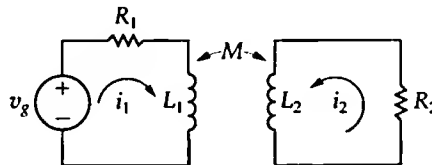
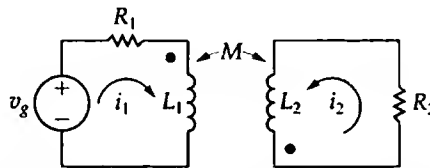


Figura 6.20. Corrientes  $i_1$  e  $i_2$  de las bobinas utilizadas para describir el circuito mostrado en la Figura 6.19.

Utilizando el convenio de signos pasivo, la tensión autoinducida es una caída de tensión en la dirección de la corriente que genera dicha tensión. Pero la polaridad de la tensión de inducción mutua de-

pende de la forma en que estén arrolladas las bobinas en relación con la dirección de referencia de las corrientes que las atraviesan. En general, analizar los detalles de devanados o arrollamientos mutuamente acoplados resulta muy engorroso. En lugar de ello, lo que hacemos es tener presentes las polaridades mediante un método denominado **convenio de puntos**, en el cual se coloca un punto en uno de los terminales de cada devanado, como se muestra en la Figura 6.21. Estos puntos nos proporcionan la información de signos y nos permiten dibujar las bobinas esquemáticamente en lugar de tener que mostrar cómo están arrolladas alrededor de un núcleo.



**Figura 6.21.** El circuito de la Figura 6.20 con puntos añadidos a las bobinas para indicar la polaridad de las tensiones de inducción mutua.

La regla para utilizar el convenio de puntos con el fin de determinar la polaridad de la tensión de inducción mutua puede resumirse como sigue:

✦ **CONVENIO DE PUNTOS PARA BOBINAS MUTUAMENTE ACOPLADAS**

Cuando la dirección de referencia de una corriente entra por el terminal con punto de una bobina, la polaridad de referencia de la tensión que dicha corriente induce en la otra bobina es positiva en el terminal que también tiene un punto.

Dicho de otro modo,

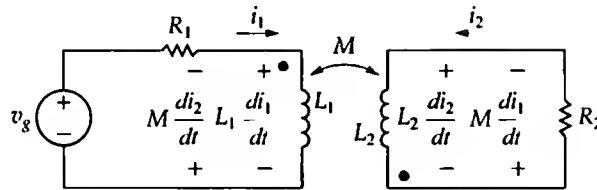
✦ **CONVENIO DE PUNTOS PARA BOBINAS MUTUAMENTE ACOPLADAS (ALTERNATIVO)**

Cuando la dirección de referencia de una corriente sale por el terminal con punto de una bobina, la polaridad de referencia de la tensión que dicha corriente induce en la otra bobina es negativa en el terminal que tiene un punto.

En casi todos los casos, indicaremos los correspondientes puntos para las bobinas en los diagramas de circuito del libro. Lo que debe aprender es a escribir las ecuaciones de circuito apropiadas, partiendo de la comprensión del concepto de inductancia mutua y del convenio de puntos. Resulta posible saber dónde colocar los puntos de polaridad, cuando éstos no se proporcionen, examinando la configuración física de un circuito real o probando éste en el laboratorio. Trataremos estos procedimientos después de explicar cómo se utilizan dichas marcas de puntos.

En la Figura 6.21, el convenio de puntos indica que la polaridad de referencia para la tensión inducida en la bobina 1 por la corriente  $i_2$  es negativa en el terminal con punto de la bobina 1. Esta tensión ( $M di_2/dt$ ) es un incremento de tensión con respecto a  $i_1$ . La tensión inducida en la bobina 2 por la corriente  $i_1$  es  $M di_1/dt$  y su polaridad de referencia es positiva en el terminal con punto de la bobina 2. Esta tensión es un incremento de tensión en la dirección de  $i_2$ . La Figura 6.22 muestra las tensiones autoinducidas y de inducción mutua en bornes de las bobinas 1 y 2, junto con sus marcas de polaridad.

Ahora examinaremos la suma de las tensiones alrededor de cada lazo cerrado. En las Ecuaciones 6.31 y 6.32, los incrementos de tensión en la dirección de referencia de una corriente son negativos:



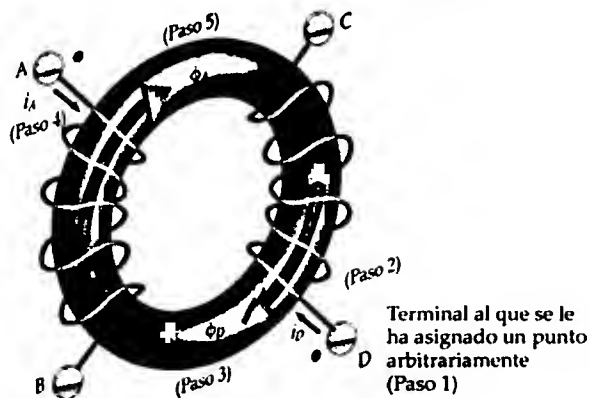
**Figura 6.22.** Tensiones autoinducidas y de inducción mutua que aparecen en bornes de las bobinas mostradas en la Figura 6.21.

$$-v_g + i_1 R_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} = 0, \quad (6.31)$$

$$i_2 R_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} = 0. \quad (6.32)$$

## Procedimiento para determinar las marcas de puntos

Veamos ahora dos métodos para determinar las marcas de puntos. El primero de los métodos asume que conocemos la disposición física de las dos bobinas y el modo en que se ha realizado cada devanado en un circuito magnéticamente acoplado. Los siguientes seis pasos, aplicados aquí a la Figura 6.23, permiten determinar las correspondientes marcas de puntos:



**Figura 6.23.** Un conjunto de bobinas donde se muestra un método para determinar las correspondientes marcas de puntos.

- Seleccione arbitrariamente un terminal, como por ejemplo el terminal D, en una bobina y márquelo con un punto.
- Asigne una corriente que entre por el terminal con punto y denomínela  $i_D$ .
- Utilice la regla de la mano derecha<sup>1</sup> para determinar la dirección del campo magnético establecido por  $i_D$  dentro de las bobinas acopladas y denomine dicho campo  $\phi_D$ .
- Seleccione arbitrariamente un terminal de la segunda bobina, como por ejemplo el terminal A, y asigne una corriente que entre por este terminal, denominándola  $i_A$ .

<sup>1</sup> Vea la explicación de la ley de Faraday en la página 249.

- e) Utilice la regla de la mano derecha para determinar la dirección del flujo establecido por  $i_A$  dentro de las bobinas acopladas, denominando a este flujo  $\phi_A$ .

Compare las direcciones de los dos flujos,  $\phi_D$  y  $\phi_A$ . Si los flujos tienen la misma dirección de referencia, coloque un punto en el terminal de la segunda bobina por donde entra la corriente de prueba ( $i_A$ ). (En la Figura 6.23, los flujos  $\phi_D$  y  $\phi_A$  tienen la misma dirección de referencia, por lo que hemos puesto un punto en el terminal A). Si los flujos tienen direcciones de referencia distintas, coloque un punto en el terminal de la segunda bobina por donde sale la corriente de prueba).

Las polaridades relativas de las bobinas magnéticamente acopladas también pueden determinarse de modo experimental. Esta capacidad es importante, porque en algunas situaciones es imposible determinar cómo están devanadas las bobinas alrededor de los núcleos. El método experimental consiste en conectar una fuente de tensión continua, una resistencia, un conmutador y un voltímetro de continua al par de bobinas, como se muestra en la Figura 6.24. El recuadro sombreado que cubre las bobinas pretende resaltar que en este caso no resulta posible la inspección física de las bobinas. La resistencia  $R$  limita la magnitud de la corriente suministrada por la fuente de tensión continua.

El terminal de la bobina conectado al terminal positivo de la fuente de continua a través del conmutador y de la resistencia de alimentación recibe una marca de polaridad, como se muestra en la Figura 6.24. Cuando se cierra el conmutador, se observa la deflexión del voltímetro. Si esa deflexión momentánea va en sentido positivo, se asignará la otra marca de polaridad al terminal de la bobina conectado al terminal positivo del voltímetro. Si la deflexión va en sentido negativo, el que recibirá la marca de polaridad es el terminal de la bobina conectado al terminal negativo del voltímetro.

Fig.

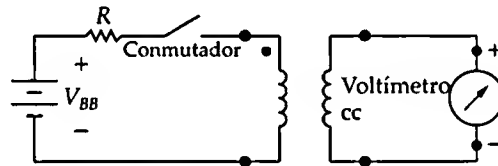


Figura 6.24. Disposición experimental para determinar las marcas de polaridad.

El Ejemplo 6.6 muestra cómo utilizar las marcas de puntos para escribir un conjunto de ecuaciones para un circuito que contenga bobinas magnéticamente acopladas.

### EJEMPLO 6.5 Determinación de las ecuaciones de las corrientes de malla en un circuito con bobinas magnéticamente acopladas

- a) Escriba un conjunto de ecuaciones de corrientes de malla que describa el circuito de la Figura 6.25 en función de las corrientes  $i_1$  e  $i_2$ .

$$i_1 = 4 + 64e^{-5t} - 68e^{-4t} \text{ A,}$$

$$i_2 = 1 - 52e^{-5t} + 51e^{-4t} \text{ A.}$$

#### SOLUCIÓN

- b) Verifique que, si no hay energía almacenada en el circuito en  $t = 0$  y si  $i_g = 16 - 16e^{-5t}$  A, las soluciones correspondientes a  $i_1$  e  $i_2$  son

- a) Sumando las tensiones alrededor de la malla  $i_1$  se obtiene

$$4 \frac{di_1}{dt} + 8 \frac{d}{dt}(i_g - i_2) + 20(i_1 - i_2) + 5(i_1 - i_g) = 0.$$

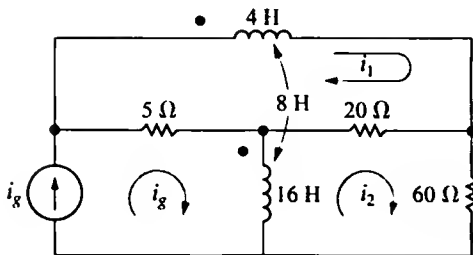


Figura 6.25. Circuito para el Ejemplo 6.6.

La ecuación para la malla  $i_2$  es

$$20(i_2 - i_1) + 60i_2 + 16 \frac{d}{dt}(i_2 - i_g) - 8 \frac{di_1}{dt} = 0.$$

Observe que la tensión en bornes de la bobina de 4 H debido a la corriente  $(i_g - i_2)$ , es decir,  $8d(i_g - i_2)/dt$ , constituye una caída de tensión en la dirección de  $i_1$ . La tensión inducida en la bobina de 16 H por la corriente  $i_1$ , es decir,  $8di_1/dt$ , es un incremento de tensión en la dirección de  $i_2$ .

- b) Para comprobar la validez de  $i_1$  e  $i_2$ , comenzamos probando los valores iniciales y finales de  $i_1$  e  $i_2$ . Sabemos por hipótesis que  $i_1(0) = i_2(0) = 0$ . A partir de las soluciones dadas, tenemos

$$i_1(0) = 4 + 64 - 68 = 0,$$

$$i_2(0) = 1 - 52 + 51 = 0.$$

Ahora observamos que, a medida que  $t$  tiende a infinito, la corriente de la fuente ( $i_g$ ) se aproxima a un valor constante de 16

A, por lo que las bobinas magnéticamente acopladas se comportan como cortocircuitos. Por tanto, en  $t = \infty$ , el circuito se reduce al mostrado en la Figura 6.26. A partir de esta figura vemos que en  $t = \infty$ , las tres resistencias están en paralelo con la fuente de 16 A. La resistencia equivalente es 3,75  $\Omega$  y, por tanto, la tensión en bornes de la fuente de corriente de 16 A es de 60 V. De aquí se sigue que

$$i_1(\infty) = \frac{60}{20} + \frac{60}{60} = 4 \text{ A},$$

$$i_2(\infty) = \frac{60}{60} = 1 \text{ A}.$$

Estos valores concuerdan con los valores finales predichos por las soluciones de  $i_1$  e  $i_2$ . Finalmente, comprobamos las soluciones viendo si satisfacen las ecuaciones diferenciales que hemos hallado en el apartado (a). Dejamos esta comprobación final como ejercicio para el lector (véase el Problema 6.37).

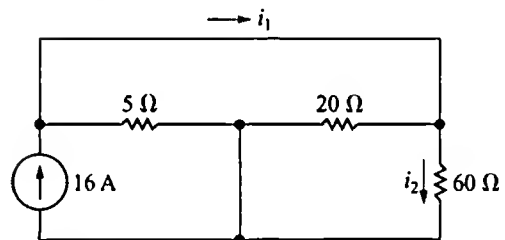


Figura 6.26. El circuito del Ejemplo 6.6 cuando  $t = \infty$ .

#### Evaluación del objetivo 4

- Utilizar el convenio de puntos para escribir las ecuaciones de las corrientes de malla para bobinas magnéticamente acopladas.
- 6.6. a) Escriba un conjunto de ecuaciones de corrientes de malla para el circuito del Ejemplo 6.6 si el punto de la bobina de 4 H se encuentra en el terminal de la derecha, si se invierte la dirección de referencia de  $i_g$  y si se incrementa la resistencia de 60  $\Omega$  a 780  $\Omega$ .
- b) Verifique que, si no hay energía almacenada en el circuito para  $t = 0$  y si  $i_g = 1,96 - 1,96e^{-4t}$  A, las soluciones de las



ecuaciones diferenciales calculadas en el apartado (a) de este problema de evaluación son

$$i_1 = -0,4 - 11,6e^{-4t} + 12e^{-5t} \text{ A},$$

$$i_2 = -0,01 - 0,99e^{-4t} + e^{-5t} \text{ A}.$$

### RESPUESTA

$$(a) 4(di_1/dt) + 25i_1 + 8(di_2/dt) - 20i_2 = -5i_1 - 8(di_1/dt) \text{ y } 8(di_1/dt) - 20i_1 + 16(di_2/dt) + 800i_2 = -16(di_1/dt).$$

(b) Efectivamente, se cumple.

**NOTA** *Trate también de resolver el Problema 6.34 del capítulo.*

## 6.5. Un examen más detallado de la inductancia mutua

Para poder explicar adecuadamente el parámetro de circuito denominado inductancia mutua y para examinar las limitaciones y suposiciones realizadas en el análisis cualitativo presentado en la Sección 6.4, vamos a comenzar con una descripción de la autoinductancia más cuantitativa que la que antes hemos proporcionado.

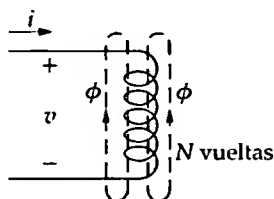
### Una revisión de la autoinductancia

El concepto de inductancia se lo debemos a Michael Faraday, que realizó trabajos pioneros de investigación en esta área a principios del siglo XIX. Faraday postuló que un campo magnético está compuesto por líneas de fuerza que rodean a aquellos conductores que transportan corriente. Podemos visualizar estas líneas de fuerza como si fueran gomas elásticas cerradas sobre sí mismas y capaces de almacenar energía. A medida que la corriente aumenta o se reduce, las gomas elásticas (es decir, las líneas de fuerza) se alejan del conductor o se aprietan en torno a él. La tensión inducida en el conductor es proporcional al número de líneas que rodean al conductor. Esta imagen de la tensión inducida está expresada por la denominada ley de Faraday, que es

$$v = \frac{d\lambda}{dt}, \quad (6.33)$$

donde  $\lambda$  se denomina enlace de flujo y se mide en webers por vuelta.

¿Cómo llegamos a partir de la ley de Faraday a la definición de inductancia presentada en la Sección 6.1? Vamos a hacerlo tomando como referencia la Figura 6.27.



**Figura 6.27.** Representación de un campo magnético que rodea a una bobina de  $N$  vueltas.

Las líneas que rodean las  $N$  vueltas y que están etiquetadas con el símbolo  $\phi$  representan las líneas de fuerza que forman el campo magnético. La intensidad del campo magnético depende de la intensidad de la corriente; mientras que la orientación espacial del campo magnético depende de la dirección

de la corriente. La regla que relaciona la orientación del campo con la dirección de la corriente se denomina regla de la mano derecha: cuando se cierran los dedos de la mano derecha alrededor de la bobina de modo que los dedos apunten en la dirección de la corriente, el pulgar apunta en la dirección de la parte del campo magnético contenida dentro de la bobina. El flujo de enlace es el producto del campo magnético ( $\phi$ ), medido en webers (Wb), por el número de vueltas de cable contenidas dentro del campo ( $N$ ):

$$\lambda = N\phi. \quad (6.34)$$

La magnitud del flujo,  $\phi$ , está relacionada con la magnitud de la corriente de la bobina de acuerdo con la fórmula

$$\phi = \mathcal{P} Ni, \quad (6.35)$$

donde  $N$  es el número de vueltas de la bobina y  $\mathcal{P}$  es la permeancia del espacio ocupado por el flujo. La permeancia es una magnitud que describe las propiedades magnéticas de dicho espacio y, por ello, una explicación detallada de la permeancia cae fuera del alcance de este libro. Lo único que necesitamos observar es que, cuando el espacio en el que está contenido el flujo está compuesto de materiales magnéticos (como hierro, níquel o cobalto), la permeancia varía con el flujo, lo que da una relación no lineal entre  $\phi$  e  $i$ . Pero, cuando el espacio donde está contenido el flujo está compuesto de materiales no magnéticos, la permeancia es constante, por lo que la relación entre  $\phi$  e  $i$  es lineal. Observe, a partir de la Ecuación 6.35, que el flujo es también proporcional al número de vueltas de cable que forman la bobina.

Aquí, vamos a suponer que el material del núcleo (el espacio en el que está contenido el flujo) es no magnético. Entonces, sustituyendo las Ecuaciones 6.34 y 6.35 en la Ecuación 6.33, se obtiene

$$\begin{aligned} v &= \frac{d\lambda}{dt} = \frac{d(N\phi)}{dt} \\ &= N \frac{d\phi}{dt} = N \frac{d}{dt}(\mathcal{P} Ni) \\ &= N^2 \mathcal{P} \frac{di}{dt} = L \frac{di}{dt}, \end{aligned} \quad (6.36)$$

que muestra que la autoinductancia es proporcional al cuadrado del número de vueltas de cable conductor que forman la bobina. Haremos uso de esta observación más adelante.

La polaridad de la tensión inducida en el circuito de la Figura 6.27 refleja la reacción del campo a la corriente que está creándolo. Por ejemplo, cuando  $i$  está incrementándose,  $di/dt$  es positiva y  $v$  es positiva. Por tanto, se requiere energía para establecer el campo magnético. El producto  $vi$  nos da la velocidad a la que se almacena energía en el campo. Cuando el campo se colapsa,  $di/dt$  es negativa y, de nuevo, la polaridad de la tensión inducida está en oposición al cambio experimentado. A medida que el campo se colapsa alrededor de la bobina, se devuelve energía al circuito.

Teniendo en mente estos conceptos más detallados sobre la autoinductancia, vamos a volver ahora nuestra atención de nuevo a la inductancia mutua.

## El concepto de inductancia mutua

La Figura 6.28 muestra dos bobinas magnéticamente acopladas. Puede verificar que las marcas de polaridad en las dos bobinas concuerdan con las direcciones de los devanados y de las corrientes que se muestran. El número de vueltas en las bobinas son  $N_1$  y  $N_2$ , respectivamente. La bobina 1 está excita-

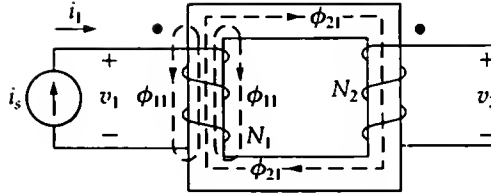


Figura 6.28. Dos bobinas magnéticamente acopladas.

da por una fuente de corriente variable en el tiempo que establece la corriente  $i_1$  en las  $N_1$  vueltas. La bobina 2 no está excitada por ninguna fuente y está en circuito abierto. Ambas bobinas están devanadas sobre un núcleo no magnético. El flujo producido por la corriente  $i_1$  puede dividirse en dos componentes, denominadas  $\phi_{11}$  y  $\phi_{21}$ . La componente  $\phi_{11}$  es el flujo producido por  $i_1$  que sólo rodea a las  $N_1$  vueltas. La componente  $\phi_{21}$  es el flujo producido por  $i_1$  que rodea tanto a las  $N_2$  vueltas como a las  $N_1$  vueltas. El primer dígito del subíndice del flujo proporciona el número de la bobina, mientras que el segundo hace referencia a la corriente que genera el flujo. Así,  $\phi_{11}$  es un flujo que rodea a la bobina 1 y que está producido por la corriente que atraviesa a la bobina 1, mientras que  $\phi_{21}$  es un flujo que rodea a la bobina 2 y que está producido por la corriente existente en la bobina 1. El flujo total que rodea a la bobina 1 es  $\phi_1$ , que será la suma de  $\phi_{11}$  y de  $\phi_{21}$ :

$$\phi_1 = \phi_{11} + \phi_{21}. \quad (6.37)$$

El flujo  $\phi_1$  y sus componentes  $\phi_{11}$  y  $\phi_{21}$  están relacionados con la corriente  $i_1$  de la bobina de la forma siguiente:

$$\phi_1 = \mathcal{P}_1 N_1 i_1, \quad (6.38)$$

$$\phi_{11} = \mathcal{P}_{11} N_1 i_1, \quad (6.39)$$

$$\phi_{21} = \mathcal{P}_{21} N_1 i_1, \quad (6.40)$$

donde  $\mathcal{P}_1$  es la permeancia del espacio ocupado por el flujo  $\phi_1$ ,  $\mathcal{P}_{11}$  es la permeancia del espacio ocupado por el flujo  $\phi_{11}$  y  $\mathcal{P}_{21}$  es la permeancia del espacio ocupado por el flujo  $\phi_{21}$ . Sustituyendo las Ecuaciones 6.38, 6.39 y 6.40 en la Ecuación 6.37, obtenemos la relación entre la permeancia del espacio ocupado por el flujo total  $\phi_1$  y las permeancias de los espacios ocupados por sus componentes  $\phi_{11}$  y  $\phi_{21}$ :

$$\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_{11} + \mathcal{P}_{21}. \quad (6.41)$$

Ahora usamos la ley de Faraday para calcular las expresiones correspondientes a  $v_1$  y  $v_2$ :

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{d\lambda_1}{dt} = \frac{d(N_1 \phi_1)}{dt} = N_1 \frac{d}{dt} (\phi_{11} + \phi_{21}) \\ &= N_1^2 (\mathcal{P}_{11} + \mathcal{P}_{21}) \frac{di_1}{dt} = N_1^2 \mathcal{P}_1 \frac{di_1}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt}, \end{aligned} \quad (6.42)$$

y

$$\begin{aligned} v_2 &= \frac{d\lambda_2}{dt} = \frac{d(N_2 \phi_{21})}{dt} = N_2 \frac{d}{dt} (\mathcal{P}_{21} N_1 i_1) \\ &= N_2 N_1 \mathcal{P}_{21} \frac{di_1}{dt}. \end{aligned} \quad (6.43)$$

El coeficiente de  $di_1/dt$  en la Ecuación 6.42 es la autoinductancia de la bobina 1. El coeficiente de  $di_1/dt$  en la Ecuación 6.43 es la inductancia mutua entre las bobinas 1 y 2. Así,

$$M_{21} = N_2 N_1 \mathcal{P}_{21}. \quad (6.44)$$

El subíndice de  $M$  especifica una inductancia que relaciona la tensión inducida en la bobina 2 con la corriente que atraviesa la bobina 1.

El coeficiente de inductancia mutua nos permite escribir

$$v_2 = M_{21} \frac{di_1}{dt}. \quad (6.45)$$

Observe que se utiliza el convenio de puntos para asignar la referencia de polaridad de  $v_2$  a la Figura 6.28.

Para las bobinas acopladas en la Figura 6.28, si excitamos la bobina 2 con una fuente de corriente variable en el tiempo ( $i_2$ ) y dejamos en circuito abierto la bobina 1, nos queda la disposición de circuito mostrada en la Figura 6.29. De nuevo, la referencia de polaridad asignada a  $v_1$  está basada en el convenio de puntos.

El flujo total que rodea a la bobina 2 es

$$\phi_2 = \phi_{22} + \phi_{12}. \quad (6.46)$$

El flujo  $\phi_2$  y sus componentes  $\phi_{22}$  y  $\phi_{12}$  están relacionados con la corriente  $i_2$  de la bobina en la forma siguiente:

$$\phi_2 = \mathcal{P}_2 N_2 i_2, \quad (6.47)$$

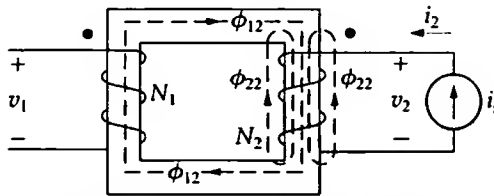
$$\phi_{22} = \mathcal{P}_{22} N_2 i_2, \quad (6.48)$$

$$\phi_{12} = \mathcal{P}_{12} N_2 i_2. \quad (6.49)$$

Las tensiones  $v_2$  y  $v_1$  son

$$v_2 = \frac{d\lambda_2}{dt} = N_2^2 \mathcal{P}_2 \frac{di_2}{dt} = L_2 \frac{di_2}{dt}, \quad (6.50)$$

$$v_1 = \frac{d\lambda_1}{dt} = \frac{d}{dt} (N_1 \phi_{12}) = N_1 N_2 \mathcal{P}_{12} \frac{di_2}{dt}. \quad (6.51)$$



**Figura 6.29.** Las bobinas magnéticamente acopladas en la Figura 6.28, con la bobina 2 excitada y la bobina 1 en circuito abierto.

El coeficiente de inductancia mutua que relaciona la tensión inducida en la bobina 1 con la corriente variable en el tiempo que atraviesa la bobina 2 es el coeficiente de  $di_2/dt$  en la Ecuación 6.51:

$$M_{12} = N_1 N_2 \mathcal{P}_{12}. \quad (6.52)$$

Para materiales no magnéticos, las permeancias  $\mathcal{P}_{12}$  y  $\mathcal{P}_{21}$  son iguales, por lo que

$$M_{12} = M_{21} = M. \quad (6.53)$$

Así, para circuitos lineales donde sólo haya dos bobinas magnéticamente acopladas, es innecesario utilizar subíndices para los coeficientes de inductancia mutua.

## La inductancia mutua en términos de la autoinductancia

El valor de la inductancia mutua está en función de las autoinductancias. Podemos calcular la relación de la forma siguiente: a partir de las Ecuaciones 6.42 y 6.50,

$$L_1 = N_1^2 \mathcal{P}_1, \quad (6.54)$$

$$L_2 = N_2^2 \mathcal{P}_2, \quad (6.55)$$

respectivamente. A partir de las Ecuaciones 6.54 y 6.55,

$$L_1 L_2 = N_1^2 N_2^2 \mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2. \quad (6.56)$$

Ahora utilizamos la Ecuación 6.41 y la expresión correspondiente a  $\mathcal{P}_2$  para escribir

$$L_1 L_2 = N_1^2 N_2^2 (\mathcal{P}_{11} + \mathcal{P}_{21})(\mathcal{P}_{22} + \mathcal{P}_{12}). \quad (6.57)$$

Pero, para un sistema lineal,  $\mathcal{P}_{21} = \mathcal{P}_{12}$ , por lo que la Ecuación 6.57 queda

$$\begin{aligned} L_1 L_2 &= (N_1 N_2 \mathcal{P}_{12})^2 \left( 1 + \frac{\mathcal{P}_{11}}{\mathcal{P}_{12}} \right) \left( 1 + \frac{\mathcal{P}_{22}}{\mathcal{P}_{12}} \right) \\ &= M^2 \left( 1 + \frac{\mathcal{P}_{11}}{\mathcal{P}_{12}} \right) \left( 1 + \frac{\mathcal{P}_{22}}{\mathcal{P}_{12}} \right). \end{aligned} \quad (6.58)$$

Sustituyendo los dos términos donde aparecen las permeancias por una única constante, podemos expresar la Ecuación 6.58 de una manera más significativa:

$$\frac{1}{k^2} = \left( 1 + \frac{\mathcal{P}_{11}}{\mathcal{P}_{12}} \right) \left( 1 + \frac{\mathcal{P}_{22}}{\mathcal{P}_{12}} \right). \quad (6.59)$$

Sustituyendo la Ecuación 6.59 en la Ecuación 6.58, nos queda

$$M^2 = k^2 L_1 L_2$$

o

➤ **RELACIÓN ENTRE LAS AUTOINDUCTANCIAS  
Y LA INDUCTANCIA MUTUA UTILIZANDO EL  
COEFICIENTE DE ACOPLAMIENTO**

$$M = k \sqrt{L_1 L_2}, \quad (6.60)$$

donde la constante  $k$  se denomina **coeficiente de acoplamiento**. De acuerdo con la Ecuación 6.59,  $1/k^2$  debe ser superior a 1, lo que significa que  $k$  debe ser inferior a 1. De hecho, el coeficiente de acoplamiento debe estar comprendido entre 0 y 1, es decir,

$$0 \leq k \leq 1. \quad (6.61)$$

El coeficiente de acoplamiento es cero cuando las dos bobinas no tienen ningún flujo común; es decir, cuando  $\phi_{12} = \phi_{21} = 0$ . Esta condición implica que  $\mathcal{P}_{12} = 0$  y la Ecuación 6.59 indica que  $1/k^2 = \infty$ , es decir,  $k = 0$ . Si no hay ningún flujo entre las dos bobinas, obviamente  $M$  es cero.

El coeficiente de acoplamiento es igual a 1 cuando  $\phi_{11}$  y  $\phi_{22}$  son cero. Esta condición implica que todo el flujo que rodea a la bobina 1 rodea también a la bobina 2. En términos de la Ecuación 6.59,  $\mathcal{P}_{11} = \mathcal{P}_{22} = 0$ , lo que obviamente representa un estado ideal. En la realidad, devanar dos bobinas de modo que compartan exactamente el mismo flujo es físicamente imposible. Los materiales magnéticos (como las aleaciones de hierro, cobalto y níquel) crean un espacio con una alta permeancia y se utilizan para conseguir coeficientes de acoplamiento que se acerquen a la unidad (diremos más acerca de esta importante cualidad de los materiales magnéticos en el Capítulo 9).

**NOTA** Evalúe su comprensión de este material tratando de resolver los Problemas 6.38 y 6.39 del capítulo.

## Cálculos de energía

Vamos a concluir nuestro primer análisis de la inductancia mutua con un intento de determinar la energía total almacenada en dos bobinas magnéticamente acopladas. Hacer esto nos permitirá confirmar dos observaciones que hicimos anteriormente: para el acoplamiento magnético lineal (1)  $M_{12} = M_{21} = M$  y (2)  $M = k\sqrt{L_1 L_2}$ , donde  $0 \leq k \leq 1$ .

Vamos a utilizar el circuito mostrado en la Figura 6.30 con el fin de calcular la expresión que nos dé la energía total almacenada en los campos magnéticos asociados con una pareja de bobinas linealmente acopladas. Comenzaremos partiendo de la asunción de que las corrientes  $i_1$  e  $i_2$  son cero y de que este estado de corriente cero se corresponde con una energía almacenada en las bobinas igual a cero. A continuación, haremos que  $i_1$  se incremente desde cero hasta algún valor arbitrario  $I_1$  y calcularemos la energía almacenada cuando  $i_1 = I_1$ . Puesto que  $i_2 = 0$ , la potencia total entregada a la pareja de bobinas será  $v_1 i_1$  y la energía almacenada tendrá el valor

$$\int_0^{W_1} dw = L_1 \int_0^{I_1} i_1 di_1,$$

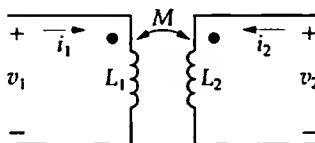
$$W_1 = \frac{1}{2} L_1 I_1^2. \quad (6.62)$$

Ahora, vamos a mantener  $i_1$  constante en el valor  $I_1$  y vamos a incrementar  $i_2$  desde cero hasta algún valor arbitrario  $I_2$ . Durante este intervalo de tiempo, la tensión inducida en la bobina 2 por  $i_1$  es cero, porque  $I_1$  es constante. La tensión inducida en la bobina 1 por  $i_2$  es  $M_{12} di_2/dt$ . Por tanto, la potencia entregada a la pareja de bobinas es

$$p = I_1 M_{12} \frac{di_2}{dt} + i_2 v_2.$$

La energía total almacenada en la pareja de bobinas cuando  $i_2 = I_2$  será

$$\int_{W_1}^W dw = \int_0^{I_2} I_1 M_{12} di_2 + \int_0^{I_2} L_2 i_2 di_2,$$



**Figura 6.30.** El circuito utilizado para determinar las relaciones básicas de energía.

o bien

$$\begin{aligned} W &= W_1 + I_1 I_2 M_{12} + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 \\ &= \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + I_1 I_2 M_{12}. \end{aligned} \quad (6.63)$$

Si invertimos el procedimiento (es decir, si incrementamos primero  $i_2$  desde cero hasta  $I_2$  y luego incrementamos  $i_1$  desde cero hasta  $I_1$ ), la energía total almacenada será

$$W = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + I_1 I_2 M_{21}. \quad (6.64)$$

Las Ecuaciones 6.63 y 6.64 expresan la energía total almacenada en una pareja de bobinas linealmente acopladas en función de las corrientes de las bobinas, de las autoinductancias y de la inductancia mutua. Observe que la única diferencia entre estas ecuaciones es el coeficiente del producto de corrientes  $I_1 I_2$ . Utilizamos la Ecuación 6.63 si se establece primero  $i_1$  y la Ecuación 6.64 si la que se establece primero es  $i_2$ .

Cuando el medio de acoplamiento es lineal, la energía total almacenada es la misma independientemente del orden que se use para establecer  $I_1$  e  $I_2$ . La razón es que, en un acoplamiento lineal, el flujo magnético resultante sólo depende de los valores finales de  $i_1$  e  $i_2$ , no de cómo alcancen las corrientes dichos valores finales. Si el flujo resultante es el mismo, la energía almacenada también será la misma. Por tanto, para un acoplamiento lineal,  $M_{12} = M_{21}$ . Asimismo, puesto que  $I_1$  e  $I_2$  son valores arbitrarios de  $i_1$  e  $i_2$ , respectivamente, representaremos las corrientes de las bobinas mediante sus valores instantáneos  $i_1$  e  $i_2$ . De esta forma, en cualquier instante de tiempo, la energía total almacenada en las bobinas acopladas es

$$w(t) = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2. \quad (6.65)$$

Hemos deducido la Ecuación 6.65 suponiendo que ambas corrientes de las bobinas entran por los terminales que tienen la marca de polaridad. Dejamos como ejercicio al lector la verificación de que, si una de las corrientes entra por uno de los terminales que tiene la marca de polaridad y la otra sale por el otro terminal con la marca de polaridad, el signo algebraico del término  $M i_1 i_2$  se invierte. Así, en general

$$w(t) = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 \pm M i_1 i_2. \quad (6.66)$$

Vamos a utilizar la Ecuación 6.6 para demostrar que  $M$  no puede tener un valor superior a  $\sqrt{L_1 L_2}$ . Las bobinas magnéticamente acopladas son elementos pasivos, por lo que la energía total almacenada nunca puede ser negativa. Si  $w(t)$  no puede ser negativa, la Ecuación 6.66 indica que el valor

$$\frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 - M i_1 i_2$$

debe ser mayor o igual que cero cuando  $i_1$  e  $i_2$  sean las dos positivas o las dos negativas. El valor límite de  $M$  se producirá cuando la expresión anterior sea igual a cero:

$$\frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 - M i_1 i_2 = 0. \quad (6.67)$$

Para calcular el valor límite de  $M$ , sumamos y restamos el término  $i_1 i_2 \sqrt{L_1 L_2}$  al lado izquierdo de la Ecuación 6.67. Al hacer esto, se genera un término que es un cuadrado perfecto:

$$\left( \sqrt{\frac{L_1}{2}} i_1 - \sqrt{\frac{L_2}{2}} i_2 \right)^2 + i_1 i_2 (\sqrt{L_1 L_2} - M) = 0. \quad (6.68)$$

El término cuadrático de la Ecuación 6.68 nunca puede ser negativo, aunque sí puede ser cero. De este modo  $w(t) \geq 0$  sólo si

$$\sqrt{L_1 L_2} \geq M, \quad (6.69)$$

que es otra forma de decir que

$$M = k \sqrt{L_1 L_2} \quad (0 \leq k \leq 1). \quad (6.70)$$

Hemos deducido la Ecuación 6.69 asumiendo que  $i_1$  e  $i_2$  son ambas positivas o ambas negativas. Sin embargo, obtenemos el mismo resultado si  $i_1$  e  $i_2$  tienen signos opuestos, porque en este caso obtenemos el valor límite de  $M$  seleccionando el signo más en la Ecuación 6.66.

**NOTA** *Evalúe su comprensión de este material tratando de resolver los Problemas 6.47 y 6.48 del capítulo.*

## Perspectiva práctica

### Conmutadores de proximidad

Al principio de este capítulo hemos presentado el conmutador capacitivo de proximidad. Existen dos formas de conmutadores de este tipo. La empleada en las lámparas de mesa utiliza un conmutador de un único electrodo. Dejamos este tipo de sistema para que el lector investigue sobre su funcionamiento en el Problema 6.50. En el ejemplo que aquí vamos a tratar, consideraremos el conmutador de dos electrodos que se suele utilizar en los botones de los ascensores.

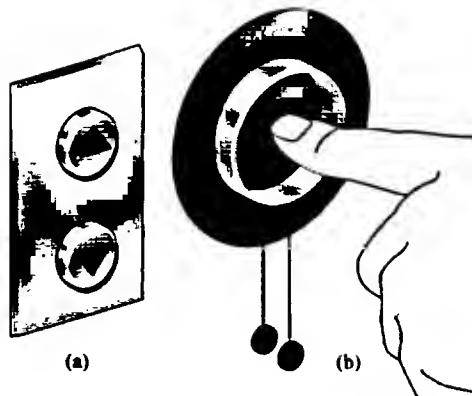
### EJEMPLO

El botón normalmente utilizado en un ascensor es un pequeño receptáculo en el que se inserta el dedo, como se muestra en la Figura 6.31. El receptáculo está formado por un anillo metálico que actúa como electrodo y por otro electrodo con forma de plaza circular, estando ambos aislados entre sí. Algunas veces, en lugar de esta configuración se utilizan dos anillos concéntricos insertos en un plástico aislante. Los electrodos están cubiertos por una capa aislante para impedir el contacto directo con el metal. El dispositivo resultante puede modelarse como un condensador, como se muestra en la Figura 6.32.

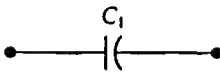
A diferencia de la mayoría de los condensadores, el conmutador de proximidad capacitivo permite insertar un objeto, como por ejemplo el dedo, entre los electrodos. Puesto que el dedo es mucho mejor conductor que la cubierta aislante que rodea a los electrodos, el circuito responde como si se hubiera añadido otro electrodo conectado a masa. El resultado es un circuito de tres terminales que contiene tres condensadores, como se muestra en la Figura 6.33.

Los valores reales de los condensadores de las Figuras 6.32 y 6.33 se encuentran en el rango de los 10 a los 50 pF, dependiendo de la geometría exacta del conmutador, del modo en que se inserte el dedo,

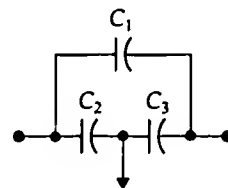




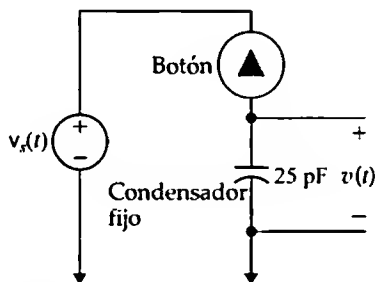
**Figura 6.31.** Botón de un ascensor. (a) Vista frontal. (b) Vista lateral.



**Figura 6.32.** Modelo con condensador del conmutador de proximidad de dos electrodos utilizado en los botones de los ascensores.



**Figura 6.33.** Modelo de circuito de un conmutador capacitivo de proximidad activado mediante el contacto con el dedo.



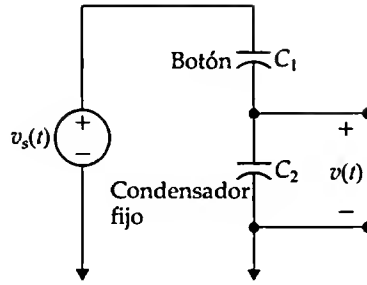
**Figura 6.34.** Circuito del botón de un ascensor.

de si la persona lleva guantes, etc. Para los problemas siguientes, suponga que todos los condensadores tienen el mismo valor de 25 pF. Suponga también que el botón del ascensor está conectado según el equivalente capacitivo de lo que sería un circuito divisor de tensión, como se muestra en la Figura 6.34.

- Calcule la tensión de salida cuando el dedo no está presente.
- Calcule la tensión de salida cuando un dedo toca el botón.

### SOLUCIÓN

- Comencemos redibujando el circuito de la Figura 6.34, sustituyendo el botón por su modelo capacitivo de la Figura 6.32. El circuito resultante se muestra en la Figura 6.35. Escribamos la ecuación de la corriente en el único nodo existente:



**Figura 6.35.** Modelo del circuito del botón de ascensor cuando no hay ningún dedo presente.

$$C_1 \frac{d(v - v_s)}{dt} + C_2 \frac{dv}{dt} = 0. \quad (6.70)$$

Reordenando esta ecuación, obtenemos una ecuación diferencial que nos da la tensión de salida  $v(t)$ :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \frac{dv_s}{dt}. \quad (6.71)$$

Finalmente, integramos la Ecuación 6.71 para calcular la tensión de salida:

$$v(t) = \frac{C_1}{C_1 + C_2} v_s(t) + v(0). \quad (6.72)$$

El resultado de la Ecuación 6.72 muestra que el circuito con condensadores en serie de la Figura 6.35 forma un divisor de tensión, igual que los circuitos con resistencias en serie que vimos en el Capítulo 3. En ambos tipos de circuitos divisores de tensión, la tensión de salida no depende de los valores de los componentes, sino sólo de su relación. Aquí,  $C_1 = C_2 = 25$  pF, por lo que el cociente de los condensadores es  $C_1/C_2 = 1$ . Por tanto, la tensión de salida es

$$v(t) = 0,5v_s(t) + v(0). \quad (6.73)$$

El término constante de la Ecuación 6.73 se debe a la carga inicial del condensador. Podemos asumir que  $v(0) = 0$  V, porque el circuito que mide la tensión de salida elimina el efecto de la carga inicial del condensador. Por tanto, la tensión de salida medida será

$$v(t) = 0,5v_s(t). \quad (6.74)$$

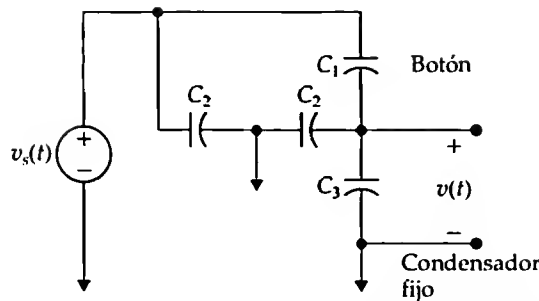
- b) Ahora sustituimos el botón de la Figura 6.34 por el modelo del conmutador activado que se muestra en la Figura 6.33. El resultado puede verse en la Figura 6.36. De nuevo, calculamos las corrientes que salen del nodo de salida:

$$C_1 \frac{d(v - v_s)}{dt} + C_2 \frac{dv}{dt} + C_3 \frac{dv}{dt} = 0. \quad (6.75)$$

Reordenando para escribir una ecuación diferencial que nos proporcione  $v(t)$ , se obtiene

$$\frac{dv}{dt} = \frac{C_1}{C_1 + C_2 + C_3} \frac{dv_s}{dt}. \quad (6.76)$$

Finalmente, resolviendo la ecuación diferencial de la Ecuación 6.76, vemos que



**Figura 6.36.** Modelo del circuito del botón de ascensor cuando se lo activa mediante el contacto con el dedo.

$$v(t) = \frac{C_1}{C_1 + C_2 + C_3} v_s(t) + v(0). \quad (6.77)$$

Si  $C_1 = C_2 = C_3 = 25 \text{ pF}$ ,

$$v(t) = 0,333v_s(t) + v(0). \quad (6.78)$$

Como antes, el circuito sensor elimina  $v(0)$ , por lo que la tensión de salida medida es

$$v(t) = 0,333v_s(t). \quad (6.79)$$

Comparando las Ecuaciones 6.74 y 6.79, vemos que, cuando se pulsa el botón, la salida es igual a un tercio de la tensión de entrada y que, cuando el botón no está pulsado, la tensión de salida sólo es la mitad de la tensión de entrada. Cualquier caída en la tensión de salida será detectada por el procesador de control del ascensor y hará que éste obedezca la orden de desplazarse al piso deseado.

**NOTA** Evalúe su comprensión de esta Perspectiva práctica tratando de resolver los Problemas 6.49 y 6.51 del capítulo.

## RESUMEN

- La **inductancia** es un parámetro de los circuitos lineales que relaciona la tensión inducida por un campo magnético variable en el tiempo con la corriente que produce dicho campo (véase la página 228).
- La **capacitancia** es un parámetro de los circuitos lineales que relaciona la corriente inducida por un campo magnético variable en el tiempo con la tensión que produce dicho campo (véase la página 235).
- Las bobinas y condensadores son elementos pasivos; pueden almacenar y liberar energía, pero no pueden generarla ni disiparla (véase la página 228).
- La potencia instantánea en los terminales de una bobina o condensador puede ser positiva o negativa, dependiendo de si se está entregando energía al elemento o extrayéndola del mismo.
- Una bobina:
  - no permite un cambio instantáneo en la corriente que pasa por sus terminales.
  - permite un cambio instantáneo en la tensión existente entre sus terminales.
  - se comporta como un cortocircuito en presencia de una corriente constante en sus terminales (véase la página 229).

- Un condensador:
  - no permite un cambio instantáneo en la tensión existente entre sus terminales;
  - permite un cambio instantáneo en la corriente que pasa por sus terminales;
  - se comporta como un circuito abierto en presencia de una tensión constante entre sus terminales (véase la página 236).
- Las ecuaciones de la tensión, la corriente, la potencia y la energía en las bobinas y condensadores ideales se indican en la Tabla 6.1.

**Tabla 6.1.** Ecuaciones para las bobinas y condensadores ideales.

#### BOBINAS

$$v = L \frac{di}{dt} \quad (\text{V})$$

$$i = \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v \, d\tau + i(t_0) \quad (\text{A})$$

$$p = vi = Li \frac{di}{dt} \quad (\text{W})$$

$$w = \frac{1}{2} Li^2 \quad (\text{J})$$

#### CONDENSADORES

$$v = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i \, d\tau + v(t_0) \quad (\text{V})$$

$$i = C \frac{dv}{dt} \quad (\text{A})$$

$$p = vi = Cv \frac{dv}{dt} \quad (\text{W})$$

$$w = \frac{1}{2} Cv^2 \quad (\text{J})$$

- Las bobinas en serie o en paralelo pueden sustituirse por una bobina equivalente. Los condensadores en serie o en paralelo pueden sustituirse por un condensador equivalente. Las ecuaciones se resumen en la Tabla 6.2. En la Sección 6.3 puede encontrar una explicación acerca de cómo tratar las condiciones iniciales de los circuitos equivalentes serie y paralelo en los que existan bobinas y condensadores.

**Tabla 6.2.** Ecuaciones para bobinas y condensadores conectados en serie y en paralelo.

#### CONECTAOS EN SERIE

$$L_{\text{eq}} = L_1 + L_2 + \cdots + L_n$$

$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n}$$

#### CONECTAOS EN PARALELO

$$\frac{1}{L_{\text{eq}}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \cdots + \frac{1}{L_n}$$

$$C_{\text{eq}} = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$$

- La **inductancia mutua**,  $M$ , es el parámetro de circuito que relaciona la tensión inducida en un circuito con otra corriente variable en el tiempo de otro circuito. Específicamente,

$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M_{12} \frac{di_2}{dt}$$

$$v_2 = M_{21} \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt},$$

donde  $v_1$  e  $i_1$  son la tensión y la corriente en el circuito 1, mientras que  $v_2$  e  $i_2$  son la tensión y la corriente en el circuito 2. Para bobinas devanadas alrededor de núcleos no magnéticos,  $M_{12} = M_{21} = M$ . (Véase la página 250).

- El **convenio de puntos** establece la polaridad de las tensiones de inducción mutua:

Cuando la dirección de referencia de una corriente entra por el terminal con punto de una bobina, la polaridad de referencia de la tensión que dicha corriente induce en la otra bobina es positiva en el terminal que también tiene un punto.

O, alternativamente,

Cuando la dirección de referencia de una corriente sale por el terminal con punto de una bobina, la polaridad de referencia de la tensión que dicha

corriente induce en la otra bobina es negativa en el terminal que tiene un punto.

(Véase la página 245).

- La relación entre la autoinductancia de cada devanado y la inductancia mutua entre devanados es

$$M = k\sqrt{L_1 L_2}.$$

El coeficiente de acoplamiento,  $k$ , es una medida del grado de acoplamiento magné-

tico. Por definición,  $0 \leq k \leq 1$ . (Véase la página 253).

- La energía almacenada en bobinas magnéticamente acopladas dentro de un medio lineal está relacionada con las corrientes que atraviesan las bobinas y con las inductancias por la relación

$$w(t) = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 \pm M i_1 i_2.$$

(Véase la página 255).

## PROBLEMAS

- 6.1. Aplicamos el pulso de corriente triangular mostrado en la Figura P6.1 a una bobina de 20 mH.
- ☐ a) Escriba las expresiones que describen  $i(t)$  en los cuatro intervalos  $t < 0$ ,  $0 \leq t \leq 5$  ms,  $5 \text{ ms} \leq t \leq 10$  ms y  $t > 10$  ms.
- b) Deduzca las expresiones correspondientes a la tensión, la potencia y la energía de la bobina. Utilice el convenio de signos pasivo.

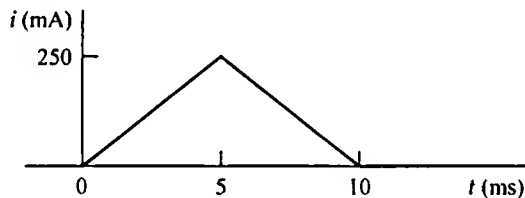


Figura P6.1

- 6.2. La tensión entre los terminales de la bobina de  $200 \mu\text{H}$  de la Figura P6.2(a) se muestra en la Figura P6.2(b). Se sabe que la corriente  $i$  de la bobina es cero para  $t \leq 0$ .
- ☐ a) Deduzca las expresiones correspondientes a  $i$  para  $t \geq 0$ .
- b) Dibuje  $i$  en función de  $t$  para  $0 \leq t \leq \infty$ .

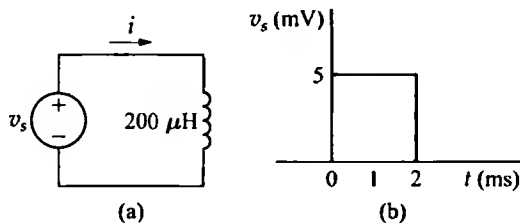


Figura P6.2

- 6.3. Sabemos que la corriente en la bobina de  $2,5 \text{ mH}$  de la Figura P6.3 es 1 A para  $t < 0$ . La tensión en la bobina para  $t \geq 0$  está dada por la expresión
- ☐

$$v_L(t) = \begin{cases} 3e^{-4t} \text{ mV}, & 0 \leq t \leq 2 \text{ s} \\ -3e^{-4(t-2)} \text{ mV}, & 2 \text{ s} < t \leq \infty \end{cases}$$

Dibuje  $v_L(t)$  e  $i_L(t)$  para  $0 \leq t \leq \infty$ .

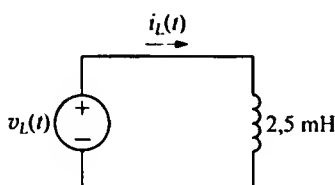


Figura P6.3

6.4. Sabemos que la corriente en una bobina de  $50 \mu\text{H}$  es

$$i_L = 18te^{-10t} \text{ A} \quad \text{para } t \geq 0.$$

- Determine la tensión en bornes de la bobina para  $t > 0$  (utilice el convenio de signos pasivo).
- Calcule la potencia (en microvatios) entre los terminales de las bobinas cuando  $t = 200 \text{ ms}$ .
- ¿Está la bobina absorbiendo o entregando potencia en el instante  $t = 200 \text{ ms}$ ?
- Calcule la energía (en microjulios) almacenada en la bobina en el instante  $t = 200 \text{ ms}$ .
- Calcule la energía máxima (en microjulios) almacenada en la bobina y el instante (en microsegundos) correspondiente.

6.5. Sabemos que la corriente que atraviesa una bobina de  $5 \text{ H}$  y que la tensión entre los terminales de la misma son cero para  $t \leq 0$ . La tensión en bornes de la bobina está dada por la gráfica de la Figura P6.5 para  $t \geq 0$ .

- Deduzca la expresión de la corriente en función del tiempo en los intervalos  $0 \leq t \leq 1 \text{ s}$ ,  $1 \text{ s} \leq t \leq 3 \text{ s}$ ,  $3 \text{ s} \leq t \leq 5 \text{ s}$ ,  $5 \text{ s} \leq t \leq 6 \text{ s}$  y  $6 \text{ s} \leq t \leq \infty$ .
- Para  $t > 0$ , ¿cuál es la corriente en la bobina cuando la tensión es cero?
- Dibuje  $i$  en función de  $t$  para  $0 \leq t \leq \infty$ .

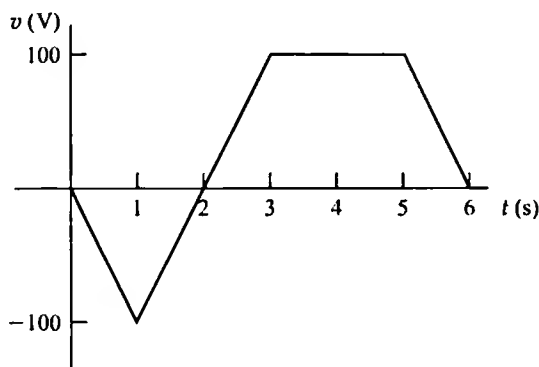


Figura P6.5

6.6. Sabemos que la corriente que atraviesa una bobina de  $25 \text{ mH}$  es igual a  $-10 \text{ A}$  para  $t \leq 0$  y a  $-[10 \cos 400t + 5 \sin 400t]e^{-200t} \text{ A}$  para  $t \geq 0$ . Utilice el convenio de signos pasivo.

- ¿En qué instante es máxima la tensión entre los terminales de la bobina?
- ¿Cuál es la tensión máxima?

- 6.7. a) Calcule la corriente que atraviesa la bobina en el circuito de la Figura P6.7 si



$$v = 30 \sin 500t \text{ V}, L = 15 \text{ mH e } i(0) = -4 \text{ A.}$$

- b) Dibuje  $v$ ,  $i$ ,  $p$  y  $w$  en función de  $t$ . Al hacer dichas gráficas, utilice el formato empleado en la Figura 6.8. Dibuje un ciclo completo de la forma de onda de la tensión.
- c) Describa los subintervalos del intervalo de tiempo comprendido entre 0 y  $4\pi$  ms en los que la bobina está absorbiendo potencia. Repita el apartado para los subintervalos en los que la bobina está entregando potencia.

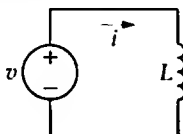


Figura P6.7

- 6.8. La corriente que atraviesa una bobina de 20 mH es

$$i = 40 \text{ mA}, \quad t \leq 0;$$

$$i = A_1 e^{-10,000t} + A_2 e^{-10,000t} \text{ A}, \quad t \geq 0.$$

La tensión entre los terminales de la bobina (convenio de signos pasivo) es de 28 V en  $t = 0$ .

- a) Determine la expresión que nos da la tensión en bornes de la bobina para  $t > 0$ .
- b) Calcule el instante, superior a cero, en que la potencia en los terminales de la bobina es cero.
- 6.9. Suponga en el Problema 6.8 que el valor de la tensión entre los terminales de la bobina para  $t = 0$  es  $-68$  V, en lugar de 28 V.
- a) Determine las expresiones numéricas de  $i$  y  $v$  para  $t \geq 0$ .
- b) Especifique los intervalos de tiempo en los que la bobina está almacenando energía y los intervalos en los que la está entregando.
- c) Demuestre que la energía total extraída de la bobina es igual a la energía total almacenada.
- 6.10. La corriente que atraviesa una bobina de 2 H es

$$i = 5 \text{ A}, \quad t \leq 0;$$

$$i = (B_1 \cos 1,6t + B_2 \sin 1,6t)e^{-0,4t} \text{ A}, \quad t \geq 0.$$

La tensión en bornes de la bobina (convenio de signos pasivo) es de 28 V en  $t = 0$ . Calcule la potencia en los terminales de la bobina para  $t = 5$  s. Indique si la bobina está absorbiendo o entregando potencia.

- 6.11. Inicialmente, no hay ninguna energía almacenada en la bobina de 5 H del circuito de la Figura P6.11, en el momento de conectarla a los terminales del voltímetro. En  $t = 0$ , la bobina se conmuta instantáneamente a la posición b, donde permanece durante 1,6 s antes de volver instantáneamente a la posición a. El voltímetro de d'Arsonval tiene una lectura a fondo de escala de 20 V y una sensibilidad de  $1000 \Omega/\text{V}$ . ¿Cuál será la lectura del voltímetro en el instante en que el conmutador vuelve a la posición a, si consideramos la inercia del medidor de d'Arsonval despreciable?

- 6.12. Evalúe la integral  $\int_0^\infty p \, dt$  para el Ejemplo 6.2. Comente el significado del resultado.

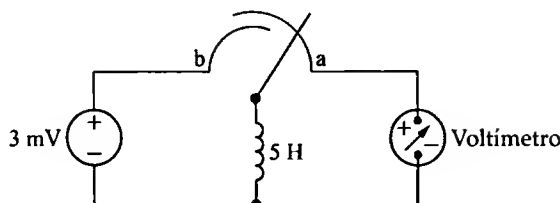


Figura P6.11

6.13. Las ecuaciones correspondientes a la tensión, la potencia y la energía que hemos determinado en el Ejemplo 6.5 requerían, para su deducción, tanto técnicas de integración como de manipulación de expresiones algebraicas. Como ingenieros, no podemos aceptar ese tipo de resultados simplemente como un acto de fe. En otras palabras, debemos acostumbrarnos a preguntarnos a nosotros mismos: «¿Tienen sentido estos resultados a partir del comportamiento conocido del circuito que se está tratando de describir?». Teniendo esto presente, compruebe las ecuaciones del Ejemplo 6.5 realizando las siguientes verificaciones:

- Compruebe las ecuaciones para ver si la tensión es continua al pasar de un intervalo de tiempo al siguiente.
- Compruebe la ecuación de la potencia en cada intervalo, seleccionando un instante dentro del intervalo y viendo si proporciona el mismo resultado que el correspondiente producto de  $v$  e  $i$ . Por ejemplo, realice una comprobación para 10 y 30  $\mu\text{s}$ .
- Compruebe la ecuación de la energía dentro de cada intervalo, seleccionando un instante del mismo y viendo si la ecuación de la energía proporciona el mismo resultado que  $\frac{1}{2}Cv^2$ . Utilice 10 y 30  $\mu\text{s}$  como instantes de prueba.

6.14. Sometemos a un condensador de 20  $\mu\text{F}$  a un pulso de tensión que tiene una duración de 1 s. El pulso está descrito por las siguientes ecuaciones:

$$v_c(t) = \begin{cases} 30t^2 \text{ V}, & 0 \leq t \leq 0,5 \text{ s}; \\ 30(t-1)^2 \text{ V}, & 0,5 \text{ s} \leq t \leq 1,0 \text{ s}; \\ 0 & \text{en todos los demás instantes.} \end{cases}$$

Dibuje el pulso de corriente que atraviesa el condensador durante el intervalo de 1 s.

6.15. Aplicamos a un condensador de 5  $\mu\text{F}$  el pulso de corriente rectilíneo mostrado en la Figura P6.15. La tensión inicial en el condensador es una caída de 12 V en la dirección de referencia de la corriente. Utilice el convenio de signos pasivo y calcule las ecuaciones correspondientes a la tensión del condensador para los intervalos de tiempo indicados en los apartados (a)-(e).

- $0 \leq t \leq 5 \mu\text{s}$ ;
- $5 \mu\text{s} \leq t \leq 20 \mu\text{s}$ ;
- $20 \mu\text{s} \leq t \leq 25 \mu\text{s}$ ;
- $25 \mu\text{s} \leq t \leq 35 \mu\text{s}$ ;
- $35 \mu\text{s} \leq t \leq \infty$ ;
- Dibuje  $v(t)$  en el intervalo  $-50 \mu\text{s} \leq t \leq 300 \mu\text{s}$ .

6.16. La tensión entre los terminales del condensador de la Figura 6.10 es

$$v = \begin{cases} -10 \text{ V}, & t \leq 0; \\ 40 - 1e^{-1000t} (50 \cos 500t + 20 \sin 500t) \text{ V} & t \geq 0. \end{cases}$$



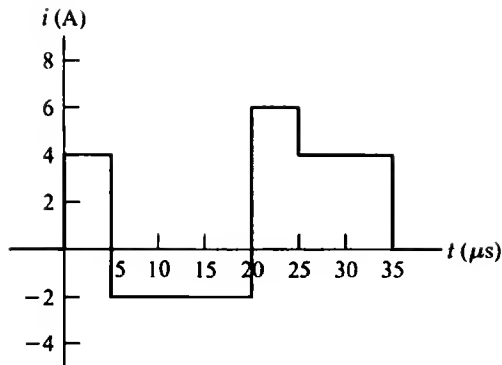


Figura P6.15

Suponga que  $C = 0,8 \mu\text{F}$ .

- Calcule la corriente en el condensador para  $t < 0$ .
- Calcule la corriente en el condensador para  $t > 0$ .
- ¿Hay un cambio instantáneo de tensión en bornes del condensador en el instante  $t = 0$ ?
- ¿Hay un cambio instantáneo en la corriente que atraviesa el condensador en  $t = 0$ ?
- ¿Cuánta energía (en microjulios) está almacenada en el condensador en  $t = \infty$ ?

**6.17.** Aplicamos a un condensador de  $0,25 \mu\text{F}$  el pulso de corriente mostrado en la Figura P6.17. La tensión inicial en el condensador es cero.



- Calcule la carga del condensador en  $t = 30 \mu\text{s}$ .
- Calcule la tensión en el condensador en  $t = 50 \mu\text{s}$ .
- ¿Cuánta energía almacena el pulso de corriente en el condensador?

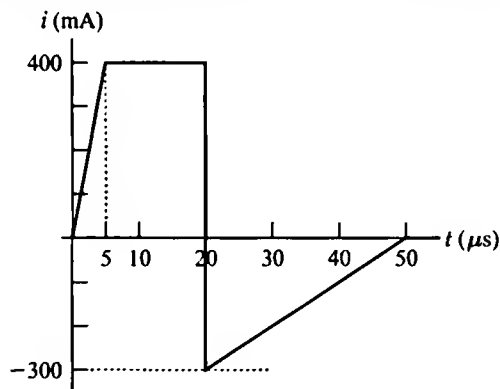


Figura P6.17

**6.18.** La tensión inicial en el condensador de  $0,5 \mu\text{F}$  mostrado en la Figura P6.18(a) es  $-20 \text{ V}$ . La corriente del condensador tiene la forma de onda mostrada en la Figura P6.18(b).



- ¿Cuánta energía, en microjulios, hay almacenada en el condensador en  $t = 500 \mu\text{s}$ ?
- Repita el apartado (a) para  $t = \infty$ .

**6.19.** La tensión entre los terminales de un condensador de  $0,25 \mu\text{F}$  es



$$v = \begin{cases} 50 \text{ V}, & t \leq 0; \\ A_1 t e^{-4000t} + A_2 t e^{-4000t} \text{ V}, & t \geq 0. \end{cases}$$

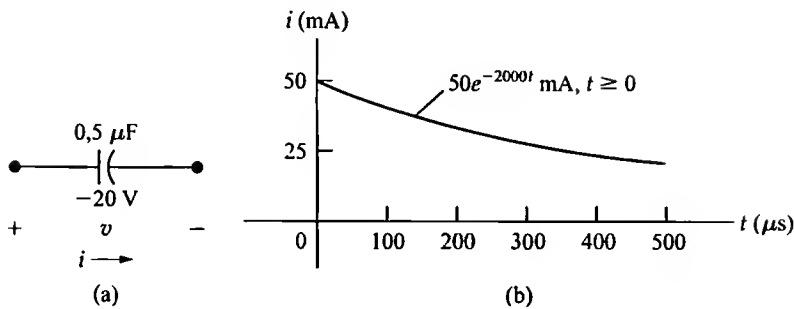


Figura P6.18

La corriente inicial en el condensador es de 400 mA. Utilice el convenio de signos pasivo.

- ¿Cuál es la energía inicial almacenada en el condensador?
  - Evalúe los coeficientes  $A_1$  y  $A_2$ .
  - ¿Cuál es la ecuación que nos da la corriente del condensador?
- 6.20. Suponga que la energía inicial almacenada en las bobinas de la Figura P6.20 es cero. Calcule la inductancia equivalente con respecto a los terminales a y b.
- 6.21. Suponga que la energía inicial almacenada en las bobinas de la Figura P6.21 es cero. Calcule la inductancia equivalente con respecto a los terminales a y b.

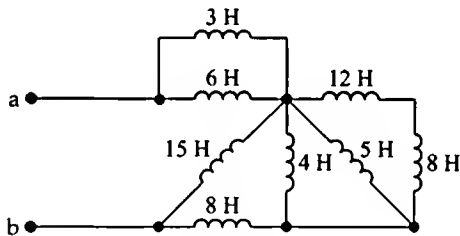


Figura P6.20

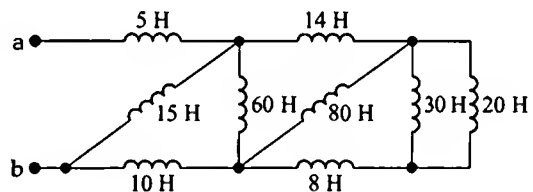


Figura P6.21

- 6.22. Las dos bobinas en paralelo de la Figura P6.22 se conectan a los terminales de una caja negra en  $t = 0$ . La tensión resultante  $v$  para  $t > 0$  es igual a  $12e^{-t}$  V. También sabemos que  $i_1(0) = 2$  A e  $i_2(0) = 4$  A.
- Sustituya las bobinas originales por una bobina equivalente y calcule  $i(t)$  para  $t \geq 0$ .
  - Determine  $i_1(t)$  para  $t \geq 0$ .
  - Determine  $i_2(t)$  para  $t \geq 0$ .
  - ¿Cuánta energía se entrega a la caja negra en el intervalo de tiempo  $0 \leq t \leq \infty$ ?
  - ¿Cuánta energía había inicialmente almacenada en las dos bobinas conectadas en paralelo?
  - ¿Cuánta energía está atrapada en las bobinas ideales?
  - ¿Concuerdan sus soluciones para  $i_1$  e  $i_2$  con la respuesta obtenida para el apartado (f)?
- 6.23. Las tres bobinas del circuito de la Figura P6.23 se conectan a los terminales de una caja negra en  $t = 0$ . La tensión resultante para  $t > 0$  es

$$v_0 = 160e^{-4t} \text{ V.}$$

Si  $i_1(0) = 1$  A e  $i_2(0) = 3$  A, calcule

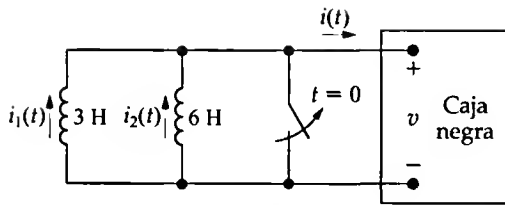


Figura P6.22

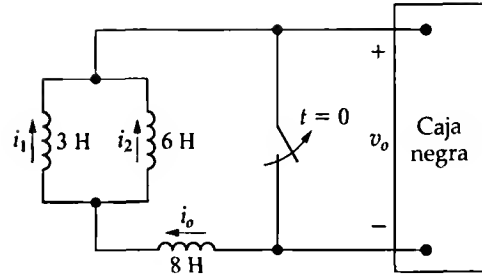


Figura P6.23

- $i_o(0)$ ;
  - $i_o(t)$ ,  $t \geq 0$ ;
  - $i_1(t)$ ,  $t \geq 0$ ;
  - $i_2(t)$ ,  $t \geq 0$ ;
  - la energía inicial almacenada en las tres bobinas;
  - la energía total suministrada a la caja negra;
  - la energía atrapada en las bobinas ideales.
- 6.24. Para el circuito mostrado en la Figura P6.23, ¿qué porcentaje de la energía total entregada a la caja negra habrá sido ya entregado cuando  $t = 200$  ms?
- 6.25. Calcule la capacidad equivalente con respecto a los terminales a y b para el circuito mostrado en la Figura P6.25.
- 6.26. Calcule la capacidad equivalente con respecto a los terminales a y b para el circuito mostrado en la Figura P6.26.

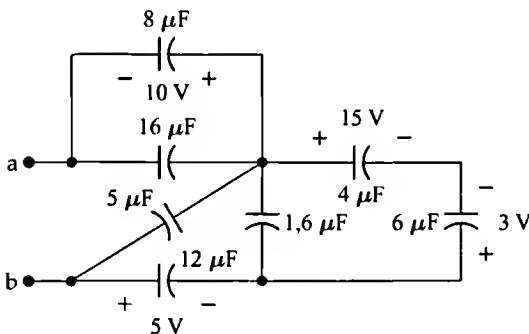


Figura P6.25

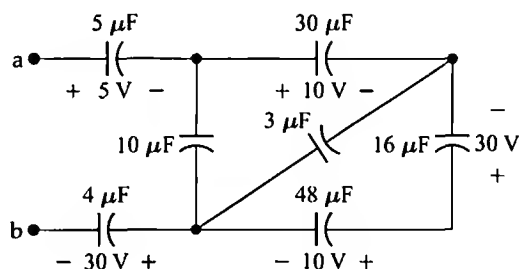


Figura P6.26

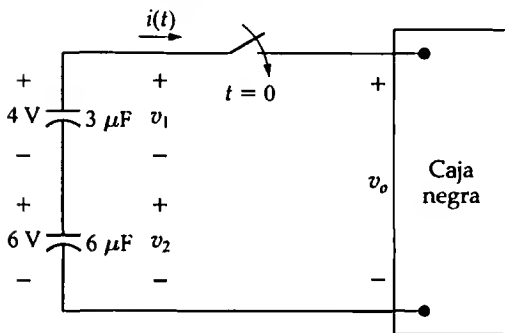
- 6.27. Los dos condensadores conectados en serie de la Figura P6.27 se conectan a los terminales de una caja negra en  $t = 0$ . La corriente resultante  $i(t)$  para  $t > 0$  es igual a  $20e^{-t}$   $\mu$ A.
- Sustituya los condensadores originales por un condensador equivalente y calcule  $v_o(t)$  para  $t \geq 0$ .
  - Calcule  $v_1(t)$  para  $t \geq 0$ .
  - Calcule  $v_2(t)$  para  $t \geq 0$ .
  - ¿Cuánta energía se entrega a la caja negra en el intervalo de tiempo  $0 \leq t \leq \infty$ ?

- e) ¿Cuánta energía había inicialmente almacenada en los condensadores conectados en serie?  
 f) ¿Cuánta energía está atrapada en los condensadores ideales?  
 g) ¿Concuerdan sus soluciones para  $v_1$  y  $v_2$  con la respuesta obtenida para el apartado (f)?

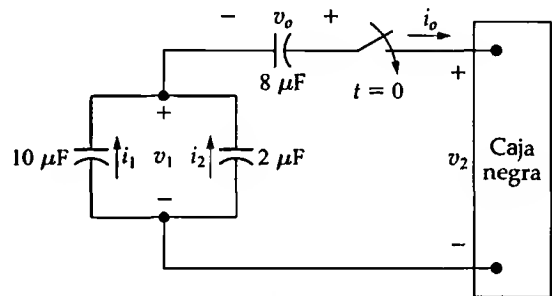
**6.28.** Los tres condensadores del circuito de la Figura P6.28 se conectan a los terminales de una caja negra en  $t = 0$ . La corriente resultante  $i_o$  para  $t > 0$  es

$$i_o = 1,92e^{-20t} \text{ mA.}$$

Si  $v_o(0) = -5 \text{ V}$  y  $v_1(0) = 25 \text{ V}$ , calcule los siguientes valores para  $t \geq 0$ : (a)  $v_2(t)$ , (b)  $v_o(t)$ , (c)  $v_1(t)$ , (d)  $i_1(t)$  y (e)  $i_2(t)$ .



**Figura P6.27**



**Figura P6.28**

- 6.29.** Para el circuito de la Figura P6.28, calcule
- la energía inicial almacenada en los condensadores;
  - la energía final almacenada en los condensadores;
  - la energía total entregada a la caja negra;
  - el porcentaje de la energía inicial almacenada que se entrega a la caja negra;
  - el porcentaje de la energía total suministrada que ha sido ya entregado en los primeros 40 ms.
- 6.30.** Determine el circuito equivalente para una conexión en serie de condensadores ideales. Suponga que cada condensador tiene su propia tensión inicial y designe estas tensiones iniciales mediante  $v_1(t_0)$ ,  $v_2(t_0)$ , etc. (*Sugerencia:* sume las tensiones a lo largo de la cadena de condensadores y utilice el hecho de que la conexión en serie obliga a que la corriente en cada condensador sea la misma).
- 6.31.** Deduzca el circuito equivalente para una conexión en paralelo de condensadores ideales. Suponga que la tensión inicial existente en bornes de los condensadores en paralelo es  $v(t_0)$ . (*Sugerencia:* sume las corrientes que entran en la batería de condensadores y utilice el hecho de que la conexión en paralelo obliga a que la tensión en bornes de cada condensador sea la misma).

**6.32.** La corriente del circuito de la Figura P6.32 es

$$i_o = 5e^{-2000t} (2 \cos 4000t + \sin 4000t) \text{ A}$$

para  $t \geq 0^+$ . Calcule  $v_1(0^+)$  y  $v_2(0^+)$ .

- 6.33. En  $t = 0$ , conectamos una bobina y un condensador en serie a los terminales de una caja negra, como se muestra en la Figura P6.33. Para  $t > 0$ , sabemos que

$$i_o = 1,5e^{-16.000t} - 0,5e^{-4000t} \text{ A.}$$

Si  $v_c(0) = -50 \text{ V}$ , calcule  $v_o$  para  $t \geq 0$ .

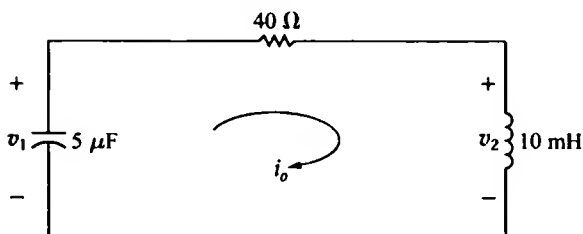


Figura P6.32

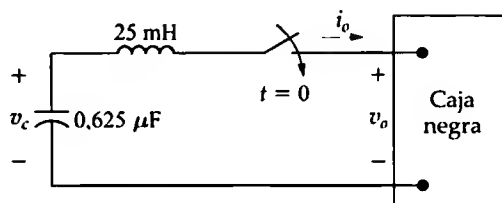


Figura P6.33

- 6.34. Suponga que no hay ninguna energía almacenada en el circuito de la Figura P6.34 en el momento de abrir el conmutador.

- Determine la ecuación diferencial que gobierna el comportamiento de  $i_2$  si  $L_1 = 4 \text{ H}$ ,  $L_2 = 16 \text{ H}$ ,  $M = 2 \text{ H}$  y  $R_o = 32 \Omega$ .
- Demuestre que, cuando  $i_g = 8 - 8e^{-t} \text{ A}$ ,  $t \geq 0$ , la ecuación diferencial hallada en el apartado (a) se satisface si  $i_2 = e^{-t} - e^{-2t} \text{ A}$ ,  $t \geq 0$ .
- Determine la ecuación de la tensión  $v_1$  en bornes de la fuente de corriente.
- ¿Cuál es el valor inicial de  $v_1$ ? ¿Tiene esto sentido según el comportamiento conocido del circuito?

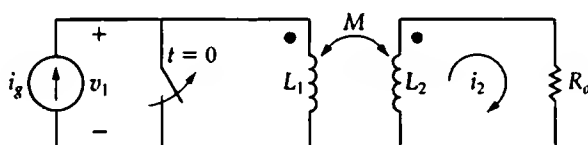


Figura P6.34

- 6.35. Llamemos  $v_o$  a la tensión existente entre los terminales de la bobina de  $16 \text{ H}$  en el circuito de la Figura 6.25. Suponga que  $v_o$  es positiva en el terminal con punto. Al igual que en el Ejemplo 6.6,  $i_g = 16 - 16e^{-5t} \text{ A}$ .

- ¿Puede determinar  $v_o$  sin tener que diferenciar las expresiones correspondientes a las corrientes? Explique su respuesta.
- Determine la ecuación correspondiente a  $v_o$ .
- Compruebe su respuesta al apartado (b) utilizando las apropiadas inductancias y derivadas de las corrientes.

- 6.36. Sea  $v_g$  la tensión existente entre los terminales de la fuente de corriente del circuito de la Figura 6.25. La referencia para  $v_g$  es positiva en el terminal superior de la fuente de corriente.

- Calcule  $v_g$  en función del tiempo cuando  $i_g = 16 - 16e^{-5t} \text{ A}$ .
- ¿Cuál es el valor inicial de  $v_g$ ?
- Determine la ecuación que nos da la potencia generada por la fuente de corriente.

- d) ¿Cuánta potencia está generando la fuente de corriente cuando  $t$  tiende a infinito?  
 e) Calcule la potencia disipada en cada resistencia cuando  $t$  tiende a infinito.

6.37. a) Demuestre que las ecuaciones diferenciales halladas en el apartado (a) del Ejemplo 6.6 pueden reordenarse de la forma siguiente:

$$4 \frac{di_1}{dt} + 25i_1 - 8 \frac{di_2}{dt} - 20i_2 = 5i_s - 8 \frac{di_s}{dt};$$

$$-8 \frac{di_1}{dt} - 20i_1 + 16 \frac{di_2}{dt} + 80i_2 = 16 \frac{di_s}{dt}.$$

- b) Demuestre que las soluciones dadas en el apartado (b) del Ejemplo 6.6 satisfacen las ecuaciones diferenciales mostradas en el apartado (a) de este problema.
- 6.38. Dos bobinas magnéticamente acopladas están devanadas sobre un núcleo no magnético. La autoinductancia de la bobina 1 es de 288 mH, la inductancia mutua es de 90 mH, el coeficiente de acoplamiento es de 0,75 y la estructura física de las bobinas es tal que  $\mathcal{P}_{11} = \mathcal{P}_{22}$ .
- a) Calcule  $L_2$  y la relación de vueltas  $N_1/N_2$ .  
 b) Si  $N_1 = 1200$ , ¿cuál es el valor de  $\mathcal{P}_1$  y  $\mathcal{P}_2$ ?
- 6.39. Las autoinductancias de dos bobinas magnéticamente acopladas son  $L_1 = 180 \mu\text{H}$  y  $L_2 = 500 \mu\text{H}$ . El medio de acoplamiento es no magnético. Si la bobina 1 tiene 300 vueltas y la bobina 2 tiene 500 vueltas, calcule  $\mathcal{P}_{11}$  y  $\mathcal{P}_{21}$  (en nanowebers por amperio) si el coeficiente de acoplamiento es igual a 0,6.
- 6.40. Dos bobinas magnéticamente acopladas tienen autoinductancias de 27 mH y 3 mH, respectivamente. La inductancia mutua entre las bobinas es de 7,2 mH.
- a) ¿Cuál es el coeficiente de acoplamiento?  
 b) Para estas dos bobinas, ¿cuál es el mayor valor que  $M$  puede tener?  
 c) Suponga que la estructura física de estas bobinas acopladas es tal que  $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2$ . ¿Cuál es la relación de vueltas  $N_1/N_2$  si  $N_1$  es el número de vueltas de la bobina de 27 mH?
- 6.41. Las autoinductancias de dos bobinas magnéticamente acopladas son de 36 mH y 9 mH, respectivamente. La bobina de 36 mH tiene 200 vueltas y el coeficiente de acoplamiento entre las dos bobinas es de 0,8. El medio de acoplamiento es no magnético. Cuando se excita la bobina 1 estando la bobina 2 en circuito abierto, el flujo que rodea sólo a la bobina 1 es un 10% del flujo que rodea a la bobina 2. Cuando se excita la bobina 2 con la bobina 1 en circuito abierto, el flujo que rodea sólo a la bobina 2 es un 12,5% del flujo que rodea a la bobina 1.
- a) ¿Cuántas vueltas tiene la bobina 2?  
 b) ¿Cuál es el valor de  $\mathcal{P}_2$  en nanowebers por amperio?  
 c) ¿Cuál es el valor de  $\mathcal{P}_{11}$  en nanowebers por amperio?  
 d) ¿Cuál es el valor del cociente  $(\phi_{22}/\phi_{12})$ ?
- 6.42. La construcción física de cuatro parejas de bobinas magnéticamente acopladas se muestra en la Figura P6.42. Suponga que el flujo magnético está restringido al material del núcleo en cada estructura. Indique dos posibles ubicaciones para las marcas de puntos en cada pareja de bobinas.
- 6.43. a) Partiendo de la Ecuación 6.59, demuestre que el coeficiente de acoplamiento puede expresarse también como

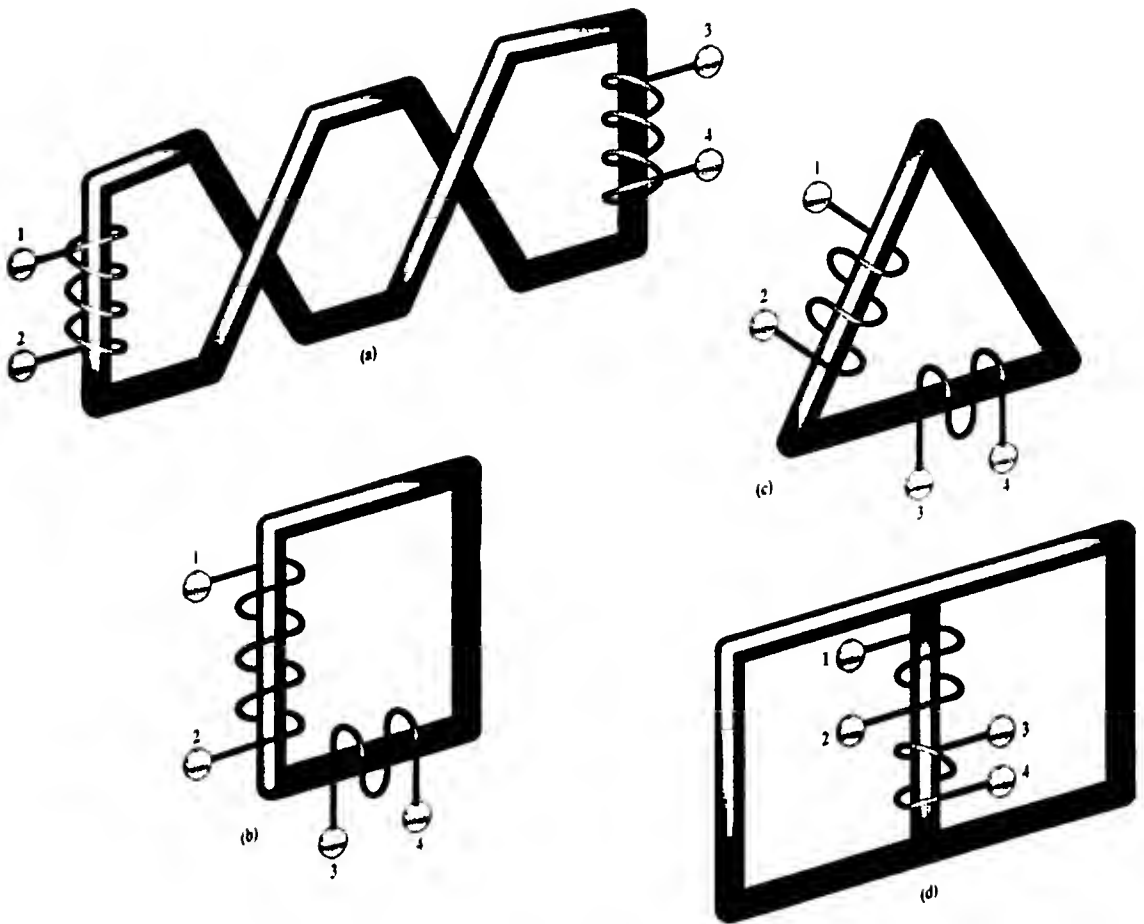


Figura P6.42

$$k = \sqrt{\left(\frac{\phi_{21}}{\phi_1}\right)\left(\frac{\phi_{12}}{\phi_2}\right)}.$$

b) Utilizando los cocientes  $\phi_{21}/\phi_1$  y  $\phi_{12}/\phi_2$ , explique por qué  $k$  tiene un valor inferior a 1,0.

- 6.44.** a) Demuestre que las dos bobinas acopladas de la Figura P6.44 pueden sustituirse por una única bobina con una inductancia  $L_{ab} = L_1 + L_2 + 2M$ . (Sugerencia: exprese  $v_{ab}$  en función de  $i_{ab}$ ).  
 b) Demuestre que, si las conexiones de los terminales de la bobina  $L_2$  se invierten,  $L_{ab} = L_1 + L_2 - 2M$ .

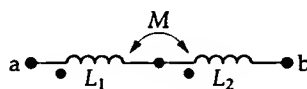


Figura P6.44

- 6.45.** Necesitamos determinar experimentalmente las marcas de polaridad de dos bobinas. La disposición de los elementos para el experimento se muestra en la Figura P6.45. Suponga que hemos asignado la marca de polaridad indicada al terminal conectado al terminal positivo de la batería.

Cuando se *abre* el conmutador, el voltímetro de continua marca un valor momentáneo positivo. ¿Dónde habría que colocar la marca de polaridad en la bobina conectada al voltímetro?

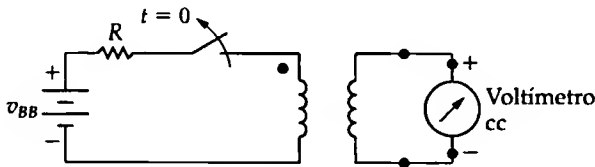


Figura P6.45

- 6.46. a) Demuestre que las dos bobinas magnéticamente acopladas de la Figura P6.46 pueden sustituirse por una única bobina con una inductancia igual a

$$L_{ab} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}.$$

(Sugerencia: designe mediante  $i_1$  e  $i_2$  a las corrientes de malla en el sentido de las agujas del reloj en las dos «ventanas» de la izquierda y de la derecha de la Figura P6.46, respectivamente. Suma las tensiones alrededor de las dos mallas. En la malla 1, llame  $v_{ab}$  a la tensión aplicada, no especificada. Despeje  $di_1/dt$  en función de  $v_{ab}$ ).

- b) Demuestre que, si se invierte la polaridad magnética de la bobina 2, entonces

$$L_{ab} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2M}.$$

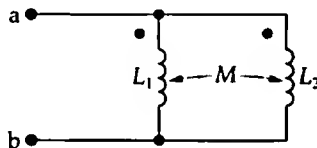


Figura P6.46

- 6.47. Las autoinductancias de las bobinas de la Figura 6.30 son  $L_1 = 18$  mH y  $L_2 = 32$  mH. Si el coeficiente de acoplamiento es 0,85, calcule la energía almacenada en el sistema en milijulios cuando (a)  $i_1 = 6$  A,  $i_2 = 9$  A; (b)  $i_1 = -6$  A,  $i_2 = -9$  A; (c)  $i_1 = -6$  A,  $i_2 = 9$  A; y (d)  $i_1 = 6$  A,  $i_2 = -9$  A.
- 6.48. El coeficiente de acoplamiento del Problema 6.47 se incrementa hasta 1,0.
- a) Si  $i_1$  es igual a 6 A, ¿qué valor de  $i_2$  dará como resultado una energía almacenada igual a cero?
- b) ¿Hay algún valor físicamente alcanzable de  $i_2$  que pueda hacer que la energía almacenada sea negativa?
- 6.49. Resuelva de nuevo el ejemplo de la Perspectiva práctica, pero esta vez ponga el botón en la parte de abajo del circuito divisor, como se muestra en la Figura P6.49. Calcule la tensión de salida  $v(t)$  cuando se toca el botón con el dedo.
- 6.50. Algunas lámparas están construidas de modo que se encienden o apagan cuando se toca su base. Estas lámparas utilizan una variación con un solo terminal del circuito con conmutador capacitivo analizado en la Perspectiva práctica. La Figura P6.50 muestra un modelo de circuito de este



tipo de lámpara. Calcule el cambio en la tensión  $v(t)$  cuando una persona toca la lámpara. Suponga que todos los condensadores están inicialmente descargados.

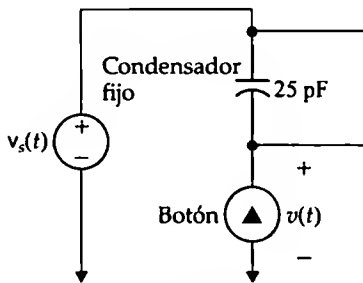


Figura P6.49

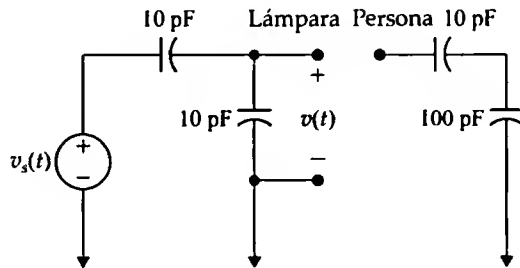


Figura P6.50

- 6.51. En el ejemplo de la Perspectiva práctica, hemos calculado la tensión de salida cuando el botón del ascensor es el condensador superior de un divisor de tensión. En el Problema 6.49, hemos calculado la tensión cuando el botón es el condensador inferior del divisor y hemos obtenido el mismo resultado. Podríamos preguntarnos si esto se cumple para todos los divisores de tensión de este tipo. Calcule la diferencia de tensión (cuando hay dedo presente y cuando no hay dedo) para los circuitos de las Figuras P6.51(a) y (b), que utilizan dos fuentes de tensión idénticas.

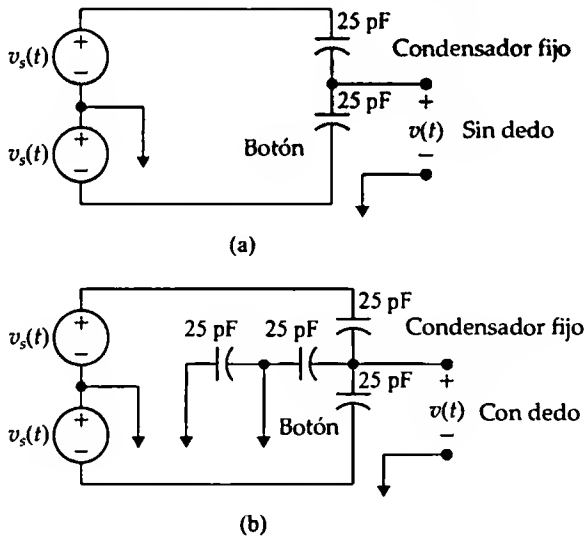


Figura P6.51

# CAPÍTULO

# 7

# Respuesta de circuitos *RL* y *RC* de primer orden

## Contenido del capítulo

- 7.1. Respuesta natural de un circuito *RL*
- 7.2. Respuesta natural de un circuito *RC*
- 7.3. Respuesta al escalón de los circuitos *RL* y *RC*
- 7.4. Una solución general para la respuesta natural y la respuesta al escalón
- 7.5. Conmutación secuencial
- 7.6. Respuesta no acotada
- 7.7. El amplificador integrador

En el Capítulo 6, ya hemos indicado que una importante característica de las bobinas y condensadores es su capacidad para almacenar energía. Ahora ya podemos determinar las corrientes y tensiones que surgen cuando una bobina o un condensador liberan o absorben energía en respuesta a un cambio abrupto en una fuente continua de tensión o de corriente. En este capítulo, vamos a centrarnos en circuitos compuestos únicamente de fuentes, resistencias y bobinas o condensadores (pero no las dos cosas). Con el fin de abreviar, dichas configuraciones se denominan **circuitos *RL*** (circuitos con resistencias y bobinas) y **circuitos *RC*** (circuitos con resistencias y condensadores).

Dividiremos nuestro análisis de los circuitos *RL* y *RC* en tres fases. En la primera fase, consideraremos las corrientes y tensiones que surgen cuando la energía almacenada en una bobina o condensador se libera súbitamente hacia una red resistiva. Esto sucede cuando la bobina o condensador se desconecta abruptamente de su fuente continua. De este modo, podemos reducir el circuito a una de las dos formas equivalentes mostradas en la Figura 7.1. Las corrientes y tensiones que se producen en este tipo de configuración se denominan **respuesta natural** del circuito, para hacer hincapié en que es la naturaleza del propio circuito, no las fuentes externas de excitación, lo que determina su comportamiento.

En la segunda fase de nuestro análisis, consideraremos las corrientes y tensiones que se producen cuando una bobina o condensador adquieren energía debido a la aplicación súbita de una fuente continua de corriente o de tensión. Este tipo de respuesta se denomina **respuesta al escalón**. El proceso para determinar tanto la respuesta natural como la respuesta al

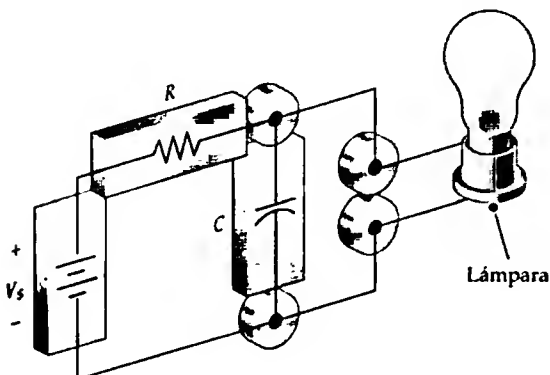
## Perspectiva práctica

### Circuito luminoso intermitente

Podemos imaginar fácilmente muchas aplicaciones en las que se requiere la utilización de una luz intermitente. Una cámara fotográfica utilizada para captar imágenes en condiciones de baja iluminación utiliza una luz muy brillante para iluminar la escena sólo durante el tiempo preciso para grabar la imagen en la película. Generalmente, la cámara no puede tomar otra imagen hasta que el circuito encargado de generar el pulso luminoso se haya «recargado».

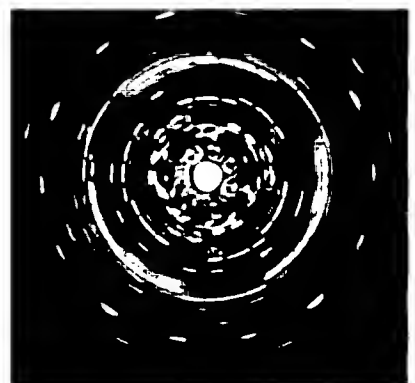
En otras aplicaciones, se utilizan luces intermitentes como señal de aviso que indica algún tipo de peligro, como por ejemplo en las antenas muy altas, en los edificios en construcción y en las áreas dotadas de seguridad. Al diseñar circuitos capaces de producir un pulso luminoso, el ingeniero debe saber cuáles son los requisitos de la aplicación. Por ejemplo, el ingeniero de diseño debe conocer si la fuente luminosa va a ser controlada manualmente actuando un conmutador (como en el caso de una cámara) o si el pulso luminoso debe repetirse automáticamente a una velocidad predeterminada. El ingeniero también debe saber si la lámpara intermitente es un dispositivo permanente (como, por ejemplo, los que se colocan en lo alto de una antena) o si se trata de una instalación temporal (como, por ejemplo, un edificio en construcción). Otra pregunta que hay que hacerse es si se puede acceder con facilidad a una fuente de alimentación.

Muchos de los circuitos utilizados hoy en día para controlar fuentes luminosas intermitentes están basados en circuitos electrónicos cuyo análisis cae fuera de este texto. Sin embargo, podemos familiarizarnos con el proceso de razonamiento empleado para diseñar un circuito de control de una fuente luminosa intermitente analizando un circuito compuesto por una fuente de tensión continua, una resistencia, un condensador y una bombilla, circuito diseñado para generar un pulso luminoso cuando se alcance una cierta tensión crítica. Dicho circuito se muestra en la figura y hablaremos de él al final de este capítulo.



### Objetivos del capítulo

1. Ser capaz de determinar la respuesta natural de los circuitos  $RL$  y  $RC$ .
2. Ser capaz de determinar la respuesta a un escalón de los circuitos  $RL$  y  $RC$ .
3. Saber cómo analizar circuitos con conmutación secuencial.
4. Ser capaz de analizar circuitos basados en amplificador operacional que contengan resistencias y un único condensador.

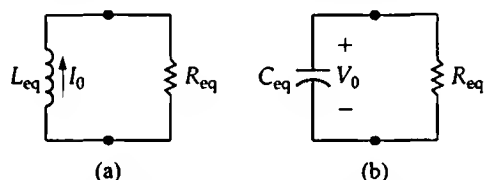


escalón es el mismo; por tanto, en la tercera fase de nuestro análisis, desarrollaremos un método general que puede utilizarse para determinar la respuesta de los circuitos  $RL$  y  $RC$  a cualquier cambio abrupto en una fuente continua de corriente o de tensión.

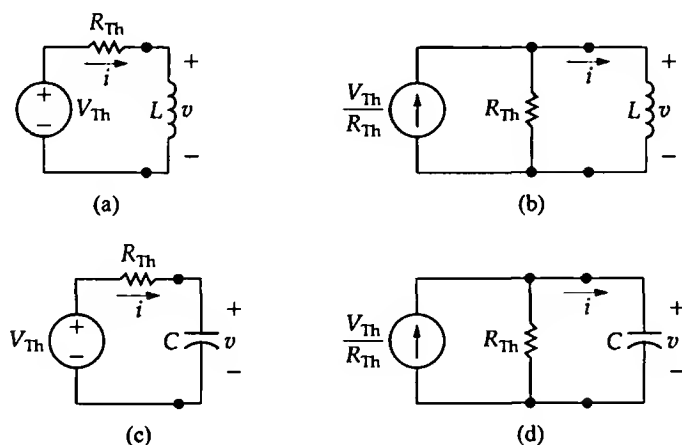
La Figura 7.2 muestra las cuatro posibilidades de configuración general de los circuitos  $RL$  y  $RC$ . Observe que, cuando no hay ninguna fuente independiente en el circuito, la tensión de Thévenin y la corriente de Norton son cero y el circuito se reduce a uno de los mostrados en la Figura 7.1; es decir, tenemos un problema de determinación de la respuesta natural del circuito.

Los circuitos  $RL$  y  $RC$  también se conocen con el nombre de **circuitos de primer orden**, porque sus tensiones y corrientes vienen descritas por ecuaciones diferenciales de primer orden. Independientemente de lo complejo que un circuito pueda parecer, si puede reducirse a un equivalente de Thévenin o de Norton conectado a los terminales de una bobina o condensador equivalente, se tratará de un circuito de primer orden. (Observe que, si hay múltiples bobinas o condensadores en el circuito original, deben estar interconectados de tal manera que puedan ser sustituidos por un único elemento equivalente).

Después de introducir las técnicas para el análisis de la respuesta natural y la respuesta al escalón de los circuitos de primer orden, estudiaremos algunos casos especiales de interés. El primero es el relativo a la conmutación secuencial, que se refiere a circuitos en los cuales la conmutación puede tener lugar en dos o más instantes de tiempo. A continuación consideraremos la respuesta no restringida. Finalmente, analizaremos un útil circuito denominado amplificador integrador.



**Figura 7.1.** Las dos formas de los circuitos para el cálculo de la respuesta natural.  
(a) Circuito  $RL$ . (b) Circuito  $RC$ .



**Figura 7.2.** Cuatro posibles circuitos de primer orden. (a) Una bobina conectada a un equivalente de Thévenin. (b) Una bobina conectada a un equivalente de Norton. (c) Un condensador conectado a un equivalente de Thévenin. (d) Un condensador conectado a un equivalente de Norton.

## 7.1. Respuesta natural de un circuito $RL$

La mejor forma de describir la respuesta natural de un circuito  $RL$  consiste en referirse al circuito mostrado en la Figura 7.3. Suponemos que la fuente de corriente independiente genera una corriente constante de  $I_s$  A y que el conmutador ha estado en la posición de cerrado durante un largo período de tiempo. Definiremos con más precisión la frase *un largo período de tiempo* más adelante, dentro de esta misma sección. Por el momento, lo que queremos decir es que todas las corrientes y tensiones han tenido el tiempo suficiente como para alcanzar un valor constante. De este modo, sólo pueden existir corrientes constantes (o cc) en el circuito justo antes de abrir el conmutador, por lo que la bobina aparece como un cortocircuito ( $L di/dt = 0$ ) justo antes de liberarse la energía almacenada.

Puesto que la bobina aparece como un cortocircuito, la tensión en bornes de la rama inductiva es cero y no puede haber ninguna corriente que atraviese ni  $R_0$  ni  $R$ . Por tanto, toda la corriente de la fuente  $I_s$  pasa a través de la rama inductiva. Calcular la respuesta natural requiere determinar la tensión y la corriente en los terminales de la resistencia después de abrir el conmutador, es decir, después de desconectar la fuente y de que la bobina comience a liberar energía. Si designamos mediante  $t = 0$  el instante en que se abre el conmutador, el problema se reduce a determinar la ecuación de  $v(t)$  e  $i(t)$  para  $t \geq 0$ . El circuito mostrado en la Figura 7.3 se reduce, para  $t \geq 0$ , al que puede verse en la Figura 7.4.

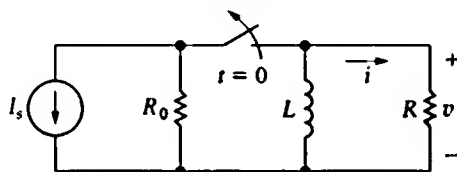


Figura 7.3. Un circuito  $RL$ .

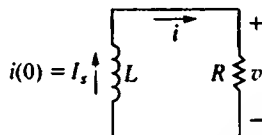


Figura 7.4. El circuito mostrado en la Figura 7.3, para  $t \geq 0$ .

### Determinación de la ecuación de la corriente

Para determinar  $i(t)$ , utilizamos la ley de Kirchhoff de las tensiones para obtener una ecuación en la que aparezcan  $i$ ,  $R$  y  $L$ . Sumando las tensiones alrededor del lazo cerrado, se obtiene

$$L \frac{di}{dt} + Ri = 0, \quad (7.1)$$

donde utilizamos el convenio de signos pasivo. La Ecuación 7.1 es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden, porque contiene términos en los que aparece la derivada ordinaria de la incógnita, es decir,  $di/dt$ . La derivada de mayor orden que aparece en la ecuación es 1, de ahí que digamos que la ecuación es de **primer orden**.

Además, los coeficientes de la ecuación  $R$  y  $L$  son constantes, es decir, no son funciones ni de la variable dependiente  $i$  ni de la variable independiente  $t$ . Por tanto, podemos decir que la ecuación es una ecuación diferencial ordinaria con coeficientes constantes.

Para resolver la Ecuación 7.1, dividimos por  $L$ , pasamos el término donde aparece  $i$  al lado derecho y luego multiplicamos ambos lados por un tiempo diferencial  $dt$ . El resultado es

$$\frac{di}{dt} dt = -\frac{R}{L} i dt. \quad (7.2)$$

A continuación, podemos observar que el lado izquierdo de la Ecuación 7.2 representa un incremento diferencial de la corriente  $i$ , es decir,  $di$ . Dividiendo ahora por  $i$  se obtiene

$$\frac{di}{i} = -\frac{R}{L} dt. \quad (7.3)$$

Podemos hallar una expresión explícita de  $i$  en función de  $t$  integrando ambos lados de la Ecuación 7.3. Utilizando  $x$  y  $y$  como variables de integración, nos queda

$$\int_{i(t_0)}^{i(t)} \frac{dx}{x} = -\frac{R}{L} \int_0^t dy, \quad (7.4)$$

en donde  $i(t_0)$  es la corriente correspondiente al instante  $t_0$  e  $i(t)$  es la corriente correspondiente al instante  $t$ . Aquí,  $t_0 = 0$ , por lo que realizando la integración resulta

$$\ln \frac{i(t)}{i(0)} = -\frac{R}{L} t. \quad (7.5)$$

Basándonos en la definición del logaritmo natural,

➤ **RESPUESTA NATURAL DE UN CIRCUITO  $RL$**   $i(t) = i(0)e^{-(R/L)t}. \quad (7.6)$

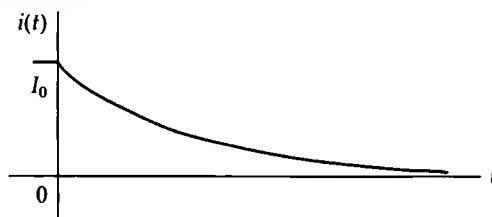
Recuerde, del Capítulo 6, que en una bobina no puede haber ningún cambio instantáneo de la corriente. Por tanto, en el instante justo posterior a la apertura del conmutador, la corriente en la bobina continúa siendo la misma. Si utilizamos  $0^-$  para indicar el instante justo anterior a la conmutación y  $0^+$  para indicar el instante justo posterior, entonces

$$i(0^-) = i(0^+) = I_0,$$

donde, como en la Figura 7.1,  $I_0$  es la corriente inicial que atraviesa la bobina. Dicha corriente inicial en la bobina está orientada en la misma dirección que la dirección de referencia de  $i$ . Por tanto, la Ecuación 7.6 queda

$$i(t) = I_0 e^{-(R/L)t}, \quad t \geq 0, \quad (7.7)$$

que demuestra que la corriente parte de un valor inicial  $I_0$  y decrece exponencialmente hacia cero a medida que se incrementa  $t$ . La Figura 7.5 muestra la respuesta del circuito.



**Figura 7.5.** Respuesta en corriente del circuito mostrado en la Figura 7.4.

Podemos calcular la tensión que cae en la resistencia de la Figura 7.4 aplicando directamente la ley de Ohm:

$$v = iR = I_0 R e^{-(R/L)t}, \quad t \geq 0^+. \quad (7.8)$$

Fíjese en que, por contraste con la ecuación de la corriente mostrada en la Ecuación 7.7, la tensión sólo está definida para  $t > 0$ , no en  $t = 0$ . La razón es que en el instante inicial se produce un cambio abrupto en la tensión. Observe que, para  $t < 0$ , la derivada de la corriente es cero, por lo que también es cero la tensión (este resultado se debe a que  $v = L di/dt = 0$ ). Por tanto,

$$v(0^-) = 0, \quad (7.9)$$

$$v(0^+) = I_0 R, \quad (7.10)$$

donde  $v(0^+)$  se obtiene de la Ecuación 7.8 con  $t = 0^+$ . Con este cambio abrupto en dicho instante de tiempo, el valor de la tensión en  $t = 0$  es desconocido. Por tanto, utilizamos  $t \geq 0^+$  para definir la región de validez de estas soluciones.

Podemos calcular la potencia disipada en la resistencia a partir de cualquiera de las siguientes ecuaciones:

$$p = vi, \quad p = i^2 R \quad \text{o} \quad p = \frac{v^2}{R}. \quad (7.11)$$

Independientemente de la forma que se utilice, la expresión resultante puede reducirse a

$$p = I_0^2 R e^{-2(R/L)t}, \quad t \geq 0^+. \quad (7.12)$$

La energía entregada a la resistencia durante un determinado intervalo de tiempo después de abrir el conmutador es

$$\begin{aligned} w &= \int_0^t p \, dx = \int_0^t I_0^2 R e^{-2(R/L)x} \, dx \\ &= \frac{1}{2(R/L)} I_0^2 R (1 - e^{-2(R/L)t}) \\ &= \frac{1}{2} L I_0^2 (1 - e^{-2(R/L)t}), \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (7.13)$$

Observe, en la Ecuación 7.13, que a medida que  $t$  tiende a infinito, la energía disipada en la resistencia se aproxima a la energía inicial almacenada en la bobina.

## Significado de la constante de relajación

Las ecuaciones de  $i(t)$  (Ecuación 7.7) y de  $v(t)$  (Ecuación 7.8) incluyen un término de la forma  $e^{-(R/L)t}$ . El coeficiente de  $t$  en dicho término (es decir,  $R/L$ ) determina la velocidad con la que la corriente o la tensión se aproximan a cero. El inverso de este cociente se denomina **constante de relajación** (o constante de tiempo) del circuito, y se designa de la forma siguiente:

$$\tau = \text{constante de relajación} = \frac{L}{R}. \quad (7.14)$$

---

<sup>1</sup> Podemos definir las expresiones  $0^-$  y  $0^+$  más formalmente. La expresión  $x(0^-)$  se refiere al límite de la variable  $x$  a medida que  $t \rightarrow 0$  por la izquierda, es decir, desde un tiempo negativo. La expresión  $x(0^+)$  se refiere al límite de la variable  $x$  a medida que  $t \rightarrow 0$  por la derecha, es decir, desde un tiempo positivo.

Utilizando el concepto de constante de relajación, podemos escribir las ecuaciones de la corriente, la tensión, la potencia y la energía como

$$i(t) = I_0 e^{-t/\tau}, \quad t \geq 0, \quad (7.15)$$

$$v(t) = I_0 R e^{-t/\tau}, \quad t \geq 0^+, \quad (7.16)$$

$$p = I_0^2 R e^{-2t/\tau}, \quad t \geq 0^+, \quad (7.17)$$

$$w = \frac{1}{2} L I_0^2 (1 - e^{-2t/\tau}), \quad t \geq 0. \quad (7.18)$$

La constante de relajación es un parámetro importante para los circuitos de primer orden, por lo que resulta conveniente mencionar algunas de sus características antes de continuar con las explicaciones. En primer lugar, resulta cómodo pensar en el tiempo transcurrido después de la conmutación en términos de múltiplos enteros de  $\tau$ . Así, una constante de relajación después de que la bobina haya comenzado a liberar su energía almacenada hacia la resistencia, la corriente se habrá reducido a  $e^{-1}$  o aproximadamente 0,37 de su valor inicial.

La Tabla 7.1 proporciona el valor de  $e^{-t/\tau}$  para múltiplos enteros de  $\tau$  entre 1 y 10. Observe que, cuando el tiempo transcurrido excede de cinco constantes de tiempo, la corriente es inferior al 1% de su valor inicial. Por eso, en ocasiones decimos que cinco constantes de relajación después de que tenga lugar la conmutación, las corrientes y tensiones habrán alcanzado, a efectos prácticos, sus valores finales. Para circuitos con una única constante de relajación (circuitos de primer orden) con un 1% de precisión, la frase *un largo periodo de tiempo* implica que han transcurrido cinco o más constantes de relajación. Así, la existencia de corriente en el circuito  $RL$  mostrado en la Figura 7.1(a) es una condición temporal, por lo que se la denomina **respuesta transitoria** del circuito. La respuesta existente largo tiempo después de que haya tenido lugar la conmutación se denomina **respuesta en régimen permanente** o **estado estacionario**. La frase *un largo periodo de tiempo* significa entonces también el tiempo que el circuito necesita para alcanzar los valores de régimen permanente.

Todo circuito de primer orden está caracterizado, en parte, por el valor de su constante de relajación. Si no tenemos ningún método para calcular la constante de relajación de dicho circuito (quizá porque no conozcamos los valores de los componentes), podemos hallar su valor a partir de una gráfica de la respuesta natural del circuito. Esto se debe a que otra importante característica de la constante de relajación es que nos proporciona el tiempo requerido para que la corriente alcance su valor final si la corriente continúa cambiando a la misma velocidad inicial. Para ilustrar esto, vamos a evaluar  $di/dt$  en  $0^+$  y vamos a suponer que la corriente continúa cambiando a dicha velocidad:

**Tabla 7.1.** Valor de  $e^{-t/\tau}$  para  $t$  igual a múltiplos enteros de  $\tau$ .

$t$	$e^{-t/\tau}$	$t$	$e^{-t/\tau}$
$\tau$	$3,6788 \times 10^{-1}$	$6\tau$	$2,4788 \times 10^{-3}$
$2\tau$	$1,3534 \times 10^{-1}$	$7\tau$	$9,1188 \times 10^{-4}$
$3\tau$	$4,9787 \times 10^{-2}$	$8\tau$	$3,3546 \times 10^{-4}$
$4\tau$	$1,8316 \times 10^{-2}$	$9\tau$	$1,2341 \times 10^{-4}$
$5\tau$	$6,7379 \times 10^{-3}$	$10\tau$	$4,5400 \times 10^{-5}$

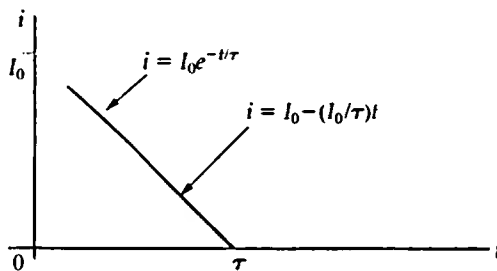


$$\frac{di}{dt}(0^+) = -\frac{R}{L} I_0 = -\frac{I_0}{\tau}. \quad (7.19)$$

Ahora, si  $i$  comienza con el valor inicial  $I_0$  y decrece a una velocidad constante de  $I_0/\tau$  amperios por segundo, la expresión que nos da el valor de  $i$  es

$$i = I_0 - \frac{I_0}{\tau} t. \quad (7.20)$$

La Ecuación 7.20 indica que  $i$  alcanzaría su valor final de cero en  $\tau$  segundos. La Figura 7.6 muestra de qué modo resulta útil esta interpretación gráfica a la hora de estimar la constante de relajación de un circuito a partir de una gráfica de su respuesta natural. Dicha gráfica podría, por ejemplo, generarse mediante un osciloscopio que midiera la corriente de salida. Si dibujamos la tangente a la gráfica de la respuesta natural en  $t = 0$  y vemos dónde interseca esa tangente al eje de tiempos, tendremos el valor de  $\tau$ .



**Figura 7.6.** Interpretación gráfica de la constante de relajación del circuito  $RL$  mostrado en la Figura 7.4.

Podemos resumir el cálculo de la respuesta natural de un circuito  $RL$  de la forma siguiente:

✦ **CÁLCULO DE LA RESPUESTA NATURAL DE UN CIRCUITO  $RL$**

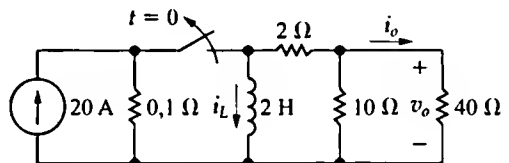
1. Calcule la corriente inicial,  $I_0$ , que atraviesa la bobina.
2. Calcule la constante de relajación del circuito,  $\tau = L/R$ .
3. Utilice la Ecuación 7.15,  $I_0 e^{-t/\tau}$ , para determinar  $i(t)$  a partir de  $I_0$  y de  $\tau$ .

Los demás cálculos de interés pueden realizarse una vez que se conoce  $i(t)$ . Los Ejemplos 7.1 y 7.2 ilustran los cálculos numéricos asociados con la respuesta natural de un circuito  $RL$ .

**EJEMPLO 7.1** Determinación de la respuesta natural de un circuito  $RL$

El conmutador del circuito mostrado en la Figura 7.7 ha estado cerrado durante un largo período de tiempo antes de abrirlo en  $t = 0$ . Determine

- a)  $i_L(t)$  para  $t \geq 0$
- b)  $i_o(t)$  para  $t \geq 0^+$



**Figura 7.7.** Circuito del Ejemplo 7.1.

- c)  $v_o(t)$  para  $t \geq 0^+$   
 d) el porcentaje de la energía total almacenada en la bobina de 2 H que se disipa en la resistencia de  $10 \Omega$ .

## SOLUCIÓN

- a) El conmutador ha estado cerrado durante un largo período de tiempo antes de  $t = 0$ , por lo que sabemos que la tensión en bornes de la bobina debe ser cero en  $t = 0^-$ . Por tanto, la corriente inicial que atraviesa la bobina es de 20 A en  $t = 0^-$ . Eso quiere decir que  $i_L(0^+)$  también es igual a 20 A, porque en una bobina no puede haber cambios instantáneos de la corriente. Sustituimos el circuito resistivo conectado a los terminales de la bobina por una única resistencia de  $10 \Omega$ :

$$R_{\text{eq}} = 2 + (40 \parallel 10) = 10 \Omega.$$

La constante de relajación del circuito es  $L/R_{\text{eq}}$ , es decir, 0,2 s, lo que deja la ecuación de la corriente que atraviesa la bobina de la forma siguiente:

$$i_L(t) = 20e^{-5t} \text{ A}, \quad t \geq 0.$$

- b) La forma más fácil de calcular la corriente en la resistencia de  $40 \Omega$  es mediante división de corriente:

$$i_o = -i_L \frac{10}{10 + 40}.$$

Observe que esta expresión es válida para  $t \geq 0^+$  porque  $i_o = 0$  en  $t = 0^-$ . La bobina se comporta como un cortocircuito antes de la apertura del conmutador, produciéndose un cambio instantáneo de la corriente  $i_o$ . Entonces,

$$i_o(t) = -4e^{-5t} \text{ A}, \quad t \geq 0^+.$$

- c) Calculamos la tensión  $v_o$  aplicando de forma directa la ley de Ohm:

$$v_o(t) = 40i_o = -160e^{-5t} \text{ V}, \quad t \geq 0^+.$$

- d) La potencia disipada en la resistencia de  $10 \Omega$  es

$$p_{10\Omega}(t) = \frac{v_o^2}{10} = 2560e^{-10t} \text{ W}, \quad t \geq 0^+.$$

La energía total disipada en la resistencia de  $10 \Omega$  es

$$w_{10\Omega}(t) = \int_0^\infty 2560e^{-10t} dt = 256 \text{ J}.$$

La energía inicial almacenada en la bobina de 2 H es

$$w(0) = \frac{1}{2} Li^2(0) = \frac{1}{2} (2)(400) = 400 \text{ J}.$$

Por tanto, el porcentaje de la energía que se disipa en la resistencia de  $10 \Omega$  es

$$\frac{256}{400} (100) = 64\%.$$

### EJEMPLO 7.2 Determinación de la respuesta natural de un circuito *RL* con bobinas en paralelo

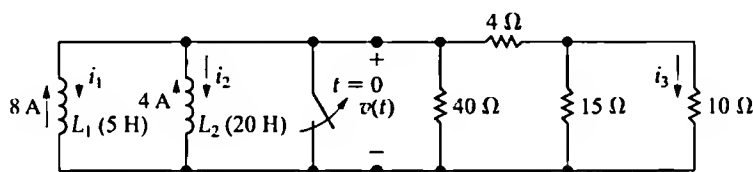


Figura 7.8. Circuito del Ejemplo 7.2.

En el circuito mostrado en la Figura 7.8, las corrientes iniciales que atraviesan las bobinas  $L_1$  y  $L_2$  han sido establecidas mediante unas fuentes que no se muestran. El conmutador se abre en  $t = 0$ .

- Calcule  $i_1$ ,  $i_2$  e  $i_3$  para  $t \geq 0$ .
- Calcule la energía inicial almacenada en las bobinas conectadas en paralelo.
- Determine cuánta energía habrá almacenada en las bobinas a medida que  $t \rightarrow \infty$ .
- Demuestre que la energía total entregada a la red resistiva es igual a la diferencia entre los resultados obtenidos en los apartados (b) y (c).

### SOLUCIÓN

- La clave para calcular las corrientes  $i_1$ ,  $i_2$  e  $i_3$  radica en conocer la tensión  $v(t)$ . Podemos calcular fácilmente  $v(t)$  si reducimos el circuito mostrado en la Figura 7.8 a la forma equivalente mostrada en la Figura 7.9. Las bobinas en paralelo pueden simplificarse, sustituyéndolas por una bobina equivalente de 4 H que tendrá una corriente inicial de 12 A. La red resistiva se reduce a una única resistencia de 8  $\Omega$ . Por tanto, el valor inicial de  $i(t)$  es 12 A y la constante de relajación es 4/8, es decir, 0,5 s. Por tanto,

$$i(t) = 12e^{-2t} \text{ A}, \quad t \geq 0.$$

Ahora,  $v(t)$  será simplemente el producto  $8i$ , por lo que

$$v(t) = 96e^{-2t} \text{ V}, \quad t \geq 0^+.$$

El circuito muestra que  $v(t) = 0$  en  $t = 0^-$ , por lo que la ecuación de  $v(t)$  será válida para  $t \geq 0^+$ .

Después de obtener  $v(t)$ , podemos calcular  $i_1$ ,  $i_2$  e  $i_3$ :

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{1}{5} \int_0^t 96e^{-2x} dx - 8 \\ &= 1,6 - 9,6e^{-2t} \text{ A}, \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i_2 &= \frac{1}{20} \int_0^t 96e^{-2x} dx - 4 \\ &= -1,6 - 2,4e^{-2t} \text{ A}, \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

$$i_3 = \frac{v(t)}{10} \frac{15}{25} = 5,76e^{-2t} \text{ A}, \quad t \geq 0^+.$$

Observe que las ecuaciones de las corrientes  $i_1$  e  $i_2$  de las bobinas son válidas para  $t \geq 0$ , mientras que la ecuación de la corriente de la resistencia,  $i_3$ , es válida para  $t \geq 0^+$ .

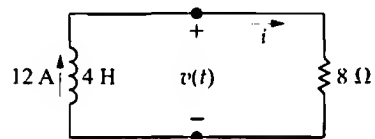


Figura 7.9. Una simplificación del circuito mostrado en la Figura 7.8.

- La energía inicial almacenada en las bobinas es

$$w = \frac{1}{2}(5)(64) + \frac{1}{2}(20)(16) = 320 \text{ J}.$$

- A medida que  $t \rightarrow \infty$ ,  $i_1 \rightarrow 1,6$  A e  $i_2 \rightarrow -1,6$  A. Por tanto, un largo tiempo después de abrir el conmutador, la energía almacenada en las dos bobinas es

$$w = \frac{1}{2}(5)(1,6)^2 + \frac{1}{2}(20)(-1,6)^2 = 32 \text{ J}.$$

- Obtenemos la energía total entregada a la red resistiva mediante integración de la ecuación que nos da la potencia instantánea, desde cero hasta infinito:

$$\begin{aligned} w &= \int_0^\infty p dt = \int_0^\infty 1152e^{-4t} dt \\ &= 1152 \left. \frac{e^{-4t}}{-4} \right|_0^\infty = 288 \text{ J}. \end{aligned}$$

Este resultado es la diferencia entre la energía inicialmente almacenada (320 J) y

la energía atrapada en las bobinas en paralelo (32 J). La bobina equivalente a las bobinas en paralelo (que predice el comportamiento en los terminales de la combinación en paralelo) tiene una energía ini-

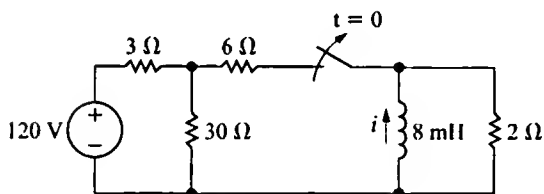
cial de 288 J; es decir, la energía almacenada en la bobina equivalente representa la cantidad de energía que se entregará a la red resistiva conectada a los terminales de las bobinas originales.

## Evaluación del objetivo 1

- Ser capaz de determinar la respuesta natural de los circuitos  $RL$  y  $RC$ .

7.1. El conmutador del circuito mostrado ha estado cerrado durante un largo período de tiempo y se abre en  $t = 0$ .

- Calcule el valor inicial de  $i$ .
- Calcule la energía inicial almacenada en la bobina.
- ¿Cuál es la constante de relajación del circuito para  $t > 0$ ?
- ¿Cuál es la ecuación que nos da  $i(t)$  para  $t \geq 0$ ?
- ¿Qué porcentaje de la energía inicial almacenada se habrá disipado en la resistencia de  $2\ \Omega$  5 ms después de abrir el conmutador?

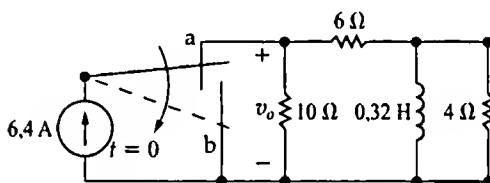


## RESPUESTA

- $-12,5\text{ A}$ ;
- $625\text{ mJ}$ ; (c)  $4\text{ ms}$ ;
- $-12,5e^{-250t}\text{ A}$ ,  $t \geq 0$ ; (e)  $91,8\%$ .

7.2. En  $t = 0$ , el conmutador del circuito mostrado se mueve instantáneamente de la posición a a la posición b.

- Calcule  $v_o$  para  $t \geq 0^+$ .
- ¿Qué porcentaje de la energía inicial almacenada en la bobina terminará por disiparse en la resistencia de  $4\ \Omega$ ?



- RESPUESTA** (a)  $-8e^{-10t}\text{ V}$ ,  $t \geq 0$ ;  
(b)  $80\%$ .

**NOTA** Trate también de resolver los Problemas 7.1-7.3 del capítulo.

## 7.2. Respuesta natural de un circuito $RC$

Como hemos señalado en la Sección 7.1, la respuesta natural de un circuito  $RC$  es análoga a la de un circuito  $RL$ . En consecuencia, no vamos a tratar el circuito  $RC$  con el mismo grado de detalle que el circuito  $RL$ .

La respuesta natural de un circuito  $RC$  puede calcularse a partir del circuito mostrado en la Figura 7.10. Comenzamos suponiendo que el conmutador ha permanecido en su posición durante un largo período de tiempo, permitiendo que el lazo formado por la fuente de tensión continua  $V_g$ , la resistencia  $R_1$  y el condensador  $C$  alcancen las condiciones de régimen permanente. Recuerde, del Capítulo 6,

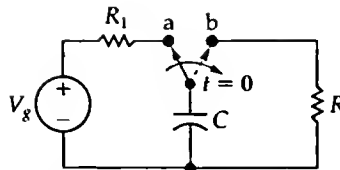


Figura 7.10. Un circuito RC.

que un condensador se comporta como un circuito abierto en presencia de una tensión constante. Por tanto, la fuente de tensión no podrá sostener una corriente y toda la tensión de la fuente aparecerá entre los terminales del condensador. En la Sección 7.3 veremos cómo llega la tensión del condensador a alcanzar su valor de régimen permanente, que se corresponde con la tensión de la fuente de continua, pero por ahora lo que nos interesa es que, cuando se desplaza el conmutador de la posición a a la posición b (en  $t = 0$ ), la tensión en el condensador es  $V_g$ . Puesto que no puede haber un cambio instantáneo en la tensión existente entre los terminales de un condensador, el problema se reduce a resolver el circuito mostrado en la Figura 7.11.

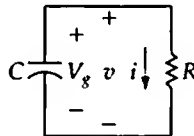


Figura 7.11. El circuito mostrado en la Figura 7.10, después de la conmutación.

## Cálculo de la ecuación de la tensión

Podemos calcular fácilmente la tensión  $v(t)$  pensando en términos de las tensiones de nodo. Utilizando la unión inferior entre  $R$  y  $C$  como nodo de referencia y sumando las corrientes que salen de la unión superior, obtenemos

$$C \frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} = 0. \quad (7.21)$$

Comparando la Ecuación 7.21 con la Ecuación 7.1, vemos que se pueden utilizar las mismas técnicas matemáticas para obtener la solución correspondiente a  $v(t)$ . Dejamos como ejercicio al lector demostrar que

### RESPUESTA NATURAL DE UN CIRCUITO RC

$$v(t) = v(0)e^{-t/RC}, \quad t \geq 0. \quad (7.22)$$

Como ya hemos indicado, la tensión inicial en el condensador es igual a la tensión de la fuente  $V_g$ , es decir,

$$\begin{aligned} v(0^-) &= v(0) = v(0^+) \\ &= V_g = V_0, \end{aligned} \quad (7.23)$$

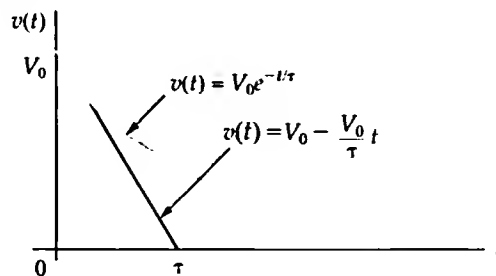
donde  $V_0$  designa la tensión inicial del condensador. La constante de relajación del circuito RC es igual al producto de la resistencia y la capacidad:

$$\tau = RC. \quad (7.24)$$

Sustituyendo las Ecuaciones 7.23 y 7.24 en la Ecuación 7.22, obtenemos

$$v(t) = V_0 e^{-t/\tau}, \quad t \geq 0. \quad (7.25)$$

que indica que la respuesta natural de un circuito  $RC$  es un decrecimiento exponencial de la tensión inicial. La constante de relajación  $RC$  es la que regula esa tasa de decrecimiento. La Figura 7.12 muestra la gráfica de la Ecuación 7.25 y la interpretación gráfica de la constante de relajación.



**Figura 7.12.** Respuesta natural de un circuito  $RC$ .

Después de determinar  $v(t)$ , podemos hallar fácilmente las ecuaciones correspondientes a  $i$ ,  $p$  y  $w$ :

$$i(t) = \frac{v(t)}{R} = \frac{V_0}{R} e^{-t/\tau}, \quad t \geq 0^+, \quad (7.26)$$

$$p = vi = \frac{V_0^2}{R} e^{-2t/\tau}, \quad t \geq 0^+, \quad (7.27)$$

$$\begin{aligned} w &= \int_0^t p \, dx = \int_0^t \frac{V_0^2}{R} e^{-2x/\tau} \, dx \\ &= \frac{1}{2} C V_0^2 (1 - e^{-2t/\tau}), \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (7.28)$$

Podemos resumir el cálculo de la respuesta natural de un circuito  $RC$  de la forma siguiente:

#### ➤ CÁLCULO DE LA RESPUESTA NATURAL DE UN CIRCUITO $RC$

1. Calcule la tensión inicial,  $V_0$ , en bornes del condensador.
2. Calcule la constante de relajación del circuito,  $\tau = RC$ .
3. Utilice la Ecuación 7.25,  $v(t) = V_0 e^{-t/\tau}$ , para determinar  $v(t)$  a partir de  $V_0$  y de  $\tau$ .

Todos los demás cálculos de interés pueden realizarse una vez que conocemos  $v(t)$ . Los Ejemplos 7.3 y 7.4 ilustran los cálculos numéricos asociados con la respuesta natural de un circuito  $RC$ .

### EJEMPLO 7.3 Determinación de la respuesta natural de un circuito $RC$

El conmutador del circuito mostrado en la Figura 7.13 ha estado en la posición  $x$  durante un largo período de tiempo. En  $t = 0$ , el conmutador se mueve instantáneamente a la posición  $y$ . Calcule

a)  $v_C(t)$  para  $t \geq 0$ ,

b)  $v_o(t)$  para  $t \geq 0^+$ ,

c)  $i_o(t)$  para  $t \geq 0^+$ , y

d) la energía total disipada en la resistencia de  $60 \, \text{k}\Omega$ .

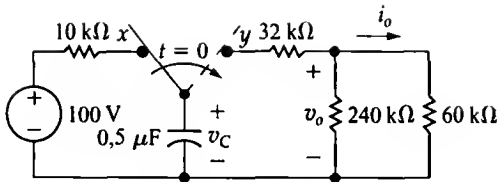


Figura 7.13. Circuito del Ejemplo 7.3.

### SOLUCIÓN

- a) Puesto que el conmutador ha estado en la posición  $x$  durante un largo período de tiempo, el condensador de  $0,5 \mu\text{F}$  se cargará hasta  $100 \text{ V}$ , siendo la tensión positiva en el terminal superior. Podemos sustituir la red resistiva conectada al condensador en  $t = 0^+$  por una resistencia equivalente de  $80 \text{ k}\Omega$ . Así, la constante de tiempo del circuito es  $(0,5 \times 10^{-6})(80 \times 10^3)$  o  $40 \text{ ms}$ . Entonces,

$$v_C(t) = 100e^{-25t} \text{ V}, \quad t \geq 0.$$

- b) La forma más fácil de calcular  $v_o(t)$  es observar que el circuito resistivo forma un

divisor de tensión entre los terminales del condensador. Por tanto,

$$v_o(t) = \frac{48}{80} v_C(t) = 60e^{-25t} \text{ V}, \quad t \geq 0^+.$$

Esta ecuación para  $v_o(t)$  es válida para  $t \geq 0^+$  porque  $v_o(0^-)$  es cero. Es decir, tenemos un cambio instantáneo de tensión entre los terminales de la resistencia de  $240 \text{ k}\Omega$ .

- c) Calculamos la corriente  $i_o(t)$  aplicando la ley de Ohm:

$$i_o(t) = \frac{v_o(t)}{60 \times 10^3} = e^{-25t} \text{ mA}, \quad t \geq 0^+.$$

- d) La potencia disipada en la resistencia de  $60 \text{ k}\Omega$  será

$$p_{60\text{k}\Omega}(t) = i_o^2(t)(60 \times 10^3) = 60e^{-50t} \text{ mW}, \quad t \geq 0^+.$$

La energía total disipada es

$$w_{60\text{k}\Omega} = \int_0^\infty i_o^2(t)(60 \times 10^3) dt = 1,2 \text{ mJ}.$$

### EJEMPLO 7.4 Determinación de la respuesta natural de un circuito RC con condensadores en serie

Las tensiones iniciales en los condensadores  $C_1$  y  $C_2$  en el circuito mostrado en la Figura 7.14 se han establecido mediante ciertas fuentes que no se muestran. El conmutador se cierra en  $t = 0$ .

- a) Calcule  $v_1(t)$ ,  $v_2(t)$  y  $v(t)$  para  $t \geq 0$  e  $i(t)$  para  $t \geq 0^+$ .
- b) Calcule la energía inicial almacenada en los condensadores  $C_1$  y  $C_2$ .
- c) Determine cuánta energía habrá almacenada en los condensadores a medida que  $t \rightarrow \infty$ .
- d) Demuestre que la energía total entregada a la resistencia de  $250 \text{ k}\Omega$  es la diferencia entre los resultados obtenidos en los apartados (b) y (c).

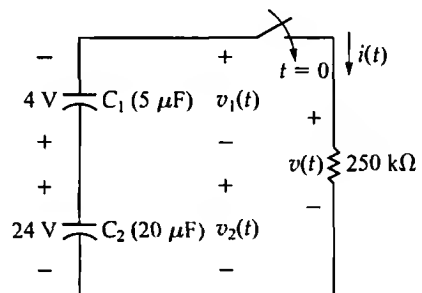


Figura 7.14. Circuito del Ejemplo 7.4.

### SOLUCIÓN

- a) Una vez que conozcamos  $v(t)$ , podemos obtener la corriente  $i(t)$  aplicando la ley de

Ohm. Después de determinar  $i(t)$ , podemos calcular  $v_1(t)$  y  $v_2(t)$ , porque la tensión en bornes de un condensador está en función de la corriente que atraviesa el condensador. Para calcular  $v(t)$ , sustituimos los condensadores conectados en serie por otro condensador equivalente, que tendrá una capacidad de  $4 \mu\text{F}$  y estará cargado con una tensión inicial de  $20 \text{ V}$ . Por tanto, el circuito mostrado en la Figura 7.14 se reduce al que se puede ver en la Figura 7.15, que revela que el valor inicial de  $v(t)$  es de  $20 \text{ V}$  y que la constante de tiempo del circuito es  $(4)(250) \times 10^{-3}$ , es decir,  $1 \text{ s}$ . Por tanto, la ecuación correspondiente a  $v(t)$  es

$$v(t) = 20e^{-t} \text{ V}, \quad t \geq 0.$$

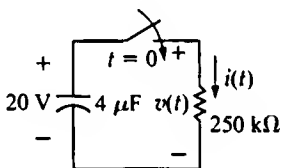


Figura 7.15. Una simplificación del circuito mostrado en la Figura 7.14.

La corriente  $i(t)$  es

$$i(t) = \frac{v(t)}{250.000} = 80e^{-t} \mu\text{A}, \quad t \geq 0^+.$$

Conociendo  $i(t)$ , determinamos las ecuaciones correspondientes a  $v_1(t)$  y  $v_2(t)$ :

$$\begin{aligned} v_1(t) &= -\frac{10^6}{5} \int_0^t 80 \times 10^{-6} e^{-x} dx - 4 \\ &= (16e^{-t} - 20) \text{ V}, \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_2(t) &= -\frac{10^6}{20} \int_0^t 80 \times 10^{-6} e^{-x} dx + 24 \\ &= (4e^{-t} + 20) \text{ V}, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

b) La energía inicial almacenada en  $C_1$  es

$$w_1 = \frac{1}{2}(5 \times 10^{-6})(16) = 40 \mu\text{J}.$$

La energía inicial almacenada en  $C_2$  es

$$w_2 = \frac{1}{2}(20 \times 10^{-6})(576) = 5760 \mu\text{J}.$$

La energía total almacenada en los condensadores será

$$w_o = 40 + 5760 = 5800 \mu\text{J}.$$

c) A medida que  $t \rightarrow \infty$ ,

$$v_1 \rightarrow -20 \text{ V} \quad \text{y} \quad v_2 \rightarrow +20 \text{ V}.$$

Por tanto, la energía almacenada en los dos condensadores es

$$w_\infty = \frac{1}{2}(5 + 20) \times 10^{-6}(400) = 5000 \mu\text{J}.$$

d) La energía total entregada a la resistencia de  $250 \text{ k}\Omega$  es

$$w = \int_0^\infty p dt = \int_0^\infty \frac{400e^{-2t}}{250.000} dt = 800 \mu\text{J}.$$

Comparando los resultados obtenidos en los apartados (b) y (c), vemos que

$$800 \mu\text{J} = (5800 - 5000) \mu\text{J}.$$

La energía almacenada en el condensador equivalente de la Figura 7.15 es  $\frac{1}{2}(4 \times 10^{-6})(400)$ , es decir,  $800 \mu\text{J}$ . Puesto que este condensador predice el comportamiento en los terminales de los condensadores originales conectados en serie, la energía almacenada en el condensador equivalente es la energía entregada a la resistencia de  $250 \text{ k}\Omega$ .

### Evaluación del objetivo 1

- Ser capaz de determinar la respuesta natural de los circuitos  $RL$  y  $RC$ .



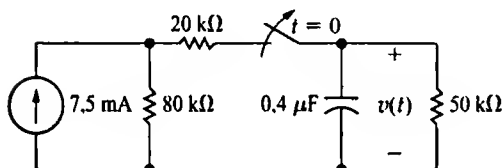
7.3. El conmutador del circuito mostrado ha estado cerrado durante un largo período de tiempo y se abre en  $t = 0$ . Calcule

- el valor inicial de  $v(t)$
- la constante de relajación para  $t > 0$
- la ecuación correspondiente a  $v(t)$  después de abrir el conmutador.
- la energía inicial almacenada en el condensador
- el tiempo necesario para disipar el 75% de la energía inicialmente almacenada.

**RESPUESTA** (a) 200 V; (b) 20 ms;

(c)  $200e^{-50t}$  V,  $t \geq 0$ ; (d) 8 mJ;

(e) 13,86 ms.



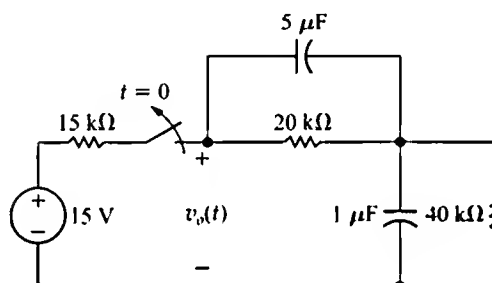
7.4. El conmutador del circuito mostrado ha estado cerrado durante un largo período de tiempo antes de abrirlo en  $t = 0$ .

- Calcule  $v_o(t)$  para  $t \geq 0$ .
- ¿Qué porcentaje de la energía inicial almacenada en el circuito se habrá disipado después de que el conmutador haya estado abierto durante 60 ms?

**RESPUESTA**

(a)  $8e^{-25t} + 4e^{-10t}$  V,  $t \geq 0$ ;

(b) 81,05%.



**NOTA** Trate también de resolver los Problemas 7.21 y 7.22 del capítulo.

## 7.3. Respuesta al escalón de los circuitos $RL$ y $RC$

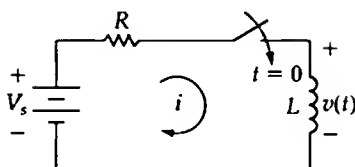
Nos encontramos ya en condiciones de analizar el problema de determinar las corrientes y tensiones generadas en circuitos  $RL$  o  $RC$  de primer orden cuando se aplican de modo súbito fuentes continuas de tensión o de corriente. La respuesta de un circuito a la aplicación súbita de una tensión o corriente constantes se denomina respuesta al escalón del circuito. Al presentar la respuesta al escalón, veremos cómo responde el circuito cuando se está almacenando energía en la bobina o en el condensador. Comenzaremos con la respuesta al escalón de un circuito  $RL$ .

### Respuesta al escalón de un circuito $RL$

Para comenzar, vamos a modificar el circuito de primer orden mostrado en la Figura 7.2(a) añadiendo un conmutador. Usaremos el circuito resultante, mostrado en la Figura 7.16, para determinar la respuesta al escalón de un circuito  $RL$ . La energía almacenada en la bobina en el momento de cerrar el conmutador se expresará en términos de una corriente inicial  $i(0)$  distinta de cero. La tarea consiste en determinar las ecuaciones de la corriente en el circuito y de la tensión entre los terminales de la bobina después de cerrar el conmutador. El procedimiento es igual al utilizado en la Sección 7.1; usaremos las herramientas de análisis de circuitos para escribir la ecuación diferencial que describa el circuito en función de la variable de interés y luego emplearemos técnicas de cálculo elemental para resolver la ecuación.

Después de cerrar el conmutador de la Figura 7.16, la ley de Kirchhoff de las tensiones requiere que

$$V_s = Ri + L \frac{di}{dt}, \quad (7.29)$$



**Figura 7.16.** Circuito utilizado para ilustrar la respuesta al escalón de un circuito  $RL$  de primer orden.

de donde puede obtenerse la corriente separando las variables  $i$  y  $t$  y luego integrando. El primer paso de este proceso consiste en despejar la derivada  $di/dt$  en la Ecuación 7.29:

$$\frac{di}{dt} = \frac{-Ri + V_s}{L} = \frac{-R}{L} \left( i - \frac{V_s}{R} \right). \quad (7.30)$$

A continuación, multiplicamos ambos lados de la Ecuación 7.30 por un diferencial de tiempo  $dt$ . Este paso reduce el lado izquierdo de la ecuación a un diferencial de corriente. Así,

$$\frac{di}{dt} dt = \frac{-R}{L} \left( i - \frac{V_s}{R} \right) dt,$$

o bien

$$di = \frac{-R}{L} \left( i - \frac{V_s}{R} \right) dt. \quad (7.31)$$

Ahora separamos las variables de la Ecuación 7.31 para obtener

$$\frac{di}{i - (V_s/R)} = \frac{-R}{L} dt, \quad (7.32)$$

y luego integramos ambos lados de la Ecuación 7.32. Utilizando  $x$  e  $y$  como variables de integración, obtenemos

$$\int_{I_0}^{i(t)} \frac{dx}{x - (V_s/R)} = \frac{-R}{L} \int_0^t dy, \quad (7.33)$$

donde  $I_0$  es la corriente en  $t = 0$  e  $i(t)$  es la corriente para cualquier  $t > 0$ . Realizando la integración de la Ecuación 7.33, obtenemos la ecuación

$$\ln \frac{i(t) - (V_s/R)}{I_0 - (V_s/R)} = \frac{-R}{L} t, \quad (7.34)$$

de donde

$$\frac{i(t) - (V_s/R)}{I_0 - (V_s/R)} = e^{-(R/L)t},$$

o bien

$$\Rightarrow \text{RESPUESTA AL ESCALÓN DE UN CIRCUITO } RL \quad i(t) = \frac{V_s}{R} + \left( I_0 - \frac{V_s}{R} \right) e^{-(R/L)t}. \quad (7.35)$$

Cuando la energía inicial en la bobina es cero,  $I_0$  es cero. En este caso, la Ecuación 7.35 se reduce a

$$i(t) = \frac{V_s}{R} - \frac{V_s}{R} e^{-(R/L)t}. \quad (7.36)$$

La Ecuación 7.36 indica que, después de cerrar el conmutador, la corriente se incrementa exponencialmente desde cero hasta un valor final igual a  $V_s/R$ . La constante de relajación del circuito,  $L/R$ , determina la velocidad de incremento. Una constante de relajación después de haber cerrado el conmutador, la corriente habrá alcanzado aproximadamente el 63% de su valor final, es decir,

$$i(\tau) = \frac{V_s}{R} - \frac{V_s}{R} e^{-1} \approx 0,6321 \frac{V_s}{R}. \quad (7.37)$$

Si la corriente continúa incrementándose a esta velocidad inicial, alcanzaría su valor final para  $t = \tau$ ; es decir, dado que

$$\frac{di}{dt} = \frac{-V_s}{R} \left( \frac{-1}{\tau} \right) e^{-t/\tau} = \frac{V_s}{L} e^{-t/\tau}, \quad (7.38)$$

la velocidad inicial a la que se incrementa  $i(t)$  es

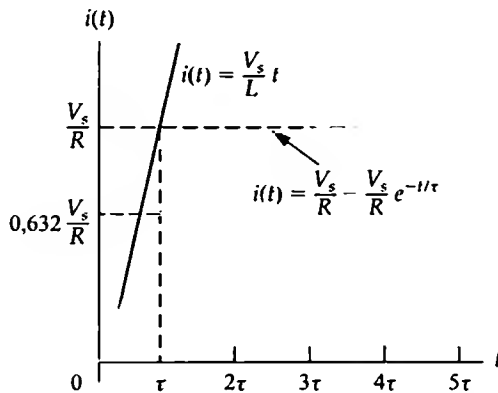
$$\frac{di}{dt}(0) = \frac{V_s}{L}. \quad (7.39)$$

Si la corriente continuara incrementándose a esta velocidad, la ecuación correspondiente a  $i$  sería

$$i = \frac{V_s}{L} t, \quad (7.40)$$

de donde, para  $t = \tau$ ,

$$i = \frac{V_s}{L} \frac{L}{R} = \frac{V_s}{R}. \quad (7.41)$$



**Figura 7.17.** Respuesta al escalón del circuito  $RL$  mostrado en la Figura 7.16 cuando  $I_0 = 0$ .

En la Figura 7.17 se dibujan las Ecuaciones 7.36 y 7.40. Los valores dados por las Ecuaciones 7.37 y 7.41 también se muestran en esta figura.

La tensión entre los terminales de una bobina es  $L di/dt$ , por lo que, según la Ecuación 7.35, para  $t \geq 0^+$ ,

$$v = L \left( \frac{-R}{L} \right) \left( I_0 - \frac{V_s}{R} \right) e^{-(R/L)t} = (V_s - I_0 R) e^{-(R/L)t}. \quad (7.42)$$

La tensión entre los terminales de la bobina es cero antes de cerrar el conmutador. La Ecuación 7.42 indica que la tensión de la bobina pasa súbitamente a  $V_s - I_0 R$  en el momento de cerrar el conmutador y luego decrece exponencialmente hasta cero.

¿Tiene sentido el valor de  $v$  en  $t = 0^+$ ? Puesto que la corriente inicial es  $I_0$  y la bobina prohíbe un cambio instantáneo de la corriente, la corriente será también  $I_0$  un instante después de cerrar el conmutador. La caída de tensión en la resistencia es  $I_0 R$  y la tensión entre los terminales de la bobina será la tensión de la fuente menos esa caída de tensión, es decir,  $V_s - I_0 R$ .

Cuando la corriente inicial de la bobina es cero, la Ecuación 7.42 se simplifica, quedando

$$v = V_s e^{-(R/L)t}. \quad (7.43)$$

Si la corriente inicial es cero, la tensión entre los terminales de la bobina salta hasta  $V_s$ . También se cumplirá que la tensión de la bobina se aproximará a cero a medida que  $t$  se incremente, porque la corriente en el circuito se aproxima al valor constante  $V_s/R$ . La Figura 7.18 muestra la gráfica de la Ecuación 7.43 y la relación entre la constante de relajación y la velocidad inicial a la que decrece la tensión de la bobina.

Si existe una corriente inicial en la bobina, la Ecuación 7.35 nos da la solución. El signo algebraico de  $I_0$  es positivo si la corriente inicial tiene la misma dirección que  $i$ ; en caso contrario,  $I_0$  tendrá un signo negativo. El Ejemplo 7.5 ilustra la aplicación de la Ecuación 7.35 a un circuito específico.

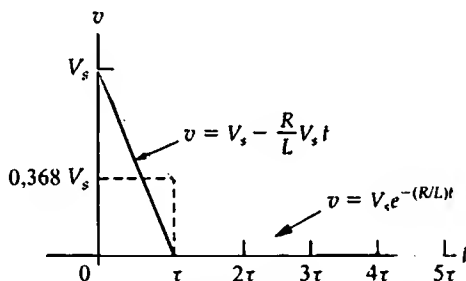


Figura 7.18. La tensión de la bobina en función del tiempo.

### EJEMPLO 7.5 Determinación de la respuesta al escalón de un circuito $RL$

El conmutador del circuito mostrado en la Figura 7.19 ha estado en la posición a durante un largo periodo de tiempo. En  $t = 0$ , el conmutador pasa de la posición a a la posición b. El conmutador es de tipo «hacer antes de romper»; es decir, la conexión de la posición b se establece antes de romper la conexión de la posición a, por lo que no hay ninguna discontinuidad en la corriente que atraviesa la bobina.

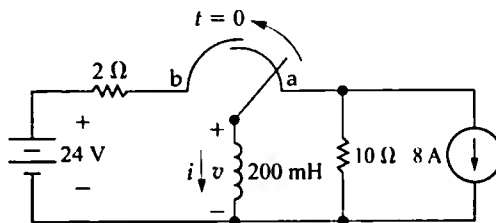


Figura 7.19. Circuito del Ejemplo 7.5.

- a) Calcule la ecuación correspondiente a  $i(t)$  para  $t \geq 0$ .
- b) ¿Cuál es la tensión inicial en la bobina justo después de mover el conmutador a la posición b?
- c) ¿Tiene sentido esta tensión inicial en términos del comportamiento del circuito?
- d) ¿Cuántos milisegundos después de mover el conmutador será la tensión de la bobina igual a 24 V?
- e) Dibuje  $i(t)$  y  $v(t)$  en función de  $t$ .
- Sí; en el instante posterior al momento en que se mueve el conmutador a la posición b, la bobina mantiene una corriente de 8 A en sentido contrario al de las agujas del reloj alrededor del camino cerrado recién formado. Esta corriente provoca una caída de tensión de 16 V en la resistencia de  $2 \Omega$ , caída que se suma a la de la fuente, produciendo una caída de 40 V en bornes de la bobina.
- Calculamos el instante en el que la tensión de la bobina es igual a 24 V resolviendo la ecuación

$$24 = 40e^{-10t}$$

para calcular el valor de  $t$ :

$$t = \frac{1}{10} \ln \frac{40}{24} = 51,08 \times 10^{-3} = 51,08 \text{ ms.}$$

- e) La Figura 7.20 muestra las gráficas de  $i(t)$  y  $v(t)$  en función de  $t$ . Observe que el instante en que la corriente es igual a cero se corresponde con el instante en el que la tensión de la bobina es igual a la tensión de fuente de 24 V, como predice la ley de Kirchhoff de las tensiones.

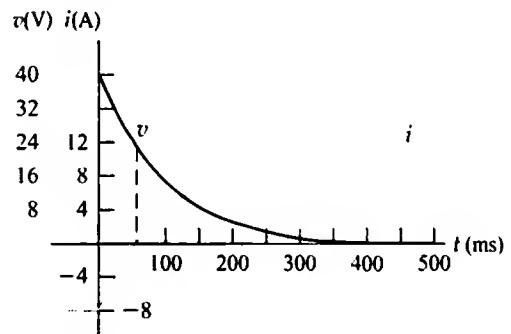


Figura 7.20. Formas de onda de la corriente y de la tensión para el Ejemplo 7.5.

### SOLUCIÓN

- a) El conmutador ha estado en la posición a durante un largo período de tiempo, por lo que la bobina de 200 mH es un cortocircuito con respecto a la fuente de corriente de 8 A. Por tanto, la bobina tiene una corriente inicial de 8 A. Esta corriente está orientada en sentido opuesto a la dirección de referencia de  $i$ , por lo que  $I_0$  será  $-8$  A. Cuando el conmutador está en la posición b, el valor final de  $i$  es igual a  $24/2$ , es decir, 12 A. La constante de relajación del circuito es  $200/2$ , es decir, 100 ms. Sustituyendo estos valores en la Ecuación 7.35, obtenemos

$$\begin{aligned} i &= 12 + (-8 - 12)e^{-t/0,1} \\ &= 12 - 20e^{-10t} \text{ A, } t \geq 0. \end{aligned}$$

- b) La tensión entre los terminales de la bobina es

$$\begin{aligned} v &= L \frac{di}{dt} = 0,2(200e^{-10t}) \\ &= 40e^{-10t} \text{ V, } t \geq 0^+. \end{aligned}$$

La tensión inicial de la bobina será

$$v(0^+) = 40 \text{ V.}$$

### Evaluación del objetivo 2

- Ser capaz de determinar la respuesta a un escalón de los circuitos *RL* y *RC*.

- 7.5. Suponga que el conmutador del circuito mostrado en la Figura 7.19 ha estado en la posición b durante un largo período de tiempo y que en  $t = 0$  se mueve a la posición a. Calcule (a)  $i(0^+)$ ; (b)  $v(0^+)$ ; (c)  $\tau$ ,  $t > 0$ ; (d)  $i(t)$ ,  $t \geq 0$ ; y (e)  $v(t)$ ,  $t \geq 0^+$ .

**RESPUESTA**

- (a) 12 A; (b)  $-200$  V;  
 (c) 20 ms;  
 (d)  $-8 + 20e^{-50t}$  A,  $t \geq 0$ ;  
 (e)  $-200e^{-50t}$  V,  $t \geq 0^+$ .

**NOTA** *Trate también de resolver los Problemas 7.33-7.35 del capítulo.*

También podemos describir la tensión  $v(t)$  entre los terminales de la bobina de la Figura 7.16 directamente, en lugar de en función de la corriente del circuito. Comencemos observando que la tensión que cae en la resistencia es la diferencia entre la tensión de la fuente y la tensión de la bobina. Podemos escribir

$$i(t) = \frac{V_s}{R} - \frac{v(t)}{R}, \quad (7.44)$$

donde  $V_s$  es una constante. Si diferenciamos ambos lados con respecto al tiempo, nos queda

$$\frac{di}{dt} = -\frac{1}{R} \frac{dv}{dt}. \quad (7.45)$$

Ahora, si multiplicamos ambos lados de la Ecuación 7.45 por la inductancia  $L$ , obtenemos una expresión para la tensión que cae entre los terminales de la bobina:

$$v = -\frac{L}{R} \frac{dv}{dt}. \quad (7.46)$$

Si ponemos la Ecuación 7.46 en formato estándar, tendremos que

$$\frac{dv}{dt} + \frac{R}{L} v = 0. \quad (7.47)$$

El lector puede verificar (en el Problema 7.41) que la solución de la Ecuación 7.47 es idéntica a la dada en la Ecuación 7.42.

Conviene en este momento hacer una observación general acerca de la respuesta al escalón de un circuito  $RL$ , observación que nos será de utilidad más adelante. Al determinar la ecuación diferencial correspondiente a la corriente de la bobina, obtuvimos la Ecuación 7.29. Escribamos otra vez la Ecuación 7.29 en la forma

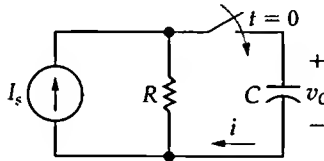
$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = \frac{V_s}{L}. \quad (7.48)$$

Observe que las Ecuaciones 7.47 y 7.48 tienen la misma forma. Específicamente, cada una de ellas iguala la suma de la primera derivada de la variable y de una cierta constante multiplicada por la variable a otro valor constante. En la Ecuación 7.47, la constante del lado derecho es cero, razón por la cual esta ecuación toma la misma forma que las ecuaciones correspondientes a la respuesta natural que vimos en la Sección 7.1. Tanto en la Ecuación 7.47 como en la Ecuación 7.48, la constante que multiplica la variable dependiente es la recíproca de la constante de relajación, es decir,  $R/L = 1/\tau$ . Encontraremos una situación similar a la hora de determinar la respuesta al escalón de un circuito  $RC$ . En la Sección 7.4, utilizaremos estas observaciones para desarrollar una técnica general de determinación de la respuesta natural y de la respuesta al escalón de los circuitos  $RL$  y  $RC$ .

## Respuesta al escalón de un circuito $RC$

Podemos hallar la respuesta al escalón de un circuito  $RC$  de primer orden analizando el circuito mostrado en la Figura 7.21. Por comodidad matemática, vamos a seleccionar el equivalente de Norton de la red conectada al condensador equivalente. Sumando las corrientes que salen del nodo superior en la Figura 7.21, generamos la ecuación diferencial

$$C \frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{R} = I_s. \quad (7.49)$$



**Figura 7.21.** Circuito utilizado para ilustrar la respuesta al escalón de un circuito  $RC$  de primer orden.

Dividiendo la Ecuación 7.49 por  $C$  se obtiene

$$\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{RC} = \frac{I_s}{C}. \quad (7.50)$$

Comparando la Ecuación 7.50 con la Ecuación 7.48, vemos que la forma de la solución para  $v_C$  es igual que la de la corriente en el circuito inductivo, es decir, la Ecuación 7.35. Por tanto, sustituyendo simplemente los coeficientes y variables apropiados, podemos escribir directamente la solución correspondiente a  $v_C$ . Este proceso de traducción requiere que  $V_s$  se sustituya por  $I_s$ , que  $L$  se sustituya por  $C$ , que  $R$  se sustituya por  $1/R$  y que  $I_0$  se sustituya por  $V_0$ , con lo que nos queda

✦ **RESPUESTA AL ESCALÓN DE UN CIRCUITO  $RC$**  
$$v_C = I_s R + (V_0 - I_s R) e^{-t/RC}, \quad t \geq 0. \quad (7.51)$$

Un proceso similar para la corriente del condensador nos da la ecuación diferencial

$$\frac{di}{dt} + \frac{1}{RC} i = 0. \quad (7.52)$$

La Ecuación 7.52 tiene la misma forma que la Ecuación 7.47, por lo que podemos obtener la solución correspondiente a  $i$  utilizando el mismo proceso de traducción que hemos empleado para resolver la Ecuación 7.50. Si hacemos esto, obtenemos

$$i = \left( I_s - \frac{V_0}{R} \right) e^{-t/RC}, \quad t \geq 0^+, \quad (7.53)$$

donde  $V_0$  es el valor inicial de  $v_C$ , que es la tensión entre los terminales del condensador.

Hemos obtenido las Ecuaciones 7.51 y 7.53 empleando una analogía matemática con la solución correspondiente a la respuesta al escalón del circuito inductivo. Veamos si estas soluciones tienen sentido para el circuito  $RC$  en relación con el comportamiento conocido del circuito. Si nos fijamos en la Ecuación 7.51, podemos observar que la tensión inicial en el condensador es  $V_0$ , que la tensión final en el condensador es  $I_s R$  y que la constante de relajación del circuito es  $RC$ . Observe también que la solu-

ción correspondiente a  $v_C$  es válida para  $t \geq 0$ . Estas observaciones son coherentes con el comportamiento de un condensador en paralelo con una resistencia, cuando se lo excita mediante una fuente de corriente constante.

La Ecuación 7.53 predice que la corriente en el condensador en  $t = 0^+$  será  $I_s - V_0/R$ . Esta predicción es lógica, porque la tensión del condensador no puede cambiar instantáneamente, así que la corriente inicial que atraviese la resistencia será  $V_0/R$ . La corriente existente en la rama del condensador cambia instantáneamente entre cero (para  $t = 0^-$ ) e  $I_s - V_0/R$  (para  $t = 0^+$ ). La corriente en el condensador será cero para  $t = \infty$ . Observe también que el valor final de  $v = I_s R$ .

El Ejemplo 7.6 ilustra cómo utilizar las Ecuaciones 7.51 y 7.53 para determinar la respuesta al escalón de un circuito  $RC$  de primer orden.

### EJEMPLO 7.6 Determinación de la respuesta al escalón de un circuito $RC$

El conmutador del circuito mostrado en la Figura 7.22 ha estado en la posición 1 durante un largo período de tiempo. En  $t = 0$ , el conmutador se mueve a la posición 2. Calcule

- $v_o(t)$  para  $t \geq 0$
- $i_o(t)$  para  $t \geq 0^+$

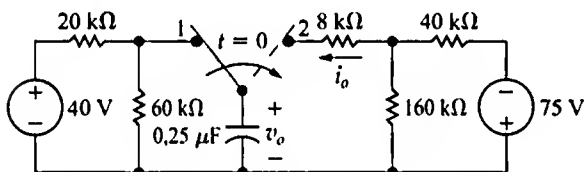


Figura 7.22. Circuito del Ejemplo 7.6.

### SOLUCIÓN

- El conmutador ha estado en la posición 1 durante un largo período de tiempo, por lo que el valor inicial de  $v_o$  es  $40(60/80)$ , es decir, 30 V. Para aplicar las Ecuaciones 7.51 y 7.53, vamos a determinar el equivalente de Norton con respecto a los terminales del condensador para  $t \geq 0$ . Para hacer esto, comenzamos calculando la tensión en circuito abierto, que estará dada por la fuente de  $-75$  V, dividiéndose esa tensión entre las resistencias de  $40$  k $\Omega$  y  $160$  k $\Omega$ :

$$V_\infty = \frac{160 \times 10^3}{(40 + 160) \times 10^3} (-75) = -60 \text{ V.}$$

A continuación, calculamos la resistencia de Thévenin que se vería a la derecha del condensador, cortocircuitando la fuente de  $-75$  V y efectuando las necesarias combinaciones en serie y en paralelo de las resistencias:

$$R_{Th} = 8000 + 40.000 \parallel 160.000 = 40 \text{ k}\Omega$$

El valor de la fuente de corriente de Norton es el cociente entre la tensión de circuito abierto y la resistencia de Thévenin, es decir,  $-60/(40 \times 10^3) = -1,5$  mA. El circuito equivalente de Norton resultante se muestra en la Figura 7.23, a partir de la cual podemos ver que  $I_s R = -60$  V y  $RC = 10$  ms. Ya hemos visto también que  $v_o(0) = 30$  V, por lo que la ecuación de  $v_o$  será

$$\begin{aligned} v_o &= -60 + [30 - (-60)]e^{-100t} \\ &= -60 + 90e^{-100t} \text{ V, } t \geq 0. \end{aligned}$$

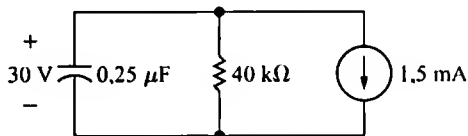


Figura 7.23. Circuito equivalente para  $t > 0$  del circuito mostrado en la Figura 7.22.

- Escribimos la solución para  $i_o$  directamente a partir de la Ecuación 7.53, teniendo en



cuenta que  $I_s = -1,5 \text{ mA}$  y  $V_o/R = (30/40) \times 10^{-3}$ , es decir,  $0,75 \text{ mA}$ .

$$i_o = -2,25e^{-100t} \text{ mA}, \quad t \geq 0^+.$$

Comprobamos la coherencia de las soluciones correspondientes a  $v_o$  e  $i_o$  observando que

$$\begin{aligned} i_o &= C \frac{dv_o}{dt} = (0,25 \times 10^{-6})(-9000e^{-100t}) \\ &= -2,25e^{-100t} \text{ mA}. \end{aligned}$$

Puesto que  $dv_o(0^-)/dt = 0$ , la ecuación correspondiente a  $i_o$  será válida, claramente, sólo para  $t \geq 0^+$ .

## Evaluación del objetivo 2

■ Ser capaz de determinar la respuesta a un escalón de los circuitos  $RL$  y  $RC$ .

7.6. a) Calcule la ecuación de la tensión que cae en la resistencia de  $160 \text{ k}\Omega$  en el circuito mostrado en la Figura 7.22. Designe a esta tensión mediante  $v_A$  y suponga que la polaridad de referencia de la tensión es positiva en el terminal superior de la resistencia de  $160 \text{ k}\Omega$ .

b) Especifique el intervalo de tiempo para el cual es válida la expresión obtenida en el apartado (a).

### RESPUESTA

(a)  $-60 + 72e^{-100t} \text{ V};$

(b)  $t \geq 0^+.$

**NOTA** Trate también de resolver los Problemas 7.47 y 7.48 del capítulo.

## 7.4. Una solución general para la respuesta natural y la respuesta al escalón

La técnica general para determinar la respuesta natural o la respuesta al escalón de los circuitos  $RL$  y  $RC$  de primer orden mostrados en la Figura 7.24 se basa en el hecho de que sus ecuaciones diferenciales tienen la misma forma (compare las Ecuaciones 7.48 y 7.50). Para generalizar la solución de estos cuatro posibles circuitos, vamos a representar mediante  $x(t)$  la magnitud desconocida, dando a  $x(t)$  cuatro posibles valores. Puede representar la corriente o la tensión en los terminales de una bobina, o bien la corriente o la tensión en los terminales de un condensador. A partir de las Ecuaciones 7.47, 7.48, 7.50 y 7.52, sabemos que la ecuación diferencial que describe cualquiera de los cuatro circuitos de la Figura 7.24 tiene la forma

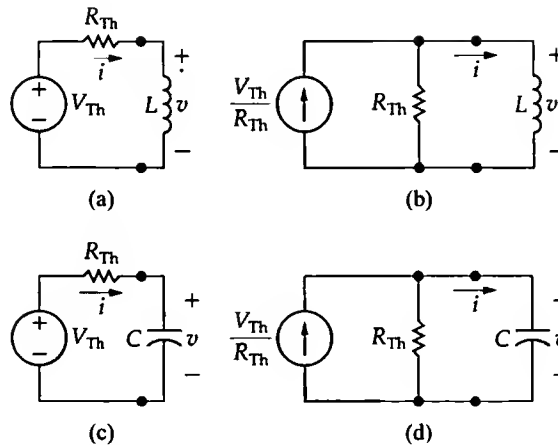
$$\frac{dx}{dt} + \frac{x}{\tau} = K, \quad (7.54)$$

donde el valor de la constante  $K$  puede ser cero. Puesto que las fuentes existentes en el circuito son tensiones y/o corrientes constantes, el valor final de  $x$  será constante; en otras palabras, el valor final debe satisfacer la Ecuación 7.54 y, cuando  $x$  alcance su valor final, la derivada  $dx/dt$  debe ser cero. Por tanto,

$$x_f = K\tau \quad (7.55)$$

donde  $x_f$  representa el valor final de la variable.

Resolvemos la Ecuación 7.54 separando las variables, para lo cual comenzamos despejando la primera derivada:



**Figura 7.24.** Cuatro posibles circuitos de primer orden: (a) Una bobina conectada a un equivalente de Thévenin. (b) Una bobina conectada a un equivalente de Norton. (c) Un condensador conectado a un equivalente de Thévenin. (d) Un condensador conectado a un equivalente de Norton.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-x}{\tau} + K = \frac{-(x - K\tau)}{\tau} = \frac{-(x - x_f)}{\tau}. \quad (7.56)$$

Al escribir la Ecuación 7.56, hemos usado la Ecuación 7.55 para sustituir  $K\tau$  por  $x_f$ . Ahora multiplicamos ambos lados de la Ecuación 7.56 por  $dt$  y dividimos por  $x - x_f$  para obtener

$$\frac{dx}{x - x_f} = \frac{-1}{\tau} dt. \quad (7.57)$$

A continuación integramos la Ecuación 7.57. Para obtener una solución lo más general posible, utilizamos el tiempo  $t_0$  como límite inferior y  $t$  como límite superior. El instante  $t_0$  se corresponde con el momento de la conmutación o de algún otro cambio. Hemos supuesto previamente que  $t_0 = 0$ , pero este cambio que hemos realizado permite que la conmutación tenga lugar en cualquier momento. Utilizando  $u$  y  $v$  como símbolos de integración, obtenemos

$$\int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{du}{u - x_f} = -\frac{1}{\tau} \int_{t_0}^t dv. \quad (7.58)$$

Y si realizamos la integración de la Ecuación 7.58, nos queda

✦ **SOLUCIÓN GENERAL PARA LA RESPUESTA NATURAL Y LA RESPUESTA AL ESCALÓN DE LOS CIRCUITOS  $RL$  Y  $RC$**

$$x(t) = x_f + [x(t_0) - x_f]e^{-(t-t_0)/\tau}. \quad (7.59)$$

La importancia de la Ecuación 7.59 queda clara si la expresamos en palabras:

$$\begin{aligned} &\text{la variable desconocida} && \text{el valor final} \\ &\text{en función del tiempo} && \text{de la variable} \\ &+ \left[ \begin{array}{l} \text{el valor inicial} \\ \text{de la variable} \end{array} - \begin{array}{l} \text{el valor final} \\ \text{de la variable} \end{array} \right] \times e^{\frac{-(t - \{\text{instante de conmutación}\})}{(\text{constante de relajación})}}. \end{aligned} \quad (7.60)$$

En muchos casos, el instante de la conmutación (es decir,  $t_0$ ) será cero.

A la hora de hallar la respuesta al escalón y la respuesta natural de los circuitos, puede ayudarle seguir estos pasos:

✦ **CÁLCULO DE LA RESPUESTA NATURAL O LA RESPUESTA AL ESCALÓN DE LOS CIRCUITOS  $RL$  O  $RC$**

1. Identifique la variable de interés del circuito. Para los circuitos  $RC$ , lo más cómodo es elegir la tensión capacitiva; para los circuitos  $RL$ , lo mejor es elegir la corriente inductiva.
2. Determine el valor inicial de la variable, que será su valor en  $t_0$ . Observe que, si selecciona la tensión capacitiva o la corriente inductiva como variable de interés, no es necesario distinguir entre  $t = t_0^-$  y  $t = t_0^+$ . Esto se debe a que ambas son variables continuas. Si selecciona otra variable, será preciso tener en cuenta que su valor inicial se define para  $t = t_0^+$ .
3. Calcule el valor final de la variable, que es su valor a medida que  $t \rightarrow \infty$ .
4. Calcule la constante de relajación del circuito.

Una vez obtenidas estas magnitudes, puede utilizar la Ecuación 7.60 para generar una ecuación que describa la variable de interés en función del tiempo. Después, puede hallar las ecuaciones correspondientes a otras variables del circuito utilizando las técnicas de análisis de circuitos presentadas en los Capítulos 3 y 4, o repitiendo los pasos anteriores para las otras variables.

Los Ejemplos 7.7-7.9 ilustran cómo usar la Ecuación 7.60 para calcular la respuesta al escalón de un circuito  $RC$  o  $RL$ .

**EJEMPLO 7.7** Utilización del método de resolución general para hallar la respuesta al escalón de un circuito  $RC$

El conmutador del circuito mostrado en la Figura 7.25 ha estado en la posición a durante un largo período de tiempo. En  $t = 0$ , el conmutador se mueve a la posición b.

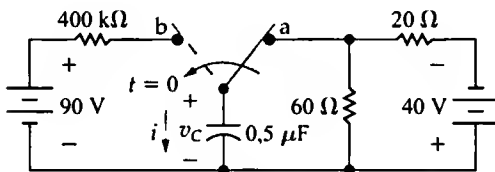


Figura 7.25. Circuito del Ejemplo 7.7.

- a) ¿Cuál es el valor inicial de  $v_C$ ?
- b) ¿Cuál es el valor final de  $v_C$ ?
- c) ¿Cuál es la constante de relajación del circuito cuando el conmutador se encuentra en la posición b?
- d) ¿Cuál es la ecuación correspondiente a  $v_C(t)$  cuando  $t \geq 0$ ?
- e) ¿Cuál es la ecuación correspondiente a  $i(t)$  cuando  $t \geq 0$ ?
- f) ¿En qué momento, después de que el conmutador pase a la posición b, es la tensión del condensador igual a cero?
- g) Dibuje  $v_C(t)$  e  $i(t)$  en función de  $t$ .

<sup>2</sup> Las expresiones  $t_0^-$  y  $t_0^+$  son análogas a  $0^-$  y  $0^+$ . Así,  $x(t_0^-)$  es el límite de  $x(t)$  a medida que  $t \rightarrow t_0$  por la izquierda y  $x(t_0^+)$  es el límite de  $x(t)$  a medida que  $t \rightarrow t_0$  por la derecha.

## SOLUCIÓN

a) El conmutador ha estado en la posición a durante un largo período de tiempo, por lo que el condensador aparece como un circuito abierto. Por tanto, la tensión en bornes del condensador es la tensión que cae en la resistencia de  $60\ \Omega$ . Aplicando la regla del divisor de tensión, la tensión que cae en la resistencia de  $60\ \Omega$  es  $40 \times [60/(60 + 20)]$ , es decir,  $30\text{ V}$ . Puesto que la referencia de  $v_C$  es positiva en el terminal superior del condensador, tendremos que  $v_C(0) = -30\text{ V}$ .

b) Después de que el conmutador haya estado en la posición b durante un largo período de tiempo, el condensador aparecerá como un circuito abierto para la fuente de  $90\text{ V}$ . Por tanto, el valor final de la tensión del condensador es  $+90\text{ V}$ .

c) La constante de relajación es

$$\begin{aligned}\tau &= RC \\ &= (400 \times 10^3)(0,5 \times 10^{-6}) \\ &= 0,2\text{ s}.\end{aligned}$$

d) Sustituyendo los valores apropiados para  $v_f$ ,  $v(0)$  y  $t$  en la Ecuación 7.60, obtenemos

$$\begin{aligned}v_C(t) &= 90 + (-30 - 90)e^{-5t} \\ &= 90 - 120e^{-5t}\text{ V}, \quad t \geq 0.\end{aligned}$$

e) Aquí, el valor de  $\tau$  no cambia. Por tanto, sólo necesitamos determinar los valores inicial y final de la corriente que atraviesa el condensador. Al obtener el valor inicial, debemos calcular el valor de  $i(0^+)$ , porque la corriente en el condensador puede cambiar instantáneamente. La corriente es igual a la que atraviesa la resistencia, que a partir de la ley de Ohm sabemos que es  $[90 - (-30)]/(400 \times 10^3) = 300\ \mu\text{A}$ . Observe que, al aplicar la ley de Ohm, hemos tenido en cuenta que la tensión del condensador no puede cambiar instantáneamente. El valor final de  $i(t) = 0$ , por lo que

$$\begin{aligned}i(t) &= 0 + (300 - 0)e^{-5t} \\ &= 300e^{-5t}\ \mu\text{A}, \quad t \geq 0^+.\end{aligned}$$

Podríamos haber obtenido esta solución diferenciando la solución del apartado (d) y multiplicando por la capacidad. Dejamos dichos cálculos como ejercicio para el lector. Observe que esta técnica alternativa para determinar  $i(t)$  también predice la discontinuidad existente en  $t = 0$ .

f) Para calcular durante cuánto tiempo deberá estar el conmutador en la posición b antes de que la tensión del condensador pase a cero, resolvemos la ecuación hallada en el apartado (d) para determinar el instante en el que  $v_C(t) = 0$ :

$$120e^{-5t} = 90 \quad \text{o} \quad e^{5t} = \frac{120}{90},$$

por lo que

$$\begin{aligned}t &= \frac{1}{5} \ln\left(\frac{4}{3}\right) \\ &= 57,54\text{ ms}.\end{aligned}$$

Observe que, cuando  $v_C = 0$ ,  $i = 225\ \mu\text{A}$  y la caída de tensión en la resistencia de  $400\text{ k}\Omega$  es  $90\text{ V}$ .

g) La Figura 7.26 muestra las gráficas de  $v_C(t)$  e  $i(t)$  en función de  $t$ .

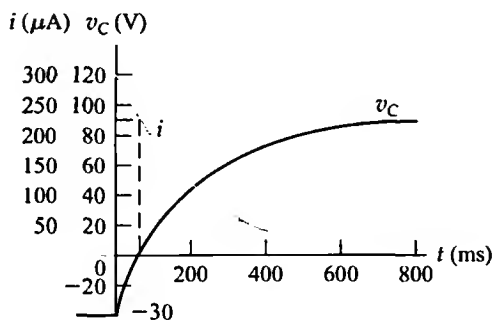


Figura 7.26. Formas de onda de la corriente y de la tensión para el Ejemplo 7.7.

### EJEMPLO 7.8 Utilización del método de resolución general con condiciones iniciales nulas

REVISIÓN DE CONCEPTOS

El conmutador del circuito mostrado en la Figura 7.27 ha estado abierto durante un largo período de tiempo. La carga inicial del condensador es cero. En  $t = 0$ , se cierra el conmutador. Calcule la expresión correspondiente a

- $i(t)$  para  $t \geq 0^+$
- $v(t)$  cuando  $t \geq 0^+$

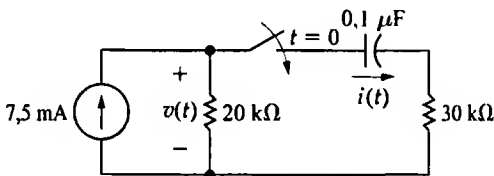


Figura 7.27. Circuito del Ejemplo 7.8.

#### SOLUCIÓN

- Puesto que la tensión inicial en el condensador es cero, la corriente en la rama de  $30 \text{ k}\Omega$  en el instante en que se cierra el conmutador será

$$i(0^+) = \frac{(7,5)(20)}{50} = 3 \text{ mA}.$$

El valor final de la corriente del condensador será cero, porque el condensador terminará por aparecer como un circuito abierto con respecto a la fuente de corriente continua. Por tanto,  $i_f = 0$ . La constante de relajación del circuito será igual al producto de la resistencia de Thévenin (vista desde el condensador) por la capacidad. Por tanto,  $\tau = (20 + 30)10^3(0,1) \times 10^{-6}$

$= 5 \text{ ms}$ . Sustituyendo estos valores en la Ecuación 7.60, obtenemos la expresión

$$i(t) = 0 + (3 - 0)e^{-t/5 \times 10^{-3}} = 3e^{-200t} \text{ mA}, \quad t \geq 0^+.$$

- Para calcular  $v(t)$ , observamos en el circuito que es igual a la suma de la tensión en bornes del condensador y de la tensión que cae en la resistencia de  $30 \text{ k}\Omega$ . Para calcular la tensión del condensador (que es una caída en la dirección de la corriente), vemos que su valor inicial es cero y que su valor final es  $(7,5)(20)$ , es decir,  $150 \text{ V}$ . La constante de relajación es la misma que antes, o sea,  $5 \text{ ms}$ . Por tanto, usamos la Ecuación 7.60 para escribir

$$\begin{aligned} v_C(t) &= 150 + (0 - 150)e^{-200t} \\ &= (150 - 150e^{-200t}) \text{ V}, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

De aquí, la expresión de  $v(t)$  será

$$\begin{aligned} v(t) &= 150 - 150e^{-200t} + (30)(3)e^{-200t} \\ &= (150 - 60e^{-200t}) \text{ V}, \quad t \geq 0^+. \end{aligned}$$

Como comprobación de esta expresión, observe que la ecuación predice que el valor inicial de la tensión que cae en la resistencia de  $20 \text{ k}\Omega$  es  $150 - 60$ , es decir,  $90 \text{ V}$ . En el instante en que se cierra el conmutador, la corriente que atraviesa la resistencia de  $20 \text{ k}\Omega$  es  $(7,5)(30/50)$ , es decir,  $4,5 \text{ mA}$ . Esta corriente produce una caída de  $90 \text{ V}$  en la resistencia de  $20 \text{ k}\Omega$ , confirmando el valor predicho por la solución.

### EJEMPLO 7.9 Utilización del método de resolución general para hallar la respuesta al escalón de un circuito $RL$

El conmutador del circuito mostrado en la Figura 7.28 ha estado abierto durante un largo período de tiempo. En  $t = 0$  se cierra el conmutador.

Calcule las ecuaciones correspondientes a

- $v(t)$  para  $t \geq 0^+$
- $i(t)$  para  $t \geq 0$

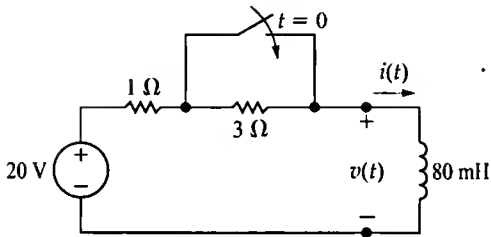


Figura 7.28. Circuito para el Ejemplo 7.9.

### SOLUCIÓN

- a) El conmutador ha estado abierto durante un largo período de tiempo, por lo que la corriente inicial en la bobina es de 5 A, orientada de arriba hacia abajo. Inmediatamente después de cerrar el conmutador, la corriente continuará siendo de 5 A y la tensión inicial entre los terminales de la bobina será, por tanto,  $20 - 5(1)$ , es decir, 15 V. El valor final de la tensión en la bobina es de 0 V. Con el conmutador cerrado, la constante de relajación es de  $80/1$ , es decir,

80 ms. Usamos la Ecuación 7.60 para escribir la expresión correspondiente a  $v(t)$ :

$$\begin{aligned} v(t) &= 0 + (15 - 0)e^{-t/80 \times 10^{-3}} \\ &= 15e^{-12.5t} \text{ A}, \quad t \geq 0^+ \end{aligned}$$

- b) Ya hemos observado que el valor inicial de la corriente en la bobina es de 5 A. Después de que el conmutador haya estado cerrado durante un largo período de tiempo, la corriente en la bobina alcanzará el valor  $20/1$ , es decir, 20 A. La constante de relajación del circuito es 80 ms, por lo que la ecuación correspondiente a  $i(t)$  será

$$\begin{aligned} i(t) &= 20 + (5 - 20)e^{-12.5t} \\ &= (20 - 15e^{-12.5t}) \text{ A}, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Podemos comprobar que las soluciones de  $v(t)$  e  $i(t)$  concuerdan observando que

$$\begin{aligned} v(t) &= L \frac{di}{dt} = 80 \times 10^{-3} [15(12.5)e^{-12.5t}] \\ &= 15e^{-12.5t} \text{ V}, \quad t \geq 0^+. \end{aligned}$$

**NOTA** Evalúe su comprensión del método de resolución general tratando de resolver los Problemas 7.61-7.63.

El Ejemplo 7.10 muestra que la Ecuación 7.60 puede incluso utilizarse para calcular la respuesta al escalón de algunos circuitos que contienen bobinas magnéticamente acopladas.

### EJEMPLO 7.10 Determinación de la respuesta al escalón de un circuito con bobinas magnéticamente acopladas

No hay energía almacenada en el circuito de la Figura 7.29 en el instante de cerrar el conmutador.

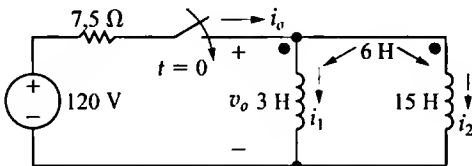


Figura 7.29. Circuito del Ejemplo 7.10.

- b) Demuestre que las soluciones obtenidas en el apartado (a) tienen sentido en relación con el comportamiento conocido del circuito.

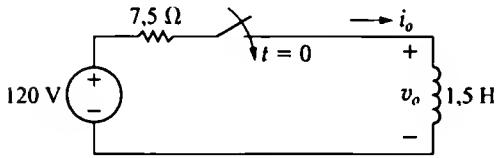
### SOLUCIÓN

- a) Calcule las ecuaciones correspondientes a  $i_o$ ,  $v_o$ ,  $i_1$  e  $i_2$ .

- a) Para el circuito de la Figura 7.29, las bobinas magnéticamente acopladas pueden sustituirse por una única bobina que tenga una inductancia igual a

$$L_{eq} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M} = \frac{45 - 36}{18 - 12} = 1.5 \text{ H}.$$

(Véase el Problema 6.46). De aquí se sigue que el circuito de la Figura 7.29 puede simplificarse como se muestra en la Figura 7.30.



**Figura 7.30.** El circuito de la Figura 7.29, donde se han sustituido las bobinas magnéticamente acopladas por otra bobina equivalente.

Por hipótesis, el valor inicial de  $i_o$  es cero. A partir de la Figura 7.30, vemos que el valor final de  $i_o$  será  $120/7,5$ , es decir, 16 A. La constante de relajación del circuito es  $1,5/7,5$  que es igual a 0,2 s. A partir de la Ecuación 7.60 se deduce directamente que

$$i_o = 16 - 16e^{-5t} \text{ A}, \quad t \geq 0.$$

La tensión  $v_o$  puede determinarse aplicando la ley de Kirchhoff de las tensiones. Así,

$$\begin{aligned} v_o &= 120 - 7,5i_o \\ &= 120e^{-5t} \text{ V}, \quad t \geq 0^+. \end{aligned}$$

Para calcular  $i_1$  e  $i_2$ , observamos primero en la Figura 7.29 que

$$3 \frac{di_1}{dt} + 6 \frac{di_2}{dt} = 6 \frac{di_1}{dt} + 15 \frac{di_2}{dt}$$

o

$$\frac{di_1}{dt} = -3 \frac{di_2}{dt}.$$

También se deduce de la Figura 7.29 que, como  $i_o = i_1 + i_2$ ,

$$\frac{di_o}{dt} = \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt}.$$

Por tanto,

$$80e^{-5t} = -2 \frac{di_2}{dt}.$$

Puesto que  $i_2(0)$  es cero, tendremos que

$$\begin{aligned} i_2 &= \int_0^t -40e^{-5x} dx \\ &= -8 + 8e^{-5t} \text{ A}, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Utilizando la ley de Kirchhoff de las corrientes se obtiene:

$$i_1 = 24 - 24e^{-5t} \text{ A}, \quad t \geq 0.$$

- b) En primer lugar observamos que  $i_o(0)$ ,  $i_1(0)$  e  $i_2(0)$  son todas iguales a cero, lo que es coherente con la afirmación de que no había energía almacenada en el circuito en el instante de cerrar el conmutador. A continuación, observamos que  $v_o(0^+) = 120 \text{ V}$ , lo que es coherente con el hecho de que  $i_o(0) = 0$ .

Ahora observemos que las soluciones de  $i_1$  e  $i_2$  son coherentes con la solución de  $v_o$ , viendo que

$$\begin{aligned} v_o &= 3 \frac{di_1}{dt} + 6 \frac{di_2}{dt} \\ &= 360e^{-5t} - 240e^{-5t} \\ &= 120e^{-5t} \text{ V}, \quad t \geq 0^+, \end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned} v_o &= 6 \frac{di_1}{dt} + 15 \frac{di_2}{dt} \\ &= 720e^{-5t} - 600e^{-5t} \\ &= 120e^{-5t} \text{ V}, \quad t \geq 0^+. \end{aligned}$$

Los valores finales de  $i_1$  e  $i_2$  pueden comprobarse utilizando conceptos de flujo. El flujo que rodea la bobina de 3 H ( $\lambda_1$ ) debe ser igual al flujo que rodea la bobina de 15 H ( $\lambda_2$ ), porque

$$v_o = \frac{d\lambda_1}{dt} = \frac{d\lambda_2}{dt}.$$

Ahora

$$\lambda_1 = 3i_1 + 6i_2 \text{ Wb-vueltas}$$

y

$$\lambda_2 = 6i_1 + 15i_2 \text{ Wb-vueltas.}$$

Independientemente de cuál expresión utilizemos, se obtiene

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 24 - 24e^{-5t} \text{ Wb-vueltas.}$$

Observe que la solución de  $\lambda_1$  o  $\lambda_2$  es coherente con la solución correspondiente a  $v_o$ .

El valor final del flujo que rodea la bobina 1 o la bobina 2 es de 24 Wb-vueltas, es decir,

$$\lambda_1(\infty) = \lambda_2(\infty) = 24 \text{ Wb-vueltas.}$$

El valor final de  $i_1$  será

$$i_1(\infty) = 24 \text{ A}$$

y el valor final de  $i_2$  será

$$i_2(\infty) = -8 \text{ A.}$$

La coherencia entre estos valores finales de  $i_1$  e  $i_2$  y el valor final del flujo puede verse a partir de las expresiones:

$$\begin{aligned} \lambda_1(\infty) &= 3i_1(\infty) + 6i_2(\infty) \\ &= 3(24) + 6(-8) = 24 \text{ Wb-vueltas} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_2(\infty) &= 6i_1(\infty) + 15i_2(\infty) \\ &= 6(24) + 15(-8) = 24 \text{ Wb-vueltas} \end{aligned}$$

Conviene resaltar que los valores finales de  $i_1$  e  $i_2$  sólo pueden verificarse utilizando conceptos de flujo, porque en  $t = \infty$  las dos bobinas son cortocircuitos ideales y la división de corriente entre cortocircuitos ideales no puede determinarse aplicando la ley de Ohm.

**NOTA** Evalúe su comprensión de este material utilizando el método de resolución general para resolver los Problemas 7.64 y 7.66 del capítulo.

## 7.5. Conmutación secuencial

Cuando se produzca en un circuito más de un suceso de conmutación, tendremos lo que se denomina **conmutación secuencial**. Por ejemplo, un único conmutador de dos posiciones puede ser operado repetidamente entre una posición y otra, o pueden abrirse o cerrarse secuencialmente varios conmutadores incluidos en un mismo circuito. La referencia temporal para todos los sucesos de conmutación no podrá ser, en estos casos,  $t = 0$ . Para determinar las tensiones y las corrientes generadas por una secuencia de sucesos de conmutación, utilizaremos las técnicas anteriormente descritas en el capítulo. Hallaremos las expresiones para  $v(t)$  e  $i(t)$  para una posición dada del conmutador o conmutadores y luego usaremos esas soluciones para determinar las condiciones iniciales que habrá que aplicar a la siguiente posición del conmutador o conmutadores.

En los problemas de conmutación secuencial, resulta todavía más importante obtener el valor inicial  $x(t_0)$ . Recuerde que cualquier magnitud, excepto las corrientes inductivas y las tensiones capacitivas, puede cambiar instantáneamente en el momento de la conmutación. Por esta razón resulta todavía más importante hallar primero las corrientes inductivas y las tensiones capacitivas en los problemas de conmutación secuencial. A menudo, dibujar un circuito correspondiente a cada intervalo de tiempo definido en el problema puede resultar muy útil durante el proceso de resolución.

Los Ejemplos 7.11 y 7.12 ilustran las técnicas de análisis para circuitos con sucesos de conmutación secuenciales. El primero es un problema de respuesta natural con dos instantes de conmutación y el segundo es un problema de respuesta al escalón.



### EJEMPLO 7.11 Análisis de un circuito $RL$ con sucesos de conmutación secuenciales

Los dos conmutadores del circuito de la Figura 7.31 han estado cerrados durante un largo período de tiempo. En  $t = 0$ , se abre el conmutador 1. Después, pasados 35 ms, se abre el conmutador 2.

- Calcule  $i_L(t)$  para  $0 \leq t \leq 35$  ms.
- Calcule  $i_L(t)$  para  $t \geq 35$  ms.
- ¿Qué porcentaje de la energía inicial almacenada en la bobina de 150 mH se disipa en la resistencia de  $18 \Omega$ ?
- Repita el apartado (c) para la resistencia de  $3 \Omega$ .
- Repita el apartado (c) para la resistencia de  $6 \Omega$ .

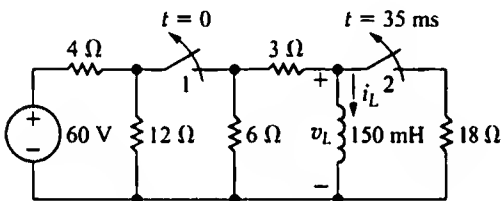


Figura 7.31. Circuito del Ejemplo 7.11.

### SOLUCIÓN

- Para  $t < 0$ , ambos conmutadores están cerrados, por lo que la bobina de 150 mH es un cortocircuito con respecto a la resistencia de  $18 \Omega$ . El circuito equivalente se muestra en la Figura 7.32. Determinemos la corriente inicial que atraviesa la bobina calculando  $i_L(0^-)$  en el circuito mostrado en la citada figura. Después de realizar diversas transformaciones de la fuente, vemos que  $i_L(0^-)$  es 6 A. Para  $0 \leq t \leq 35$  ms, el conmutador 1 está abierto y el conmutador 2 está cerrado, lo que desconecta la fuente de tensión de 60 V y las resistencias de  $4 \Omega$  y  $12 \Omega$  del circuito. La bobina ya no se comporta como un cortocircuito (porque la fuente cc ya no está en el circuito), así que la resistencia de  $18 \Omega$  ya no está cortocircuitada. El circuito equivalen-

te se muestra en la Figura 7.33. Observe que la resistencia equivalente entre los terminales de la bobina es la combinación en paralelo de  $9 \Omega$  y  $18 \Omega$ , es decir,  $6 \Omega$ . La constante de relajación del circuito será  $(150/6) \times 10^{-3}$ , que es igual a 25 ms. Por tanto, la ecuación correspondiente a  $i_L$  es

$$i_L = 6e^{-40t} \text{ A}, \quad 0 \leq t \leq 35 \text{ ms}$$

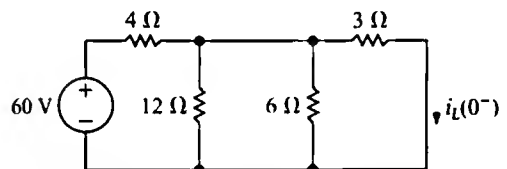


Figura 7.32. El circuito mostrado en la Figura 7.31, para  $t < 0$ .

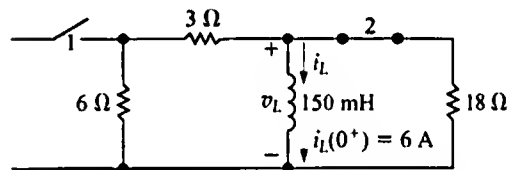


Figura 7.33. El circuito mostrado en la Figura 7.31, para  $0 \leq t \leq 35$  ms.

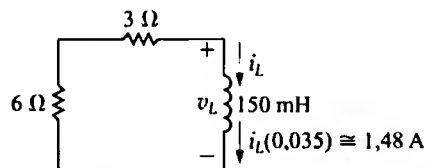


Figura 7.34. El circuito mostrado en la Figura 7.31, para  $t \geq 35$  ms.

- Cuando  $t = 35$  ms, el valor de la corriente que atraviesa la bobina es

$$i_L = 6e^{-1,4} = 1,48 \text{ A}.$$

Así, al abrirse el conmutador 2, el circuito se reduce al que se muestra en la Figura 7.34 y la constante de relajación cambia

a  $(150/9) \times 10^{-3}$ , es decir, 16,67 ms. Teniendo esto en cuenta, la ecuación correspondiente a  $i_L$  es

$$i_L = 1,48e^{-60(t - 0,035)} \text{ A}, \quad t \geq 35 \text{ ms.}$$

Observe que la función exponencial está desplazada 35 ms en el tiempo.

- c) La resistencia de  $18 \Omega$  sólo está en el circuito durante los primeros 35 ms de la secuencia de conmutación. Durante este intervalo, la tensión que cae en la resistencia es

$$\begin{aligned} v_L &= 0,15 \frac{d}{dt} (6e^{-40t}) \\ &= -36e^{-40t} \text{ V}, \quad 0 < t < 35 \text{ ms.} \end{aligned}$$

La potencia disipada en la resistencia de  $18 \Omega$  será, por tanto,

$$p = \frac{v_L^2}{18} = 72e^{-80t} \text{ W}, \quad 0 < t < 35 \text{ ms.}$$

De aquí, obtenemos la energía disipada:

$$\begin{aligned} w &= \int_0^{0,035} 72e^{-80t} dt = \frac{72}{-80} e^{-80t} \Big|_0^{0,035} \\ &= 0,9(1 - e^{-2,8}) = 845,27 \text{ mJ.} \end{aligned}$$

La energía inicial almacenada en la bobina de 150 mH es

$$w_i = \frac{1}{2} (0,15)(36) = 2,7 \text{ J} = 2700 \text{ mJ.}$$

Por tanto,  $(845,27/2700) \times 100$ , es decir, un 31,31% de la energía inicialmente almacenada en la bobina de 150 mH se disipará en la resistencia de  $18 \Omega$ .

- d) Para  $0 < t < 35$  ms, la tensión que cae en la resistencia de  $3 \Omega$  es

$$\begin{aligned} v_{3\Omega} &= \left(\frac{v_L}{9}\right)(3) = \frac{1}{3} v_L \\ &= -12e^{-40t} \text{ V.} \end{aligned}$$

Por tanto, la energía disipada en la resistencia de  $3 \Omega$  en los primeros 35 ms es

$$\begin{aligned} w_{3\Omega} &= \int_0^{0,035} \frac{144e^{-80t}}{3} dt \\ &= 0,6(1 - e^{-2,8}) = 563,51 \text{ mJ.} \end{aligned}$$

Para  $t > 35$  ms, la corriente que pasa por la resistencia de  $3 \Omega$  es

$$i_{3\Omega} = i_L = (6e^{-1,4})e^{-60(t - 0,035)} \text{ A.}$$

Por tanto, la energía disipada en la resistencia de  $3 \Omega$  para  $t > 35$  ms es

$$\begin{aligned} w_{3\Omega} &= \int_{0,035}^{\infty} i_{3\Omega}^2 \times 3 dt \\ &= \int_{0,035}^{\infty} 3(36)e^{-2,8} e^{-120(t - 0,035)} dt \\ &= 108e^{-2,8} \times \frac{e^{-120(t - 0,035)}}{-120} \Big|_{0,035}^{\infty} \\ &= \frac{108}{120} e^{-2,8} = 54,73 \text{ mJ.} \end{aligned}$$

La energía total disipada en la resistencia de  $3 \Omega$  será

$$w_{3\Omega}(\text{total}) = 563,51 + 54,73 = 618,24 \text{ mJ.}$$

El porcentaje de la energía inicial almacenada es

$$\frac{618,24}{2700} \times 100 = 22,90\%.$$

- e) Puesto que la resistencia de  $6 \Omega$  está en serie con la resistencia de  $3 \Omega$ , la energía disipada y el porcentaje de la energía inicial almacenada serán el doble que para la resistencia de  $3 \Omega$ :

$$w_{6\Omega}(\text{total}) = 1236,48 \text{ mJ,}$$

y el porcentaje de la energía inicial almacenada será del 45,80%. Podemos comprobar estos cálculos viendo que

$$1236,48 + 618,24 + 845,27 = 2699,99 \text{ mJ}$$

y

$$31,31 + 22,90 + 45,80 = 100,01\%.$$

Las pequeñas discrepancias en los totales se deben a los errores de redondeo.

### EJEMPLO 7.12 Análisis de un circuito RC con sucesos secuenciales de conmutación

El condensador descargado del circuito mostrado en la Figura 7.35 está inicialmente conectado al terminal a del conmutador de tres posiciones. En  $t = 0$ , el conmutador se mueve a la posición b, en la que permanece durante 15 ms. Después de ese retardo de 15 ms, el conmutador se mueve a la posición c, en donde permanece indefinidamente.

- Determine la ecuación correspondiente a la tensión entre los terminales del condensador.
- Dibuje la tensión del condensador en función del tiempo.
- ¿Cuándo será igual a 200 V la tensión del condensador?

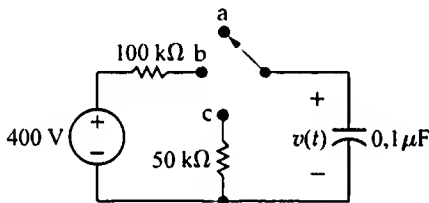


Figura 7.35. Circuito del Ejemplo 7.12.

#### SOLUCIÓN

- En el instante en que se mueve el conmutador a la posición b, la tensión inicial en el condensador es cero. Si el conmutador permaneciera indefinidamente en la posición b, el condensador terminaría por cargarse a 400 V. La constante de relajación del circuito cuando el conmutador se encuentra en la posición b es 10 ms. Por tanto, podemos usar la Ecuación 7.59 con  $t_0 = 0$  para escribir la ecuación correspondiente a la tensión del condensador:

$$\begin{aligned} v &= 400 + (0 - 400)e^{-100t} \\ &= (400 - 400e^{-100t}) \text{ V}, \quad 0 \leq t \leq 15 \text{ ms.} \end{aligned}$$

Observe que, como el conmutador permanece en la posición b durante sólo 15 ms, esta ecuación únicamente es válida para el

intervalo de tiempo que va de 0 a 15 ms. Después de que el conmutador haya estado en esta posición durante 15 ms, la tensión en el condensador será

$$v(15 \text{ ms}) = 400 - 400e^{-1.5} = 310,75 \text{ V.}$$

Por tanto, cuando se mueve el conmutador a la posición c, la tensión inicial del condensador es igual a 310,75 V. Con el conmutador en la posición c, el valor final de la tensión del condensador es cero y la constante de relajación es 5 ms. De nuevo, usamos la Ecuación 7.59 para escribir la ecuación correspondiente a la tensión del condensador:

$$\begin{aligned} v &= 0 + (310,75 - 0)e^{-200(t - 0,015)} \\ &= 310,75e^{-200(t - 0,015)} \text{ V}, \quad 15 \text{ ms} \leq t. \end{aligned}$$

Al escribir la ecuación correspondiente a  $v$ , hemos tenido en cuenta el hecho de que  $t_0 = 15 \text{ ms}$  y de que esta expresión sólo es válida para  $t \geq 15 \text{ ms}$ .

- La Figura 7.36 muestra la gráfica de  $v$  en función de  $t$ .

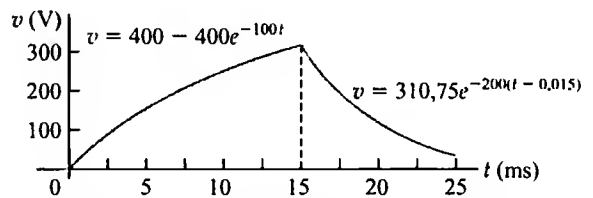


Figura 7.36. Tensión del condensador en el Ejemplo 7.12.

- La gráfica de la Figura 7.36 revela que la tensión del condensador será igual a 200 V en dos instantes diferentes: uno en el intervalo comprendido entre 0 y 15 ms y otro después del instante  $t = 15 \text{ ms}$ . Hallamos el primero de estos dos instantes resolviendo la ecuación

$$200 = 400 - 400e^{-100t_1},$$

que nos da  $t_1 = 6,93$  ms. Podemos hallar el segundo de los instantes resolviendo la ecuación

$$200 = 310,75e^{-200(t_2 - 0,015)}$$

En este caso,  $t_2 = 17,20$  ms.

### Evaluación del objetivo 3

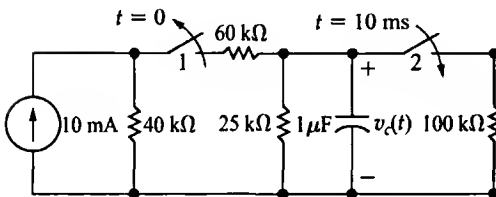
#### ■ Saber cómo analizar circuitos con conmutación secuencial.

7.7. En el circuito mostrado, el conmutador 1 ha estado cerrado y el conmutador 2 ha estado abierto durante un largo período de tiempo. En  $t = 0$  se abre el conmutador 1 y 10 ms después se cierra el conmutador 2. Calcule

- $v_c(t)$  para  $0 \leq t \leq 0,01$  s
- $v_c(t)$  para  $t \geq 0,01$  s
- la energía total disipada en la resistencia de  $25 \text{ k}\Omega$
- la energía total disipada en la resistencia de  $100 \text{ k}\Omega$

#### RESPUESTA

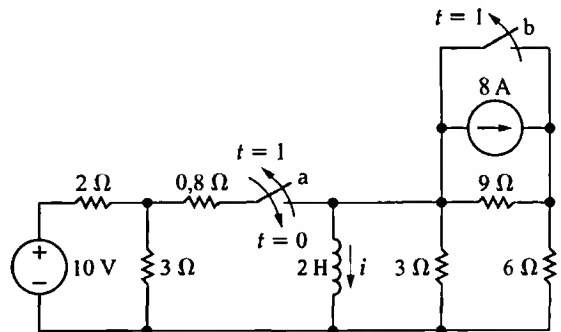
- $80e^{-40t} \text{ V}$ ;
- $53,63e^{-50(t - 0,01)} \text{ V}$ ;
- $2,91 \text{ mJ}$ ;
- $0,29 \text{ mJ}$ .



7.8. El conmutador a en el circuito mostrado ha estado abierto durante un largo período de tiempo, mientras que el conmutador b ha estado cerrado también durante un largo período de tiempo. El conmutador a se cierra en  $t = 0$ ; después de permanecer cerrado durante 1 s, se vuelve a abrir. El conmutador b se abre simultáneamente con el primero y ambos conmutadores permanecen después abiertos indefinidamente. Determine la ecuación correspondiente a la corriente de la bobina, y que sea válida cuando (a)  $0 \leq t \leq 1$  s y (b)  $t \geq 1$  s.

#### RESPUESTA

- $(3 - 3e^{-0,5t}) \text{ A}$ ,  $0 \leq t \leq 1$  s;
- $(-4,8 + 5,98e^{-1,25(t - 1)}) \text{ A}$ ,  $t \geq 1$  s.



**NOTA** Trate también de resolver los Problemas 7.69 y 7.70 del capítulo.

## 7.6. Respuesta no acotada

La respuesta de un circuito puede crecer, en lugar de disminuir, exponencialmente con el tiempo. Este tipo de respuesta, denominada **respuesta no acotada**, es posible si el circuito contiene fuentes dependientes. En este caso, la resistencia equivalente de Thévenin con respecto a los terminales de una bobina o de un condensador puede ser negativa. Esta resistencia negativa genera una constante de tiempo

negativa y las corrientes y tensiones resultantes se incrementan de forma ilimitada. En un circuito real, la respuesta terminará por alcanzar un valor límite para el que un componente falle o entre en un estado de saturación, prohibiendo ulteriores incrementos de la tensión o de la corriente.

Cuando consideramos tipos de respuesta no acotados, el concepto de valor final resulta confuso. Por tanto, en vez de utilizar la solución de respuesta al escalón dada en la Ecuación 7.59, vamos a determinar la ecuación diferencial que describe el circuito que contiene la resistencia negativa y luego la resolveremos utilizando la técnica de separación de variables. El Ejemplo 7.13 presenta una respuesta exponencialmente creciente en función de la tensión entre los terminales de un condensador.

### EJEMPLO 7.13 Determinación de la respuesta no acotada en un circuito RC

- Cuando se cierra el conmutador en el circuito mostrado en la Figura 7.37, la tensión en el condensador es de 10 V. Calcule la ecuación correspondiente a  $v_o$  para  $t \geq 0$ .
- Suponga que el condensador se cortocircuita cuando la tensión entre sus terminales alcanza 150 V. ¿Cuántos milisegundos pasarán antes de que el condensador se cortocircuite?

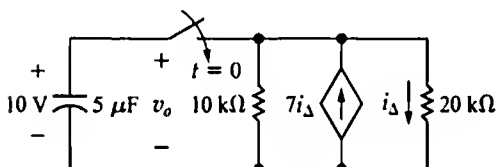


Figura 7.37. Circuito del Ejemplo 7.13.

### SOLUCIÓN

- Para calcular la resistencia equivalente de Thévenin con respecto a los terminales del condensador, utilizamos el método de la fuente de prueba descrito en el Capítulo 4. La Figura 7.38 muestra el circuito resultante, donde  $v_T$  es la tensión de prueba e  $i_T$  es la corriente de prueba. Expresando  $v_T$  en voltios, obtenemos

$$i_T = \frac{v_T}{10} - 7\left(\frac{v_T}{20}\right) + \frac{v_T}{20} \text{ mA.}$$

Si despejamos el cociente  $v_T/i_T$ , se obtiene la resistencia de Thévenin:

$$R_{Th} = \frac{v_T}{i_T} = -5 \text{ k}\Omega.$$

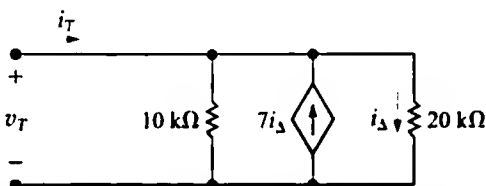


Figura 7.38. El método de la fuente de prueba usado para calcular  $R_{Th}$ .

Con esta resistencia de Thévenin, podemos simplificar el circuito mostrado en la Figura 7.37, sustituyéndolo por el que se muestra en la Figura 7.39.

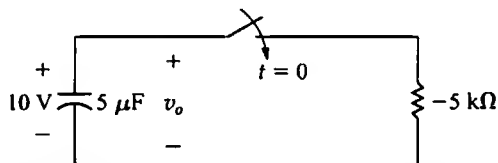


Figura 7.39. Una simplificación del circuito mostrado en la Figura 7.37.

Para  $t \geq 0$ , la ecuación diferencial que describe el circuito mostrado en la Figura 7.39 es

$$(5 \times 10^{-6}) \frac{dv_o}{dt} - \frac{v_o}{5} \times 10^{-3} = 0.$$

Dividiendo por el coeficiente de la primera derivada, se obtiene

$$\frac{dv_o}{dt} - 40 v_o = 0.$$

$$v_o(t) = 10e^{40t} \text{ V}, \\ t \geq 0.$$

Ahora utilizamos la técnica de separación de variables para calcular  $v_o(t)$ :

b)  $v_o = 150 \text{ V}$  cuando  $e^{40t} = 15$ . Por tanto,  $40t = \ln 15$  y  $t = 67,70 \text{ ms}$ .

**NOTA** Evalúe su comprensión de este material tratando de resolver los Problemas 7.84 y 7.85 del capítulo.

El hecho de que una serie de elementos de circuito interconectados puedan producir corrientes y tensiones que crezcan sin límite resulta importante para los ingenieros. Si tales interconexiones no estaban previstas, el circuito resultante puede experimentar fallos de componentes inesperados y potencialmente peligrosos.

## 7.7. El amplificador integrador

Recuerde que en la introducción al Capítulo 5 vimos que una de las razones por las que nos interesaba el amplificador operacional era por su uso como amplificador integrador. Ahora estamos en disposición de analizar un circuito amplificador-integrador, como el que se muestra en la Figura 7.40. El propósito de dicho circuito es generar una tensión de salida proporcional a la integral de la tensión de entrada. En la Figura 7.40, hemos definido las corrientes de rama  $i_f$  e  $i_s$ , junto con las tensiones de nodo  $v_n$  y  $v_p$ , como ayuda para el análisis.

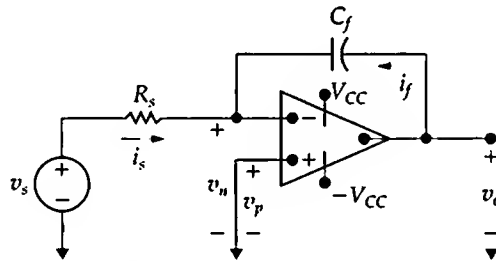


Figura 7.40. Un amplificador integrador.

Suponemos que el amplificador operacional es ideal. En este caso, podemos aplicar las restricciones

$$i_f + i_s = 0, \quad (7.61)$$

$$v_n = v_p. \quad (7.62)$$

Como  $v_p = 0$ ,

$$i_s = \frac{v_s}{R_s}, \quad (7.63)$$

$$i_f = C_f \frac{dv_o}{dt}. \quad (7.64)$$

Por tanto, a partir de las Ecuaciones 7.61, 7.63 y 7.64,

$$\frac{dv_o}{dt} = -\frac{1}{R_s C_f} v_s. \quad (7.65)$$

Multiplicando ambos lados de la Ecuación 7.65 por un diferencial de tiempo  $dt$  y luego integrando entre  $t_0$  y  $t$ , obtenemos la ecuación

$$v_o(t) = -\frac{1}{R_s C_f} \int_{t_0}^t v_s dy + v_o(t_0). \quad (7.66)$$

En la Ecuación 7.66,  $t_0$  representa el instante en que da comienzo la integración. Por tanto,  $v_o(t_0)$  será el valor de la tensión de salida en dicho instante. Asimismo, como  $v_n = v_p = 0$ ,  $v_o(t_0)$  coincidirá con la tensión inicial entre los terminales del condensador de realimentación  $C_f$ .

La Ecuación 7.66 indica que la tensión de salida de un amplificador integrador es igual al valor inicial de la tensión en el condensador más una réplica invertida ( $-$ ) y cambiada de escala ( $1/R_s C_f$ ) de la integral de la tensión de entrada. Si no hay ninguna energía almacenada en el condensador en el momento de dar comienzo la integración, la Ecuación 7.66 se reduce a

$$v_o(t) = -\frac{1}{R_s C_f} \int_{t_0}^t v_s dy. \quad (7.67)$$

Si  $v_s$  es un escalón de tensión continua, la tensión de salida variará linealmente con el tiempo. Por ejemplo, suponga que la tensión de entrada es la forma de onda rectilínea mostrada en la Figura 7.41. Suponga también que el valor inicial de  $v_o(t)$  es cero en el instante en que  $v_s$  salta de 0 a  $V_m$ . Una aplicación directa de la Ecuación 7.66 nos da

$$v_o = -\frac{1}{R_s C_f} V_m t + 0, \quad 0 \leq t \leq t_1. \quad (7.68)$$

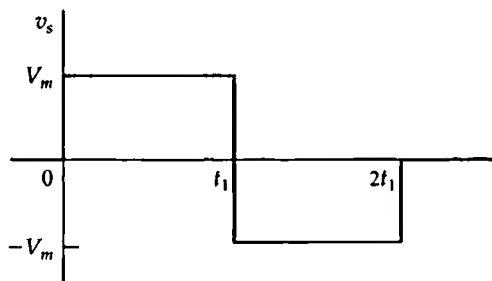


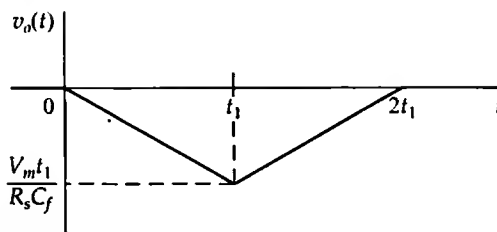
Figura 7.41. Señal de entrada de tensión.

Para  $t$  comprendida entre  $t_1$  y  $2t_1$ ,

$$\begin{aligned} v_o &= -\frac{1}{R_s C_f} \int_{t_1}^t (-V_m) dy - \frac{1}{R_s C_f} V_m t_1 \\ &= \frac{V_m}{R_s C_f} t - \frac{2V_m}{R_s C_f} t_1, \quad t_1 \leq t \leq 2t_1. \end{aligned} \quad (7.69)$$

La Figura 7.42 muestra una gráfica de  $v_o(t)$  en función de  $t$ . Claramente, la tensión de salida es una réplica invertida y cambiada de escala de la integral de la tensión de entrada.

La tensión de salida es proporcional a la integral de la tensión de entrada sólo si el amplificador operacional opera dentro de su rango lineal, es decir, si no llega a saturarse. Los Ejemplos 7.14 y 7.15 ilustran con más detalle el análisis del amplificador integrador.



**Figura 7.42.** La tensión de salida de un amplificador integrador.

### EJEMPLO 7.14 Análisis de un amplificador integrador

Suponga que los valores numéricos de la señal de tensión mostrada en la Figura 7.41 son  $V_m = 50$  mV y  $t_1 = 1$  s. Esta tensión se aplica al circuito amplificador-integrador mostrado en la Figura 7.40. Los parámetros del circuito amplificador son  $R_s = 100$  k $\Omega$ ,  $C_f = 0,1$   $\mu$ F y  $V_{CC} = 6$  V. La tensión inicial en el condensador es cero.

- Calcule  $v_o(t)$ .
- Dibuje  $v_o(t)$  en función de  $t$ .

#### SOLUCIÓN

- Para  $0 \leq t \leq 1$  s.

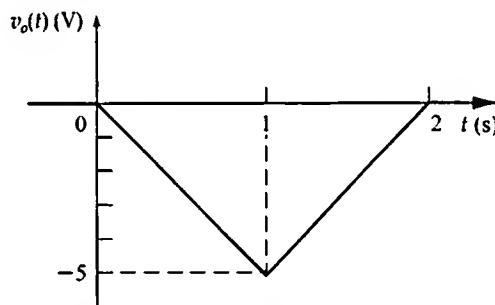
$$v_o = \frac{-1}{(100 \times 10^3)(0,1 \times 10^{-6})} 50 \times 10^{-3} t + 0$$

$$= -5t \text{ V}, \quad 0 \leq t \leq 1 \text{ s.}$$

Para  $1 \leq t \leq 2$  s,

$$v_o = (5t - 10) \text{ V.}$$

- La Figura 7.43 muestra una gráfica de  $v_o(t)$  en función de  $t$ .



**Figura 7.43.** La tensión de salida para el Ejemplo 7.14.

### EJEMPLO 7.15 Análisis de un amplificador integrador con sucesos secuenciales de conmutación

En el instante en que el conmutador hace contacto con el terminal a en el circuito mostrado en la Figura 7.44, la tensión en el condensador de 0,1  $\mu$ F es de 5 V. El conmutador permanece en la posición a durante 9 ms y luego se mueve instantáneamente al terminal b. ¿Cuántos milisegundos después de hacer contacto con el terminal a se satura el amplificador operacional?

#### SOLUCIÓN

La ecuación correspondiente a la tensión de salida durante el tiempo en que el conmutador está en la posición a es

$$v_o = -5 - \frac{1}{10^{-2}} \int_0^t (-10) dy$$

$$= (-5 + 1000t) \text{ V.}$$



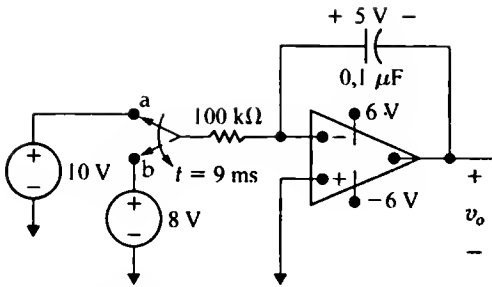


Figura 7.44. Circuito del Ejemplo 7.15.

Por tanto, 9 ms después de que el conmutador haga contacto con el terminal a, la tensión de salida será  $-5 + 9$ , es decir, 4 V.

La ecuación que nos da la tensión de salida después de que el conmutador pase a la posición b es

$$v_o = 4 - \frac{1}{10^{-2}} \int_{9 \times 10^{-3}}^t 8 dy$$

$$= 4 - 800(t - 9 \times 10^{-3}) = (11.2 - 800t) \text{ V.}$$

Durante este intervalo de tiempo, la tensión está decreciendo y el amplificador operacional llega a saturarse a  $-6$  V. Por tanto, igualamos la expresión de  $v_o$  a  $-6$  V para obtener el instante de saturación  $t_s$ :

$$11.2 - 800t_s = -6,$$

o

$$t_s = 21.5 \text{ ms.}$$

Por tanto, el amplificador integrador se satura 21,5 ms después de hacer contacto con el terminal a.

A partir de estos ejemplos, vemos que el amplificador integrador puede llevar a cabo adecuadamente la función de integración, pero sólo dentro de unos límites especificados que eviten saturar el amplificador operacional. Éste se satura debido a la acumulación de carga en el condensador de realimentación. Podemos evitar que se sature colocando una resistencia en paralelo con dicho condensador de realimentación. Examinaremos este tipo de circuito en el Capítulo 8.

Observe que podemos convertir el amplificador integrador en un amplificador diferenciador intercambiando la resistencia de entrada  $R_s$  y el condensador de realimentación  $C_f$ . En este caso,

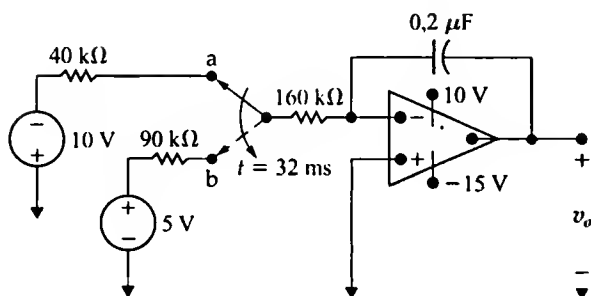
$$v_o = -R_s C_f \frac{dv_s}{dt}. \quad (7.70)$$

Dejamos la deducción de la Ecuación 7.70 como ejercicio para el lector. El amplificador diferenciador raramente se utiliza, porque en la práctica es una fuente de señales no deseadas o ruidosas.

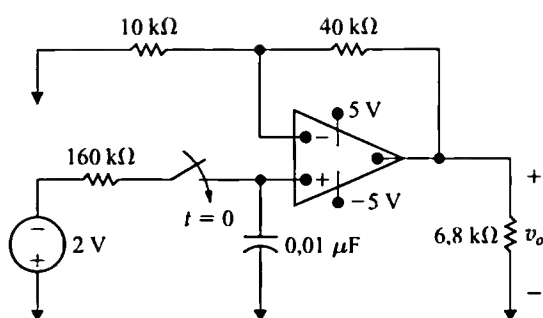
Finalmente, podemos diseñar circuitos amplificadores tanto integradores como diferenciadores utilizando una bobina en lugar de un condensador. Sin embargo, resulta mucho más fácil fabricar condensadores para los circuitos integrados, así que las bobinas raramente se utilizan en los amplificadores integradores.

## Evaluación del objetivo 4

- Ser capaz de analizar circuitos basados en amplificador operacional que contengan resistencias y un único condensador.
- 7.9. No hay energía almacenada en el condensador en el instante en que el conmutador del circuito hace contacto con el terminal a. El conmutador permanece en la posición a durante 30 ms y luego se mueve instantáneamente a la posición b. ¿Cuántos milisegundos después de haber hecho contacto con el terminal a se saturará el amplificador operacional?
- RESPUESTA** 262 ms.



7.10. a) Cuando el conmutador se cierra en el circuito mostrado, no hay energía almacenada en el condensador. ¿Cuánto tardará en saturarse el amplificador operacional?



b) Repita el apartado (a) con una tensión inicial en el condensador de 1 V, positiva en el terminal superior.

**RESPUESTA** (a) 1,11 ms; (b) 1,76 ms.

**NOTA** Trate también de resolver los Problemas 7.89 y 7.90 del capítulo.

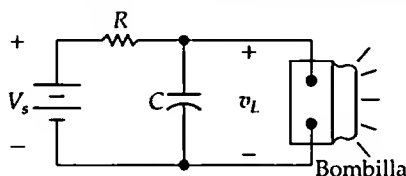
## Perspectiva práctica

### Circuito para una fuente luminosa intermitente

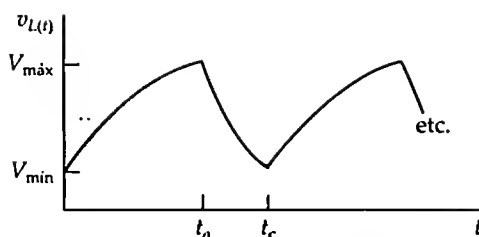
Ahora ya estamos en disposición de analizar el circuito de una fuente luminosa intermitente presentado al principio de este capítulo y que se muestra en la Figura 7.45. La bombilla de este circuito comienza a conducir cuando la tensión entre sus terminales alcanza un valor  $V_{\text{máx}}$ . Durante el tiempo en que la bombilla conduce, puede modelarse como una resistencia de valor  $R_L$ . La bombilla continuará conduciendo hasta que la tensión entre sus terminales caiga al valor  $V_{\text{mín}}$ . Cuando la bombilla no está conduciendo, se comporta como un circuito abierto.

Antes de desarrollar las expresiones analíticas que describen el comportamiento del circuito, veamos cómo funciona éste realizando algunas observaciones. En primer lugar, cuando la bombilla se comporte como un circuito abierto, la fuente de tensión continua cargará el condensador a través de la resistencia  $R$  hacia un valor de  $V_s$  voltios. Sin embargo, una vez que la tensión entre los terminales de la bombilla alcanza el valor  $V_{\text{máx}}$ , comienza a conducir y el condensador empieza a descargarse hacia la tensión de Thévenin vista desde los terminales del condensador. Pero una vez que la tensión del condensador alcance la tensión de corte de la bombilla ( $V_{\text{mín}}$ ), la bombilla actuará como un circuito abierto y el condensador comenzará de nuevo a recargarse. Este ciclo de carga y descarga del condensador se resume en el dibujo mostrado en la Figura 7.46.

Al dibujar la Figura 7.46, hemos elegido  $t = 0$  en el instante en que el condensador comienza a cargarse. El instante  $t_o$  representa el momento en que la bombilla comienza a conducir, mientras que  $t_c$



**Figura 7.45.** Circuito de una fuente luminosa intermitente.



**Figura 7.46.** Tensión de la bombilla en función del tiempo para el circuito de la Figura 7.45.

marca el fin de un ciclo completo. También conviene señalar que, al construir la Figura 7.46, hemos asumido que el circuito ha alcanzado la etapa repetitiva de su operación. Nuestro diseño del circuito de la fuente luminosa intermitente requiere que desarrollemos la ecuación correspondiente a  $v_L(t)$  en función de  $V_{\max}$ ,  $V_{\min}$ ,  $V_s$ ,  $R$ ,  $C$  y  $R_L$  para los intervalos comprendidos entre 0 y  $t_o$  y entre  $t_o$  y  $t_c$ .

Para comenzar el análisis, asumimos que el circuito ha estado en operación durante un largo periodo de tiempo. Sea  $t = 0$  el instante en el que la bombilla deja de conducir. Por tanto, en  $t = 0$ , la bombilla puede modelarse como un circuito abierto y la caída de tensión entre sus terminales es  $V_{\min}$ , como se muestra en la Figura 7.47.

A partir del circuito de dicha figura, vemos que

$$v_L(\infty) = V_s,$$

$$v_L(0) = V_{\min},$$

$$\tau = RC.$$

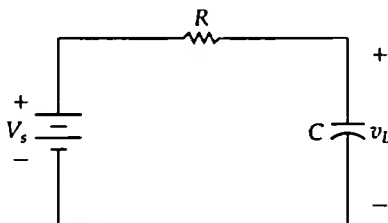
Por tanto, cuando la bombilla no está conduciendo,

$$v_L(t) = V_s + (V_{\min} - V_s)e^{-t/RC}.$$

¿Cuánto tarda la bombilla en estar de nuevo lista para conducir? Podemos calcular dicho tiempo igualando la expresión de  $v_L(t)$  a  $V_{\max}$  y despejando el tiempo  $t$ . Si llamamos a este valor  $t_o$ , entonces

$$t_o = RC \ln \frac{V_{\min} - V_s}{V_{\max} - V_s}.$$

Cuando la bombilla comience a conducir, puede modelarse como una resistencia  $R_L$ , como se muestra en la Figura 7.48. Para calcular la ecuación correspondiente a la caída de tensión entre los terminales del condensador en este circuito, necesitamos hallar el equivalente de Thévenin visto por el condensador. Dejamos como ejercicio al lector, en el Problema 7.106, demostrar que, cuando la bombilla conduce,



**Figura 7.47.** El circuito de la fuente luminosa intermitente en  $t = 0$ , cuando la bombilla no está conduciendo.

$$v_L(t) = V_{Th} + (V_{\max} - V_{Th}) e^{-(t - t_o)/\tau}$$

donde

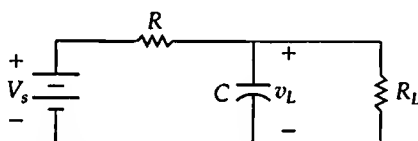
$$V_{Th} = \frac{R_L}{R + R_L} V_s$$

y

$$\tau = \frac{RR_L C}{R + R_L}.$$

Podemos determinar durante cuánto tiempo conduce la bombilla igualando la expresión anterior de  $v_L(t)$  a  $V_{\min}$  y despejando  $(t_c - t_o)$ , lo que nos da

$$(t_c - t_o) = \frac{RR_L C}{R + R_L} \ln \frac{V_{\max} - V_{Th}}{V_{\min} - V_{Th}}.$$



**Figura 7.48.** El circuito de la fuente luminosa intermitente en  $t = t_o$ , cuando la bombilla está conduciendo.

**NOTA** Evalúe su comprensión de esta Perspectiva práctica tratando de resolver los Problemas 7.103-7.105.

## RESUMEN

- Un circuito de primer orden puede reducirse a un equivalente de Thévenin (o de Norton) conectado a una única bobina equivalente o a un único condensador equivalente, según proceda (véase la página 276).
- La **respuesta natural** son las corrientes y tensiones existentes cuando se libera la energía almacenada hacia un circuito que no contiene ninguna fuente independiente (véase la página 274).
- La **constante de tiempo** de un circuito  $RL$  es igual a la inductancia equivalente dividida por la resistencia de Thévenin vista desde los terminales de la bobina equivalente (véase la página 279).
- La **constante de tiempo** de un circuito  $RC$  es igual a la capacidad equivalente multiplicada por la resistencia de Thévenin vista desde los terminales del condensador equivalente (véase la página 285).
- La **respuesta al escalón** son las corrientes y tensiones resultantes de los cambios abruptos de las fuentes de continua conectadas a un circuito. Puede haber o no energía almacenada en el momento en que el cambio abrupto tiene lugar (véase la página 289).
- La determinación de la respuesta natural o de la respuesta al escalón de los circuitos  $RL$  o  $RC$  implica hallar el valor inicial y final de la corriente o tensión de interés y

la constante de relajación del circuito. Las Ecuaciones 7.59 y 7.60 resumen esta técnica (véase la página 298).

- Una **secuencia de sucesos de conmutación** en circuitos de primer orden se analiza dividiendo el análisis en intervalos de tiempo correspondientes a posiciones específicas de los conmutadores. Los valores iniciales para cada intervalo concreto se determinan a partir de la solución correspondiente al intervalo inmediatamente anterior (véase la página 304).
- Una **respuesta no acotada** tiene lugar cuando la resistencia de Thévenin es

negativa, lo cual es posible si el circuito de primer orden contiene fuentes dependientes.

(Véase la página 308).

- Un **amplificador integrador** está compuesto de un amplificador operacional ideal, de un condensador en la rama de realimentación negativa y de una resistencia en serie con la fuente de señal. El amplificador proporciona como salida la integral de la fuente de señal, dentro de unos minutos especificados que eviten la saturación del amplificador operacional (véase la página 310).

## PROBLEMAS

- 7.1. El conmutador del circuito de la Figura P7.1 ha estado cerrado durante un largo período de tiempo antes de abrirlo en  $t = 0$ .



- a) Determine  $i_1(0^-)$  e  $i_2(0^-)$ .
- b) Determine  $i_1(0^+)$  e  $i_2(0^+)$ .
- c) Determine  $i_1(t)$  para  $t \geq 0$ .
- d) Determine  $i_2(t)$  para  $t \geq 0^+$ .
- e) Explique por qué  $i_2(0^-) \neq i_2(0^+)$ .

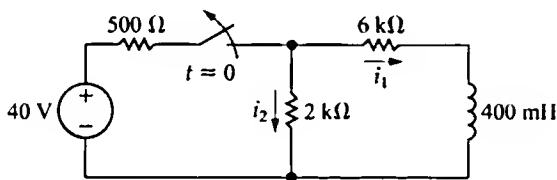


Figura P7.1

- 7.2. En el circuito mostrado en la Figura P7.2, el conmutador hace contacto con la posición b justo antes de romper el contacto con la posición a. Como ya hemos indicado, este tipo de conmutador se denomina de tipo «hacer antes de romper» y está diseñado de modo que el conmutador no interrumpa la corriente existente en un circuito inductivo. El intervalo de tiempo entre la «realización» y la «ruptura» se supone despreciable. El conmutador ha estado en la posición a durante un largo período de tiempo. En  $t = 0$ , el conmutador pasa de la posición a a la posición b.

- a) Determine la corriente inicial en la bobina.
- b) Determine la constante de relajación del circuito para  $t > 0$ .
- c) Calcule  $i$ ,  $v_1$  y  $v_2$  para  $t \geq 0$ .
- d) ¿Qué porcentaje de la energía inicial almacenada en la bobina se disipa en la resistencia de  $45 \Omega$  40 ms después de que el conmutador pase de la posición a a la posición b?

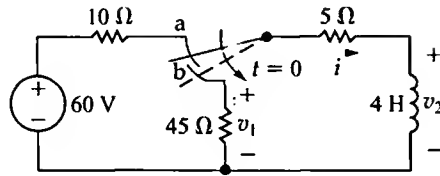


Figura P7.2

7.3. El conmutador mostrado en la Figura P7.3 ha estado abierto durante un largo período de tiempo antes de cerrarlo en  $t = 0$ .

- Determine  $i_o(0^-)$ .
- Determine  $i_L(0^-)$ .
- Determine  $i_o(0^+)$ .
- Determine  $i_L(0^+)$ .
- Determine  $i_o(\infty)$ .
- Determine  $i_L(\infty)$ .
- Escriba la expresión correspondiente a  $i_L(t)$  para  $t \geq 0$ .
- Determine  $v_L(0^-)$ .
- Determine  $v_L(0^+)$ .
- Determine  $v_L(\infty)$ .
- Escriba la expresión correspondiente a  $v_L(t)$  para  $t \geq 0^+$ .
- Escriba la expresión correspondiente a  $i_o(t)$  para  $t \geq 0^+$ .

7.4. En el circuito de la Figura P7.4, las ecuaciones de la tensión y la corriente son

$$v = 400e^{-5t} \text{ V}, \quad t \geq 0^+;$$

$$i = 10e^{-5t} \text{ A}, \quad t \geq 0.$$

Determine

- $R$ .
- $\tau$  (en milisegundos).
- $L$ .
- La energía inicial almacenada en la bobina.
- El tiempo (en milisegundos) que se tarda en disipar el 80% de la energía inicialmente almacenada.

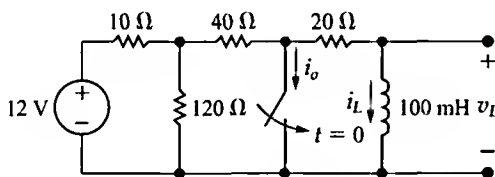


Figura P7.3

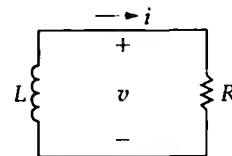


Figura P7.4

7.5. El conmutador del circuito de la Figura P7.5 ha estado abierto durante un largo período de tiempo. En  $t = 0$  se cierra el conmutador.



- Determine  $i_o(0^+)$  e  $i_o(\infty)$ .

b) Determine  $i_o(t)$  para  $t \geq 0^+$ .

c) ¿Cuántos milisegundos después de haber cerrado el conmutador será la corriente que atraviesa el conmutador igual a 5 A?

- 7.6. El conmutador del circuito mostrado en la Figura P7.6 ha estado en la posición 1 durante un largo período de tiempo. En  $t = 0$ , el conmutador se mueve instantáneamente a la posición 2. Calcule el valor de  $R$  de modo que el 20% de la energía inicial almacenada en la bobina de 30 mH se disipe en  $R$  en 15  $\mu$ s.

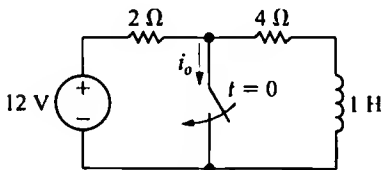


Figura P7.5

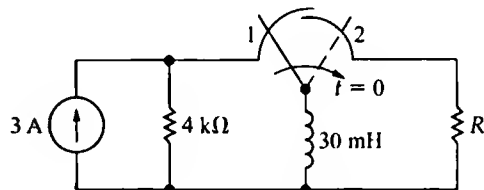


Figura P7.6

- 7.7. En el circuito de la Figura P7.6, sea  $I_x$  la corriente de la fuente cc, sea  $\sigma$  la fracción de la energía inicial almacenada en la bobina que se disipa en  $t_0$  segundos y sea  $L$  la inductancia.

a) Demuestre que

$$R = \frac{L \ln[1/(1-\sigma)]}{2t_0}.$$

b) Compruebe la expresión del apartado (a) utilizándola para determinar el valor de  $R$  en el Problema 7.6.

- 7.8. En el circuito mostrado en la Figura P7.8, el conmutador ha estado en la posición a durante un largo período de tiempo. En  $t = 0$ , se mueve instantáneamente de a a b.



a) Determine  $i_o(t)$  para  $t \geq 0$ .

b) ¿Cuál es la energía total suministrada a la resistencia de 8  $\Omega$ ?

c) ¿Cuántas constantes de relajación se tarda en suministrar el 95% de la energía determinada en el apartado (b)?

- 7.9. El conmutador del circuito de la Figura P7.9 ha estado cerrado durante un largo período de tiempo. En  $t = 0$  se abre el conmutador. Calcule  $i_o(t)$  para  $t \geq 0$ .

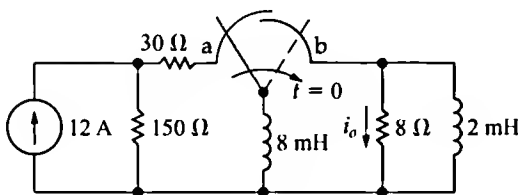


Figura P7.8

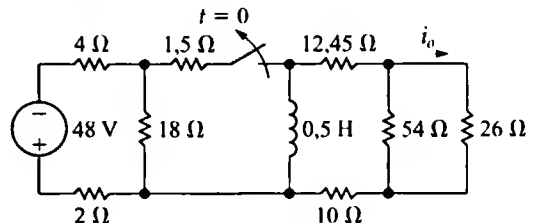


Figura P7.9

- 7.10. Suponga que el conmutador del circuito de la Figura P7.9 ha estado abierto durante una constante de relajación. En ese instante, ¿qué porcentaje de la energía total almacenada en la bobina de 0,5 H se habrá disipado en la resistencia de 54  $\Omega$ ?

7.11. El conmutador de la Figura P7.11 ha estado cerrado durante un largo período de tiempo antes de abrirse en  $t = 0$ . Determine

- a)  $i_L(t)$ ,  $t \geq 0$ ;
- b)  $v_L(t)$ ,  $t \geq 0^+$ ;
- c)  $i_\Delta(t)$ ,  $t \geq 0^+$ .

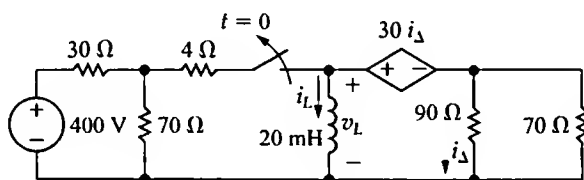


Figura P7.11

7.12. ¿Qué porcentaje de la energía inicialmente almacenada en la bobina del circuito de la Figura P7.11 se disipa en la fuente de tensión controlada por corriente?

7.13. El conmutador del circuito de la Figura P7.13 ha estado cerrado durante un largo período de tiempo antes de abrirse en  $t = 0$ . Determine  $v_o(t)$  para  $t \geq 0^+$ .

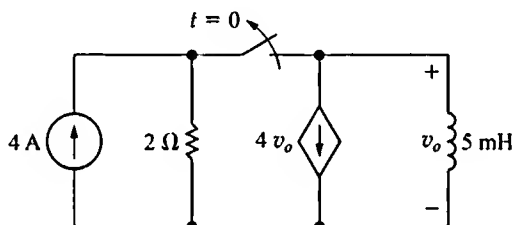


Figura P7.13

7.14. El conmutador del circuito de la Figura P7.14 ha estado en la posición 1 durante un largo período de tiempo. En  $t = 0$ , el conmutador se mueve instantáneamente a la posición 2. Determine  $v_o(t)$  para  $t \geq 0^+$ .

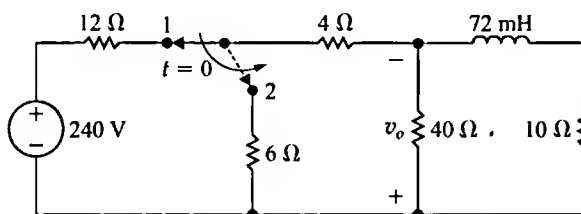


Figura P7.14

7.15. Para el circuito de la Figura P7.14, ¿qué porcentaje de la energía inicialmente almacenada en la bobina se disipa en la resistencia de  $40 \Omega$ ?

7.16. En el circuito de la Figura P7.16, el conmutador ha estado cerrado durante un largo período de tiempo antes de abrirse en  $t = 0$ .

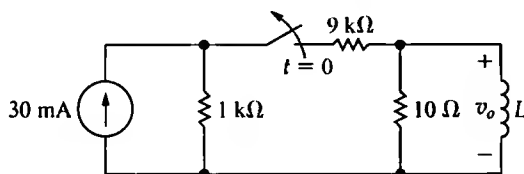


Figura P7.16



- a) Determine el valor de  $L$  de modo que  $v_o(t)$  sea igual a 0,5 veces  $v_o(0^+)$  cuando  $t = 1$  ms.  
 b) Determine el porcentaje de la energía almacenada que se habrá disipado en la resistencia de  $10\ \Omega$  cuando  $t = 1$  ms.

7.17. La fuente de 165 V y  $5\ \Omega$  del circuito de la Figura P7.17 se cortocircuita inadvertidamente en sus terminales a y b. En el momento de producirse el fallo, el circuito ha estado en operación durante un largo período de tiempo.



- a) ¿Cuál es el valor inicial de la corriente  $i_{ab}$  en la conexión de cortocircuito entre los terminales a y b?  
 b) ¿Cuál es el valor final de la corriente  $i_{ab}$ ?  
 c) ¿Cuántos microsegundos después del cortocircuito será la corriente que pasa por el corto igual a 19 A?

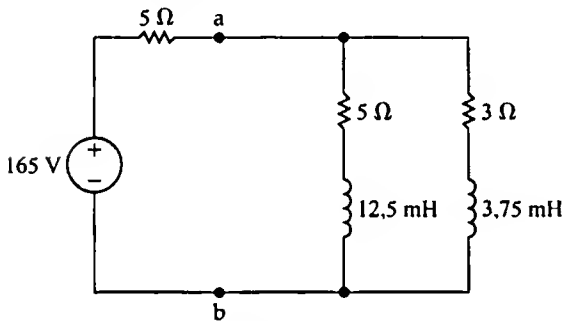


Figura P7.17

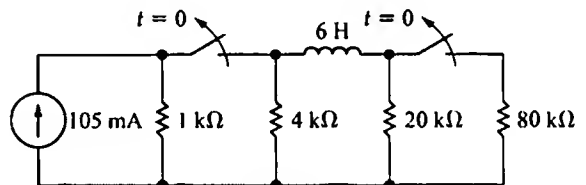


Figura P7.18

- 7.19. Los dos conmutadores mostrados en el circuito de la Figura P7.19 operan simultáneamente. Antes de  $t = 0$ , cada conmutador ha estado en su posición indicada durante un largo período de tiempo. En  $t = 0$ , los dos conmutadores se mueven instantáneamente a sus nuevas posiciones. Determine a)  $v_o(t)$ ,  $t \geq 0^+$ . b)  $i_o(t)$ ,  $t \geq 0$ .

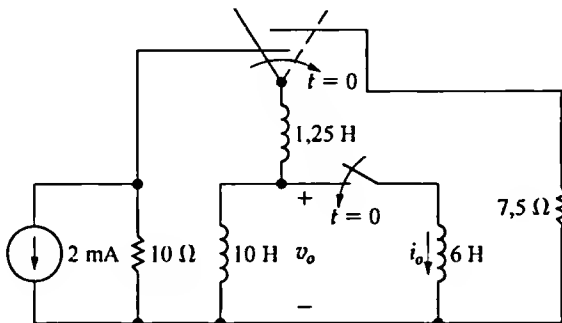


Figura P7.19

- 7.20. Para el circuito mostrado en la Figura P7.19, determine
- la energía total disipada en la resistencia de  $7,5\ \Omega$ ,
  - la energía atrapada en las bobinas ideales.
- 7.21. El conmutador del circuito de la Figura P7.21 ha estado en la posición a durante un largo período de tiempo. En  $t = 0$ , el conmutador pasa a la posición b. Calcule
- $i$ ,  $v_1$  y  $v_2$  para  $t \geq 0^+$ ,
  - la energía almacenada en el condensador en  $t = 0$ ,
  - la energía atrapada en el circuito y la energía total disipada en la resistencia de  $25\ \text{k}\Omega$  si el conmutador permanece indefinidamente en la posición b.
- 7.22. El conmutador del circuito de la Figura P7.22 ha estado en la posición a durante un largo período de tiempo. En  $t = 0$ , el conmutador pasa a la posición b.
- Calcule  $i_o(t)$  para  $t \geq 0^+$ .
  - ¿Qué porcentaje de la energía inicialmente almacenada en el condensador se disipará en la resistencia de  $3\ \text{k}\Omega$  durante los primeros  $500\ \mu\text{s}$  después de cerrarse el conmutador?

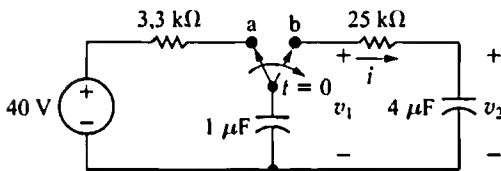


Figura P7.21

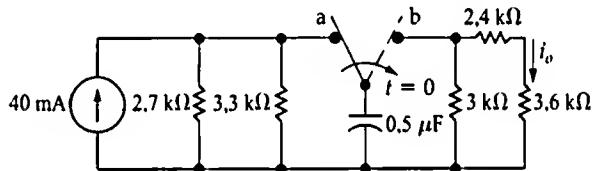


Figura P7.22

- 7.23. En el circuito de la Figura P7.23, las ecuaciones correspondientes a la tensión y la corriente son:

$$v = 48e^{-25t} \text{ V}, \quad t \geq 0;$$

$$i = 12e^{-25t} \text{ mA}, \quad t \geq 0^+.$$

Determine:

- $R$ ;
  - $C$ ;
  - $\tau$  (en milisegundos);
  - la energía inicial almacenada en el condensador;
  - la cantidad de energía que habrá sido disipada en la resistencia 60 ms después de que la tensión haya comenzado a decrecer.
- 7.24. El conmutador del circuito de la Figura P7.24 se cierra en  $t = 0$  después de haber estado abierto durante un largo período de tiempo.
- Determine  $i_1(0^-)$  e  $i_2(0^-)$ .
  - Determine  $i_1(0^+)$  e  $i_2(0^+)$ .
  - Explique por qué  $i_1(0^-) = i_1(0^+)$ .
  - Explique por qué  $i_2(0^-) \neq i_2(0^+)$ .
  - Determine  $i_1(t)$  para  $t \geq 0$ .
  - Determine  $i_2(t)$  para  $t \geq 0^+$ .

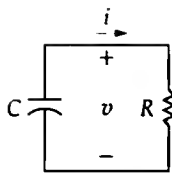


Figura P7.23

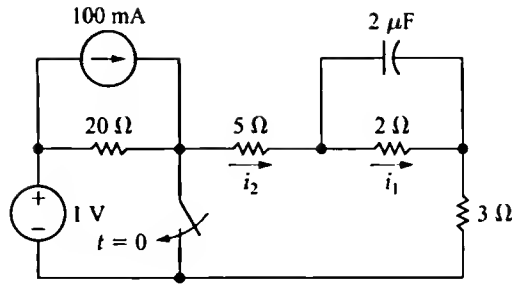


Figura P7.24

7.25. En el circuito mostrado en la Figura P7.25, ambos conmutadores operan conjuntamente, es decir, ambos se abren o se cierran al mismo tiempo. Los conmutadores han estado cerrados un largo período de tiempo antes de abrirse en  $t = 0$ .

- ¿Cuántos microjulios de energía se habrán disipado en la resistencia de  $12\text{ k}\Omega$   $12\text{ ms}$  después de abrirse los conmutadores?
- ¿Cuánto tiempo tarda en disiparse el 75% de la energía inicialmente almacenada?

7.26. El conmutador del circuito mostrado en la Figura P7.26 ha estado en la posición  $x$  durante un largo período de tiempo. En  $t = 0$ , el conmutador se mueve instantáneamente a la posición  $y$ .

- Calcule  $\alpha$  de modo que la constante de relajación para  $t > 0$  sea  $40\text{ ms}$ .
- Para el valor de  $\alpha$  determinado en el apartado (a), calcule  $v_\Delta$ .

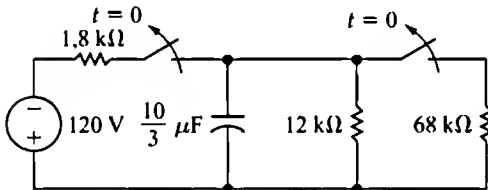


Figura P7.25

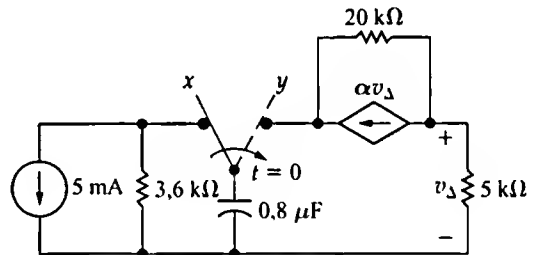


Figura P7.26

7.27. a) En el Problema 7.26, ¿cuántos microjulios de energía son generados por la fuente de corriente independiente durante el tiempo en que el condensador se descarga hasta  $0\text{ V}$ ?

- Demuestre que para  $t \geq 0$  la energía total almacenada y generada en el circuito capacitivo es igual a la energía total disipada.

7.28. El conmutador del circuito de la Figura P7.28 ha estado en la posición 1 durante un largo período de tiempo antes de moverse a la posición 2 en  $t = 0$ . Determine  $i_o(t)$  para  $t \geq 0^+$ .



7.29. En el instante en que se cierra el conmutador en el circuito de la Figura P7.29, la tensión entre los terminales de los condensadores en paralelo es de  $50\text{ V}$  y la tensión entre los terminales del condensador de  $0,25\text{ μF}$  es de  $40\text{ V}$ .

- ¿Qué porcentaje de la energía inicialmente almacenada en los tres condensadores se disipará en la resistencia de  $24\text{ k}\Omega$ ?

- b) Repita el apartado (a) para las resistencias de  $400\ \Omega$  y de  $16\ \text{k}\Omega$ .  
 c) ¿Qué porcentaje de la energía inicial está atrapado en los condensadores?

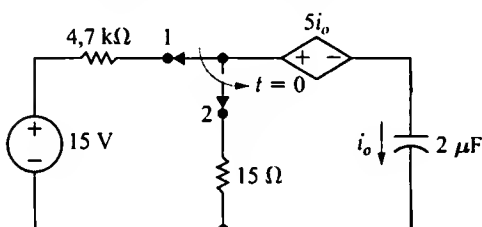


Figura P7.28

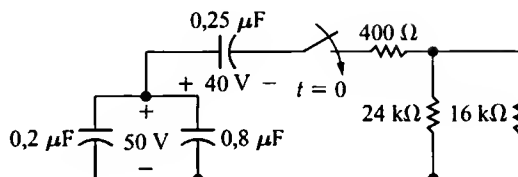


Figura P7.29

7.30. En el instante de cerrar el conmutador en el circuito mostrado en la Figura P7.30, los condensadores están cargados como se indica.

- Determine  $v_o(t)$  para  $t \geq 0^+$ .
- ¿Qué porcentaje de la energía total inicialmente almacenada en los tres condensadores se disipará en la resistencia de  $250\ \text{k}\Omega$ ?
- Determine  $v_1(t)$  para  $t \geq 0$ .
- Determine  $v_2(t)$  para  $t \geq 0$ .
- Determine la energía (en milijulios) atrapada en los condensadores ideales.

7.31. Después de que el circuito de la Figura P7.31 ha estado en operación durante un largo período de tiempo, se conecta inadvertidamente un destornillador entre los terminales a y b. Suponga que la resistencia del destornillador es despreciable.

- Determine la corriente en el destornillador en  $t = 0^+$  y  $t = \infty$ .
- Determine la expresión de la corriente que pasa por el destornillador para  $t \geq 0^+$ .

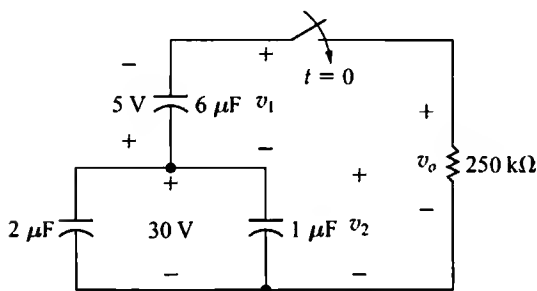


Figura P7.30

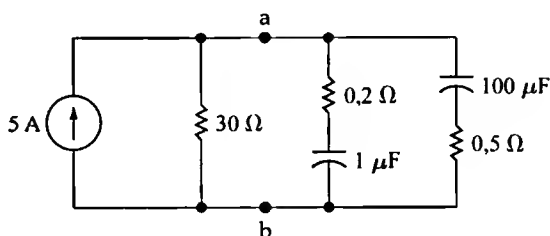


Figura P7.31

7.32. Los dos conmutadores del circuito de la Figura P7.32 han estado cerrados durante un largo período de tiempo. En  $t = 0$ , ambos conmutadores se abren simultáneamente.

- Determine  $i_o(t)$  para  $t \geq 0^+$ .
- Determine  $v_o(t)$  para  $t \geq 0$ .
- Determine la energía (en milijulios) atrapada en el circuito.

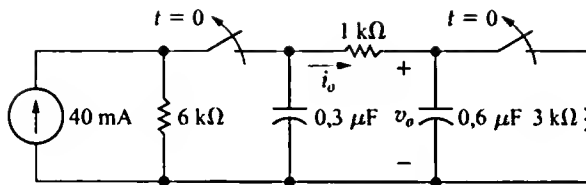


Figura P7.32

7.33. El conmutador del circuito mostrado en la Figura P7.33 ha estado cerrado durante un largo período de tiempo antes de abrirse en  $t = 0$ .



- Determine las expresiones numéricas para  $i_L(t)$  y  $v_o(t)$  para  $t \geq 0$ .
- Determine las expresiones numéricas para  $v_L(0^+)$  y  $v_o(0^+)$ .

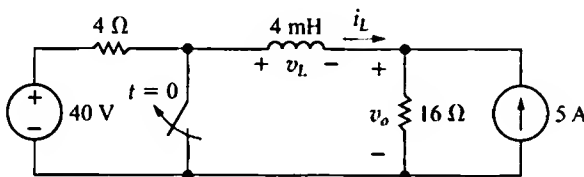


Figura P7.33

7.34. El conmutador del circuito mostrado en la Figura P7.34 ha estado en la posición a durante un largo período de tiempo. En  $t = 0$ , el conmutador se mueve instantáneamente a la posición b.



- Determine la expresión numérica correspondiente a  $i_o(t)$  cuando  $t \geq 0$ .
- Determine la expresión numérica correspondiente a  $v_o(t)$  cuando  $t \geq 0^+$ .

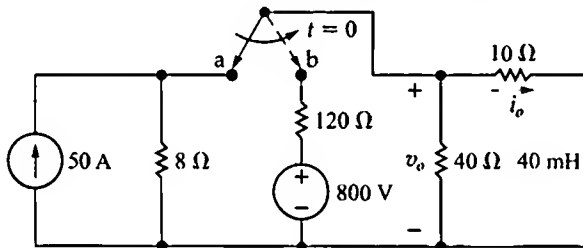


Figura P7.34

7.35. El conmutador del circuito mostrado en la Figura P7.35 ha estado en la posición a durante un largo período de tiempo. El conmutador se abre en  $t = 0$ . Determine las expresiones numéricas correspondientes a  $i_o(t)$  y  $v_o(t)$  cuando  $t \geq 0^+$ .

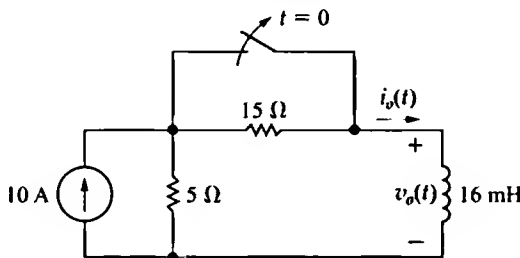


Figura P7.35

7.36. El conmutador del circuito mostrado en la Figura P7.36 ha estado cerrado durante un largo período de tiempo y se abre en  $t = 0$ . Para  $t \geq 0^+$ :

- Determine  $v_o(t)$  en función de  $I_g$ ,  $R_1$ ,  $R_2$  y  $L$ .

- b) Verifique la expresión obtenida utilizándola para calcular  $v_o(t)$  en el circuito de la Figura P7.35.
- c) Explique qué sucede con  $v_o(t)$  a medida que se incrementa el valor de  $R_2$ .
- d) Calcule  $v_{sw}$  en función de  $I_x$ ,  $R_1$ ,  $R_2$  y  $L$ .
- e) Explique qué sucede con  $v_{sw}$  a medida que se incrementa el valor de  $R_2$ .

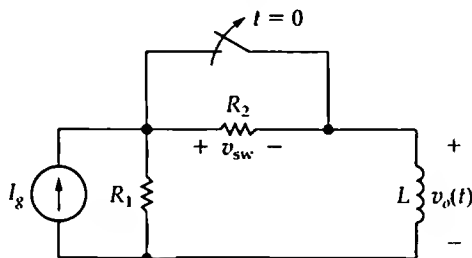


Figura P7.36

- 7.37. El conmutador del circuito mostrado en la Figura P7.37 ha estado cerrado durante un largo período de tiempo. Un estudiante abre abruptamente el conmutador y le dice a su profesor que, cuando se abrió el conmutador, se estableció un arco eléctrico de notable persistencia entre los terminales del mismo, y a la vez el voltímetro colocado en paralelo con la bobina resultó dañado. Basándose en su análisis del circuito del Problema 7.36, ¿puede explicar al estudiante por qué sucedió eso?

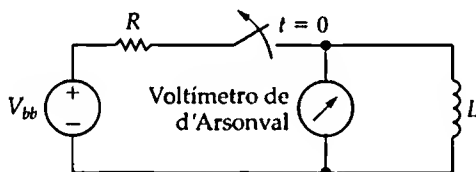


Figura P7.37

- 7.38. La corriente y la tensión en los terminales de la bobina del circuito de la Figura 7.16 son

$$i(t) = (4 + 4e^{-40t}) \text{ A}, \quad t \geq 0;$$

$$v(t) = -80e^{-40t} \text{ V}, \quad t \geq 0^+.$$

- a) Especifique los valores numéricos de  $V_s$ ,  $R$ ,  $I_o$  y  $L$ .
- b) ¿Cuántos milisegundos después de haberse cerrado el conmutador alcanzará la energía almacenada en la bobina el valor de 9 J?
- 7.39. El conmutador del circuito de la Figura P7.39 ha estado abierto durante un largo período de tiempo antes de cerrarse en  $t = 0$ . Determine  $i_o(t)$  para  $t \geq 0$ .

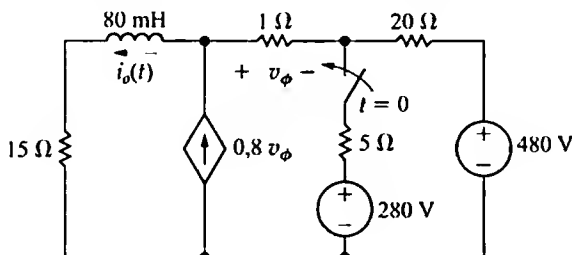


Figura P7.39

- 7.40.** El conmutador del circuito de la Figura P7.40 ha estado abierto durante un largo período de tiempo antes de cerrarse en  $t = 0$ . Determine  $v_o(t)$  para  $t \geq 0^+$ .

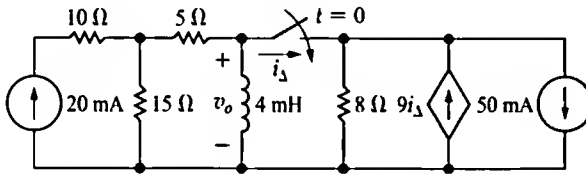


Figura P7.40

- 7.41.** a) Deduzca la Ecuación 7.47 convirtiendo primero el equivalente de Thévenin de la Figura 7.16 en un equivalente de Norton y luego sumando las corrientes que salen del nodo superior, utilizando la tensión de la bobina,  $v$ , como variable de interés.  
 b) Utilice la técnica de separación de variables para hallar la solución de la Ecuación 7.47. Verifique que su solución concuerda con la dada en la Ecuación 7.42.
- 7.42.** El conmutador del circuito de la Figura P7.42 ha estado en la posición 1 durante un largo período de tiempo y en  $t = 0$  se mueve instantáneamente a la posición 2. ¿Cuántos milisegundos después de operar el conmutador tendrá  $v_o$  el valor de 100 V?

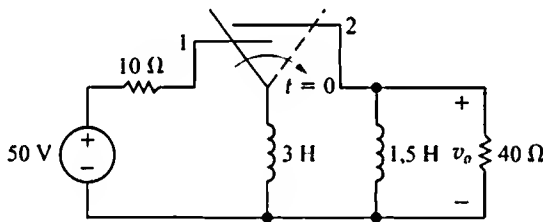


Figura P7.42

- 7.43.** Para el circuito de la Figura P7.42, determine (en julios):  
 a) la energía total disipada en la resistencia de  $40 \Omega$ ,  
 b) la energía atrapada en las bobinas,  
 c) la energía inicialmente almacenada en las bobinas.
- 7.44.** El conmutador de tipo hacer antes de romper del circuito de la Figura P7.44 ha estado en la posición a durante un largo período de tiempo. En  $t = 0$ , el conmutador se mueve instantáneamente a la posición b. Determine  
 a)  $v_o(t)$ ,  $t \geq 0^+$ ;  
 b)  $i_1(t)$ ,  $t \geq 0$ ;  
 c)  $i_2(t)$ ,  $t \geq 0$ .

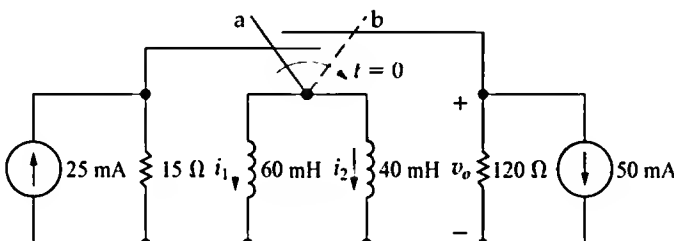


Figura P7.44

7.45. No hay ninguna energía almacenada en las bobinas  $L_1$  y  $L_2$  en el instante en que el conmutador se abre en el circuito mostrado en la Figura P7.45.

- a) Determine las expresiones correspondientes a las corrientes  $i_1(t)$  e  $i_2(t)$  para  $t \geq 0$ .  
b) Utilice las expresiones halladas en el apartado (a) para calcular  $i_1(\infty)$  e  $i_2(\infty)$ .

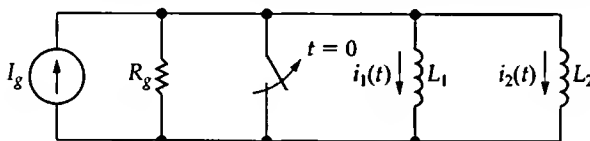


Figura P7.45

7.46. El conmutador del circuito de la Figura P7.46 ha estado abierto durante un largo período de tiempo antes de cerrarse en  $t = 0$ . Determine  $v_o(t)$  para  $t \geq 0^+$ .

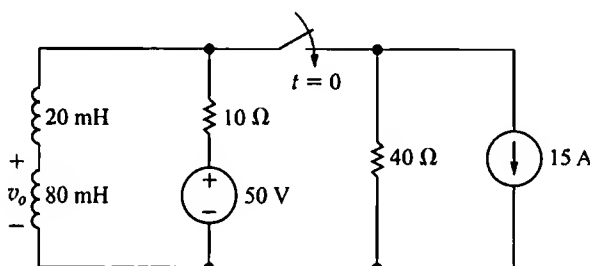


Figura P7.46

7.47. El circuito de la Figura P7.47 ha estado en operación durante un largo período de tiempo. En  $t = 0$ , la fuente de tensión invierte su polaridad y la fuente de corriente cae de 3 mA a 2 mA. Determine  $v_o(t)$  para  $t \geq 0$ .

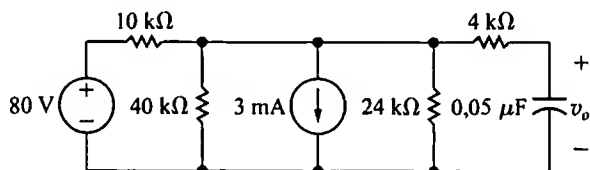


Figura P7.47

7.48. El conmutador del circuito de la Figura P7.48 ha estado cerrado durante un largo período de tiempo antes de abrirse en  $t = 0$ . Para  $t \geq 0^+$ , determine



- a)  $v_o(t)$ ;      b)  $i_o(t)$ ;  
c)  $i_1(t)$ ;      d)  $i_2(t)$ ;      e)  $i_1(0^+)$ .

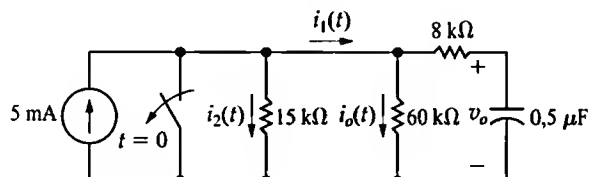


Figura P7.48

7.49. La corriente y la tensión en los terminales del condensador del circuito de la Figura 7.21 son

$$i(t) = 3e^{-2500t} \text{ mA}, \quad t \geq 0^+;$$

$$v(t) = (40 - 24e^{-2500t}) \text{ V}, \quad t \geq 0.$$



- a) Especifique los valores numéricos de  $I_s$ ,  $V_o$ ,  $R$ ,  $C$  y  $\tau$ .  
 b) ¿Cuántos microsegundos después de haberse cerrado el conmutador alcanzará la energía almacenada en el condensador el 81% de su valor final?

7.50. El conmutador del circuito de la Figura P7.50 ha estado en la posición  $x$  durante un largo período de tiempo. La carga inicial en el condensador de  $10\text{ nF}$  es cero. En  $t = 0$ , el conmutador se mueve instantáneamente a la posición  $y$ .

- a) Determine  $v_o(t)$  para  $t \geq 0^+$ .  
 b) Determine  $v_i(t)$  para  $t \geq 0$ .

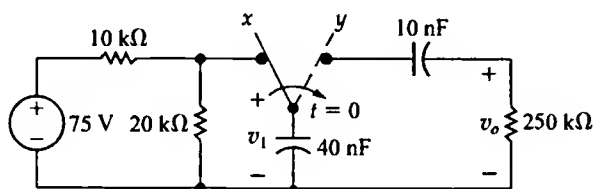


Figura P7.50

7.51. Para el circuito de la Figura P7.50, determine (en microjulios)

- a) la energía entregada a la resistencia de  $250\text{ k}\Omega$ ,  
 b) la energía atrapada en los condensadores,  
 c) la energía inicialmente almacenada en los condensadores.

7.52. El conmutador del circuito mostrado en la Figura P7.52 se abre en  $t = 0$  después de haber estado cerrado durante un largo período de tiempo. ¿Cuántos milisegundos después de abrirse el conmutador será la energía almacenada en el condensador un 36% de su valor final?

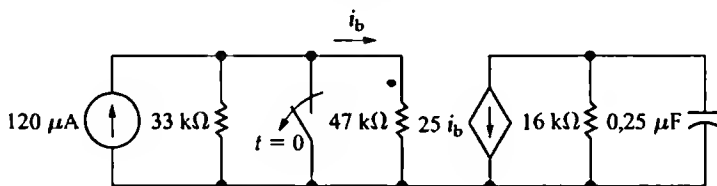


Figura P7.52

7.53. El conmutador del circuito mostrado en la Figura P7.53 ha estado cerrado durante un largo período de tiempo antes de abrirse en  $t = 0$ .

- a) ¿Cuál es el valor inicial de  $i_o(t)$ ?  
 b) ¿Cuál es el valor final de  $i_o(t)$ ?  
 c) ¿Cuál es la constante de relajación del circuito para  $t \geq 0$ ?  
 d) ¿Cuál es la expresión numérica correspondiente a  $i_o(t)$  para  $t \geq 0^+$ ?  
 e) ¿Cuál es la expresión numérica correspondiente a  $v_o(t)$  para  $t \geq 0^+$ ?

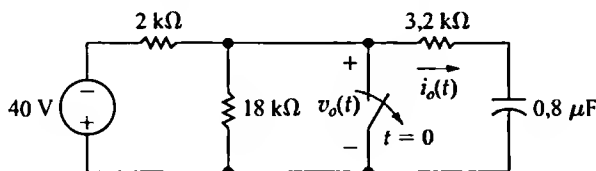


Figura P7.53

- 7.54. El conmutador del circuito mostrado en la Figura P7.54 ha estado en la posición a durante un largo periodo de tiempo. En  $t = 0$ , el conmutador se mueve instantáneamente a la posición b. Para  $t \geq 0^+$ , determine

- $v_o(t)$ ;
- $i_o(t)$ ;
- $v_g(t)$ ;
- $v_g(0^+)$ .

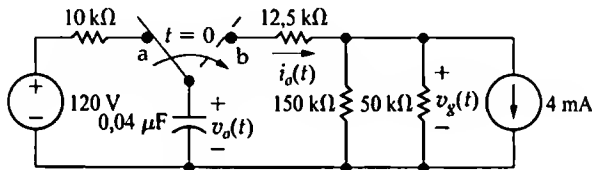


Figura P7.54

- 7.55. El conmutador del circuito mostrado en la Figura P7.55 ha estado en la posición OFF durante un largo periodo de tiempo. En  $t = 0$ , el conmutador se mueve instantáneamente a la posición ON. Determine  $v_o(t)$  para  $t \geq 0$ .

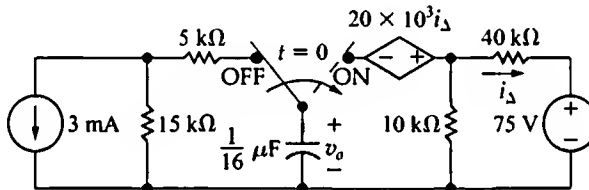


Figura P7.55

- 7.56. Suponga que el conmutador del circuito de la Figura P7.55 ha estado en la posición ON durante un largo periodo de tiempo antes de conmutar instantáneamente a la posición OFF en  $t = 0$ . Determine  $v_o(t)$  para  $t \geq 0$ .
- 7.57. Suponga que el conmutador del circuito de la Figura P7.57 ha estado en la posición a durante un largo periodo de tiempo. En  $t = 0$ , el conmutador se mueve instantáneamente a la posición b. Determine  $v_o(t)$  e  $i_o(t)$  para  $t \geq 0^+$ .

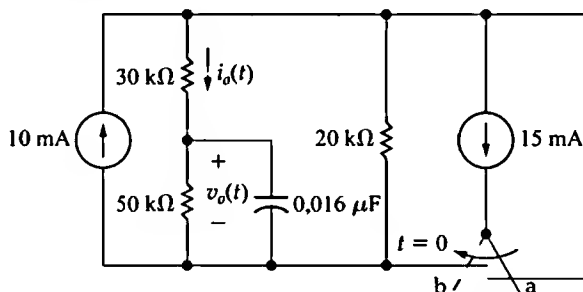


Figura P7.57

- 7.58. No hay energía almacenada en los condensadores  $C_1$  y  $C_2$  en el momento en que se cierra el conmutador en el circuito mostrado en la Figura P7.58.
- Deduzca las expresiones correspondientes a  $v_1(t)$  y  $v_2(t)$  para  $t \geq 0$ .
  - Utilice las expresiones halladas en el apartado (a) para calcular  $v_1(\infty)$  y  $v_2(\infty)$ .

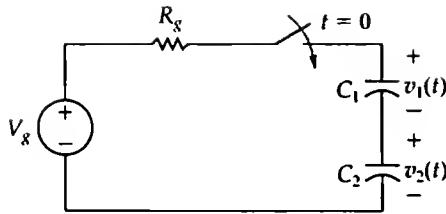


Figura P7.58

- 7.59. a) Deduzca la Ecuación 7.52 convirtiendo primero el circuito equivalente de Norton mostrado en la Figura 7.21 a un equivalente de Thévenin y luego sumando las tensiones alrededor del lazo cerrado, usando la corriente del condensador,  $i$ , como variable de interés.  
b) Utilice la técnica de separación de variables para determinar la solución de la Ecuación 7.52. Verifique que su solución concuerda con la dada por la Ecuación 7.53.

- 7.60. El conmutador del circuito de la Figura P7.60 ha estado en la posición a durante un largo período de tiempo. En  $t = 0$ , se mueve instantáneamente a la posición b. Para  $t \geq 0^+$ , determine

- a)  $v_o(t)$ ;  
b)  $i_o(t)$ ;  
c)  $v_1(t)$ ;  
d)  $v_2(t)$ ;  
e) la energía atrapada en los condensadores cuando  $t \rightarrow \infty$ .

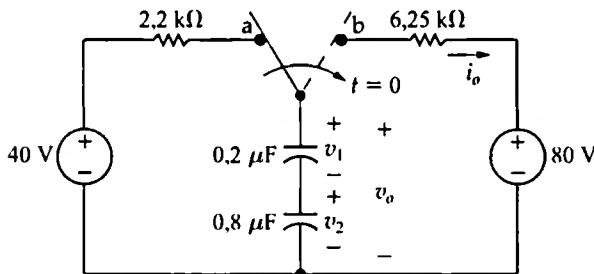


Figura P7.60

- 7.61. Suponga que el conmutador del circuito de la Figura P7.61 ha estado en la posición a durante un largo período de tiempo y que en  $t = 0$  se lo mueve a la posición b. Determine (a)  $v_C(0^+)$ ; (b)  $v_C(\infty)$ ; (c)  $\tau$  para  $t > 0$ ; (d)  $i(0^+)$ ; (e)  $v_C$ ,  $t \geq 0$  y (f)  $i$ ,  $t \geq 0^+$ .

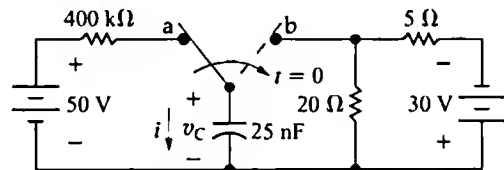


Figura P7.61

- 7.62. El conmutador del circuito de la Figura P7.62 ha estado en la posición a durante un largo período de tiempo. En  $t = 0$ , se lo mueve a la posición b. Calcule (a) la tensión inicial en el condensador; (b) la tensión final en el condensador; (c) la constante de relajación (en microsegundos) para  $t > 0$ ; y (d) el intervalo de tiempo (en microsegundos) requerido para que la tensión del condensador llegue a valer cero después de mover el conmutador a la posición b.

- 7.63. Después de que el conmutador del circuito de la Figura P7.63 haya estado abierto durante un largo período de tiempo, se cierra en  $t = 0$ . Calcule (a) el valor inicial de  $i$ ; (b) el valor final de  $i$ ; (c) la constante de relajación para  $t \geq 0$ ; y (d) la expresión numérica correspondiente a  $i(t)$  cuando  $t \geq 0$ .

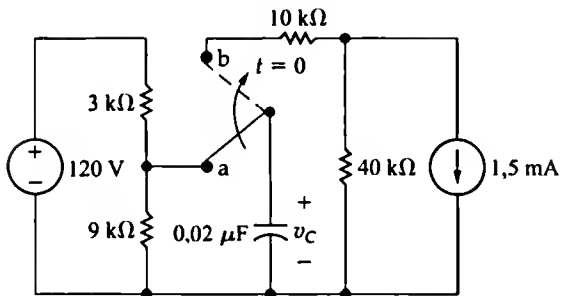


Figura P7.62

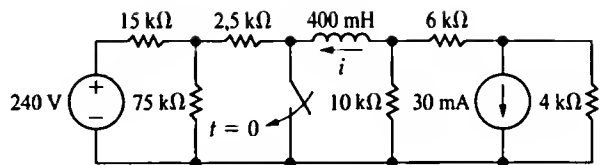


Figura P7.63

7.64. No hay energía almacenada en el circuito de la Figura P7.64 en el momento de cerrar el conmutador.

- Determine  $i_o(t)$  para  $t \geq 0$ .
- Determine  $v_o(t)$  para  $t \geq 0^+$ .
- Determine  $i_1(t)$  para  $t \geq 0$ .
- Determine  $i_2(t)$  para  $t \geq 0$ .
- ¿Tienen sentido sus respuestas en relación con el comportamiento conocido del circuito?

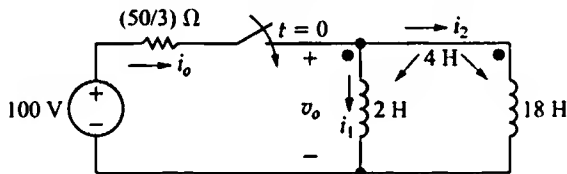


Figura P7.64

7.65. Repita los apartados (a) y (b) del Ejemplo 7.10 si la inductancia mutua se reduce a cero.

7.66. No hay energía almacenada en el circuito de la Figura P7.66 en el momento de cerrar el conmutador.



- Determine  $i_o(t)$  para  $t \geq 0$ .
- Determine  $v_o(t)$  para  $t \geq 0^+$ .
- Determine  $i_1(t)$  para  $t \geq 0$ .
- Determine  $i_2(t)$  para  $t \geq 0$ .
- ¿Tienen sentido sus respuestas en relación con el comportamiento conocido del circuito?

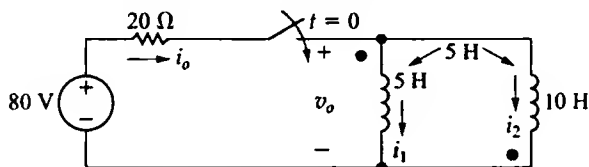


Figura P7.66

7.67. No hay energía almacenada en el circuito de la Figura P7.67 en el momento de cerrar el conmutador.



- Determine  $i(t)$  para  $t \geq 0$ .

- b) Determine  $v_1(t)$  para  $t \geq 0^+$ .  
 c) Determine  $v_2(t)$  para  $t \geq 0$ .  
 d) ¿Tienen sentido sus respuestas en relación con el comportamiento conocido del circuito?

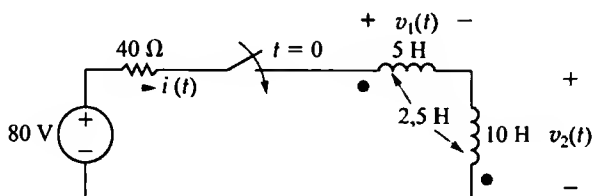


Figura 7.67

- 7.68. Repita el Problema 7.67 si se coloca el punto de la bobina de 10 H en la parte superior de la bobina.



- 7.69. El conmutador del circuito de la Figura P7.69 ha estado en la posición a durante un largo período de tiempo. En  $t = 0$ , el conmutador se mueve instantáneamente a la posición b. En el instante en que el conmutador hace contacto con el terminal b, el conmutador 2 se abre. Determine  $v_o(t)$  para  $t \geq 0$ .

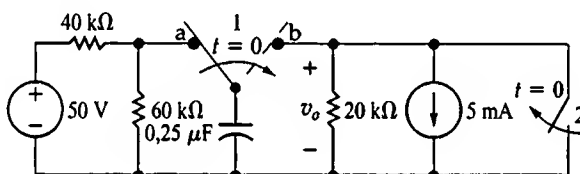


Figura P7.69

- 7.70. El conmutador del circuito mostrado en la Figura P7.70 ha estado en la posición a durante un largo período de tiempo. En  $t = 0$ , el conmutador se mueve a la posición b, donde permanece durante 1 ms. Después, el conmutador se mueve a la posición c, en la que permanece indefinidamente. Determine



- a)  $i(0^+)$ ;  
 b)  $i(200 \mu s)$ ;  
 c)  $i(6 \text{ ms})$ ;  
 d)  $v(1^- \text{ ms})$ ;  
 e)  $v(1^+ \text{ ms})$ .

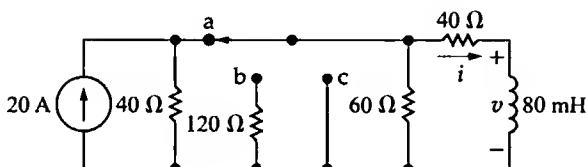


Figura P7.70

- 7.71. En el circuito de la Figura P7.71, el conmutador 1 ha estado en la posición a y el conmutador 2 ha estado cerrado durante un largo período de tiempo. En  $t = 0$ , el conmutador 1 se mueve instantáneamente a la posición b. Ochocientos microsegundos después, el conmutador 2 se abre, permanece abierto durante  $300 \mu s$  y luego vuelve a cerrarse. Determine  $v_o$  1,5 ms después de que el conmutador 1 haga contacto con el terminal b.



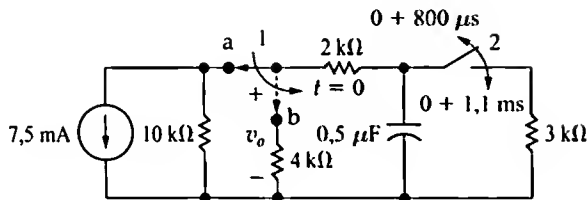


Figura P7.71

7.72. Para el circuito de la Figura P7.71, ¿qué porcentaje de la energía inicialmente almacenada en el condensador de  $0,5 \mu\text{F}$  se disipa en la resistencia de  $3 \text{ k}\Omega$ ?

7.73. La acción de los dos conmutadores en el circuito mostrado en la Figura P7.73 es como sigue. ☐ Para  $t < 0$ , el conmutador 1 está en la posición a y el conmutador 2 está abierto. Este estado se ha mantenido durante un largo período de tiempo. En  $t = 0$ , el conmutador 1 se mueve instantáneamente desde la posición a hasta la posición b, mientras que el conmutador 2 permanece abierto. Diez milisegundos después de operar el conmutador 1, el conmutador 2 se cierra, permanece cerrado durante  $10 \text{ ms}$  y luego se abre. Determine  $v_o(t)$   $25 \text{ ms}$  después de que el conmutador 1 se mueva a la posición b.

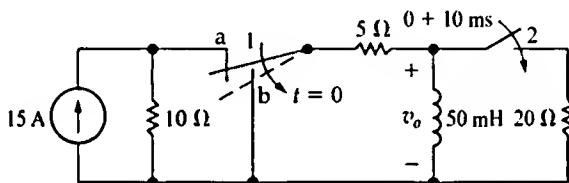


Figura P7.73

7.74. Para el circuito de la Figura P7.73, ¿cuántos milisegundos después de que el conmutador 1 se mueva a la posición b será la energía almacenada en la bobina un 4% de su valor inicial?

7.75. No hay energía almacenada en el condensador del circuito de la Figura P7.75 cuando el conmutador 1 se cierra en  $t = 0$ . Diez microsegundos después, el conmutador 2 se cierra. Determine  $v_o(t)$  para  $t \geq 0$ . ☐

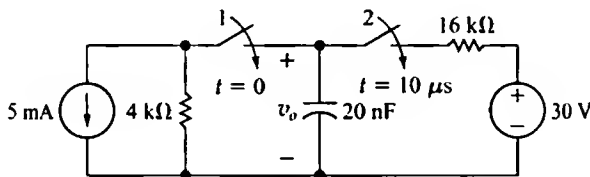


Figura P7.75

7.76. El condensador del circuito mostrado en la Figura P7.76 ha sido cargado a  $300 \text{ V}$ . En  $t = 0$ , el conmutador 1 se cierra, haciendo que el condensador se descargue en la red resistiva. El conmutador 2 se cierra  $200 \mu\text{s}$  después de que el conmutador 1 lo haga. Determine la magnitud y la dirección de la corriente en el segundo conmutador  $300 \mu\text{s}$  después de que se cierre el conmutador 1. ☐

7.77. El conmutador del circuito de la Figura P7.77 ha estado en la posición a durante un largo período de tiempo. En  $t = 0$ , se mueve instantáneamente a la posición b, donde permanece durante  $50 \text{ ms}$  antes de moverse instantáneamente a la posición c. Determine  $v_o(t)$  para  $t \geq 0$ . ☐

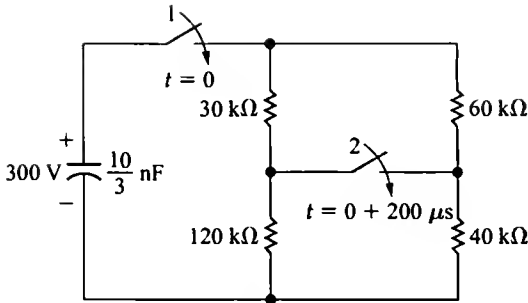


Figura P7.76

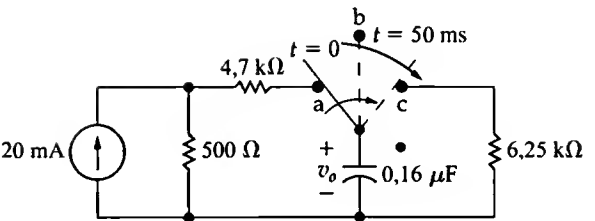


Figura P7.77

- 7.78. En el circuito de la Figura P7.78, el conmutador A ha estado abierto y el conmutador B ha estado cerrado durante un largo período de tiempo. En  $t = 0$ , el conmutador A se cierra. Cinco segundos después de que se cierra el conmutador A, se abre el conmutador B. Determine  $i_L(t)$  para  $t \geq 0$ .

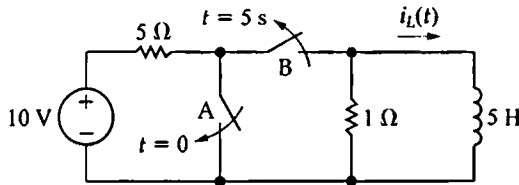


Figura P7.78

- 7.79. La forma de onda de tensión mostrada en la Figura P7.79(a) se aplica al circuito de la Figura P7.79(b). La corriente inicial en la bobina es cero.

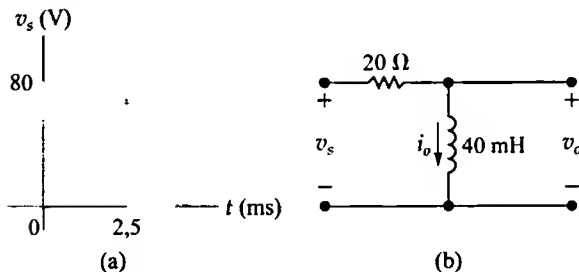


Figura P7.79

- 7.80. La fuente de corriente del circuito de la Figura P7.80(a) genera el pulso de corriente mostrado en la Figura P7.80(b). No hay energía almacenada en  $t = 0$ .

- Deduzca las expresiones numéricas correspondientes a  $v_o(t)$  para los intervalos de tiempo  $t < 0$ ,  $0 < t < 75 \mu s$  y  $75 \mu s < t < \infty$ .
- Calcule  $v_o(75^- \mu s)$  y  $v_o(75^+ \mu s)$ .
- Calcule  $i_o(75^- \mu s)$  e  $i_o(75^+ \mu s)$ .

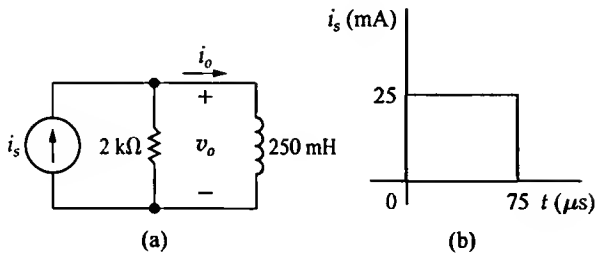


Figura P7.80

7.81. La forma de onda de tensión mostrada en la Figura P7.81(a) se aplica al circuito de la Figura P7.81(b). La tensión inicial en el condensador es cero.



- Calcule  $v_o(t)$ .
- Haga una gráfica de  $v_o(t)$  en función de  $t$ .

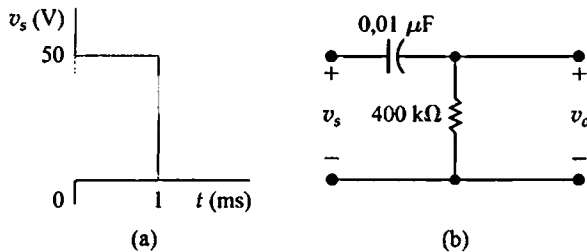


Figura P7.81

7.82. La fuente de tensión del circuito de la Figura P7.82(a) está generando la señal mostrada en la Figura P7.82(b). No hay energía almacenada en  $t = 0$ .



- Determine las expresiones correspondientes a  $v_o(t)$  que son aplicables en los intervalos  $t < 0$ ;  $0 \leq t \leq 4\text{ ms}$ ;  $4\text{ ms} \leq t \leq 8\text{ ms}$ , y  $8\text{ ms} \leq t \leq \infty$ .
- Dibuje  $v_o$  y  $v_s$  en los mismos ejes de coordenadas.
- Repita los apartados (a) y (b) si  $R$  se reduce a  $50\text{ k}\Omega$ .

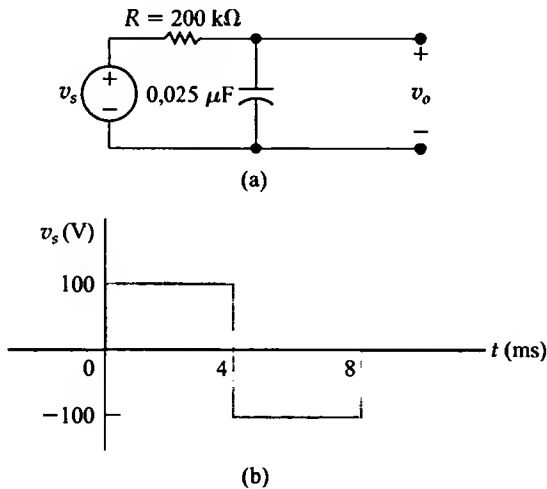


Figura 7.82



☐ 7.83. La fuente de corriente del circuito de la Figura P7.83(a) genera el pulso de corriente mostrado en la Figura P7.83(b). No hay energía almacenada en  $t = 0$ .

- Determine las expresiones correspondientes a  $i_o(t)$  y  $v_o(t)$  para los intervalos de tiempo  $t < 0$ ;  $0 < t < 2$  ms, y  $2$  ms  $< t < \infty$ .
- Calcule  $i_o(0^-)$ ,  $i_o(0^+)$ ,  $i_o(0,002^-)$  e  $i_o(0,002^+)$ .
- Calcule  $v_o(0^-)$ ,  $v_o(0^+)$ ,  $v_o(0,002^-)$  y  $v_o(0,002^+)$ .
- Dibuje  $i_o(t)$  en función de  $t$  para el intervalo  $-1$  ms  $< t < 4$  ms.
- Dibuje  $v_o(t)$  en función de  $t$  para el intervalo  $-1$  ms  $< t < 4$  ms.

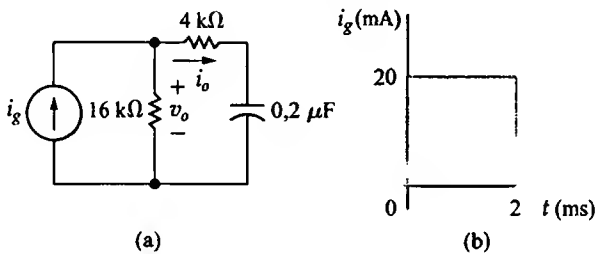


Figura P7.83

☐ 7.84. La separación mostrada en el circuito de la Figura P7.84 generará un arco eléctrico de descarga cada vez que la tensión en dicha separación alcance 45 kV. La corriente inicial en la bobina es cero. El valor de  $\beta$  se ajusta de modo que la resistencia de Thévenin con respecto a los terminales de la bobina sea de  $-5$  kΩ.

- ¿Cuál es el valor de  $\beta$ ?
- ¿Cuántos microsegundos después de cerrar el conmutador se generará una descarga en la separación?

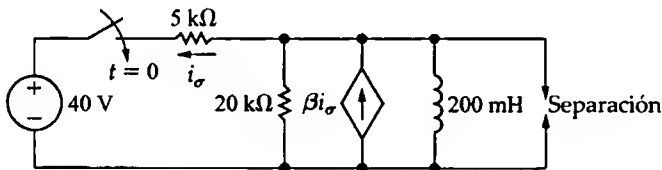


Figura P7.84

☐ 7.85. El conmutador del circuito de la Figura P7.85 ha estado cerrado durante un largo período de tiempo. La tensión máxima nominal del condensador de  $1,6$  μF es de 14.400 V. ¿Cuánto tiempo después de abrir el conmutador alcanzará la tensión en bornes del condensador el valor correspondiente a la máxima tensión nominal?

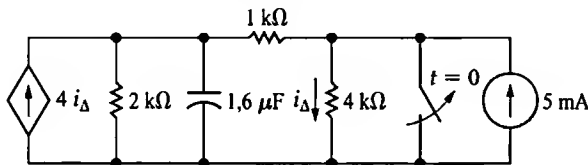


Figura P7.85

☐ 7.86. La corriente de la bobina en el circuito de la Figura P7.86 es de 25 mA en el instante de abrir el conmutador. La bobina funcionará incorrectamente si la magnitud de la corriente que la atraviesa iguala o supera el valor de 5 A. ¿Cuánto tiempo después de abrir el conmutador empezará a fallar la bobina?

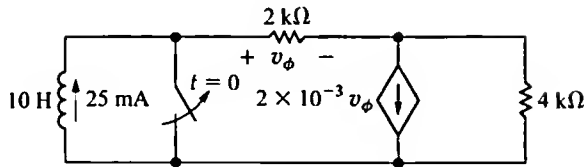


Figura P7.86

- 7.87. El condensador del circuito mostrado en la Figura P7.87 está cargado a 20 V en el momento de cerrar el conmutador. Si el condensador entra en disrupción cuando la tensión entre sus terminales es igual o superior a 20 kV, ¿cuánto tiempo tardará en fallar el condensador?

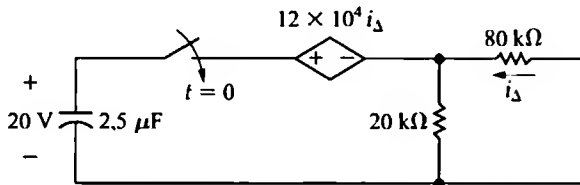


Figura P7.87

- 7.88. El circuito mostrado en la Figura P7.88 se utiliza para cerrar el conmutador entre a y b durante un periodo predeterminado de tiempo. El relé eléctrico mantiene los brazos de contacto en la posición inferior mientras la tensión entre los terminales de la bobina del relé exceda de 5 V. Cuando la tensión de la bobina es igual a 5 V, los contactos del relé vuelven a su posición inicial mediante la acción de un muelle mecánico. El conmutador entre a y b está inicialmente cerrado, por haberse apretado momentáneamente el botón pulsador. Suponga que el condensador está completamente cargado cuando se pulsa por primera vez el botón pulsador. La resistencia de la bobina del relé es de 25 kΩ y la inductancia de la bobina es despreciable.

a) ¿Cuánto tiempo permanecerá cerrado el conmutador que conecta los terminales a y b?

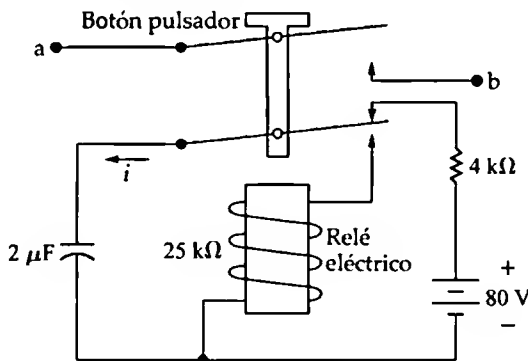


Figura P7.88

- b) Escriba la expresión numérica correspondiente a  $i$  desde el instante en que los contactos del relé se abren por vez primera hasta el momento en que el condensador está completamente cargado.

- c) ¿Cuántos milisegundos (después de interrumpir el circuito entre a y b) se necesitan para que el condensador alcance el 85% de su valor final?

- 7.89. En el instante de cerrar el conmutador de la Figura P7.89, la tensión en el condensador es de 56 V. Suponga que se utiliza un amplificador operacional ideal. ¿Cuántos milisegundos después de cerrar el conmutador se necesitarán para que la tensión de salida  $v_o$  sea igual a cero?

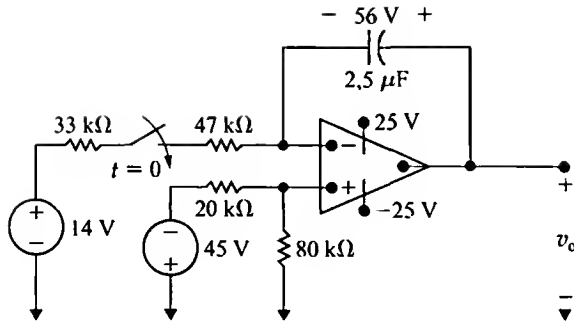


Figura P7.89

- 7.90. En el momento en que el conmutador de doble polo del circuito mostrado en la Figura P7.90 se cierra, las tensiones iniciales en los condensadores son de 12 V y 4 V, como se muestra. Determine las expresiones numéricas correspondientes a  $v_o(t)$ ,  $v_2(t)$  y  $v_f(t)$  que son aplicables mientras el amplificador operacional ideal opere dentro de su rango lineal.

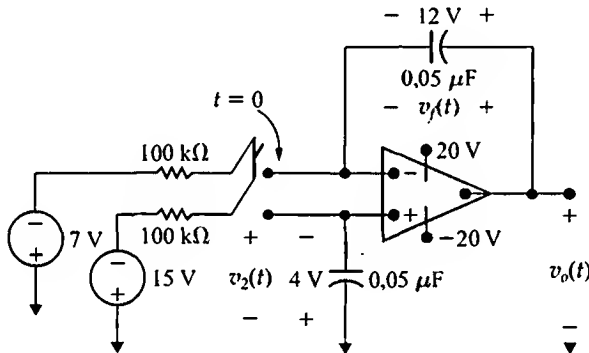


Figura P7.90

- 7.91. La energía almacenada en el condensador en el circuito mostrado en la Figura P7.91 es cero en el instante de cerrar el conmutador. El amplificador operacional ideal alcanza la saturación en 15 ms. ¿Cuál es el valor numérico de  $R$  en kilohmios?

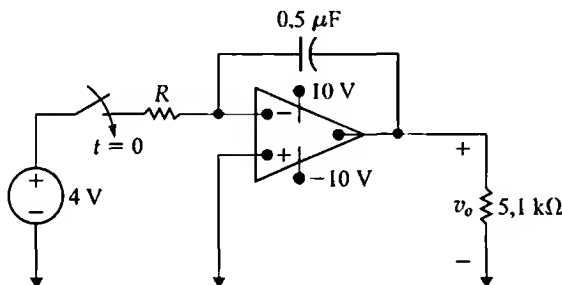


Figura 7.91

- 7.92. En el instante de cerrar el conmutador en el circuito de la Figura P7.91, el condensador está cargado a 6 V, siendo la tensión positiva en el terminal del lado derecho. Si el amplificador final ideal se satura en 40 ms, ¿cuál es el valor de  $R$ ?
- 7.93. No hay energía almacenada en los condensadores en el circuito mostrado en la Figura P7.93 en el instante en que los dos conmutadores se cierran.

- a) Determine  $v_o$  en función de  $v_a$ ,  $v_b$ ,  $R$  y  $C$ .  
 b) Basándose en el resultado obtenido en el apartado (a), describa la operación del circuito.  
 c) ¿Cuánto tiempo tardará en saturarse el amplificador si  $v_a = 40$  mV;  $v_b = 15$  mV;  $R = 50$  k $\Omega$ ;  $C = 10$  nF y  $V_{CC} = 6$  V?

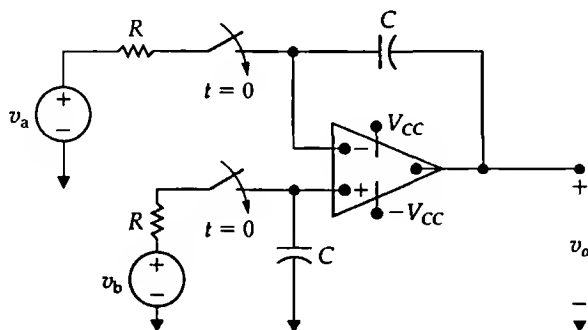
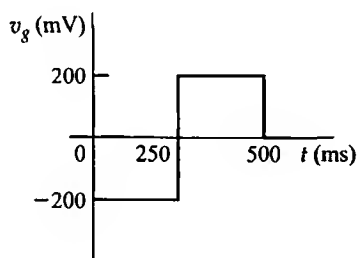


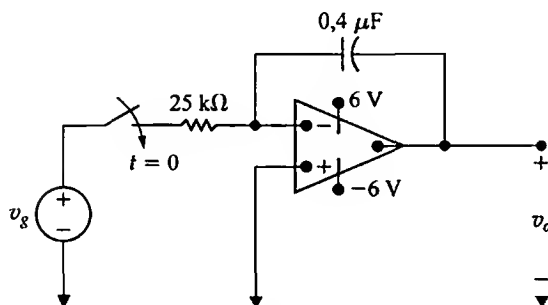
Figura P7.93

7.94. Aplicamos el pulso de tensión mostrado en la Figura P7.94(a) al amplificador integrador ideal que se muestra en la Figura P7.94(b). Si  $v_o(0) = 0$ , determine las expresiones numéricas correspondientes a  $v_o(t)$  para los intervalos

- a)  $t < 0$ ;  
 b)  $0 \leq t \leq 250$  ms;  
 c)  $250$  ms  $\leq t \leq 500$  ms;  
 d)  $500$  ms  $\leq t \leq \infty$ .



(a)



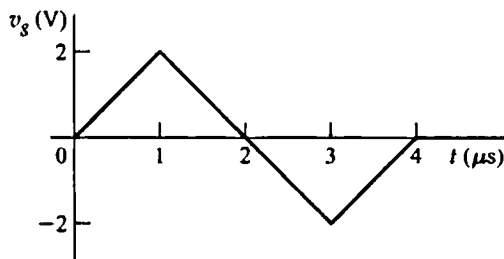
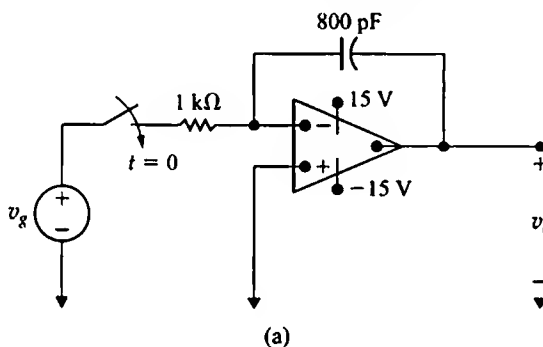
(b)

Figura P7.94

**7.95.** Repita el Problema 7.94 si colocamos una resistencia de  $5\text{ M}\Omega$  en paralelo con el condensador de realimentación de  $0,4\text{ }\mu\text{F}$ .

**7.96.** La fuente de tensión en el circuito de la Figura P7.96(a) está generando la forma de onda triangular que se muestra en la Figura P7.96(b). Suponga que la energía almacenada en el condensador es cero en  $t = 0$ .

- Determine las expresiones numéricas correspondientes a  $v_o(t)$  para los siguientes intervalos:  $0 \leq t \leq 1\text{ }\mu\text{s}$ ,  $1\text{ }\mu\text{s} \leq t \leq 3\text{ }\mu\text{s}$  y  $3\text{ }\mu\text{s} \leq t \leq 4\text{ }\mu\text{s}$ .
- Dibuje la forma de onda de salida entre 0 y  $4\text{ }\mu\text{s}$ .
- Si la tensión de entrada triangular continúa repitiéndose para  $t > 4\text{ }\mu\text{s}$ , ¿cómo esperaría que fuera la tensión de salida? Explique su respuesta.



**Figura P7.96**

**7.97.** El circuito mostrado en la Figura P7.97 se denomina *multivibrador a estable* y tiene un amplio rango de aplicaciones en circuitos generadores de pulsos. El propósito de este problema es poner en relación los procesos de carga y descarga de los condensadores con la operación del circuito. La clave para analizar el circuito consiste en comprender el comportamiento de los conmutadores ideales a transistores  $T_1$  y  $T_2$ . El circuito está diseñado de modo que los conmutadores alternen automáticamente entre los estados ON y OFF. Cuando  $T_1$  está al corte (OFF),  $T_2$  estará en conducción (ON) y viceversa. Por tanto, en el análisis de este circuito, supondremos que cada conmutador puede estar o bien ON, o bien OFF. También supondremos que el conmutador ideal a transistor puede cambiar su estado instantáneamente. En otras palabras, puede pasar de corte a conducción instantáneamente y viceversa. Cuando un conmutador a transistor está en conducción, (1) la corriente de base  $i_b$  es superior a cero, (2) la tensión entre los terminales  $v_{be}$  es cero y (3) la tensión entre los terminales  $v_{ce}$  es cero. Por tanto, cuando un conmutador a transistor está en conducción, presenta un cortocircuito entre los terminales b-e y c-e. Cuando un conmutador

a transistor está al corte, (1) la tensión entre los terminales  $v_{be}$  es negativa, (2) la corriente de base es cero y (3) hay un circuito abierto entre los terminales c y e. Por tanto, cuando un conmutador a transistor está al corte, presenta un circuito abierto entre los terminales b-e y c-e. Suponga que  $T_2$  ha estado en conducción y acaba de pasar al estado OFF, mientras que  $T_1$  ha estado al corte y acaba de pasar al estado ON. Puede suponer también que, en este momento,  $C_2$  está cargado con la tensión de alimentación  $V_{CC}$  y que la carga en  $C_1$  es cero. Suponga asimismo que  $C_1 = C_2$  y  $R_1 = R_2 = 10R_L$ .

- Determine la expresión correspondiente a  $v_{be2}$  durante el intervalo en que  $T_2$  está al corte.
- Determine la expresión correspondiente a  $v_{ce2}$  durante el intervalo en que  $T_2$  está al corte.
- Calcule la duración del intervalo durante el que  $T_2$  está al corte.
- Determine el valor de  $v_{ce2}$  al final del intervalo en que  $T_2$  está al corte.
- Determine el valor de  $i_{b1}$  durante el intervalo en que  $T_2$  está al corte.
- Determine el valor de  $i_{b1}$  al final del intervalo en que  $T_2$  está al corte.
- Dibuje  $v_{ce2}$  en función de  $t$  durante el intervalo en que  $T_2$  está al corte.
- Dibuje  $i_{b1}$  en función de  $t$  durante el intervalo en que  $T_2$  está al corte.

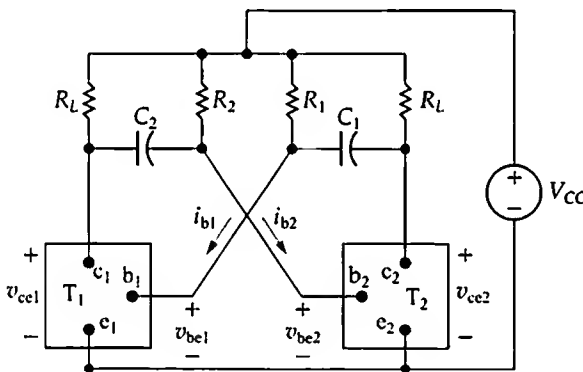


Figura P7.97

- 7.98. Los valores de los componentes en el circuito de la Figura P7.97 son  $V_{CC} = 10$  V;  $R_L = 1$  k $\Omega$ ;  $C_1 = C_2 = 1$  nF y  $R_1 = R_2 = 14,43$  k $\Omega$ .
- ¿Durante cuánto tiempo está  $T_2$  al corte durante un ciclo de operación?
  - ¿Durante cuánto tiempo está  $T_2$  en conducción durante un ciclo de operación?
  - Repita el apartado (a) para  $T_1$ .
  - Repita el apartado (b) para  $T_1$ .
  - En el primer instante después de que  $T_1$  pase a conducción, ¿cuál es el valor de  $i_{b1}$ ?
  - En el primer instante justo antes de que  $T_1$  pase al corte, ¿cuál es el valor de  $i_{b1}$ ?
  - ¿Cuál es el valor de  $v_{ce2}$  en el instante justamente anterior a que  $T_2$  pase a conducción?
- 7.99. Repita el Problema 7.98 con  $C_1 = 1$  nF y  $C_2 = 0,8$  nF. Todos los demás valores de los componentes permanecen iguales.
- 7.100. El circuito multivibrador a estable de la Figura P7.97 debe satisfacer los siguientes criterios: (1) uno de los conmutadores a transistor debe estar en conducción durante 48  $\mu$ s y al corte

durante  $36 \mu\text{s}$  en cada ciclo; (2)  $R_L = 2 \text{ k}\Omega$ ; (3)  $V_{CC} = 5 \text{ V}$ ; (4)  $R_1 = R_2$  y (5)  $6R_L \leq R_1 \leq 50R_L$ . ¿Cuáles son los valores límite para los condensadores  $C_1$  y  $C_2$ ?

**7.101.** El circuito mostrado en la Figura P7.101 se denomina *multivibrador monoestable*. El adjetivo *monoestable* se utiliza para describir el hecho de que el circuito sólo tiene un estado estable. Es decir, si no se interfiere en su operación, el conmutador electrónico  $T_2$  estará en conducción y  $T_1$  estará al corte (la operación del conmutador a transistor ideal se describe en el Problema 7.97).  $T_2$  puede ponerse al corte cerrando momentáneamente el conmutador  $S$ . Después de que  $S$  vuelva a abrirse,  $T_2$  volverá al estado de conducción.

- Demuestre que, si  $T_2$  está en conducción,  $T_1$  está al corte y permanecerá al corte.
- Explique por qué  $T_2$  pasa al corte cuando se cierra momentáneamente  $S$ .
- Demuestre que  $T_2$  permanecerá al corte durante  $RC \ln 2$  s.

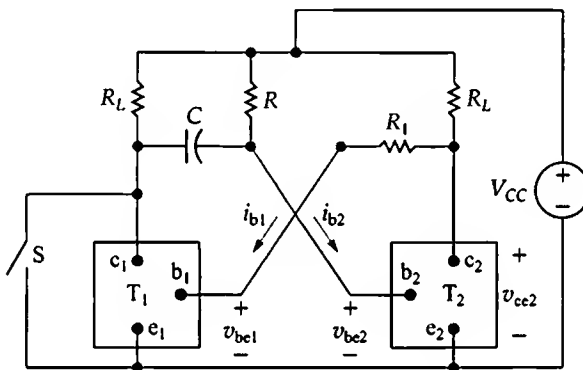


Figura P7.101

**7.102.** Los valores de los parámetros en el circuito de la Figura P7.101 son  $V_{CC} = 6 \text{ V}$ ;  $R_1 = 5,0 \text{ k}\Omega$ ;  $R_L = 20 \text{ k}\Omega$ ;  $C = 250 \text{ pF}$  y  $R = 23.083 \Omega$ .

- Dibuje  $v_{ce2}$  en función de  $t$ , suponiendo que, después de cerrar momentáneamente  $S$ , el conmutador permanece abierto hasta que el circuito ha alcanzado su estado estable. Suponga que  $S$  se cierra en  $t = 0$ . Haga la gráfica para el intervalo  $-5 \leq t \leq 10 \mu\text{s}$ .
- Repita el apartado (a) para  $i_{b2}$  en función de  $t$ .

**7.103.** Suponga que el circuito de la Figura 7.45 constituye un modelo de un circuito para fuente luminosa intermitente portátil. Suponga que se alimenta el circuito con cuatro baterías de  $1,5 \text{ V}$  y que el valor del condensador es de  $10 \mu\text{F}$ . Suponga también que la bombilla conduce cuando su tensión alcanza  $4 \text{ V}$  y que deja de conducir cuando la tensión cae por debajo de  $1 \text{ V}$ . La bombilla tiene una resistencia de  $20 \text{ k}\Omega$  cuando está en conducción y una resistencia infinita cuando no está conduciendo.

- Suponga que no queremos esperar más de  $10 \text{ s}$  entre cada pulso luminoso. ¿Qué valor de la resistencia  $R$  se requerirá para cumplir con esta restricción relativa al tiempo?
- Para el valor de la resistencia calculado en el apartado (a), ¿cuánto dura cada pulso luminoso?

**7.104.** En el circuito de la Figura 7.45, la bombilla comienza a conducir cada vez que la tensión entre sus terminales alcanza  $15 \text{ V}$ . Durante el tiempo en que la bombilla conduce, puede modelarse



como una resistencia de  $10\text{ k}\Omega$ . Una vez que empieza a conducir, continuará conduciendo hasta que la tensión entre sus terminales caiga a  $5\text{ V}$ . Cuando no está en conducción, la bombilla actúa como un circuito abierto.  $V_s = 40\text{ V}$ ,  $R = 800\text{ k}\Omega$  y  $C = 25\text{ }\mu\text{F}$ .

- ¿Cuántas veces por minuto se encenderá la bombilla?
- Sustituimos la resistencia de  $800\text{ k}\Omega$  por una resistencia variable  $R$ , que ajustamos hasta que la bombilla se enciende 12 veces por minuto. ¿Cuál es el valor de  $R$ ?

**7.105.** En el circuito para fuente luminosa intermitente mostrado en la Figura 7.45, la bombilla puede modelarse como una resistencia de  $1,3\text{ k}\Omega$  cuando está en conducción. La bombilla se activa en  $900\text{ V}$  y deja de funcionar en  $300\text{ V}$ .



- Si  $V_s = 1000\text{ V}$ ,  $R = 3,7\text{ k}\Omega$  y  $C = 250\text{ }\mu\text{F}$ , ¿cuántas veces por minuto se encenderá la bombilla?
- ¿Cuál es la corriente media en miliamperios entregada por la fuente?
- Suponga que se opera el circuito 24 horas al día. Si el coste de la energía es de 5 céntimos por kilovatio-hora, ¿cuánto cuesta operar el circuito durante un año?

**7.106.** a) Demuestre que la expresión para la caída de tensión entre los terminales del condensador mientras la bombilla está conduciendo en el circuito de luz intermitente de la Figura 7.48 está dada por

$$v_L(t) = V_{Th} + (V_{max} - V_{Th})e^{-(t-t_0)/\tau}$$

donde

$$V_{Th} = \frac{R_L}{R + R_L} V_s$$

$$\tau = \frac{RR_L C}{R + R_L}$$

- Demuestre que la expresión que nos da el tiempo que la bombilla conduce en el circuito de control de una fuente luminosa intermitente de la Figura 7.48 está dada por

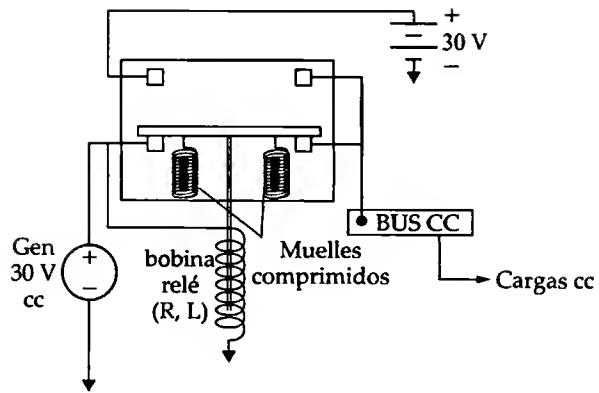
$$(t_c - t_o) = \frac{RR_L C}{R + R_L} \ln \frac{V_{max} - V_{Th}}{V_{min} - V_{Th}}$$

**7.107.** El relé mostrado en la Figura P7.107 conecta el generador de  $30\text{ V cc}$  al bus  $cc$  mientras que la corriente que atraviesa el relé sea superior a  $0,4\text{ A}$ . Si la corriente del relé cae a  $0,4\text{ A}$  o baja de ese valor, el muelle conecta inmediatamente el bus  $cc$  a la batería de  $30\text{ V}$  de reserva. La resistencia del devanado del relé es de  $60\text{ }\Omega$ . Queremos determinar la inductancia del devanado del relé.



- Suponga que el motor que hace que funcione el generador de  $30\text{ V cc}$  se ralentiza abruptamente, haciendo que la tensión generada caiga súbitamente a  $21\text{ V}$ . ¿Qué valor de  $L$  permitirá asegurarse de que la batería de reserva se conecte al bus  $cc$  en  $0,5\text{ s}$ ?
- Utilizando el valor de  $L$  determinado en el apartado (a), determine cuánto tiempo se necesitará para que opere el relé si la tensión generada cae súbitamente a cero.



**Figura P7.107**

# CAPÍTULO

# 8

# Respuesta natural y al escalón de los circuitos *RLC*

## Contenido del capítulo

- 8.1. Introducción a la respuesta natural de un circuito *RLC* paralelo
- 8.2. Formas de la respuesta natural de un circuito *RLC* paralelo
- 8.3. Respuesta al escalón de un circuito *RLC* paralelo
- 8.4. Respuesta natural y al escalón de un circuito *RLC* serie
- 8.5. Un circuito con dos amplificadores integradores

En este capítulo, el análisis de la respuesta natural y la respuesta al escalón de circuitos que contengan tanto bobinas como condensadores está limitado a dos estructuras simples: el circuito *RLC* paralelo y el circuito *RLC* serie. Para determinar la respuesta natural de un circuito *RLC* paralelo es preciso calcular la tensión creada en las ramas paralelas por la descarga de la energía almacenada en la bobina, en el condensador o en ambos. La tarea se define en términos del circuito mostrado en la Figura 8.1. La tensión inicial en el condensador,  $V_0$ , representa la energía inicial almacenada en el mismo. La corriente inicial que atraviesa la bobina,  $I_0$ , representa la energía inicial almacenada en la bobina. Si nos interesa calcular las corrientes en cada rama individual, podemos hallarlas después de determinar la tensión entre los terminales.

Calcularemos la respuesta al escalón de un circuito *RLC* paralelo utilizando la Figura 8.2. Lo que nos interesa es la tensión que aparece entre las ramas en paralelo como resultado de la aplicación súbita de una fuente de corriente continua. Puede haber, o no, energía almacenada en el circuito en el momento de aplicar la fuente de corriente.

Para calcular la respuesta natural de un circuito *RLC* serie, es preciso determinar la corriente que atraviesa los elementos conectados en serie debido a la liberación de la energía inicialmente almacenada en la bobina, en el condensador o en ambos. Definiremos la tarea en términos del circuito mostrado en la Figura 8.3. Como antes, la corriente inicial que atraviesa la bobina,  $I_0$ , y la tensión inicial en el condensador,  $V_0$ , representan la energía inicialmente almacenada. Si nos interesa hallar la tensión en algunos de los elementos individuales, podemos calcularla después de determinar la corriente.

## Perspectiva práctica

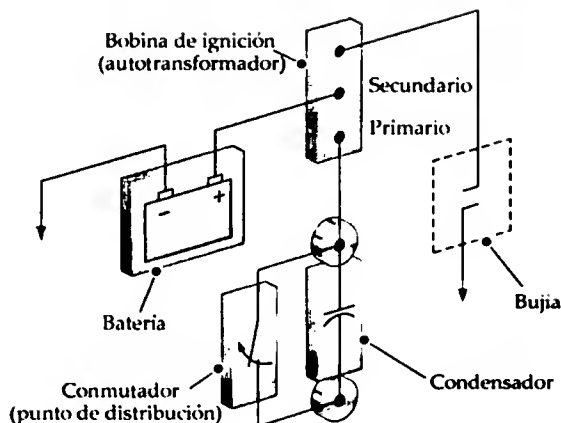
### Circuito de ignición

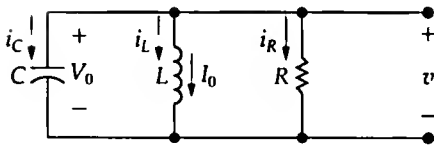
En este capítulo, presentamos la respuesta al escalón de un circuito  $RLC$ . El circuito de ignición de un automóvil está basado en la respuesta transitoria de un circuito  $RLC$ . En dicho tipo de circuito, un suceso de conmutación provoca un rápido cambio en la corriente que atraviesa un devanado inductivo conocido con el nombre de bobina de ignición. La bobina de ignición está compuesta de dos bobinas magnéticamente acopladas conectadas en serie. Esta conexión en serie también se conoce con el nombre de autotransformador. La bobina conectada a la batería se denomina devanado primario y la bobina conectada al generador de la chispa de encendido se denomina bobina secundaria. La rápida variación de la corriente en el devanado primario provoca, por acoplamiento magnético (inductancia mutua), una tensión muy alta en el devanado secundario. Esta tensión, que puede alcanzar entre 20 y 40 kV, se utiliza para generar una chispa que hace arder la mezcla de combustible y aire contenida en el cilindro.

En la figura adjunta se muestra un diagrama esquemático donde pueden verse los componentes básicos de un sistema de ignición. En los automóviles modernos, se utiliza conmutación electrónica (en lugar de conmutación mecánica) para provocar la rápida variación necesaria en la corriente que atraviesa el devanado primario. Una comprensión de la circuitería de conmutación electrónica requiere un conocimiento de componentes electrónicos que cae fuera del alcance de este libro. Sin embargo, un análisis del circuito de ignición más antiguo y tradicional nos servirá como introducción a los tipos de problemas que podemos encontrarnos a la hora de diseñar un circuito práctico.

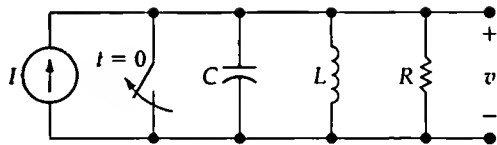
### Objetivos del capítulo

1. Ser capaz de determinar la respuesta natural y al escalón de los circuitos  $RLC$  paralelos.
2. Ser capaz de determinar la respuesta natural y al escalón de los circuitos  $RLC$  serie.

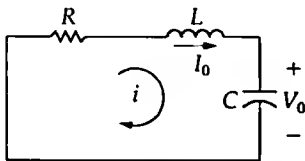




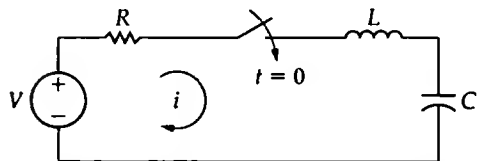
**Figura 8.1.** Circuito utilizado para ilustrar la respuesta natural de un circuito *RLC* paralelo.



**Figura 8.2.** Circuito utilizado para ilustrar la respuesta al escalón de un circuito *RLC* paralelo.



**Figura 8.3.** Circuito utilizado para ilustrar la respuesta natural de un circuito *RLC* serie.



**Figura 8.4.** Circuito utilizado para ilustrar la respuesta al escalón de un circuito *RLC* serie.

Describiremos la respuesta al escalón de un circuito *RLC* serie en términos del circuito mostrado en la Figura 8.4. Lo que nos interesa es determinar la corriente resultante de la aplicación súbita de una fuente de tensión continua. Puede que exista, o no, energía almacenada en el circuito en el momento de cerrar el conmutador.

Si el lector no ha estudiado ecuaciones diferenciales ordinarias, puede resultarle algo complicado seguir el análisis de las respuestas natural y al escalón de los circuitos *RLC* paralelo y serie. Sin embargo, estos resultados son lo suficientemente importantes para merecer que los presentemos en este punto. Comenzaremos con la respuesta natural de un circuito *RLC* paralelo y dedicaremos a este material dos secciones: una para analizar la solución de la ecuación diferencial que describe el circuito y otra para presentar las tres distintas formas que la solución puede tomar. Después de introducir estas tres formas, mostraremos que esas mismas formas se aplican a la respuesta al escalón de un circuito *RLC* paralelo y a la respuesta natural y al escalón de los circuitos *RLC* serie.

## 8.1. Introducción a la respuesta natural de un circuito *RLC* paralelo

El primer paso a la hora de determinar la respuesta natural del circuito mostrado en la Figura 8.1 consiste en escribir la ecuación diferencial que debe satisfacer la tensión  $v$ . Hemos decidido calcular primero la tensión porque ésta es igual para todos los componentes. Después de eso, podemos encontrar la corriente de cada rama utilizando la apropiada relación entre la corriente y la tensión para el componente incluido en esa rama. Podemos determinar fácilmente la ecuación diferencial correspondiente a la tensión sumando las corrientes que salen del nodo superior, expresando cada corriente como función de la tensión desconocida  $v$ :

$$\frac{v}{R} + \frac{1}{L} \int_0^t v d\tau + I_0 + C \frac{dv}{dt} = 0. \quad (8.1)$$

Podemos eliminar la integral en la Ecuación 8.1 diferenciando una vez con respecto a  $t$  y, como  $I_0$  es constante, obtenemos

$$\frac{1}{R} \frac{dv}{dt} + \frac{v}{L} + C \frac{d^2v}{dt^2} = 0. \quad (8.2)$$

Si ahora dividimos la Ecuación 8.2 por la capacidad  $C$  y ordenamos las derivadas en orden descendente, nos queda

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{dv}{dt} + \frac{v}{LC} = 0. \quad (8.3)$$

Comparando la Ecuación 8.3 con las ecuaciones diferenciales que hemos escrito en el Capítulo 7, vemos que difieren por la presencia del término correspondiente a la segunda derivada. La Ecuación 8.3 es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden con coeficientes constantes. Los circuitos de este capítulo contienen tanto bobinas como condensadores, por lo que la ecuación diferencial que los describe es de segundo orden. Por ello, algunas veces denominamos a dichos circuitos **circuitos de segundo orden**.

## Solución general de la ecuación diferencial de segundo orden

No podemos resolver la Ecuación 8.3 separando las variables e integrando, como hicimos con las ecuaciones de primer orden del Capítulo 7. El enfoque clásico para resolver la Ecuación 8.3 consiste en suponer que la solución tiene forma exponencial, es decir, suponer que la tensión tiene una ecuación del tipo:

$$v = Ae^{st}, \quad (8.4)$$

donde  $A$  y  $s$  son constantes desconocidas.

Antes de mostrar cómo conduce esta suposición a la solución de la Ecuación 8.3, necesitamos demostrar que es una suposición razonable. El argumento de mayor peso que podemos proporcionar en favor de la Ecuación 8.4 consiste en observar en la Ecuación 8.3 que la segunda derivada de la solución, más la primera derivada multiplicada por una constante, más la propia solución multiplicada por otra constante debe ser igual a cero para todos los valores de  $t$ . Esto sólo puede suceder si las derivadas de mayor orden de la solución tienen la misma forma que la propia solución. La función exponencial satisface, precisamente, este criterio. Un segundo argumento en favor de la Ecuación 8.4 es que las soluciones de todas las ecuaciones de primer orden que vimos en el Capítulo 7 eran de tipo exponencial. Parece razonable suponer que la solución de la ecuación de segundo orden involucra también a la función exponencial.

Si la Ecuación 8.4 es una solución de la Ecuación 8.3, deberá satisfacer la Ecuación 8.3 para todos los valores de  $t$ . Sustituyendo la Ecuación 8.4 en la Ecuación 8.3, se genera la expresión

$$As^2e^{st} + \frac{As}{RC}e^{st} + \frac{Ae^{st}}{LC} = 0,$$

que es igual a

$$Ae^{st} \left( s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC} \right) = 0, \quad (8.5)$$

que sólo puede verse satisfecha para todos los valores de  $t$  si  $A$  es cero o si el término entre paréntesis es cero, ya que  $e^{st} \neq 0$  para todos los valores finitos de  $st$ . No podemos utilizar  $A = 0$  como solución

general porque eso implicaría que la tensión fuera cero todo el tiempo, lo cual es una imposibilidad física si hay energía almacenada en la bobina o en el condensador. Por tanto, para que la Ecuación 8.4 sea una solución de la Ecuación 8.3, el término entre paréntesis de la Ecuación 8.5 debe ser cero, es decir:

✦ **ECUACIÓN CARACTERÍSTICA DE UN CIRCUITO *RLC* PARALELO**

$$s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC} = 0. \quad (8.6)$$

La Ecuación 8.6 se denomina **ecuación característica** de la ecuación diferencial, porque las raíces de esta ecuación cuadrática determinan el carácter matemático de  $v(t)$ . Las dos raíces de la Ecuación 8.6 son

$$s_1 = -\frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}}. \quad (8.7)$$

$$s_2 = -\frac{1}{2RC} - \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}}. \quad (8.8)$$

Si sustituimos cualquiera de las raíces en la Ecuación 8.4, vemos que se satisface la correspondiente ecuación diferencial, es decir, la Ecuación 8.3. Observe, en la Ecuación 8.5, que esto es así independientemente del valor de  $A$ . Por tanto, las dos soluciones

$$v = A_1 e^{s_1 t}$$

$$v = A_2 e^{s_2 t}$$

satisfacen la Ecuación 8.3. Si denominamos a estas dos soluciones  $v_1$  y  $v_2$ , respectivamente, podemos ver que su suma también es una solución. Específicamente, si hacemos

$$v = v_1 + v_2 = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}, \quad (8.9)$$

entonces

$$\frac{dv}{dt} = A_1 s_1 e^{s_1 t} + A_2 s_2 e^{s_2 t} \quad (8.10)$$

$$\frac{d^2 v}{dt^2} = A_1 s_1^2 e^{s_1 t} + A_2 s_2^2 e^{s_2 t}. \quad (8.11)$$

Sustituyendo las ecuaciones 8.9-8.11 en la Ecuación 8.3, nos queda

$$A_1 e^{s_1 t} \left( s_1^2 + \frac{1}{RC} s_1 + \frac{1}{LC} \right) + A_2 e^{s_2 t} \left( s_2^2 + \frac{1}{RC} s_2 + \frac{1}{LC} \right) = 0. \quad (8.12)$$

pero cada término entre paréntesis es cero porque, por definición,  $v_1$  y  $v_2$  son raíces de la ecuación característica. Por tanto, la respuesta natural del circuito *RLC* paralelo de la Figura 8.1 tiene la forma

$$v = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}. \quad (8.13)$$

La Ecuación 8.13 es una repetición de la suposición realizada en la Ecuación 8.9. Hemos mostrado que  $v_1$  es una solución, que  $v_2$  es otra solución y que  $v_1 + v_2$  también es una solución. Por tanto, la solu-

ción general de la Ecuación 8.3 tiene la forma dada en la Ecuación 8.13. Las raíces de la ecuación característica ( $s_1$  y  $s_2$ ) están determinadas por los parámetros del circuito,  $R$ ,  $L$  y  $C$ . Las condiciones iniciales determinan los valores de las constantes  $A_1$  y  $A_2$ . Observe que la forma de la Ecuación 8.13 debe modificarse si las dos raíces  $s_1$  y  $s_2$  son iguales. Trataremos esta modificación cuando analicemos la respuesta en tensión con amortiguamiento crítico en la Sección 8.2.

El comportamiento de  $v(t)$  depende de los valores de  $s_1$  y  $s_2$ . Por tanto, el primer paso para hallar la respuesta natural consiste en determinar las raíces de la ecuación característica. Volvamos a nuestras Ecuaciones 8.7 y 8.8 y escribámoslas de nuevo utilizando una notación muy empleada en la literatura científica:

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}, \quad (8.14)$$

$$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}, \quad (8.15)$$

donde

♣ **FRECUENCIA DE NEPER DE UN CIRCUITO *RLC* PARALELO**

$$\alpha = \frac{1}{2RC}. \quad (8.16)$$

♣ **FRECUENCIA DE RESONANCIA EN RADIANES DE UN CIRCUITO *RLC* PARALELO**

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (8.17)$$

Estos resultados se resumen en la Tabla 8.1.

El exponente de  $e$  debe ser adimensional, por lo que tanto  $s_1$  como  $s_2$  (y por tanto  $\alpha$  y  $\omega_0$ ) deben tener como dimensiones la inversa del tiempo, es decir, la frecuencia. Para distinguir entre las frecuencias  $s_1$ ,  $s_2$ ,  $\alpha$  y  $\omega_0$ , utilizamos la siguiente terminología:  $s_1$  y  $s_2$  se denominan *frecuencias complejas*,  $\alpha$  se denomina *frecuencia de Neper* y  $\omega_0$  se denomina *frecuencia de resonancia en radianes*. Comprenderemos completamente el significado de esta terminología a medida que avancemos a través de los restantes capítulos del libro. Todas estas frecuencias tienen como dimensiones la frecuencia angular partida por el tiempo. Para las frecuencias complejas, la frecuencia de Neper y la frecuencia de resonancia en radianes, especificaremos los valores utilizando como unidad los *radianes por segundo* (rad/s). La naturaleza de las raíces  $s_1$  y  $s_2$  depende de los valores de  $\alpha$  y  $\omega_0$ . Hay tres posibles casos. En primer lugar, si  $\omega_0^2 < \alpha^2$ , ambas raíces serán reales y distintas. Por razones que expondremos más

**Tabla 8.1.** Parámetros de la respuesta natural del circuito *RLC* paralelo.

PARÁMETRO	TERMINOLOGÍA	VALOR PARA RESPUESTA NATURAL
$s_1, s_2$	Raíces características	$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$
		$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$
$\alpha$	Frecuencia de Neper	$\alpha = \frac{1}{2RC}$
$\omega_0$	Frecuencia de resonancia en radianes	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

adelante, decimos en este caso que la respuesta en tensión está **sobreamortiguada**. En el segundo caso,  $\omega_0^2 > \alpha^2$ , tanto  $s_1$  como  $s_2$  serán complejas y, además, serán soluciones conjugadas. En esta situación, decimos que la respuesta en tensión es **subamortiguada**. El tercer posible caso es que  $\omega_0^2 = \alpha^2$ . Entonces  $s_1$  y  $s_2$  serán reales y de igual valor, y se dice que la respuesta en tensión es **críticamente amortiguada**. Como veremos, el amortiguamiento afecta a la forma en que la respuesta en tensión alcanza su valor final (o de régimen permanente). Analizaremos por separado cada caso en la Sección 8.2.

El Ejemplo 8.1 ilustra cómo determinar los valores numéricos de  $s_1$  y  $s_2$  a partir de los valores de  $R$ ,  $L$  y  $C$ .

### EJEMPLO 8.1 Determinación de las raíces de la ecuación característica de un circuito RLC paralelo

- Calcule las raíces de la ecuación característica que gobierna el comportamiento transitorio de la tensión mostrada en la Figura 8.5 si  $R = 200 \, \Omega$ ,  $L = 50 \, \text{mH}$  y  $C = 0,2 \, \mu\text{F}$ .
- ¿Se trata de una respuesta sobreamortiguada, subamortiguada o críticamente amortiguada?
- Repita los apartados (a) y (b) para  $R = 312,5 \, \Omega$ .
- ¿Qué valor de  $R$  hace que la respuesta esté críticamente amortiguada?

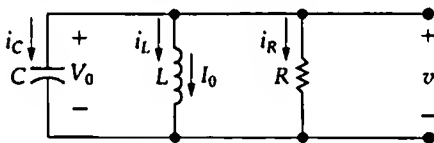


Figura 8.5. Circuito utilizado para ilustrar la respuesta natural de un circuito RLC paralelo.

#### SOLUCIÓN

- Para los valores dados de  $R$ ,  $L$  y  $C$ ,

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{10^6}{(400)(0,2)} = 1,25 \times 10^4 \, \text{rad/s},$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} = \frac{(10^3)(10^6)}{(50)(0,2)} = 10^8 \, \text{rad}^2/\text{s}^2.$$

A partir de las Ecuaciones 8.14 y 8.15,

$$\begin{aligned} s_1 &= -1,25 \times 10^4 + \sqrt{1,5625 \times 10^8 - 10^8} \\ &= -12.500 + 7500 = -5000 \, \text{rad/s}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_2 &= -1,25 \times 10^4 - \sqrt{1,5625 \times 10^8 - 10^8} \\ &= -12.500 - 7500 = -20.000 \, \text{rad/s}. \end{aligned}$$

- La respuesta en tensión está sobreamortiguada, porque  $\omega_0^2 < \alpha^2$ .
- Para  $R = 312,5 \, \Omega$ ,

$$\alpha = \frac{10^6}{(625)(0,2)} = 8000 \, \text{rad/s},$$

$$\alpha^2 = 64 \times 10^6 = 0,64 \times 10^8 \, \text{rad}^2/\text{s}^2.$$

Como  $\omega_0^2$  sigue valiendo  $10^8 \, \text{rad}^2/\text{s}^2$ ,

$$s_1 = -8000 + j6000 \, \text{rad/s},$$

$$s_2 = -8000 - j6000 \, \text{rad/s}.$$

(En ingeniería eléctrica, el número imaginario  $\sqrt{-1}$  se representa mediante la letra  $j$ , porque la letra  $i$  representa la corriente).

En este caso, la respuesta en tensión es subamortiguada, ya que  $\omega_0^2 > \alpha^2$ .

- Para conseguir un amortiguamiento crítico,  $\alpha^2 = \omega_0^2$ , por lo que

$$\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 = \frac{1}{LC} = 10^8,$$

o

$$\frac{1}{2RC} = 10^4,$$

y

$$R = \frac{10^6}{(2 \times 10^4)(0,2)} = 250 \, \Omega.$$



**Evaluación del objetivo 1**

■ Ser capaz de determinar la respuesta natural y al escalón de los circuitos *RLC* paralelos.

**8.1.** La resistencia y la inductancia del circuito de la Figura 8.5 son de  $100\ \Omega$  y  $20\ \text{mH}$ , respectivamente.

- Determine el valor de  $C$  que hace que la respuesta en tensión esté críticamente amortiguada.
- Si se ajusta  $C$  para obtener una frecuencia de Neper de  $5\ \text{krad/s}$ , calcule el valor de  $C$  y las raíces de la ecuación característica.

c) Si se ajusta  $C$  para obtener una frecuencia de resonancia de  $20\ \text{krad/s}$ , calcule el valor de  $C$  y las raíces de la ecuación característica.

**RESPUESTA** (a)  $500\ \text{nF}$ ;

(b)  $C = 1\ \mu\text{F}$ ,  $s_1 = -5000 + j5000\ \text{rad/s}$ ,  
 $s_2 = -5000 - j5000\ \text{rad/s}$ ;

(c)  $C = 125\ \text{nF}$ ,  $s_1 = -5359\ \text{rad/s}$ ,  $s_2 = -74,641\ \text{rad/s}$ .

**NOTA** *Trate también de resolver el Problema 8.1 del capítulo.*

## 8.2. Formas de la respuesta natural de un circuito *RLC* paralelo

Hasta ahora, hemos visto que el comportamiento de un circuito *RLC* de segundo orden depende de los valores de  $s_1$  y  $s_2$ , que a su vez dependen de los parámetros del circuito:  $R$ ,  $L$  y  $C$ . Por tanto, el primer paso para hallar la respuesta natural consiste en calcular estos valores y, lo que está relacionado con ello, determinar si la respuesta es sobreamortiguada, subamortiguada o críticamente amortiguada.

Para completar la descripción de la respuesta natural, necesitamos obtener dos coeficientes desconocidos, como  $A_1$  y  $A_2$  en la Ecuación 8.13. El método utilizado para hallarlos se basa en establecer la correspondencia entre la solución referida a la respuesta natural y las condiciones iniciales impuestas por el circuito, que son el valor inicial de la corriente (o tensión) y el valor inicial de la primera derivada de la corriente (o tensión). Hay que hacer notar que estas mismas condiciones iniciales, junto con el valor final de la variable, serán también necesarias a la hora de hallar la respuesta al escalón de un circuito de segundo orden.

En esta sección, analizaremos la forma de la respuesta natural para cada uno de los tres tipos de amortiguamiento, comenzando con la respuesta sobreamortiguada. Como veremos, las ecuaciones de la respuesta y las ecuaciones para evaluar los coeficientes desconocidos son ligeramente diferentes para las tres configuraciones de amortiguamiento. Éste es el motivo por el que nos interesa determinar desde el principio si la respuesta de un circuito es sobreamortiguada, subamortiguada o críticamente amortiguada.

### Respuesta en tensión sobreamortiguada

Cuando las raíces de la ecuación característica son reales y distintas, decimos que la respuesta en tensión de un circuito *RLC* paralelo está sobreamortiguada. La solución correspondiente a la tensión tiene la forma

➤ **RESPUESTA NATURAL DE TENSIÓN  
PARA UN CIRCUITO *RLC* PARALELO  
SOBREAMORTIGUADO**

$$v = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}, \quad (8.18)$$

donde  $s_1$  y  $s_2$  son las raíces de la ecuación característica. Las constantes  $A_1$  y  $A_2$  se determinan a partir de las condiciones iniciales, específicamente a partir de los valores de  $v(0^+)$  y  $dv(0^+)/dt$ , que a su vez se pueden calcular partiendo de la tensión inicial en el condensador,  $V_0$ , y de la corriente inicial en la bobina,  $I_0$ .

A continuación, vamos a ver cómo se utiliza la tensión inicial en el condensador y la corriente inicial en la bobina para calcular  $A_1$  y  $A_2$ . En primer lugar, a partir de la Ecuación 8.18, tenemos que

$$v(0^+) = A_1 + A_2, \quad (8.19)$$

$$\frac{dv(0^+)}{dt} = s_1 A_1 + s_2 A_2. \quad (8.20)$$

Conociendo  $s_1$  y  $s_2$ , la tarea de calcular  $A_1$  y  $A_2$  se reduce a determinar los valores  $v(0^+)$  y  $dv(0^+)/dt$ . El valor de  $v(0^+)$  es la tensión inicial en el condensador  $V_0$ . Por otro lado, para obtener el valor inicial de  $dv/dt$ , tenemos primero que hallar la corriente que atraviesa la rama del condensador en  $t = 0^+$ . Entonces,

$$\frac{dv(0^+)}{dt} = \frac{i_C(0^+)}{C}. \quad (8.21)$$

Utilizamos la ley de Kirchhoff de las corrientes para hallar la corriente inicial que atraviesa la rama del condensador. Sabemos que la suma de las tres corrientes de rama en  $t = 0^+$  debe ser igual a cero. La corriente en la rama resistiva en  $t = 0^+$  es la tensión inicial  $V_0$  dividida por la resistencia, mientras que la corriente en la rama inductiva es  $I_0$ .

Utilizando el sistema de referencia mostrado en la Figura 8.5, obtenemos

$$i_C(0^+) = \frac{-V_0}{R} - I_0. \quad (8.22)$$

Después de determinar el valor numérico de  $i_C(0^+)$ , utilizamos la Ecuación 8.21 para calcular el valor inicial de  $dv/dt$ .

Podemos resumir el proceso de cálculo de la respuesta sobreamortiguada,  $v(t)$ , de la forma siguiente:

1. Calcule las raíces de la ecuación característica,  $s_1$  y  $s_2$ , utilizando los valores de  $R$ ,  $L$  y  $C$ .
2. Calcule  $v(0^+)$  y  $dv(0^+)/dt$  utilizando las técnicas de análisis de circuitos.
3. Calcule los valores de  $A_1$  y  $A_2$  resolviendo el sistema formado por las Ecuaciones 8.23 y 8.24:

$$v(0^+) = A_1 + A_2, \quad (8.23)$$

$$\frac{dv(0^+)}{dt} = \frac{i_C(0^+)}{C} = s_1 A_1 + s_2 A_2. \quad (8.24)$$

4. Sustituya los valores correspondientes a  $s_1$ ,  $s_2$ ,  $A_1$  y  $A_2$  en la Ecuación 8.18 para determinar la ecuación de  $v(t)$  para  $t \geq 0$ .

Los Ejemplos 8.2 y 8.3 ilustran cómo hallar la respuesta sobreamortiguada de un circuito *RLC* paralelo.

### EJEMPLO 8.2 Cálculo de la respuesta natural sobreamortiguada de un circuito RLC paralelo

Para el circuito de la Figura 8.6,  $v(0^+) = 12$  V e  $i_L(0^+) = 30$  mA.

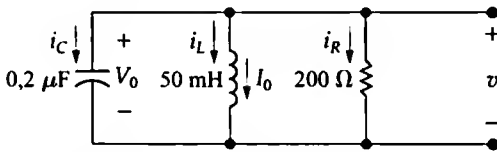


Figura 8.6. Circuito del Ejemplo 8.2.

- Determine la corriente inicial en cada rama del circuito.
- Calcule el valor inicial de  $dv/dt$ .
- Calcule la expresión correspondiente a  $v(t)$ .
- Dibuje  $v(t)$  en el intervalo  $0 \leq t \leq 250 \mu\text{s}$ .

#### SOLUCIÓN

- La bobina impide que se produzca un cambio instantáneo en la corriente que la atraviesa, por lo que el valor inicial de la corriente de la bobina es de 30 mA:

$$i_L(0^-) = i_L(0) = i_L(0^+) = 30 \text{ mA}.$$

El condensador mantiene la tensión inicial en bornes de los elementos en paralelo, haciendo que sea igual a 12 V. Por tanto, la corriente inicial en la rama resistiva,  $i_R(0^+)$ , es  $12/200$ , es decir, 60 mA. La ley de Kirchhoff de las corrientes requiere que la suma de las corrientes que salen del nodo superior sea igual a cero en todo momento. Por tanto,

$$i_C(0^+) = -i_L(0^+) - i_R(0^+) = -90 \text{ mA}.$$

Observe que, si supusiéramos que la corriente de la bobina y la tensión del condensador han alcanzado sus valores de continua en el momento en que la energía comienza a ser liberada,  $i_C(0^-) = 0$ . En otras palabras, habría un cambio instantáneo en la corriente del condensador en  $t = 0$ .

- Puesto que  $i_C = C(dv/dt)$ ,

$$\frac{dv(0^+)}{dt} = \frac{-90 \times 10^{-3}}{0.2 \times 10^{-6}} = -450 \text{ kV/s}.$$

- Las raíces de la ecuación característica se obtienen a partir de los valores de  $R$ ,  $L$  y  $C$ . Para los valores especificados y utilizando las Ecuaciones 8.14, 8.15, 8.16 y 8.17,

$$s_1 = -1.25 \times 10^4 + \sqrt{1.5625 \times 10^8 - 10^8}$$

$$= -12.500 + 7500 = -5000 \text{ rad/s},$$

$$s_2 = -1.25 \times 10^4 - \sqrt{1.5625 \times 10^8 - 10^8}$$

$$= -12.500 - 7500 = -20.000 \text{ rad/s}.$$

Puesto que las raíces son reales y distintas, sabemos que la respuesta es sobreamortiguada y que tiene, por tanto, la forma indicada por la Ecuación 8.18. Podemos calcular los coeficientes  $A_1$  y  $A_2$  a partir de las Ecuaciones 8.23 y 8.24.

Ya hemos determinado  $s_1$ ,  $s_2$ ,  $v(0^+)$  y  $dv(0^+)/dt$ , de modo que

$$12 = A_1 + A_2,$$

$$-450 \times 10^3 = -5000A_1 - 20.000A_2.$$

Si resolvemos las dos ecuaciones para hallar  $A_1$  y  $A_2$  obtenemos que  $A_1 = -14$  V y  $A_2 = 26$  V. Sustituyendo estos valores en la Ecuación 8.18, obtenemos la respuesta en tensión sobreamortiguada:

$$v(t) = (-14e^{-5000t} + 26e^{-20.000t}) \text{ V}, \quad t \geq 0.$$

Como comprobación de estos cálculos, podemos verificar que la solución nos da  $v(0) = 12$  V y  $dv(0^+)/dt = -450.000$  V/s.

- La Figura 8.7 muestra una gráfica de  $v(t)$  en función de  $t$  a lo largo del intervalo  $0 \leq t \leq 250 \mu\text{s}$ .

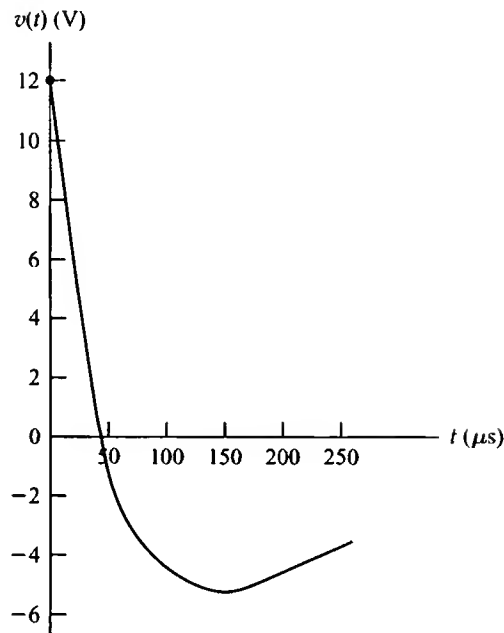


Figura 8.7. Respuesta en tensión para el Ejemplo 8.2.

### EJEMPLO 8.3 Cálculo de las corrientes de rama en la respuesta natural de un circuito *RLC* paralelo

Deduzca las expresiones que describen las tres corrientes de rama  $i_R$ ,  $i_L$  e  $i_C$  en el Ejemplo 8.2 (Figura 8.6) durante el tiempo en que se está liberando la energía almacenada.

#### SOLUCIÓN

Ya conocemos la tensión en bornes de las tres ramas a partir de la solución del Ejemplo 8.2. Dicha tensión es

$$v(t) = (-14e^{-5000t} + 26e^{-20.000t}) \text{ V}, \quad t \geq 0.$$

La corriente en la rama resistiva será entonces

$$\begin{aligned} i_R(t) &= \frac{v(t)}{200} \\ &= (-70e^{-5000t} + 130e^{-20.000t}) \text{ mA}, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Hay dos formas de calcular la corriente en la rama inductiva. Una forma consiste en utilizar la relación integral que existe entre la corriente y la tensión en los terminales de una bobina:

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_0^t v_L(x) dx + I_0.$$

Una segunda técnica consiste en determinar primero la corriente en la rama capacitiva y luego utilizar el hecho de que  $i_R + i_L + i_C = 0$ . Utilicemos este último método. La corriente en la rama capacitiva es

$$\begin{aligned} i_C(t) &= C \frac{dv}{dt} \\ &= 0,2 \times 10^{-6} (70.000e^{-5000t} - 520.000e^{-20.000t}) \\ &= (14e^{-5000t} - 104e^{-20.000t}) \text{ mA}, \quad t \geq 0^+. \end{aligned}$$

Observe que  $i_C(0^+) = -90 \text{ mA}$ , lo que concuerda con el resultado del Ejemplo 8.2.

Ahora obtenemos la corriente en la rama inductiva a partir de la relación

$$i_L(t) = -i_R(t) - i_C(t) \\ = (56e^{-5000t} - 26e^{-20,000t}) \text{ mA}, \quad t \geq 0.$$

Dejamos como ejercicio al lector, en el Problema de evaluación 8.2, demostrar que la rela-

ción integral a la que hemos aludido nos proporciona el mismo resultado. Observe que la expresión correspondiente a  $i_L$  concuerda con el valor de la corriente inicial en la bobina, como debe ser.

### Evaluación del objetivo 1

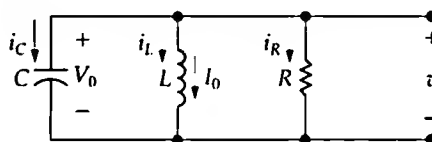
■ Ser capaz de determinar la respuesta natural y al escalón de los circuitos  $RLC$  paralelos.

- 8.2. Utilice la relación integral entre  $i_L$  y  $v$  para calcular la expresión correspondiente a  $i_L$  en la Figura 8.6.

#### RESPUESTA

$$i_L(t) = (56e^{-5000t} - 26e^{-20,000t}) \text{ mA}, \\ t \geq 0.$$

- 8.3. Los valores de los elementos en el circuito mostrado son  $R = 2 \text{ k}\Omega$ ,  $L = 250 \text{ mH}$  y  $C = 10 \text{ nF}$ . La corriente inicial  $I_0$  en la bobina es  $-4 \text{ A}$  y la tensión inicial en el condensador es  $0 \text{ V}$ . La señal de salida es la tensión  $v$ . Calcule (a)  $i_R(0^+)$ ; (b)  $i_C(0^+)$ ; (c)  $dv(0^+)/dt$ ; (d)  $A_1$ ; (e)  $A_2$  y (f)  $v(t)$  para  $t \geq 0$ .



#### RESPUESTA

- (a)  $0$ ;  
(b)  $4 \text{ A}$ ;  
(c)  $4 \times 10^8 \text{ V/s}$ ;  
(d)  $13.333 \text{ V}$ ;  
(e)  $-13.333 \text{ V}$ ;  
(f)  $13.333(e^{-10,000t} - e^{-40,000t}) \text{ V}$ .

**NOTA** Trate también de resolver los Problemas 8.2, 8.8 y 8.16 del capítulo.

### Respuesta en tensión subamortiguada

Cuando  $\omega_0^2 > \alpha^2$ , las raíces de la ecuación característica son complejas y la respuesta es subamortiguada. Para mayor comodidad, vamos a expresar las raíces  $s_1$  y  $s_2$  como

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{-(\omega_0^2 - \alpha^2)} \\ = -\alpha + j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \\ = -\alpha + j\omega_d \quad (8.25)$$

$$s_2 = -\alpha - j\omega_d, \quad (8.26)$$

donde

♣ **FRECUENCIA EN RADIANES AMORTIGUADA**

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}. \quad (8.27)$$

El término  $\omega_d$  se denomina **frecuencia en radianes amortiguada**. Explicaremos más adelante la razón de utilizar esta terminología.

La respuesta en tensión subamortiguada de un circuito *RLC* paralelo es

✦ **RESPUESTA NATURAL EN TENSIÓN  
PARA CIRCUITOS *RLC* PARALELOS  
SUBAMORTIGUADOS**

$$v(t) = B_1 e^{-\alpha t} \cos \omega_d t + B_2 e^{-\alpha t} \sen \omega_d t, \quad (8.28)$$

que se deduce de la Ecuación 8.18. Al hacer la transición entre la Ecuación 8.18 y 8.28, utilizamos la identidad de Euler:

$$e^{\pm j\theta} = \cos \theta \pm j \sen \theta. \quad (8.29)$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} v(t) &= A_1 e^{(-\alpha + j\omega_d)t} + A_2 e^{(-\alpha - j\omega_d)t} \\ &= A_1 e^{-\alpha t} e^{j\omega_d t} + A_2 e^{-\alpha t} e^{-j\omega_d t} \\ &= e^{-\alpha t} (A_1 \cos \omega_d t + jA_1 \sen \omega_d t + A_2 \cos \omega_d t \\ &\quad - jA_2 \sen \omega_d t) \\ &= e^{-\alpha t} [(A_1 + A_2) \cos \omega_d t + j(A_1 - A_2) \sen \omega_d t]. \end{aligned}$$

En este momento del proceso deductivo que nos lleva de la Ecuación 8.18 a la 8.28, sustituimos las constantes arbitrarias  $A_1 + A_2$  y  $j(A_1 - A_2)$  por otras nuevas constantes arbitrarias que llamamos  $B_1$  y  $B_2$ , obteniendo

$$\begin{aligned} v &= e^{-\alpha t} (B_1 \cos \omega_d t + B_2 \sen \omega_d t) \\ &= B_1 e^{-\alpha t} \cos \omega_d t + B_2 e^{-\alpha t} \sen \omega_d t. \end{aligned}$$

Las constantes  $B_1$  y  $B_2$  son reales, no complejas, porque la tensión es una función real. No deje que le confunda el hecho de que  $B_2 = j(A_1 - A_2)$ . En este caso subamortiguado,  $A_1$  y  $A_2$  son valores complejos conjugados, por lo que  $B_1$  y  $B_2$  son reales (véanse los Problemas 8.14 y 8.15). La razón para definir la respuesta subamortiguada en términos de los coeficientes  $B_1$  y  $B_2$  es que nos proporciona una ecuación más simple para la tensión  $v$ . Determinamos  $B_1$  y  $B_2$  a partir de la energía inicial almacenada en el circuito, de la misma forma que hallábamos  $A_1$  y  $A_2$  para la respuesta sobreamortiguada: evaluando  $v$  y su derivada en  $t = 0^+$ . Al igual que sucede con  $s_1$  y  $s_2$ ,  $\alpha$  y  $\omega_d$  están determinadas por los parámetros del circuito  $R$ ,  $L$  y  $C$ .

Para el caso de la respuesta subamortiguada, el sistema de dos ecuaciones que nos permite determinar  $B_1$  y  $B_2$  es

$$v(0^+) = V_0 = B_1, \quad (8.30)$$

$$\frac{dv(0^+)}{dt} = \frac{i_C(0^+)}{C} = -\alpha B_1 + \omega_d B_2. \quad (8.31)$$

Examinemos la naturaleza general de la respuesta subamortiguada. En primer lugar, las funciones trigonométricas indican que esta respuesta es oscilatoria, es decir, que la tensión alterna entre valores positivos y negativos. La frecuencia con la que la tensión oscila está determinada por  $\omega_d$ . En segundo lugar, la amplitud de la oscilación decrece exponencialmente. La velocidad a la que disminuye la amplitud está determinada por  $\alpha$ . Puesto que  $\alpha$  determina la rapidez con la que desaparecen las oscila-

ciones, también se denomina **factor de amortiguamiento** o **coeficiente de amortiguamiento**. Esto explica por qué denominamos a  $\omega_d$  frecuencia en radianes amortiguada. Si no existe amortiguamiento,  $\alpha = 0$  y la frecuencia de oscilación es  $\omega_0$ . Cuando existe un elemento en el circuito capaz de disipar energía,  $R$ ,  $\alpha$  es distinta de cero y la frecuencia de oscilación,  $\omega_d$ , es inferior a  $\omega_0$ . Por tanto, cuando  $\alpha$  es distinta de cero, decimos que la frecuencia de oscilación está amortiguada.

El comportamiento oscilatorio es posible debido a los dos tipos de elementos de almacenamiento de energía que existen en el circuito: la bobina y el condensador (una analogía mecánica de este circuito eléctrico sería la de una masa suspendida de un muelle, donde la oscilación es posible porque puede almacenarse energía tanto en el muelle como en la masa en movimiento). Analizaremos con más detalle las características de la respuesta subamortiguada después del Ejemplo 8.4, en el que se examina un circuito con respuesta de este tipo. En resumen, observe que el proceso general para determinar la respuesta subamortiguada es similar al que se utiliza para la respuesta sobreamortiguada, aunque las ecuaciones de la respuesta y el sistema de ecuaciones utilizado para calcular las constantes son ligeramente diferentes.

#### EJEMPLO 8.4 Determinación de la respuesta natural subamortiguada de un circuito RLC paralelo

En el circuito mostrado en la Figura 8.8,  $V_0 = 0$  e  $I_0 = -12,25$  mA.

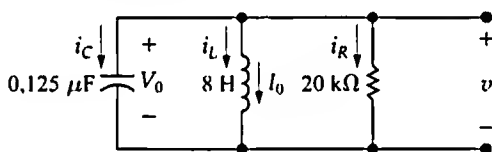


Figura 8.8. Circuito del Ejemplo 8.4.

- Calcule las raíces de la ecuación característica.
- Calcule  $v$  y  $dv/dt$  en  $t = 0^+$ .
- Calcule la respuesta en tensión para  $t \geq 0$ .
- Dibuje  $v(t)$  en función de  $t$  para el intervalo de tiempo  $0 \leq t \leq 11$  ms.

#### SOLUCIÓN

- Como

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{10^6}{2(20)10^3(0,125)} = 200 \text{ rad/s,}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \sqrt{\frac{10^6}{(8)(0,125)}} = 10^3 \text{ rad/s,}$$

tendremos que

$$\omega_0^2 > \alpha^2.$$

Por tanto, la respuesta es subamortiguada. Ahora,

$$\begin{aligned} \omega_d &= \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = \sqrt{10^6 - 4 \times 10^4} = 100\sqrt{96} \\ &= 979,80 \text{ rad/s,} \end{aligned}$$

$$s_1 = -\alpha + j\omega_d = -200 + j979,80 \text{ rad/s,}$$

$$s_2 = -\alpha - j\omega_d = -200 - j979,80 \text{ rad/s.}$$

Para el caso subamortiguado, normalmente no calculamos los valores de  $s_1$  y  $s_2$ , ya que no los utilizamos de forma explícita. Sin embargo, en este ejemplo hacemos hincapié en la razón por la cual se denomina a  $s_1$  y  $s_2$  frecuencias complejas.

- Puesto que  $v$  es la tensión entre los terminales de un condensador, tenemos que

$$v(0) = v(0^+) = V_0 = 0.$$

Puesto que  $v(0^+) = 0$ , la corriente en la rama resistiva será cero en  $t = 0^+$ . Por tanto, la corriente del condensador en  $t = 0^+$  es la inversa de la corriente que atraviesa la bobina:

$$i_C(0^+) = -(-12,25) = 12,25 \text{ mA.}$$

Por tanto, el valor inicial de la derivada es

$$\frac{dv(0^+)}{dt} = \frac{(12,25)(10^{-3})}{(0,125)(10^{-6})} = 98.000 \text{ V/s.}$$

- c) A partir de las Ecuaciones 8.30 y 8.31,  $B_1 = 0$  y

$$B_2 = \frac{98.000}{\omega_d} \approx 100 \text{ V.}$$

Sustituyendo los valores numéricos de  $\alpha$ ,  $\omega_d$ ,  $B_1$  y  $B_2$  en la expresión correspondiente a  $v(t)$  nos queda

$$v(t) = 100e^{-200t} \text{ sen } 979,80t \text{ V, } t \geq 0.$$

- d) La Figura 8.9 muestra la gráfica de  $v(t)$  en función de  $t$  para los primeros 11 ms después de que comienza a liberarse la energía almacenada. La gráfica nos muestra

claramente la naturaleza oscilatoria amortiguada de la respuesta subamortiguada. La tensión  $v(t)$  se aproxima a su valor final alternando entre valores que son superiores e inferiores a dicho valor final. Además, estas oscilaciones en torno al valor final decrecen exponencialmente con el tiempo.

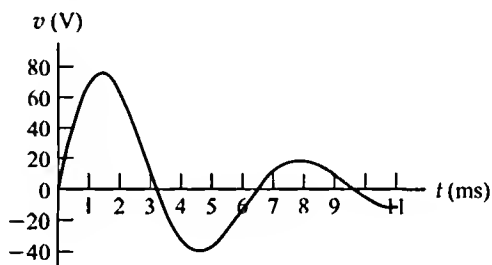


Figura 8.9. Respuesta en tensión para el Ejemplo 8.4.

## Características de la respuesta subamortiguada

La respuesta subamortiguada tiene varias características de importancia. En primer lugar, a medida que reducimos las pérdidas por disipación en el circuito, la oscilación se hace más persistente y la frecuencia de las oscilaciones se aproxima a  $\omega_0$ . En otras palabras, a medida que  $R \rightarrow \infty$ , la disipación en el circuito de la Figura 8.8 se aproxima a cero, porque  $p = v^2/R$ . A medida que  $R \rightarrow \infty$ ,  $\alpha \rightarrow 0$ , lo que nos dice que  $\omega_d \rightarrow \omega_0$ . Cuando  $\alpha = 0$ , la amplitud máxima de la tensión permanece constante, manteniéndose la oscilación con una frecuencia igual a  $\omega_0$ . En el Ejemplo 8.4, si incrementáramos  $R$  hasta infinito, la solución correspondiente a  $v(t)$  sería

$$v(t) = 98 \text{ sen } 1000t \text{ V, } t \geq 0.$$

Por tanto, en este caso, la oscilación se mantiene, la amplitud máxima de la tensión es de 98 V y la frecuencia de oscilación es de 1000 rad/s.

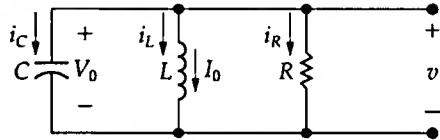
Ahora estamos en condiciones de describir cualitativamente la diferencia entre una respuesta subamortiguada y otra sobreamortiguada. En un sistema subamortiguado, la respuesta oscila, o «rebota», alrededor de su valor final. Esta oscilación también se suele denominar *sobreimpulso*. En un sistema sobreamortiguado, la respuesta se aproxima a su valor final sin sobreimpulsos. Al especificar la respuesta deseada de un sistema de segundo orden, puede que convenga que se alcance el valor final en el tiempo más corto posible, no preocupándonos de si existen pequeñas oscilaciones alrededor de dicho valor final. En ese caso, se diseñarían los componentes del sistema con el fin de conseguir una respuesta subamortiguada. En otros casos, puede que queramos que la respuesta no exceda de su valor final, quizá para garantizar que los componentes no resulten dañados. En esta situación, diseñaríamos los componentes del sistema con el fin de conseguir una respuesta sobreamortiguada, en cuyo caso es necesario aceptar que exista un tiempo de subida relativamente lento hasta el valor final.



**Evaluación del objetivo 1**

- Ser capaz de determinar la respuesta natural y al escalón de los circuitos *RLC* paralelos.

8.4. Se conectan en paralelo una bobina de 10 mH, un condensador de 1  $\mu\text{F}$  y una resistencia variable, según la configuración del circuito mostrado. Ajustamos la resistencia de modo que las raíces de la ecuación característica sean  $-8000 \pm j6000 \text{ rad/s}$ . La tensión inicial en el condensador es de 10 V y la corriente inicial en la bobina es de 80 mA. Calcule (a)  $R$ , (b)  $dv(0^+)/dt$ , (c)  $B_1$  y  $B_2$  en la solución correspondiente a  $v$  y (d)  $i_L(t)$ .

**RESPUESTA**

- (a) 62,5  $\Omega$ ; (b)  $-240.000 \text{ V/s}$ ;  
 (c)  $B_1 = 10 \text{ V}$ ,  $B_2 = -80/3 \text{ V}$ ;  
 (d)  $i_L(t) = 10e^{-8000t}[8 \cos 6000t + (82/3) \sin 6000t] \text{ mA}$  para  $t \geq 0$ .

**NOTA** Trate también de resolver los Problemas 8.7 y 8.17 del capítulo.

**Respuesta en tensión críticamente amortiguada**

El circuito de segundo orden de la Figura 8.8 estará críticamente amortiguado cuando  $\omega_0^2 = \alpha^2$ , es decir,  $\omega_0 = \alpha$ . Cuando un circuito está críticamente amortiguado, la respuesta se halla al borde de la oscilación. Además, las dos raíces de la ecuación característica son reales e iguales; es decir,

$$s_1 = s_2 = -\alpha = -\frac{1}{2RC}. \quad (8.32)$$

Cuando esto sucede, la solución correspondiente a la tensión ya no tiene la forma de la Ecuación 8.18. Esta ecuación no sirve, porque si  $s_1 = s_2 = -\alpha$ , nos quedaría que

$$v = (A_1 + A_2)e^{-\alpha t} = A_0 e^{-\alpha t}, \quad (8.33)$$

donde  $A_0$  es una constante arbitraria. La Ecuación 8.33 no puede satisfacer dos condiciones iniciales independientes ( $V_0, I_0$ ) con sólo una constante arbitraria,  $A_0$ . Recuerde que los parámetros del circuito  $R$  y  $C$  determinan el valor de  $\alpha$ .

Podemos volver atrás para resolver este dilema, y revisar de nuevo la suposición de que la solución toma la forma de la Ecuación 8.18. Cuando las raíces de la ecuación característica son iguales, la solución de la ecuación diferencial toma una forma distinta, que es

✎ **RESPUESTA NATURAL EN TENSIÓN  
PARA CIRCUITOS *RLC* PARALELOS  
CRÍTICAMENTE AMORTIGUADOS**

$$v(t) = D_1 t e^{-\alpha t} + D_2 e^{-\alpha t}. \quad (8.34)$$

Por tanto, en el caso de una raíz doble, la solución está compuesta por un término exponencial simple más el producto de un término lineal y otro exponencial. Dejamos la justificación de la Ecuación 8.34 para un curso introductorio sobre ecuaciones diferenciales. El cálculo de la solución implica obtener los valores de  $D_1$  y  $D_2$  siguiendo el mismo procedimiento que en los casos sobreamortiguado

y subamortiguado: utilizamos los valores iniciales de la tensión y de la derivada de la tensión con respecto al tiempo para escribir dos ecuaciones que contengan  $D_1$  y/o  $D_2$ .

A partir de la Ecuación 8.34, el sistema de dos ecuaciones necesario para determinar  $D_1$  y  $D_2$  es

$$v(0^+) = V_0 = D_2, \quad (8.35)$$

$$\frac{dv(0^+)}{dt} = \frac{i_c(0^+)}{C} = D_1 - \alpha D_2. \quad (8.36)$$

Como podemos ver, en el caso de una respuesta críticamente amortiguada, tanto la ecuación correspondiente a  $v(t)$  como el sistema de ecuaciones a partir del cual se obtienen  $D_1$  y  $D_2$  difieren de los que se utilizan para los tipos de respuesta sobreamortiguada y subamortiguada, pero la técnica general es la misma. En la práctica, raramente nos encontraremos con sistemas críticamente amortiguados, principalmente porque  $\omega_0$  debe ser exactamente igual a  $\alpha$ . Ambas magnitudes dependen de los parámetros del circuito, y en un circuito real es muy difícil elegir valores de los componentes que satisfagan una relación de estricta igualdad.

El Ejemplo 8.5 ilustra la técnica utilizada para calcular la respuesta críticamente amortiguada de un circuito *RLC* paralelo.

### EJEMPLO 8.5 Determinación de la respuesta natural críticamente amortiguada de un circuito *RLC* paralelo

- Para el circuito del Ejemplo 8.4 (Figura 8.8), calcule el valor de  $R$  que da como resultado una respuesta en tensión críticamente amortiguada.
- Calcule  $v(t)$  para  $t \geq 0$ .
- Dibuje  $v(t)$  en función de  $t$  para  $0 \leq t \leq 7$  ms.

las Ecuaciones 8.35 y 8.36,  $D_2 = 0$  y  $D_1 = 98.000$  V/s. Sustituyendo estos valores de  $\alpha$ ,  $D_1$  y  $D_2$  en la Ecuación 8.34 se obtiene

$$v(t) = 98.000te^{-1000t} \text{ V}, \quad t \geq 0.$$

### SOLUCIÓN

- A partir del Ejemplo 8.4, sabemos que  $\omega_0^2 = 10^6$ . Por tanto, para obtener un amortiguamiento crítico,

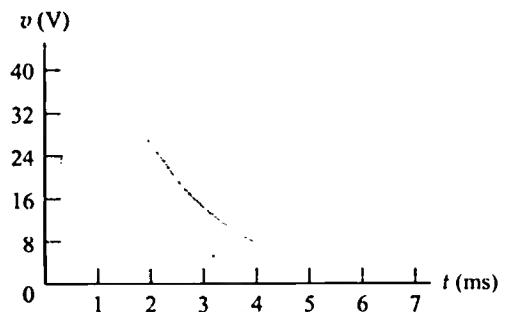
$$\alpha = 10^3 = \frac{1}{2RC},$$

o

$$R = \frac{10^6}{(2000)(0,125)} \\ = 4000 \, \Omega.$$

- A partir del Ejemplo 8.4, sabemos que  $v(0^+) = 0$  y  $dv(0^+)/dt = 98.000$  V/s. Por

- La Figura 8.10 muestra una gráfica de  $v(t)$  en función de  $t$  para el intervalo  $0 \leq t \leq 7$  ms.



**Figura 8.10.** Respuesta en tensión para el Ejemplo 8.5.

**Evaluación del objetivo 1**

- Ser capaz de determinar la respuesta natural y al escalón de los circuitos *RLC* paralelos.

8.5. La resistencia en el circuito del Problema de evaluación 8.4 se ajusta para obtener un amortiguamiento crítico. Los valores de inductancia y de capacidad son de 0,4 H y 10  $\mu$ F, respectivamente. La energía inicialmente almacenada en el circuito es de 25 mJ y está distribuida por igual entre la bobina y el condensador. Calcule (a)  $R$ ;

(b)  $V_0$ ; (c)  $I_0$ ; (d)  $D_1$  y  $D_2$  en la solución correspondiente a  $v$  y (e)  $i_R$ ,  $t \geq 0^+$ .

**RESPUESTA**

(a) 100  $\Omega$ ; (b) 50 V; (c) 250 mA;

(d) -50.000 V/s, 50 V;

(e)  $i_R(t) = (-500te^{-500t} + 0,50e^{-500t})$  A,  $t \geq 0^+$ .

**NOTA** Trate también de resolver los Problemas 8.9 y 8.18 del capítulo.

**Resumen de resultados**

Concluimos nuestro análisis de la respuesta natural de los circuitos *RLC* paralelos con un breve resumen de los resultados. El primer paso a la hora de hallar la respuesta natural consiste en calcular las raíces de la ecuación característica. Entonces sabemos inmediatamente si la respuesta es sobreamortiguada, subamortiguada o críticamente amortiguada.

Si las raíces son reales y distintas ( $\omega_0^2 < \alpha^2$ ), la respuesta es sobreamortiguada y la tensión es

$$v(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t},$$

donde

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2},$$

$$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2},$$

$$\alpha = \frac{1}{2RC},$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}.$$

Los valores de  $A_1$  y  $A_2$  se determinan resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones:

$$v(0^+) = A_1 + A_2,$$

$$\frac{dv(0^+)}{dt} = \frac{i_C(0^+)}{C} = s_1 A_1 + s_2 A_2.$$

Si las raíces son complejas ( $\omega_0^2 > \alpha^2$ ), la respuesta es subamortiguada y la tensión es

$$v(t) = B_1 e^{-\alpha t} \cos \omega_d t + B_2 e^{-\alpha t} \sin \omega_d t,$$

donde

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}.$$

Los valores de  $B_1$  y  $B_2$  se determinan resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones:

$$v(0^+) = V_0 = B_1,$$

$$\frac{dv(0^+)}{dt} = \frac{i_C(0^+)}{C} = -\alpha B_1 + \omega_d B_2.$$

Si las raíces de la ecuación característica son reales e iguales ( $\omega_0^2 = \alpha^2$ ), la respuesta en tensión es

$$v(t) = D_1 t e^{-\alpha t} + D_2 e^{-\alpha t},$$

donde  $\alpha$  tiene el mismo valor que en las otras formas de solución. Para determinar los valores correspondientes a las constantes  $D_1$  y  $D_2$ , hay que resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$v(0^+) = V_0 = D_2,$$

$$\frac{dv(0^+)}{dt} = \frac{i_C(0^+)}{C} = D_1 - \alpha D_2.$$

### 8.3. Respuesta al escalón de un circuito *RLC* paralelo

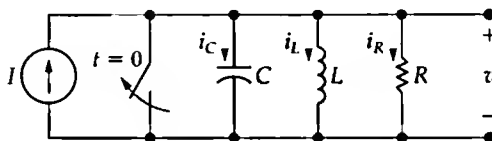
Para calcular la respuesta al escalón de un circuito *RLC* paralelo es preciso determinar la tensión existente en las ramas dispuestas en paralelo o la corriente de cada rama individual que se producen como resultado de la súbita aplicación de una fuente de corriente continua. Puede que haya, o no, energía almacenada en el circuito en el momento de aplicar la fuente de corriente. La tarea a la que nos enfrentamos está representada por el circuito mostrado en la Figura 8.11. Para desarrollar una técnica general de determinación de la respuesta al escalón de un circuito de segundo orden, nos centraremos en hallar la corriente en la rama inductiva ( $i_L$ ). Esta corriente tiene un interés particular, ya que no se aproxima a cero a medida que  $t$  se incrementa. En lugar de ello, después de que el conmutador haya estado abierto durante un largo período de tiempo, la corriente en la bobina será igual a la corriente de la fuente de dc continua  $I$ . Puesto que queremos centrarnos en la técnica de determinación de la respuesta al escalón, supondremos que la energía inicialmente almacenada en el circuito es cero. Esta suposición simplifica los cálculos y no altera el proceso básico que se sigue. En el Ejemplo 8.10 veremos cómo introducir en el procedimiento general la presencia de una energía inicial almacenada.

Para calcular la corriente  $i_L$  en la bobina, debemos resolver una ecuación diferencial de segundo orden que habrá que igualar a la corriente impuesta  $I$ . La manera de determinar esa ecuación de segundo orden consiste en partir de la aplicación de la ley de Kirchhoff de las corrientes:

$$i_L + i_R + i_C = I,$$

o bien

$$i_L + \frac{v}{R} + C \frac{dv}{dt} = I. \quad (8.37)$$



**Figura 8.11.** Circuito utilizado para describir la respuesta al escalón de un circuito *RLC* paralelo.

Dado que

$$v = L \frac{di_L}{dt}, \quad (8.38)$$

obtenemos

$$\frac{dv}{dt} = L \frac{d^2 i_L}{dt^2}. \quad (8.39)$$

Sustituyendo las Ecuaciones 8.38 y 8.39 en la Ecuación 8.37, se obtiene

$$i_L + \frac{L}{R} \frac{di_L}{dt} + LC \frac{d^2 i_L}{dt^2} = I. \quad (8.40)$$

Por comodidad, dividimos por  $LC$  y después de reordenar los términos nos queda

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{di_L}{dt} + \frac{i_L}{LC} = \frac{I}{LC} \quad (8.41)$$

Comparando la Ecuación 8.41 con la Ecuación 8.3, vemos que la presencia de un término distinto de cero en el lado derecho de la ecuación modifica la tarea de resolución. Antes de mostrar cómo resolver la Ecuación 8.41 directamente, vamos a obtener la solución de manera indirecta. Cuando conozcamos la solución de la Ecuación 8.41, nos resultará más fácil explicar la técnica directa de resolución.

## La técnica indirecta

Podemos calcular  $i_L$  indirectamente hallando primero la tensión  $v$ . Podemos hacer esto con las técnicas introducidas en la Sección 8.2, porque la ecuación diferencial que debe satisfacer  $v$  es idéntica a la Ecuación 8.3. Para ver esto, simplemente volvamos a la Ecuación 8.37 y expresemos  $i_L$  en función de  $v$ ; si lo hacemos así,

$$\frac{1}{L} \int_0^t v d\tau + \frac{v}{R} + C \frac{dv}{dt} = I. \quad (8.42)$$

Diferenciando una vez la Ecuación 8.42 con respecto a  $t$ , el lado derecho de la ecuación se reduce a cero, ya que  $I$  es una constante. Por tanto,

$$\frac{v}{L} + \frac{1}{R} \frac{dv}{dt} + C \frac{d^2 v}{dt^2} = 0,$$

o bien

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{dv}{dt} + \frac{v}{LC} = 0. \quad (8.43)$$

Como hemos explicado en la Sección 8.2, la solución correspondiente a  $v$  depende de las raíces de la ecuación característica. Por tanto, las tres posibles soluciones son

$$v = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}, \quad (8.44)$$

$$v = B_1 e^{-\alpha t} \cos \omega_d t + B_2 e^{-\alpha t} \sin \omega_d t, \quad (8.45)$$

$$v = D_1 t e^{-\alpha t} + D_2 e^{-\alpha t}. \quad (8.46)$$

Una nota de advertencia: puesto que hay una fuente en el circuito para  $t > 0$ , es preciso tener en cuenta el valor de la corriente de la fuente en  $t = 0^+$  a la hora de evaluar los coeficientes en las Ecuaciones 8.44-8.46.

Para hallar las tres posibles soluciones correspondientes a  $i_L$ , sustituimos las Ecuaciones 8.44-8.46 en la Ecuación 8.37. Puede verificarse fácilmente, después de hacer esto, que las tres soluciones correspondientes a  $i_L$  son

$$i_L = I + A'_1 e^{s_1 t} + A'_2 e^{s_2 t}, \quad (8.47)$$

$$i_L = I + B'_1 e^{-\alpha t} \cos \omega_d t + B'_2 e^{-\alpha t} \sin \omega_d t, \quad (8.48)$$

$$i_L = I + D'_1 t e^{-\alpha t} + D'_2 e^{-\alpha t}, \quad (8.49)$$

donde  $A'_1$ ,  $A'_2$ ,  $B'_1$ ,  $B'_2$ ,  $D'_1$  y  $D'_2$  son constantes arbitrarias.

En cada caso, las constantes con prima pueden hallarse indirectamente en función de las constantes arbitrarias asociadas con la ecuación de la tensión. Sin embargo, esta técnica resulta un poco engorrosa.

## La técnica directa

Resulta mucho más fácil calcular las constantes con prima directamente en función de los valores iniciales de la función de respuesta. Para el circuito que estamos analizando, calcularemos las constantes con prima a partir de  $i_L(0)$  y  $di_L(0)/dt$ .

La solución de una ecuación diferencial de segundo orden con una constante en el lado derecho (es decir, un valor con el que se fuerza al circuito) es igual a la respuesta forzada más otra función de respuesta cuya forma es idéntica a la respuesta natural. Por tanto, siempre podemos escribir la solución correspondiente a la respuesta al escalón de la forma

$$i = I_f + \left\{ \begin{array}{l} \text{función de la misma forma} \\ \text{que la respuesta natural} \end{array} \right\}, \quad (8.50)$$

o bien

$$v = V_f + \left\{ \begin{array}{l} \text{función de la misma forma} \\ \text{que la respuesta natural} \end{array} \right\}, \quad (8.51)$$

donde  $I_f$  y  $V_f$  representan el valor final de la función de respuesta. El valor final puede ser cero, como sucedía, por ejemplo, con la tensión  $v$  en el circuito de la Figura 8.8.

Los Ejemplos 8.6-8.10 ilustran la determinación de la respuesta al escalón de un circuito *RLC* paralelo utilizando la técnica directa.

### EJEMPLO 8.6 Determinación de la respuesta al escalón sobreamortiguada en un circuito *RLC* paralelo

La energía inicialmente almacenada en el circuito de la Figura 8.12 es cero. En  $t = 0$ , se aplica

una fuente de corriente continua de 24 mA al circuito. El valor de la resistencia es de 400  $\Omega$ .

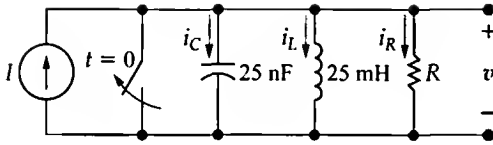


Figura 8.12. Circuito del Ejemplo 8.6.

- ¿Cuál es el valor inicial de  $i_L$ ?
- ¿Cuál es el valor inicial de  $di_L/dt$ ?
- ¿Cuáles son las raíces de la ecuación característica?
- ¿Cuál es la expresión numérica correspondiente a  $i_L(t)$  para  $t \geq 0$ ?

### SOLUCIÓN

- No hay energía almacenada en el circuito antes de la aplicación de la fuente de corriente continua, por lo que la corriente inicial en la bobina es cero. La bobina impide un cambio instantáneo en la corriente que la atraviesa, por lo que  $i_L(0) = 0$  inmediatamente después de abrir el conmutador.
- La tensión inicial en el condensador es cero antes de abrir el conmutador; por tanto, será también cero inmediatamente después. Ahora, como  $v = L di_L/dt$ .

$$\frac{di_L}{dt}(0^+) = 0.$$

- Conociendo los valores de los elementos del circuito, obtenemos

$$\begin{aligned}\omega_0^2 &= \frac{1}{LC} \\ &= \frac{10^{12}}{(25)(25)} \\ &= 16 \times 10^8, \\ \alpha &= \frac{1}{2RC} \\ &= \frac{10^9}{(2)(400)(25)} \\ &= 5 \times 10^4 \text{ rad/s},\end{aligned}$$

o

$$\alpha^2 = 25 \times 10^8$$

Como  $\omega_0^2 < \alpha^2$ , las raíces de la ecuación característica son reales y distintas. Por tanto

$$s_1 = -5 \times 10^4 + 3 \times 10^4$$

$$= -20.000 \text{ rad/s},$$

$$s_2 = -5 \times 10^4 - 3 \times 10^4$$

$$= -80.000 \text{ rad/s}.$$

- Puesto que las raíces de la ecuación característica son reales y distintas, la respuesta en corriente de la bobina será sobreamortiguada. Por tanto,  $i_L(t)$  toma la forma de la Ecuación 8.47, es decir,

$$i_L = I_f + A'_1 e^{s_1 t} + A'_2 e^{s_2 t}.$$

### ✚ CORRIENTE EN LA BOBINA PARA LA RESPUESTA AL ESCALÓN DE UN CIRCUITO *RLC* PARALELO SOBREAMORTIGUADO

A partir de esta solución, el sistema de ecuaciones que permite determinar  $A'_1$  y  $A'_2$  es

$$i_L(0) = I_f + A'_1 + A'_2 = 0$$

$$\frac{di_L}{dt}(0) = s_1 A'_1 + s_2 A'_2 = 0$$

Resolviendo el sistema para obtener  $A'_1$  y  $A'_2$ , nos queda,

$$A'_1 = -32 \text{ mA}$$

y

$$A'_2 = 8 \text{ mA}.$$

La solución numérica correspondiente a  $i_L(t)$  es

$$i_L(t) = (24 - 32e^{-20.000t} + 8e^{-80.000t}) \text{ mA}, \\ t \geq 0.$$

### EJEMPLO 8.7 Determinación de la respuesta al escalón subamortiguada en un circuito *RLC* paralelo

Incrementamos la resistencia del circuito del Ejemplo 8.6 (Figura 8.12) hasta  $625 \Omega$ . Calcule  $i_L(t)$  cuando  $t \geq 0$ .

#### SOLUCIÓN

Como  $L$  y  $C$  conservan sus valores,  $\omega_0^2$  tendrá el mismo valor que en el Ejemplo 8.6, es decir,  $\omega_0^2 = 16 \times 10^8$ . Incrementando  $R$  a  $625 \Omega$ ,  $\alpha^2$  disminuye hasta  $3,2 \times 10^4$  rad/s. Con  $\omega_0^2 > \alpha$ , las raíces de la ecuación característica son complejas. De aquí,

$$s_1 = -3,2 \times 10^4 + j2,4 \times 10^4 \text{ rad/s,}$$

$$s_2 = -3,2 \times 10^4 - j2,4 \times 10^4 \text{ rad/s,}$$

La respuesta en corriente será ahora subamortiguada y estará dada por la Ecuación 8.48:

$$i_L(t) = I_f + B'_1 e^{-\alpha t} \cos \omega_d t + B'_2 e^{-\alpha t} \sin \omega_d t.$$

#### ✦ CORRIENTE EN LA BOBINA EN LA RESPUESTA AL ESCALÓN DE UN CIRCUITO *RLC* PARALELO SUBAMORTIGUADO

Aquí,  $\alpha$  es 32.000 rad/s,  $\omega_d$  es 24.000 rad/s e  $I_f$  es 24 mA.

Como en el Ejemplo 8.6,  $B'_1$  y  $B'_2$  se determinan a partir de las condiciones iniciales. Por tanto, el sistema de dos ecuaciones será

$$i_L(0) = I_f + B'_1 = 0,$$

$$\frac{di_L}{dt}(0) = \omega_d B'_2 - \alpha B'_1 = 0.$$

Entonces,

$$B'_1 = -24 \text{ mA} \quad \text{y} \quad B'_2 = -32 \text{ mA.}$$

La solución numérica para  $i_L(t)$  es

$$i_L(t) = (24 - 24e^{-32.000t} \cos 24.000t - 32e^{-32.000t} \sin 24.000t) \text{ mA,} \quad t \geq 0.$$

### EJEMPLO 8.8 Determinación de la respuesta al escalón críticamente amortiguada en un circuito *RLC* paralelo

Asignamos un valor de  $500 \Omega$  a la resistencia del circuito del Ejemplo 8.6 (Figura 8.12). Calcule  $i_L(t)$  cuando  $t \geq 0$ .

#### SOLUCIÓN

Sabemos que el valor de  $\omega_0^2$  continúa siendo  $16 \times 10^8$ . Con un valor de  $R$  igual a  $500 \Omega$ ,  $\alpha$  será  $4 \times 10^4 \text{ s}^{-1}$ , lo que corresponde a un amortiguamiento crítico. Por tanto, la solución correspondiente a  $i_L(t)$  tendrá la forma de la Ecuación 8.49:

$$i_L(t) = I_f + D'_1 t e^{-\alpha t} + D'_2 e^{-\alpha t}.$$

#### ✦ CORRIENTE EN LA BOBINA PARA LA RESPUESTA AL ESCALÓN DE UN CIRCUITO *RLC* PARALELO CRÍTICAMENTE AMORTIGUADO

De nuevo,  $D'_1$  y  $D'_2$  se calculan a partir de las condiciones iniciales:

$$i_L(0) = I_f + D'_2 = 0,$$

$$\frac{di_L}{dt}(0) = D'_1 - \alpha D'_2 = 0.$$

De aquí,

$$D'_1 = -960.000 \text{ mA/s}$$

y

$$D'_2 = -24 \text{ mA.}$$

La solución numérica correspondiente a  $i_L(t)$  es

$$i_L(t) = (24 - 960.000 t e^{-40.000t} - 24e^{-40.000t}) \text{ mA,} \quad t \geq 0.$$



### EJEMPLO 8.9 Comparación de las tres formas de la respuesta al escalón

- Dibuje en una única gráfica, para el rango de 0 a 220  $\mu\text{s}$ , las respuestas sobrearmortiguada, subarmortiguada y críticamente amortiguada calculadas en los Ejemplos 8.6-8.8.
- Utilice las gráficas del apartado (a) para calcular el tiempo que  $i_L$  necesita para alcanzar el 90% de su valor final.
- Partiendo de los resultados obtenidos en el apartado (b), ¿qué respuesta prescribiría en un diseño donde fuera importante alcanzar el 90% del valor final de la salida en el tiempo más corto posible?
- ¿Qué respuesta prescribiría en un diseño donde se deba garantizar que el valor final de la corriente nunca sea excedido?

cuando la velocidad sea la especificación de diseño más importante.

- A partir de la gráfica, podemos ver que la respuesta subarmortiguada presenta un sobreimpulso con respecto al valor final de la corriente, mientras que ni la respuesta críticamente amortiguada ni la respuesta sobrearmortiguada producen corrientes que superen los 24 mA. Aunque cualquiera de estos dos últimos tipos de respuesta satisfaría las especificaciones de diseño, lo mejor es usar una respuesta sobrearmortiguada. No resulta práctico exigir a un diseño que consiga los valores de componentes exactos como para garantizar una respuesta críticamente amortiguada.

### SOLUCIÓN

- Véase la Figura 8.13.
- El valor final de  $i_L$  es 24 mA, por lo que podemos hallar en las gráficas los instantes de tiempo correspondientes a  $i_L = 21,6$  mA. Así,  $t_{\text{sobrearmortiguado}} = 130 \mu\text{s}$ ,  $t_{\text{críticamente amortiguado}} = 97 \mu\text{s}$  y  $t_{\text{subarmortiguado}} = 74 \mu\text{s}$ .
- La respuesta subarmortiguada alcanza el 90% del valor final en el tiempo más corto, así que será el tipo de respuesta deseado

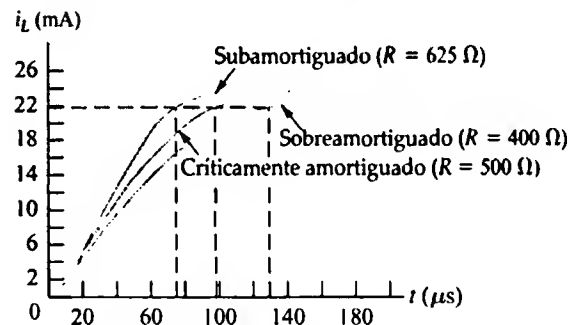


Figura 8.13. Gráficas de la corriente para el Ejemplo 8.9.

### EJEMPLO 8.10 Cálculo de la respuesta al escalón de un circuito *RLC* paralelo con energía inicial almacenada

Supongamos que hay energía inicialmente almacenada en el circuito del Ejemplo 8.8 (Figura 8.12, con  $R = 500 \Omega$ ) en el momento de aplicar la fuente de corriente continua.

La corriente inicial a través de la bobina es de 29 mA y la tensión inicial en bornes del condensador es de 50 V.

- Calcule (a)  $i_L(0)$ ; (b)  $di_L(0)/dt$ ; (c)  $i_L(t)$  para  $t \geq 0$ ; (d)  $v(t)$  para  $t \geq 0$ .

### SOLUCIÓN

- No puede haber un cambio instantáneo en una bobina, por lo que el valor inicial de  $i_L$  en el primer instante después de aplicar la

fuentes de corriente continua debe ser 29 mA.

- b) El condensador mantiene la tensión inicial entre los terminales de la bobina, siendo su valor de 50 V. Por tanto,

$$L \frac{di_L}{dt}(0^+) = 50,$$

$$\frac{di_L}{dt}(0^+) = \frac{50}{25} \times 10^3 = 2000 \text{ A/s.}$$

- c) A partir de la solución del Ejemplo 8.8, sabemos que la respuesta en corriente está críticamente amortiguada; por tanto,

$$i_L(t) = I_f + D'_1 t e^{-\alpha t} + D'_2 e^{-\alpha t},$$

donde

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = 40.000 \text{ rad/s} \quad e \quad I_f = 24 \text{ mA.}$$

Observe que el efecto de que exista una energía inicialmente almacenada distinta de cero se deja notar en el cálculo de las constantes  $D'_1$  y  $D'_2$ , que se obtienen a partir de las condiciones iniciales. En primer lugar, usamos el valor inicial de la corriente de la bobina:

$$i_L(0) = I_f + D'_2 = 29 \text{ mA,}$$

De donde obtenemos

$$D'_2 = 29 - 24 = 5 \text{ mA.}$$

La solución correspondiente a  $D'_1$  es

$$\frac{di_L}{dt}(0^+) = D'_1 - \alpha D'_2 = 2000,$$

o

$$D'_1 = 2000 + \alpha D'_2$$

$$= 2000 + (40.000)(5 \times 10^{-3})$$

$$= 2200 \text{ A/s} = 2,2 \times 10^6 \text{ mA/s.}$$

Por tanto, la expresión numérica correspondiente a  $i_L(t)$  es

$$i_L(t) = (24 + 2,2 \times 10^6 t e^{-40.000t} + 5 e^{-40.000t}) \text{ mA}, \quad t \geq 0.$$

- d) Podemos hallar la expresión correspondiente a  $v(t)$  para  $t \geq 0$  utilizando la relación existente entre la tensión y la corriente en una bobina:

$$\begin{aligned} v(t) &= L \frac{di_L}{dt} \\ &= (25 \times 10^{-3}) [(2,2 \times 10^6) (-40.000) t e^{-40.000t} \\ &\quad + 2,2 \times 10^6 e^{-40.000t} \\ &\quad + (5) (-40.000) e^{-40.000t}] \times 10^{-3} \\ &= -2,2 \times 10^6 t e^{-40.000t} + 50 e^{-40.000t} \text{ V}, \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

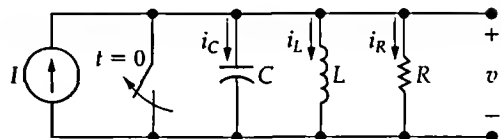
Para comprobar este resultado, verifiquemos que la tensión inicial entre los terminales de la bobina es igual a 50 V:

$$v(0) = 2,2 \times 10^6 (0)(1) + 50(1) = 50 \text{ V.}$$

### Evaluación del objetivo 1

- Ser capaz de determinar la respuesta natural y al escalón de los circuitos *RLC* paralelos.

- 8.6. En el circuito mostrado,  $R = 500 \, \Omega$ ,  $L = 0,64 \text{ H}$ ,  $C = 1 \, \mu\text{F}$ ,  $I_0 = 0,5 \text{ A}$ ,  $V_0 = 40 \text{ V}$  e  $I = -1 \text{ A}$ . Calcule (a)  $i_R(0^+)$ ; (b)  $i_C(0^+)$ ; (c)  $di_L(0^+)/dt$ ; (d)  $s_1$  y  $s_2$ ; (e)  $i_L(t)$  para  $t \geq 0$  y (f)  $v(t)$  para  $t \geq 0$ .



**RESPUESTA**(a) 80 mA; (b)  $-1,58$  A;

(c) 62,5 A/s;

(d)  $(-1000 + j750)$  rad/s,  
 $(-1000 - j750)$  rad/s;(e)  $[-1 + e^{-1000t}(1,5 \cos 750t + 2,0833 \sin 750t)]$  A para  $t \geq 0$ ;(f)  $e^{-1000t}(40 \cos 750t - 2053,33 \sin 750t)$  V  
para  $t \geq 0^+$ .**NOTA** Trate también de resolver los Problemas 8.24-8.26 del capítulo.

## 8.4. Respuesta natural y al escalón de un circuito *RLC* serie

Los procedimientos para calcular la respuesta natural o al escalón de un circuito *RLC* serie son iguales a los utilizados para hallar la respuesta natural o al escalón de un circuito *RLC* paralelo, porque ambos tipos de circuitos están descritos por ecuaciones diferenciales que tienen la misma forma. Comencemos sumando las tensiones existentes alrededor del lazo cerrado del circuito mostrado en la Figura 8.14:

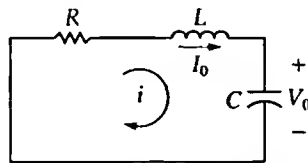
$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i d\tau + V_0 = 0. \quad (8.52)$$

Ahora diferenciamos la Ecuación 8.52 una vez con respecto a  $t$  para obtener

$$R \frac{di}{dt} + L \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{i}{C} = 0, \quad (8.53)$$

que podemos reordenar de la forma

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0. \quad (8.54)$$



**Figura 8.14.** Circuito utilizado para ilustrar la respuesta natural de un circuito *RLC* serie.

Comparando la Ecuación 8.54 con la Ecuación 8.3, vemos que ambas tienen la misma forma. Por tanto, para hallar la solución de la Ecuación 8.54 seguiremos el mismo proceso con el que obtuvimos la solución de la Ecuación 8.3.

A partir de la Ecuación 8.54, la ecuación característica para el circuito *RLC* serie es

✎ **ECUACIÓN CARACTERÍSTICA DE UN CIRCUITO *RLC* SERIE**

$$s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0. \quad (8.55)$$

Las raíces de la ecuación característica son

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}. \quad (8.56)$$

o bien

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}. \quad (8.57)$$

La frecuencia de Neper ( $\alpha$ ) para el circuito *RLC* serie es

♣ **FRECUENCIA DE NEPER DE UN CIRCUITO *RLC* SERIE**  $\alpha = \frac{R}{2L} \text{ rad/s}, \quad (8.58)$

y la expresión correspondiente a la frecuencia de resonancia en radianes es

♣ **FRECUENCIA DE RESONANCIA EN RADIANES DE UN CIRCUITO *RLC* SERIE**  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ rad/s}. \quad (8.59)$

Observe que la frecuencia de Neper del circuito *RLC* serie difiere de la del circuito *RLC* paralelo, pero que las frecuencias de resonancia en radianes son iguales.

La respuesta en corriente estará sobreamortiguada, subamortiguada o críticamente amortiguada, dependiendo de si  $\omega_0^2 < \alpha^2$ ,  $\omega_0^2 > \alpha^2$  o  $\omega_0^2 = \alpha^2$ , respectivamente. Por tanto, las tres posibles soluciones para la corriente son las siguientes:

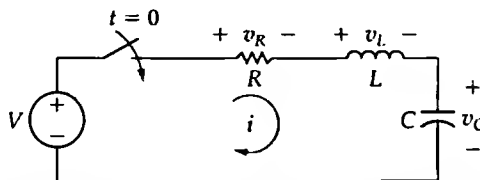
$$i(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \text{ (sobreamortiguada)}. \quad (8.60)$$

♣ **FORMAS DE LA RESPUESTA NATURAL EN CORRIENTE PARA CIRCUITOS *RLC* SERIE**  $i(t) = B_1 e^{-\alpha t} \cos \omega_d t + B_2 e^{-\alpha t} \sin \omega_d t \text{ (subamortiguada)}. \quad (8.61)$

$$i(t) = D_1 t e^{-\alpha t} + D_2 e^{-\alpha t} \text{ (críticamente amortiguada)}. \quad (8.62)$$

Una vez obtenida la respuesta natural en corriente, puede hallarse la respuesta natural en tensión para cualquiera de los elementos del circuito.

Para verificar que el procedimiento de determinación de la respuesta al escalón de un circuito *RLC* serie es igual que para un circuito *RLC* paralelo, vamos a mostrar que la ecuación diferencial que describe la tensión en el condensador de la Figura 8.15 tiene la misma forma que la ecuación diferencial que describe la corriente en la bobina de la Figura 8.11. Por comodidad, vamos a suponer que no hay energía almacenada en el circuito en el instante de cerrar el conmutador.



**Figura 8.15.** Circuito utilizado para ilustrar la respuesta al escalón de un circuito *RLC* serie.

Aplicando la ley de Kirchhoff de las tensiones al circuito mostrado en la Figura 8.15, se obtiene

$$V = Ri + L \frac{di}{dt} + v_C. \quad (8.63)$$

La corriente ( $i$ ) está relacionada con la tensión del condensador ( $v_C$ ) por la expresión

$$i = C \frac{dv_C}{dt}, \quad (8.64)$$

de donde

$$\frac{di}{dt} = C \frac{d^2 v_C}{dt^2}. \quad (8.65)$$

Sustituyendo las Ecuaciones 8.64 y 8.65 en la Ecuación 8.63, podemos escribir la expresión resultante como

$$\frac{d^2 v_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{LC} = \frac{V}{LC}. \quad (8.66)$$

La Ecuación 8.66 tiene la misma forma que la Ecuación 8.41; por tanto, el procedimiento para calcular  $v_C$  es similar al que utilizamos para hallar  $i_L$ . Las tres posibles soluciones para  $v_C$  son las siguientes:

$$v_C = V_f + A_1' e^{\lambda_1 t} + A_2' e^{\lambda_2 t} \text{ (sobreamortiguada)}, \quad (8.67)$$

✎ **FORMAS DE LA RESPUESTA  
AL ESCALÓN DE LA TENSIÓN  
DEL CONDENSADOR PARA  
CIRCUITOS *RLC* SERIE**

$$v_C = V_f + B_1' e^{-\alpha t} \cos \omega_d t + B_2' e^{-\alpha t} \sin \omega_d t \text{ (subamortiguada)}, \quad (8.68)$$

$$v_C = V_f + D_1' t e^{-\alpha t} + D_2' e^{-\alpha t} \text{ (críticamente amortiguada)}. \quad (8.69)$$

donde  $V_f$  es el valor final de  $v_C$ . En el circuito mostrado en la Figura 8.15, el valor final de  $v_C$  es la tensión  $V$  de la fuente de continua.

Los Ejemplos 8.11 y 8.12 ilustran la mecánica de determinación de las respuestas natural y al escalón de un circuito *RLC* serie.

### EJEMPLO 8.11 Determinación de la respuesta natural subamortiguada de un circuito *RLC* serie

El condensador de  $0,1 \mu\text{F}$  del circuito mostrado en la Figura 8.16 se carga a 100 V. En  $t = 0$ , el

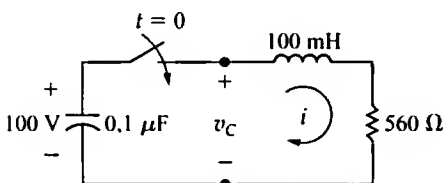


Figura 8.16. Circuito del Ejemplo 8.11.

condensador se descarga a través de una combinación en serie de una bobina de 100 mH y una resistencia de  $560 \Omega$ .

- Calcule  $i(t)$  para  $t \geq 0$ .
- Calcule  $v_C(t)$  para  $t \geq 0$ .

### SOLUCIÓN

- El primer paso para hallar  $i(t)$  consiste en calcular las raíces de la ecuación caracte-

rística. Para los valores dados de los elementos,

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} = \frac{(10^3)(10^6)}{(100)(0,1)} = 10^8,$$

$$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{560}{2(100)} \times 10^3$$

$$= 2800 \text{ rad/s.}$$

A continuación, comparamos  $\omega_0^2$  con  $\alpha^2$  y observamos que  $\omega_0^2 > \alpha^2$ , porque

$$\alpha^2 = 7,84 \times 10^6 = 0,0784 \times 10^8.$$

Con esto, sabemos que la respuesta es subamortiguada y que la solución correspondiente a  $i(t)$  tiene la forma

$$i(t) = B_1 e^{-\alpha t} \cos \omega_d t + B_2 e^{-\alpha t} \sin \omega_d t,$$

donde  $\alpha = 2800 \text{ rad/s}$  y  $\omega_d = 9600 \text{ rad/s}$ . Los valores numéricos de  $B_1$  y  $B_2$  se obtienen a partir de las condiciones iniciales. La corriente en la bobina es cero antes de cerrar el conmutador y, por tanto, será también cero inmediatamente después. Por consiguiente,

$$i(0) = 0 = B_1$$

Para calcular  $B_2$ , evaluamos  $di(0^+)/dt$ . En el circuito vemos que, como  $i(0) = 0$  inmediatamente después de cerrar el conmutador, no habrá caída de tensión en la resistencia. Por tanto, la tensión inicial en el condensador aparece en bornes de la bobina, lo que nos da la ecuación

$$L \frac{di(0^+)}{dt} = V_0,$$

o

$$\frac{di(0^+)}{dt} = \frac{V_0}{L} = \frac{100}{100} \times 10^3 = 1000 \text{ A/s.}$$

Como  $B_1 = 0$ ,

$$\frac{di}{dt} = 400 B_2 e^{-2800t} (24 \cos 9600t - 7 \sin 9600t).$$

Por tanto,

$$\frac{di(0^+)}{dt} = 9600 B_2,$$

$$B_2 = \frac{1000}{9600} \approx 0,1042 \text{ A.}$$

La solución correspondiente a  $i(t)$  es

$$i(t) = 0,1042 e^{-2800t} \sin 9600t \text{ A, } t \geq 0.$$

- b) Para calcular  $v_C(t)$ , podemos usar cualquiera de las siguientes relaciones:

$$v_C = -\frac{1}{C} \int_0^t i d\tau + 100$$

$$v_C = iR + L \frac{di}{dt}.$$

Independientemente de cuál expresión utilizemos (nosotros le recomendamos la segunda), el resultado es

$$v_C(t) = (100 \cos 9600t + 29,17 \sin 9600t) e^{-2800t} \text{ V, } t \geq 0.$$

### EJEMPLO 8.12 Determinación de la respuesta al escalón subamortiguada de un circuito *RLC* serie

Suponga que no hay energía almacenada en la bobina de 100 mH ni en el condensador de 0,4  $\mu\text{F}$  en el momento de cerrar el conmutador en el circuito mostrado en la Figura 8.17.

Calcule  $v_C(t)$  para  $t \geq 0$ .

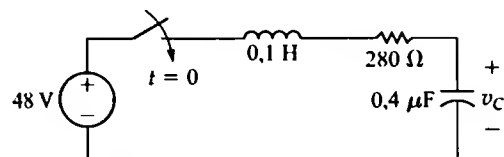


Figura 8.17. Circuito del Ejemplo 8.12.

# SOLUCIÓN

Las raíces de la ecuación característica son

$$s_1 = -\frac{280}{0,2} + \sqrt{\left(\frac{280}{0,2}\right)^2 - \frac{10^6}{(0,1)(0,4)}}$$

$$= (-1400 + j4800) \text{ rad/s,}$$

$$s_2 = (-1400 - j4800) \text{ rad/s.}$$

Las raíces son complejas, por lo que la respuesta en tensión es subamortiguada. Por tanto,

$$v_c(t) = 48 + B'_1 e^{-1400t} \cos 4800t + B'_2 e^{-1400t} \sin 4800t, \quad t \geq 0.$$

Inicialmente, no hay energía almacenada en el circuito, por lo que tanto  $v_c(0)$  como  $dv_c(0+)/dt$  serán cero. Como consecuencia,

$$v_c(0) = 0 = 48 + B'_1$$

$$\frac{dv_c(0^+)}{dt} = 0 = 4800B'_2 - 1400B'_1.$$

Hallando los valores correspondientes a  $B'_1$  y  $B'_2$  nos queda

$$B'_1 = -48 \text{ V, } B'_2 = -14 \text{ V.}$$

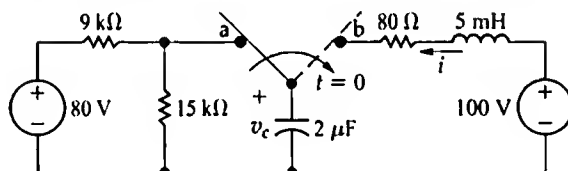
Por tanto, la solución correspondiente a  $v_c(t)$  es

$$v_c(t) = (48 - 48e^{-1400t} \cos 4800t - 14e^{-1400t} \sin 4800t), \quad t \geq 0.$$

## Evaluación del objetivo 2

- Ser capaz de determinar la respuesta natural y al escalón de los circuitos *RLC* serie.

- 8.7. El conmutador del circuito mostrado ha estado en la posición a durante un largo período de tiempo. En  $t = 0$ , se mueve a la posición b. Calcule (a)  $i(0^+)$ ; (b)  $v_c(0^+)$ ; (c)  $di(0^+)/dt$ ; (d)  $s_1$  y  $s_2$ , y (e)  $i(t)$  para  $t \geq 0$ .



## RESPUESTA

- (a) 0;
- (b) 50 V;
- (c) 10.000 A/s;
- (d)  $(-8000 + j6000) \text{ rad/s,}$   
 $(-8000 - j6000) \text{ rad/s;}$
- (e)  $(1,67e^{-8000t} \sin 6000t) \text{ A para } t \geq 0.$

- 8.8. Calcule  $v_c(t)$  para  $t \geq 0$  para el circuito del Problema de evaluación 8.7.

## RESPUESTA

$$[100 - e^{-8000t} (50 \cos 6000t + 66,67 \sin 6000t)] \text{ V para } t \geq 0.$$

**NOTA** Trate también de resolver los Problemas 8.40, 8.42 y 8.46 del capítulo.

## 8.5. Un circuito con dos amplificadores integradores

Un circuito que contenga dos amplificadores integradores conectados en cascada<sup>1</sup> es también un circuito de segundo orden; es decir, la tensión de salida del segundo integrador está relacionada con la tensión de entrada del primero mediante una ecuación diferencial de segundo orden. Comenzamos nuestro análisis de un circuito con dos amplificadores en cascada partiendo del circuito mostrado en la Figura 8.18.

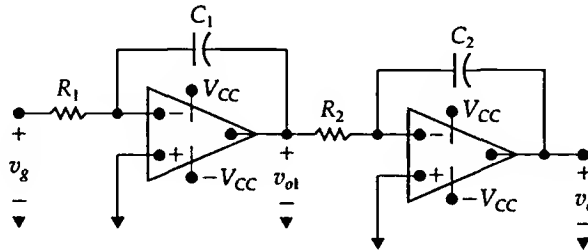


Figura 8.18. Dos amplificadores integradores conectados en cascada.

Asumimos que ambos amplificadores operacionales son ideales. La tarea consiste en escribir la ecuación diferencial que establece la relación entre  $v_o$  y  $v_g$ . Comenzamos nuestro análisis sumando las corrientes en el terminal de la entrada inversora del primer integrador. Puesto que el amplificador operacional es ideal,

$$\frac{0 - v_g}{R_1} + C_1 \frac{d}{dt}(0 - v_{o1}) = 0. \quad (8.70)$$

A partir de la Ecuación 8.70,

$$\frac{dv_{o1}}{dt} = -\frac{1}{R_1 C_1} v_g. \quad (8.71)$$

Ahora sumamos las corrientes que salen del terminal de la entrada inversora del segundo amplificador integrador:

$$\frac{0 - v_{o1}}{R_2} + C_2 \frac{d}{dt}(0 - v_o) = 0, \quad (8.72)$$

o bien

$$\frac{dv_o}{dt} = -\frac{1}{R_2 C_2} v_{o1}. \quad (8.73)$$

Diferenciando la Ecuación 8.73 se obtiene

$$\frac{d^2 v_o}{dt^2} = -\frac{1}{R_2 C_2} \frac{dv_{o1}}{dt}. \quad (8.74)$$

<sup>1</sup> En una conexión en cascada, la señal de salida del primer amplificador ( $v_{o1}$  en la Figura 8.18) es la señal de entrada del segundo amplificador.



Podemos determinar la ecuación diferencial que gobierna la relación entre  $v_o$  y  $v_g$  sustituyendo la Ecuación 8.71 en la Ecuación 8.74:

$$\frac{d^2 v_o}{dt^2} = \frac{1}{R_1 C_1} \frac{1}{R_2 C_2} v_g. \quad (8.75)$$

El Ejemplo 8.13 ilustra la determinación de la respuesta al escalón de un circuito que contiene dos amplificadores integradores conectados en cascada.

### EJEMPLO 8.13 Análisis de dos amplificadores integradores conectados en cascada

Suponga que no hay energía almacenada en el circuito de la Figura 8.19 en el momento en que la tensión de entrada  $v_g$  pasa instantáneamente de 0 a 25 mV.

- Halle la expresión correspondiente a  $v_o(t)$  para  $0 \leq t \leq t_{\text{sat}}$ .
- ¿Cuánto tiempo transcurre antes de que el circuito se sature?

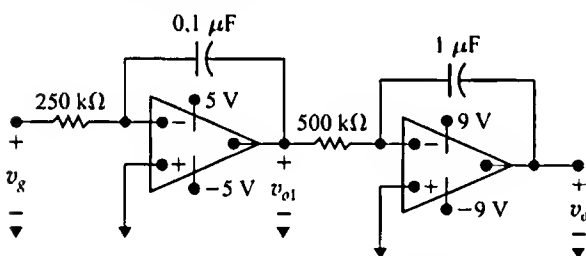


Figura 8.19. Circuito del Ejemplo 8.13.

### SOLUCIÓN

- La Figura 8.19 indica que los factores de amplificación son

$$\frac{1}{R_1 C_1} = \frac{1000}{(250)(0.1)} = 40$$

$$\frac{1}{R_2 C_2} = \frac{1000}{(500)(1)} = 2.$$

Ahora, como  $v_g = 25$  mV para  $t > 0$ , la Ecuación 8.75 queda

$$\frac{d^2 v_o}{dt^2} = (40)(2)(25 \times 10^{-3}) = 2.$$

Para hallar el valor de  $v_o$ , hacemos

$$g(t) = \frac{dv_o}{dt},$$

de donde

$$\frac{dg(t)}{dt} = 2 \quad \text{y} \quad dg(t) = 2dt.$$

De aquí se obtiene

$$\int_{g(0)}^{g(t)} dy = 2 \int_0^t dx,$$

con lo que

$$g(t) - g(0) = 2t.$$

Sin embargo,

$$g(0) = \frac{dv_o(0)}{dt} = 0,$$

porque la energía inicialmente almacenada en el circuito es cero y los amplificadores operacionales son ideales (véase el Problema 8.53). Entonces,

$$\frac{dv_o}{dt} = 2t \quad \text{y} \quad v_o = t^2 + v_o(0).$$

Pero  $v_o(0) = 0$ , por lo que la expresión correspondiente a  $v_o$  es

$$v_o = t^2, \quad 0 \leq t \leq t_{\text{sat}}.$$

- El segundo amplificador integrador se satura cuando  $v_o$  alcanza 9 V, lo cual suce-

de para  $t = 3$  s. Pero es posible que el primer amplificador integrador se sature antes del instante  $t = 3$  s. Para analizar esta posibilidad, utilizamos la Ecuación 8.71 para hallar  $dv_{o1}/dt$ :

$$\frac{dv_{o1}}{dt} = -40(25) \times 10^{-3} = -1.$$

Resolviendo para hallar el valor de  $v_{o1}$  se obtiene

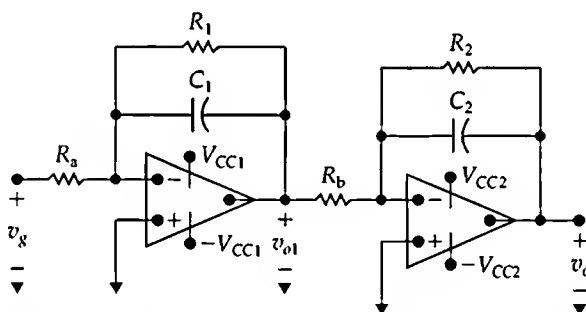
$$v_{o1} = -t.$$

Por tanto, en  $t = 3$  s,  $v_{o1} = -3$  V y, como la tensión de alimentación en el primer amplificador integrador es  $\pm 5$  V, el circuito se saturará cuando se sature el segundo amplificador. Después de que alguno de los dos amplificadores operacionales se satura, ya no podemos aplicar el modelo lineal para predecir el comportamiento del circuito.

**NOTA** Evalúe su comprensión de este material tratando de resolver el Problema 8.51 del capítulo.

## Dos amplificadores integradores con resistencias de realimentación

La Figura 8.20 muestra una variación del circuito mostrado en la Figura 8.18. Recuerde, de la Sección 7.7, que la razón de que se sature el amplificador operacional del amplificador integrador es la acumulación de carga en el condensador de realimentación. Aquí, conectamos una resistencia en paralelo con cada condensador de realimentación ( $C_1$  y  $C_2$ ) para resolver este problema. Vamos a volver a calcular la ecuación correspondiente a la tensión de salida,  $v_o$ , y a determinar el impacto que estas resistencias de realimentación tienen sobre los amplificadores integradores del Ejemplo 8.13.



**Figura 8.20.** Amplificadores integradores en cascada con resistencias de realimentación.

Comenzamos nuestro proceso de determinación de la ecuación diferencial de segundo orden que relaciona  $v_{o1}$  con  $v_g$  sumando las corrientes existentes en el nodo de la entrada inversora del primer integrador:

$$\frac{0 - v_g}{R_a} + \frac{0 - v_{o1}}{R_1} + C_1 \frac{d}{dt}(0 - v_{o1}) = 0. \quad (8.76)$$

Podemos simplificar la Ecuación 8.76, quedando

$$\frac{dv_{o1}}{dt} + \frac{1}{R_1 C_1} v_{o1} = \frac{-v_g}{R_a C_1}. \quad (8.77)$$

Por comodidad, definamos  $\tau_1 = R_1 C_1$  y escribamos la Ecuación 8.77 como

$$\frac{dv_{o1}}{dt} + \frac{v_{o1}}{\tau_1} = \frac{-v_g}{R_a C_1}. \quad (8.78)$$

El siguiente paso consiste en sumar las corrientes en el terminal de la entrada inversora del segundo integrador:

$$\frac{0 - v_{o1}}{R_b} + \frac{0 - v_o}{R_2} + C_2 \frac{d}{dt}(0 - v_o) = 0. \quad (8.79)$$

Podemos reescribir la Ecuación 8.79 como

$$\frac{dv_o}{dt} + \frac{v_o}{\tau_2} = \frac{-v_{o1}}{R_b C_2}, \quad (8.80)$$

donde  $\tau_2 = R_2 C_2$ . Diferenciando la Ecuación 8.80 se obtiene

$$\frac{d^2 v_o}{dt^2} + \frac{1}{\tau_2} \frac{dv_o}{dt} = -\frac{1}{R_b C_2} \frac{dv_{o1}}{dt}. \quad (8.81)$$

A partir de la Ecuación 8.78,

$$\frac{dv_{o1}}{dt} = \frac{-v_{o1}}{\tau_1} - \frac{v_g}{R_a C_1}, \quad (8.82)$$

y de la Ecuación 8.80,

$$v_{o1} = -R_b C_2 \frac{dv_o}{dt} - \frac{R_b C_2}{\tau_2} v_o. \quad (8.83)$$

Utilizamos las Ecuaciones 8.82 y 8.83 para eliminar  $dv_{o1}/dt$  de la Ecuación 8.81 y obtener la relación deseada:

$$\frac{d^2 v_o}{dt^2} + \left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2}\right) \frac{dv_o}{dt} + \left(\frac{1}{\tau_1 \tau_2}\right) v_o = \frac{v_g}{R_a C_1 R_b C_2}. \quad (8.84)$$

A partir de la Ecuación 8.84, la ecuación característica es

$$s^2 + \left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2}\right)s + \frac{1}{\tau_1 \tau_2} = 0. \quad (8.85)$$

Las raíces de la ecuación característica son reales y su valor es

$$s_1 = \frac{-1}{\tau_1}, \quad (8.86)$$

$$s_2 = \frac{-1}{\tau_2}. \quad (8.87)$$

El Ejemplo 8.14 ilustra el proceso de análisis de la respuesta al escalón de dos amplificadores integradores conectados en cascada cuando se añaden resistencias en paralelo con los condensadores de realimentación.

### EJEMPLO 8.14 Análisis de dos amplificadores integradores conectados en cascada con resistencias de realimentación

Los parámetros del circuito mostrado en la Figura 8.20 son  $R_a = 100 \text{ k}\Omega$ ,  $R_1 = 500 \text{ k}\Omega$ ,  $C_1 = 0,1 \text{ }\mu\text{F}$ ,  $R_b = 25 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 100 \text{ k}\Omega$  y  $C_2 = 1 \text{ }\mu\text{F}$ . La tensión de alimentación para cada amplificador operacional es  $\pm 6 \text{ V}$ . La señal de tensión ( $v_g$ ) para los amplificadores integradores conectados en cascada pasa de 0 a 250 mV en  $t = 0$ . No hay energía almacenada en los condensadores de realimentación en el momento de aplicar la señal.

- Determine la expresión numérica correspondiente a la ecuación diferencial que gobierna  $v_o$ .
- Calcule  $v_o(t)$  para  $t \geq 0$ .
- Determine la expresión numérica correspondiente a la ecuación diferencial que gobierna  $v_{o1}$ .
- Calcule  $v_{o1}(t)$  para  $t \geq 0$ .

#### SOLUCIÓN

- Partiendo de los valores numéricos de los parámetros del circuito, tenemos que  $\tau_1 = R_1 C_1 = 0,05 \text{ s}$ ;  $\tau_2 = R_2 C_2 = 0,10 \text{ s}$  y  $v_g/R_a C_1 R_b C_2 = 1000 \text{ V/s}^2$ . Sustituyendo estos valores en la Ecuación 8.84, se obtiene

$$\frac{d^2 v_o}{dt^2} + 30 \frac{dv_o}{dt} + 200 v_o = 1000.$$

- Las raíces de la ecuación característica son  $s_1 = -20 \text{ rad/s}$  y  $s_2 = -10 \text{ rad/s}$ . El valor final de  $v_o$  es la tensión de entrada multiplicada por la ganancia de cada etapa, porque los condensadores se comportan como circuitos abiertos cuando  $t \rightarrow \infty$ . Por tanto,

$$v_o(\infty) = (250 \times 10^{-3}) \frac{(-500)}{100} \frac{(-100)}{25} = 5 \text{ V}.$$

La solución correspondiente a  $v_o$  tendrá, por tanto, la forma siguiente:

$$v_o = 5 + A'_1 e^{-10t} + A'_2 e^{-20t}.$$

Como  $v_o(0) = 0$  y  $dv_o(0)/dt = 0$ , los valores numéricos de  $A'_1$  y  $A'_2$  son  $A'_1 = -10 \text{ V}$  y  $A'_2 = 5 \text{ V}$ . Por tanto, la solución correspondiente a  $v_o$  es

$$v_o(t) = (5 - 10e^{-10t} + 5e^{-20t}) \text{ V},$$

$$t \geq 0.$$

Esta solución supone que ninguno de los dos amplificadores operacionales se satura. Ya hemos observado que el valor final de  $v_o$  es 5 V, que es inferior a 6 V; por tanto, el segundo amplificador operacional no se satura. El valor final de  $v_{o1}$  es  $(250 \times 10^{-3})(-500/100)$ , es decir,  $-1,25 \text{ V}$ . Por tanto, el primer amplificador operacional no se satura y nuestra suposición y nuestra solución son correctas.

- Sustituyendo los valores numéricos de los parámetros en la Ecuación 8.78 obtenemos la ecuación diferencial deseada:

$$\frac{dv_{o1}}{dt} + 20v_{o1} = -25.$$

- Ya hemos observado los valores inicial y final de  $v_{o1}$ , así como el de la constante de relajación  $\tau_1$ . Por tanto, podemos escribir la solución de acuerdo con la técnica desarrollada en la Sección 7.4:

$$v_{o1} = -1,25 + [0 + (1,25)]e^{-20t}$$

$$= -1,25 + 1,25e^{-20t} \text{ V},$$

$$t \geq 0.$$

**NOTA** Evalúe su comprensión de este material tratando de resolver el Problema 8.52 del capítulo.

## Perspectiva práctica

### Un circuito de ignición

Volvamos ahora al sistema de ignición convencional que hemos presentado al comienzo del capítulo. En la Figura 8.21 se muestra un diagrama de circuito del sistema. Considere las características del circuito que proporcionan la energía para hacer que entre en ignición la mezcla de combustible y aire contenida en el cilindro. En primer lugar, la tensión máxima disponible en la bujía,  $v_{sp}$ , debe ser lo suficientemente alta para provocar la ignición del combustible. En segundo lugar, la tensión entre los terminales del condensador debe estar limitada para impedir la aparición de arcos de descarga en el conmutador o en los puntos de distribución. En tercer lugar, la corriente en el devanado primario del autotransformador debe permitir que se almacene suficiente energía en el sistema para provocar la ignición de la mezcla de combustible y aire contenida en el cilindro. Recuerde que la energía almacenada en el circuito en el momento de la conmutación es proporcional al cuadrado de la corriente en el devanado primario, es decir,  $\omega_0 = \frac{1}{2} Li^2(0)$ .

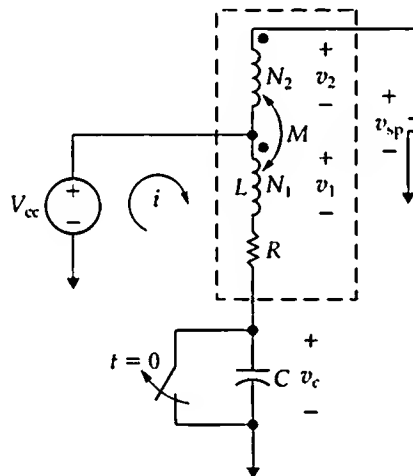


Figura 8.21. Diagrama de circuito del sistema de ignición convencional para automóviles.

### EJEMPLO

- Calcule la tensión máxima en la bujía, suponiendo los siguientes valores para el circuito de la Figura 8.21:  $V_{cc} = 12 \text{ V}$ ,  $R = 4 \Omega$ ,  $L = 3 \text{ mH}$ ,  $C = 0,4 \mu\text{F}$  y  $a = 100$ .
- ¿Qué distancia de separación deberá haber entre los contactos del conmutador para impedir que aparezcan arcos de descarga en el instante en que la tensión de la bujía alcanza su máximo?

### Solución

- Analicemos el circuito de la Figura 8.21 para determinar la ecuación correspondiente a la tensión de la bujía,  $v_{sp}$ . Vamos a limitar nuestro análisis a un estudio de las tensiones existentes en el circuito antes de la actuación de la bujía. Supondremos que la corriente en el devanado primario en el momento de la conmutación tiene su valor máximo posible  $V_{cc}/R$ , donde  $R$  es la resistencia total en el circuito primario. También supondremos que el cociente de la tensión en el

devanado secundario ( $v_2$ ) dividida entre la tensión en el devanado primario ( $v_1$ ) es igual a la relación de vueltas  $N_2/N_1$ . Podemos justificar esta suposición como sigue. Con el circuito secundario abierto, la tensión inducida en el devanado secundario es

$$v_2 = M \frac{di}{dt}, \quad (8.88)$$

y la tensión inducida en el devanado primario es

$$v_1 = L \frac{di}{dt}. \quad (8.89)$$

De las Ecuaciones 8.88 y 8.89 se sigue que

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{M}{L}. \quad (8.90)$$

Es razonable suponer que la permeancia es igual para los flujos  $\phi_{11}$  y  $\phi_{21}$  en el autotransformador con núcleo de hierro; por tanto, la Ecuación 8.90 se reduce a

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{N_1 N_2 \mathcal{P}}{N_1^2 \mathcal{P}} = \frac{N_2}{N_1} = a. \quad (8.91)$$

Nos hallamos ya en disposición de para analizar las tensiones existentes en el circuito de ignición. Los valores de  $R$ ,  $L$  y  $C$  son tales que, cuando se abre el conmutador, la respuesta en corriente en el devanado primario está subamortiguada. Utilizando las técnicas desarrolladas en la Sección 8.4 y suponiendo que  $t = 0$  en el momento de abrir el conmutador, la expresión correspondiente a la corriente de la bobina primaria es

$$i = \frac{V_{cc}}{R} e^{-\alpha t} \left[ \cos \omega_d t + \left( \frac{\alpha}{\omega_d} \right) \sin \omega_d t \right], \quad (8.92)$$

donde

$$\alpha = \frac{R}{2L},$$

$$\omega_d = \sqrt{\frac{1}{LC} - \alpha^2}.$$

[Véase el Problema 8.58(a)]. La tensión inducida en el devanado primario del autotransformador es

$$v_1 = L \frac{di}{dt} = \frac{-V_{cc}}{\omega_d RC} e^{-\alpha t} \sin \omega_d t. \quad (8.93)$$

[Véase el Problema 8.58(b)]. De la Ecuación 8.91 se deduce que

$$v_2 = \frac{-a V_{cc}}{\omega_d RC} e^{-\alpha t} \sin \omega_d t. \quad (8.94)$$

La tensión entre los terminales del condensador puede hallarse utilizando la relación

$$v_c = \frac{1}{C} \int_0^t i dx + v_c(0) \quad (8.95)$$

O sumando las tensiones existentes alrededor de la malla que contiene el devanado primario:

$$v_c = V_{cc} - iR - L \frac{di}{dt}. \quad (8.96)$$

En cualquiera de los casos, encontramos que

$$v_c = V_{cc} [1 - e^{-\alpha t} \cos \omega_d t + K e^{-\alpha t} \sen \omega_d t], \quad (8.97)$$

donde

$$K = \frac{1}{\omega_d} \left( \frac{1}{RC} - \alpha \right).$$

[Véase el Problema 8.58(c)]. Como puede verse en la Figura 8.21, la tensión en la bujía es

$$\begin{aligned} v_{sp} &= V_{cc} + v_2 \\ &= V_{cc} - \frac{a V_{cc}}{\omega_d RC} e^{-\alpha t} \sen \omega_d t \\ &= V_{cc} \left[ 1 - \frac{a}{\omega_d RC} e^{-\alpha t} \sen \omega_d t \right]. \end{aligned} \quad (8.98)$$

Para hallar el valor máximo de  $v_{sp}$ , calculamos el instante de tiempo positivo más pequeño para el que  $dv_{sp}/dt$  es cero y luego evaluamos  $v_{sp}$  en dicho instante. La expresión correspondiente a  $t_{\text{máx}}$  es

$$t_{\text{máx}} = \frac{1}{\omega_d} \tan^{-1} \left( \frac{\omega_d}{\alpha} \right). \quad (8.99)$$

(Véase el Problema 8.59). Para los valores de los componentes indicados en el enunciado del problema, tendremos que

$$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{4 \times 10^3}{6} = 666,67 \text{ rad/s},$$

y

$$\omega_d = \sqrt{\frac{10^9}{1,2} - (666,67)^2} = 28.859,81 \text{ rad/s}.$$

Sustituyendo estos valores en la Ecuación 8.99 se obtiene

$$t_{\text{máx}} = 53,63 \mu\text{s}.$$

Ahora usamos la Ecuación 8.98 para hallar la tensión máxima en la bujía,  $v_{sp}(t_{\text{máx}})$ :

$$v_{sp}(t_{\text{máx}}) = -25.975,69 \text{ V}.$$

- b) La tensión entre los terminales del condensador en  $t_{\text{máx}}$  se obtiene a partir de la Ecuación 8.97, que nos da

$$v_c(t_{\text{máx}}) = 262,15 \text{ V.}$$

La constante dieléctrica del aire es aproximadamente igual a  $3 \times 10^6 \text{ V/m}$ , por lo que este resultado nos dice que los contactos del conmutador deben estar separados una distancia igual a  $262,15/3 \times 10^6$ , es decir,  $87,38 \mu\text{m}$ , para evitar que se produzcan arcos de descarga entre los contactos en  $t_{\text{máx}}$ .

En el diseño y prueba de sistemas de ignición, es preciso tener en cuenta la existencia de mezclas no uniformes de combustible y aire. También es preciso tener en cuenta otros factores, como la ampliación del hueco existente en el punto de descarga de la bujía a lo largo del tiempo, debido a la erosión de los electrodos; la relación existente entre la tensión disponible en la bujía y la velocidad del motor; el tiempo necesario para que la corriente en el devanado primario alcance su valor inicial después de cerrar el conmutador, y el mantenimiento necesario para garantizar una operación fiable.

Podemos utilizar el análisis precedente de un sistema de ignición convencional para explicar por qué la conmutación electrónica ha sustituido a la conmutación mecánica en los automóviles de hoy en día. En primer lugar, la necesidad de conseguir menores consumos de combustible y menores emisiones de gases impone la utilización de bujías con separaciones mayores. Esto, a su vez, requiere una tensión de bujía más alta. Estas tensiones más altas (hasta 40 kV) no pueden conseguirse mediante conmutación mecánica. La conmutación electrónica también permite disponer de corrientes iniciales más altas en el devanado primario del autotransformador. Esto significa que la energía inicialmente almacenada en el sistema es mayor y que, por tanto, el sistema admite un mayor rango de mezclas de combustible y aire y de condiciones de operación del motor. Finalmente, el circuito de conmutación electrónica elimina la necesidad de que existan puntos de contacto. Esto implica que los efectos perniciosos de las potenciales descargas en los puntos de contacto pueden evitarse completamente en el sistema.

**NOTA** *Evalúe su comprensión de la Perspectiva práctica tratando de resolver los Problemas 8.60 y 8.61 del capítulo.*

## RESUMEN

- La ecuación característica de los circuitos *RLC* serie y paralelo tiene la forma

$$s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0.$$

donde  $\alpha = 1/2RC$  para el circuito paralelo,  $\alpha = R/2L$  para el circuito serie y  $\omega_0^2 = 1/LC$  tanto para el circuito paralelo como para el circuito serie (véanse las páginas 350 y 371).

- Las raíces de la ecuación característica son

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}.$$

(Véase la página 351).

- La forma de las respuestas natural y al escalón de los circuitos *RLC* serie y paralelo dependen de los valores de  $\alpha^2$  y  $\omega_0^2$ ; dicha respuesta puede ser **sobreamortiguada**, **subamortiguada** o **críticamente amortiguada**. Estos términos describen el impacto del elemento de disipación ( $R$ ) sobre la respuesta. La **frecuencia de Neper**,  $\alpha$ , refleja el efecto de  $R$ . (Véase la página 352).
- La respuesta de un circuito de segundo orden es sobreamortiguada, subamortiguada-



**Tabla 8.2.** La respuesta de un circuito de segundo orden puede ser sobreamortiguada, subamortiguada o críticamente amortiguada.

EL CIRCUITO ES	CUANDO	NATURALEZA CUALITATIVA DE LA RESPUESTA
Sobreamortiguado	$\alpha^2 > \omega_0^2$	La tensión o la corriente se aproximan a su valor final sin oscilaciones.
Subamortiguado	$\alpha^2 < \omega_0^2$	La tensión o la corriente oscilan alrededor de su valor final.
Críticamente amortiguado	$\alpha^2 = \omega_0^2$	La tensión o la corriente están al borde de oscilar alrededor de su valor final.

**Tabla 8.3.** Al determinar la respuesta natural de un circuito de segundo orden, primero determinamos si está sobreamortiguado, subamortiguado o críticamente amortiguado y luego resolvemos las ecuaciones apropiadas.

AMORTIGUAMIENTO	ECUACIONES DE LA RESPUESTA NATURAL	ECUACIONES DE LOS COEFICIENTES
Sobreamortiguado	$x(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$	$x(0) = A_1 + A_2;$ $dx/dt(0) = A_1 s_1 + A_2 s_2$
Subamortiguado	$x(t) = (B_1 \cos \omega_d t + B_2 \sen \omega_d t) e^{-\alpha t}$	$x(0) = B_1;$ $dx/dt(0) = -\alpha B_1 + \omega_d B_2,$ donde $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$
Críticamente amortiguado	$x(t) = (D_1 t + D_2) e^{-\alpha t}$	$x(0) = D_2;$ $dx/dt(0) = D_1 - \alpha D_2$

da o críticamente amortiguada según los criterios expresados en la Tabla 8.2.

- Al determinar la **respuesta natural** de un circuito de segundo orden, primero determinamos si está sobreamortiguado, subamortiguado o críticamente amortiguado y luego resolvemos las ecuaciones apropiadas, que se indican en la Tabla 8.3.
- Al determinar la **respuesta al escalón** de un circuito de segundo orden, aplicamos las ecuaciones apropiadas dependiendo del tipo de amortiguamiento, como se muestra en la Tabla 8.4.
- Para cada una de las tres formas de respuesta, los coeficientes desconocidos (es

decir, los valores  $A$ ,  $B$  y  $D$ ), se obtienen evaluando el circuito para hallar el valor inicial de la respuesta,  $x(0)$ , y el valor inicial de la primera derivada de la respuesta,  $dx(0)/dt$ .

- Cuando se conectan en cascada dos amplificadores integradores con amplificadores operacionales ideales, la tensión de salida del segundo integrador está relacionada con la tensión de entrada del primero por una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden. Por tanto, las técnicas desarrolladas en este capítulo pueden emplearse para analizar el comportamiento de un integrador conectado en cascada (véase la página 376).

- Podemos resolver las limitaciones de los amplificadores integradores simples (la saturación del amplificador operacional debido a la acumulación de carga en el

condensador de realimentación) situando una resistencia en paralelo con el condensador en el camino de realimentación (véase la página 378).

**Tabla 8.4.** Al determinar una respuesta al escalón de un circuito de segundo orden, aplicamos las ecuaciones apropiadas dependiendo del tipo de amortiguamiento.

AMORTIGUAMIENTO	ECUACIONES DE LA RESPUESTA AL ESCALÓN <sup>a</sup>	ECUACIONES DE LOS COEFICIENTES
Sobreamortiguado	$x(t) = X_f + A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$	$x(0) = X_f + A_1 + A_2$ $dx/dt(0) = A_1 s_1 + A_2 s_2$
Subamortiguado	$x(t) = X_f + (B_1 \cos \omega_d t + B_2 \sin \omega_d t) e^{-\alpha t}$	$x(0) = X_f + B_1$ $dx/dt(0) = -\alpha B_1 + \omega_d B_2$
Críticamente amortiguado	$x(t) = X_f + (D_1 t + D_2) e^{-\alpha t}$	$x(0) = X_f + D_2$ $dx/dt(0) = D_1 - \alpha D_2$

<sup>a</sup> donde  $X_f$  es el valor final de  $x(t)$ .

## PROBLEMAS

- 8.1. La resistencia, inductancia y capacidad en un circuito *RLC* paralelo son de 1000  $\Omega$ , 12,5 H y 2  $\mu\text{F}$ , respectivamente.
- Calcule las raíces de la ecuación característica que describe la respuesta en tensión del circuito.
  - ¿Es dicha respuesta sobreamortiguada, subamortiguada o críticamente amortiguada?
  - ¿Qué valor de  $R$  nos da una frecuencia amortiguada de 120 rad/s?
  - ¿Cuáles son las raíces de la ecuación característica para el valor de  $R$  hallado en el apartado (c)?
  - ¿Qué valor de  $R$  proporcionará una respuesta críticamente amortiguada?

- 8.2. La tensión inicial en el condensador de 0,1  $\mu\text{F}$  en el circuito mostrado en la Figura 8.1 es de 24 V. La corriente inicial en la bobina es cero. La respuesta en tensión para  $t \geq 0$  es

$$v(t) = -8e^{-250t} + 32e^{-1000t} \text{ V.}$$

- Determine los valores numéricos de  $R$ ,  $L$ ,  $\alpha$  y  $\omega_0$ .
  - Calcule  $i_R(t)$ ,  $i_L(t)$  e  $i_C(t)$  para  $t \geq 0^+$ .
- 8.3. Los elementos de circuito en el circuito de la Figura 8.1 son  $R = 200 \Omega$ ,  $C = 0,2 \mu\text{F}$  y  $L = 50 \text{ mH}$ . La corriente inicial en la bobina es de  $-45 \text{ mA}$  y la tensión inicial en el condensador es de 15 V.
- Calcule la corriente inicial en cada rama del circuito.
  - Calcule  $v(t)$  para  $t \geq 0$ .

c) Calcule  $i_L(t)$  para  $t \geq 0$ .

- 8.4. Incrementamos la resistencia del Problema 8.3 a  $312,5 \Omega$ . Calcule la expresión correspondiente a  $v(t)$  para  $t \geq 0$ . ☐

- 8.5. Incrementamos la resistencia del Problema 8.3 a  $250 \Omega$ . Calcule la expresión correspondiente a  $v(t)$  para  $t \geq 0$ . ☐

- 8.6. La respuesta natural para el circuito mostrado en la Figura 8.1 es

$$v(t) = 3(e^{-100t} + e^{-900t}) \text{ V}, \quad t \geq 0.$$

Si  $L = (40/9) \text{ H}$  y  $C = 2,5 \mu\text{F}$ , calcule  $i_L(0^+)$  en miliamperios.

- 8.7. La respuesta natural para el circuito mostrado en la Figura 8.1 es

$$v(t) = 100e^{-20.000t}(\cos 15.000t - 2 \sin 15.000t) \text{ V}, \quad t \geq 0.$$

teniendo el condensador una capacidad de  $0,04 \mu\text{F}$ . Calcule (a)  $L$ ; (b)  $R$ ; (c)  $V_0$ ; (d)  $I_0$  y (e)  $i_L(t)$ .

- 8.8. El valor inicial de la tensión  $v$  en el circuito de la Figura 8.1 es de  $15 \text{ V}$ , y el valor inicial de la corriente en el condensador,  $i_C(0^+)$ , es de  $45 \text{ mA}$ . Sabemos que la ecuación de la corriente del condensador es

$$i_C(t) = A_1 e^{-200t} + A_2 e^{-800t}, \quad t \geq 0^+,$$

cuando  $R$  vale  $250 \Omega$ . Determine

- a) el valor de  $\alpha$ ,  $\omega_0$ ,  $L$ ,  $C$ ,  $A_1$  y  $A_2$

$$\left( \text{Sugerencia: } \frac{di_C(0)}{dt} = -\frac{di_L(0)}{dt} - \frac{di_R(0)}{dt} = \frac{v(0)}{L} - \frac{1}{R} \frac{i_C(0^+)}{C} \right)$$

- b) la ecuación correspondiente a  $v(t)$ ,  $t \geq 0$ ,

- c) la ecuación correspondiente a  $i_R(t)$ ,  $t \geq 0$ ,

- d) la ecuación correspondiente a  $i_L(t)$ ,  $t \geq 0$ .

- 8.9. Sabemos que la respuesta en tensión del circuito de la Figura 8.1 es

$$v(t) = D_1 t e^{-500t} + D_2 e^{-500t}, \quad t \geq 0.$$

La corriente inicial en la bobina ( $I_0$ ) es  $-10 \text{ mA}$  y la tensión inicial en el condensador ( $V_0$ ) es  $8 \text{ V}$ . La bobina tiene una inductancia de  $4 \text{ H}$ .

- a) Determine el valor de  $R$ ,  $C$ ,  $D_1$  y  $D_2$ .

- b) Calcule  $i_C(t)$  para  $t \geq 0^+$ .

- 8.10. En el circuito de la Figura 8.1,  $R = 12,5 \Omega$ ,  $L = (50/101) \text{ H}$ ,  $C = 0,08 \text{ F}$ ,  $V_0 = 0 \text{ V}$  e  $I_0 = -4 \text{ A}$ . ☐

- a) Determine  $v(t)$  para  $t \geq 0$ .

- b) Calcule los tres primeros valores de  $t$  para los cuales  $dv/dt$  es cero. Vamos a designar  $t_1$ ,  $t_2$  y  $t_3$  a estos valores de  $t$ .

- c) Demuestre que  $t_3 - t_1 = T_d$ .

- d) Demuestre que  $t_2 - t_1 = T_d/2$ .

- e) Calcule  $v(t_1)$ ,  $v(t_2)$  y  $v(t_3)$ .  
 f) Dibuje  $v(t)$  en función de  $t$  para  $0 \leq t \leq t_2$ .

**8.11.** a) Calcule  $v(t)$  para  $t \geq 0$  en el circuito del Problema 8.10 si eliminamos la resistencia de  $12,5 \Omega$  del circuito.



- b) Calcule la frecuencia de  $v(t)$  en hercios.  
 c) Calcule la amplitud máxima de  $v(t)$  en voltios.

**8.12.** En el circuito mostrado en la Figura 8.1, ponemos en paralelo una bobina de  $12,5 \text{ H}$  y un condensador de  $3,2 \text{ nF}$  y ajustamos la resistencia  $R$  para obtener un amortiguamiento crítico, siendo  $V_0 = 100 \text{ V}$  e  $I_0 = 6,4 \text{ mA}$ .



- a) Calcule el valor numérico de  $R$ .  
 b) Calcule  $v(t)$  para  $t \geq 0$ .  
 c) Calcule  $v(t)$  cuando  $i_C(t) = 0$ .  
 d) ¿Qué porcentaje de la energía inicialmente almacenada permanecerá almacenada en el circuito en el momento en que  $i_C(t)$  sea 0?

**8.13.** Cambiemos la resistencia del circuito del Ejemplo 8.4 por otra de valor  $3200 \Omega$ .



- a) Determine la expresión numérica correspondiente a  $v(t)$  cuando  $t \geq 0$ .  
 b) Dibuje  $v(t)$  en función de  $t$  para el intervalo de tiempo  $0 \leq t \leq 7 \text{ ms}$ . Compare esta respuesta con la del Ejemplo 8.4 ( $R = 20 \text{ k}\Omega$ ) y el Ejemplo 8.5 ( $R = 4 \text{ k}\Omega$ ). En particular, compare los valores de pico de  $v(t)$  y los instantes en que estos valores de pico se producen.

**8.14.** Suponga que escribimos la respuesta en tensión subamortiguada del circuito de la Figura 8.1 como

$$v(t) = (A_1 + A_2)e^{-\alpha t} \cos \omega_d t + j(A_1 - A_2)e^{-\alpha t} \sin \omega_d t.$$

El valor inicial de la corriente en la bobina es  $I_0$  y el valor inicial de la tensión del condensador es  $V_0$ . Demuestre que  $A_2$  es el conjugado de  $A_1$ . (Sugerencia: utilice el mismo proceso que se ha empleado en el texto para calcular  $A_1$  y  $A_2$ ).

**8.15.** Demuestre que los resultados obtenidos en el Problema 8.14 (es decir, las expresiones correspondientes a  $A_1$  y  $A_2$ ) son coherentes con las Ecuaciones 8.30 y 8.31.

**8.16.** Los dos conmutadores del circuito de la Figura P8.16 operan sincronamente. Cuando el conmutador 1 está en la posición a, el conmutador 2 se encuentra en la posición d. Cuando el conmutador 1 se mueve a la posición b, el conmutador 2 se mueve a la posición c. El conmutador 1 ha estado en la posición a durante un largo período de tiempo. En  $t = 0$ , los conmutadores se mueven a sus posiciones alternativas. Determine  $v_o(t)$  para  $t \geq 0$ .

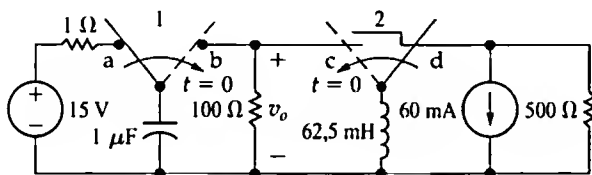


Figura P8.16

**8.17.** La resistencia del circuito de la Figura P8.16 se incrementa de  $100 \Omega$  a  $200 \Omega$ . Determine  $v_o(t)$  para  $t > 0$ .



- 8.18. La resistencia del circuito de la Figura P8.16 se incrementa de  $100\ \Omega$  a  $125\ \Omega$ . Determine  $v_o(t)$  para  $t \geq 0$ . ☐

- 8.19. El conmutador del circuito de la Figura P8.19 ha estado en la posición a durante un largo período de tiempo. En  $t = 0$ , el conmutador se mueve instantáneamente a la posición b. Determine  $v_o(t)$  para  $t \geq 0$ . ☐

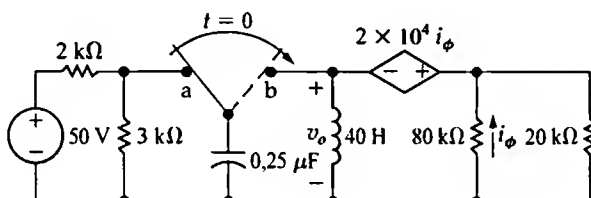


Figura P8.19

- 8.20. Para el circuito del Ejemplo 8.6, calcule, para  $t \geq 0$ , (a)  $v(t)$ ; (b)  $i_R(t)$  y (c)  $i_C(t)$ . ☐

- 8.21. Para el circuito del Ejemplo 8.7, calcule, para  $t \geq 0$ , (a)  $v(t)$  y (b)  $i_C(t)$ . ☐

- 8.22. Para el circuito del Ejemplo 8.8, calcule  $v(t)$  para  $t \geq 0$ . ☐

- 8.23. El conmutador del circuito de la Figura P8.23 ha estado abierto un largo período de tiempo antes de cerrarse en  $t = 0$ . Calcule  $i_L(t)$  para  $t \geq 0$ . ☐

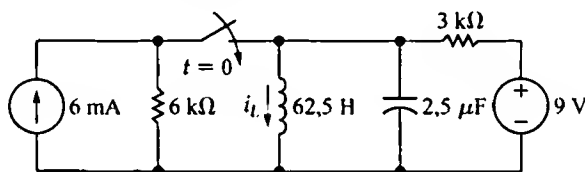


Figura P8.23

- 8.24. Suponga que, en el instante en que se aplica la fuente de corriente continua de 66 mA al circuito de la Figura P8.24, la corriente inicial en la bobina de 50 mH es  $-45\text{ mA}$ , y suponga también que la tensión inicial en el condensador es de 15 V (positiva en el terminal superior). Determine la expresión correspondiente a  $i_L(t)$  para  $t \geq 0$  si  $R$  es igual a  $200\ \Omega$ . ☐

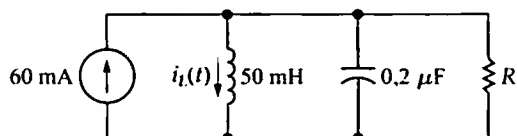


Figura P8.24

- 8.25. La resistencia del circuito de la Figura P8.24 se incrementa a  $312,5\ \Omega$ . Determine  $i_L(t)$  para  $t \geq 0$ . ☐

- 8.26. La resistencia del circuito de la Figura P8.24 se cambia por otra de  $250\ \Omega$ . Determine  $i_L(t)$  para  $t \geq 0$ . ☐

- 8.27. Suponga que no hay energía almacenada en el circuito de la Figura P8.27 cuando se cierra el conmutador en  $t = 0$ . Determine  $v_o(t)$  para  $t \geq 0$ .

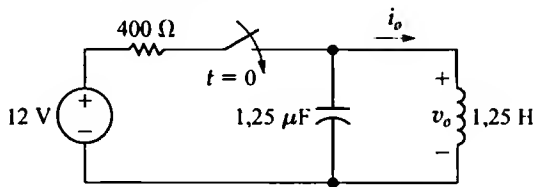


Figura P8.27

- 8.28. a) Para el circuito de la Figura P8.27, determine  $i_o(t)$  para  $t \geq 0$ .  
 b) Demuestre que la solución obtenida para  $i_o$  es coherente con la solución obtenida para  $v_o$  en el Problema 8.27.



- 8.29. El conmutador en el circuito de la Figura P8.29 ha estado abierto durante un largo período de tiempo antes de cerrarse en  $t = 0$ . Determine  $v_o(t)$  para  $t \geq 0$ .

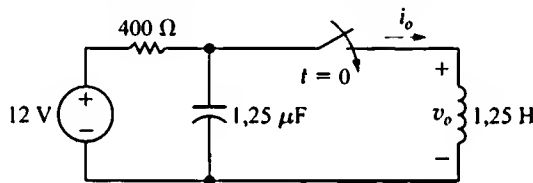


Figura P8.29

- 8.30. a) Para el circuito de la Figura P8.29, determine  $i_o$  para  $t \geq 0$ .  
 b) Demuestre que la solución obtenida para  $i_o$  es coherente con la solución obtenida para  $v_o$  en el Problema 8.29.



- 8.31. El conmutador del circuito de la Figura P8.31 ha estado abierto durante un largo período de tiempo antes de cerrarse en  $t = 0$ . Determine  $v_o$  para  $t \geq 0$ .

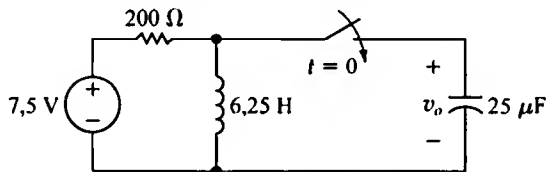


Figura P8.31

- 8.32. El conmutador del circuito de la Figura P8.32 ha estado abierto durante un largo período de tiempo antes de cerrarse en  $t = 0$ . Determine



- a)  $v_o(t)$  para  $t \geq 0^+$ ,  
 b)  $i_L(t)$  para  $t \geq 0$ .

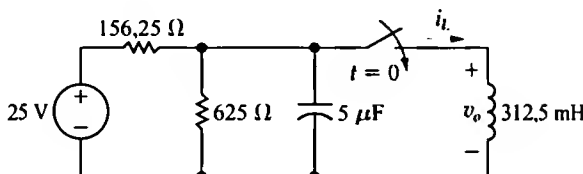


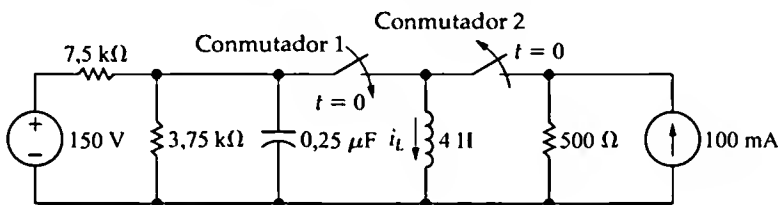
Figura 8.32

**8.33.** Utilizando el circuito de la Figura P8.32



- Calcule la energía total suministrada a la bobina.
- Calcule la energía total suministrada a la resistencia equivalente.
- Calcule la energía total suministrada al condensador.
- Calcule la energía total suministrada por la fuente de corriente equivalente.
- Compruebe los resultados de los apartados (a)-(d) aplicando el principio de conservación de la energía.

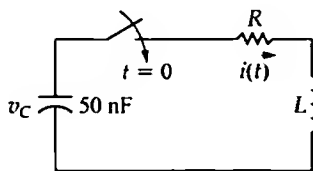
**8.34.** Los conmutadores 1 y 2 del circuito de la Figura P8.34 están sincronizados. Cuando se abre el conmutador 1, el conmutador 2 se cierra, y viceversa. El conmutador 1 ha estado abierto durante un largo periodo de tiempo antes de cerrarse en  $t = 0$ . Determine  $i_L(t)$  para  $t \geq 0$ .



**Figura P8.34**

**8.35.** La energía inicialmente almacenada en el condensador de 50 nF del circuito de la Figura P8.35 es de 90 μJ con  $v_C(0^+) > 0$ . La energía inicialmente almacenada en la bobina es 0. Las raíces de la ecuación característica que describe el comportamiento natural de la corriente  $i$  son  $-1000 \text{ s}^{-1}$  y  $-4000 \text{ s}^{-1}$ .

- Determine los valores numéricos de  $R$  y  $L$ .
- Determine los valores numéricos de  $i(0)$  y  $di(0)/dt$  inmediatamente después de cerrar el conmutador.
- Calcule  $i(t)$  para  $t \geq 0$ .
- ¿Cuántos microsegundos después de cerrarse el conmutador alcanza la corriente su valor máximo?
- ¿Cuál es el máximo valor de  $i$  en miliamperios?
- Determine  $v_L(t)$  para  $t \geq 0$ .



**Figura P8.35**

**8.36.** La corriente en el circuito de la Figura 8.3 es

$$i = B_1 e^{-2000t} \cos 1500t + B_2 e^{-2000t} \sin 1500t, \quad t \geq 0.$$

El condensador tiene un valor de 80 nF, el valor inicial de la corriente es de 7,5 mA y la tensión inicial en el condensador es de  $-30 \text{ V}$ . Calcule los valores de  $R$ ,  $L$ ,  $B_1$  y  $B_2$ .

**8.37.** Determine la tensión entre los terminales del condensador de 80 nF en el circuito descrito en el Problema 8.36. Suponga que la polaridad de referencia de la tensión del condensador es positiva en el terminal superior.

- 8.38.** En el circuito de la Figura P8.38, se ajusta la resistencia para obtener un amortiguamiento crítico. La tensión inicial en el condensador es de 20 V y la corriente inicial en la bobina es de 30 mA.



- Calcule el valor numérico de  $R$ .
- Calcule los valores numéricos de  $i$  y  $di/dt$  inmediatamente después de cerrarse el conmutador.
- Calcule  $v_C(t)$  para  $t \geq 0$ .

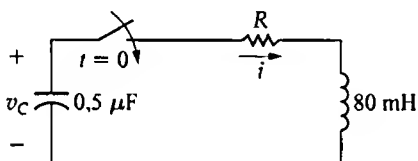


Figura P8.38

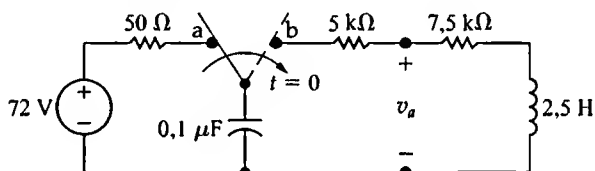


Figura P8.39

- 8.40.** El conmutador de tipo «hacer antes de romper» del circuito mostrado en la Figura P8.40 ha estado en la posición a durante un largo período de tiempo. En  $t = 0$ , el conmutador se mueve instantáneamente a la posición b. Determine  $i(t)$  para  $t \geq 0$ .



- 8.41.** El conmutador del circuito mostrado en la Figura P8.41 ha estado cerrado durante un largo período de tiempo. El conmutador se abre en  $t = 0$ . Determine  $v_o(t)$  para  $t \geq 0$ .

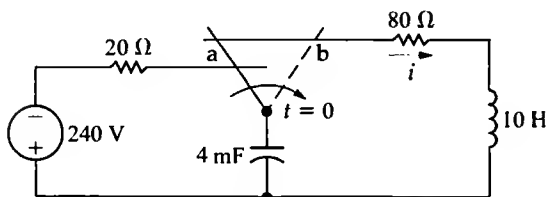


Figura P8.40

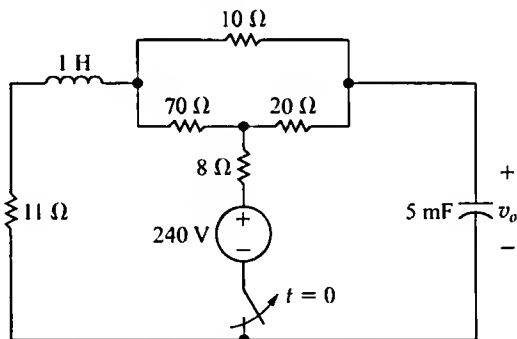


Figura P8.41

- 8.42** El conmutador del circuito mostrado en la Figura P8.42 ha estado cerrado durante un largo período de tiempo. El conmutador se abre en  $t = 0$ . Determine



- $i_o(t)$  para  $t \geq 0$ .
- $v_o(t)$  para  $t \geq 0$ .



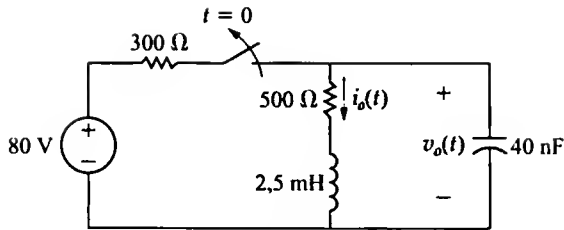


Figura P8.42

- 8.43.** La energía inicialmente almacenada en el circuito de la Figura P8.43 es cero. Determine  $v_o(t)$  para  $t \geq 0$ .

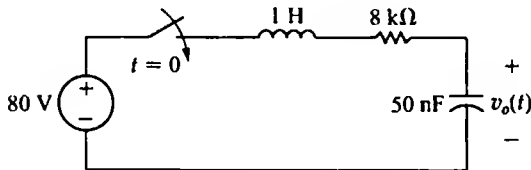


Figura P8.43.

- 8.44.** Los dos conmutadores del circuito mostrado en la Figura P8.44 operan de forma síncrona. Cuando el conmutador 1 está en la posición a, el conmutador 2 está cerrado. Cuando el conmutador 1 está en la posición b, el conmutador 2 está abierto. El conmutador 1 ha estado en la posición a durante un largo período de tiempo. En  $t = 0$ , se mueve instantáneamente a la posición b. Determine  $v_C(t)$  para  $t \geq 0$ .

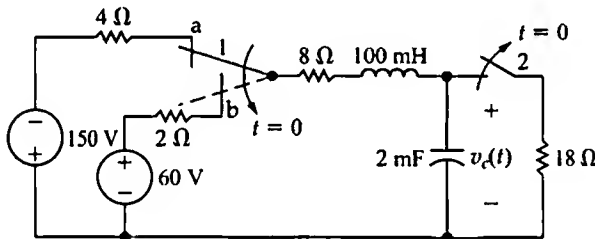


Figura P8.44

- 8.45.** El circuito mostrado en la Figura P8.45 ha estado en operación durante un largo período de tiempo. En  $t = 0$ , la tensión se incrementa súbitamente a 250 V. Determine  $v_o(t)$  para  $t \geq 0$ .

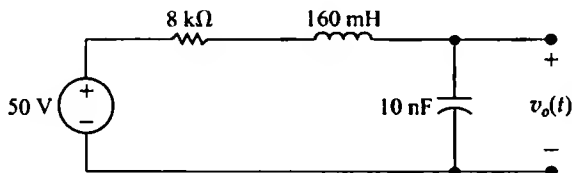


Figura P8.45

- 8.46.** El conmutador del circuito mostrado en la Figura P8.46 ha estado en la posición a durante un largo período de tiempo. En  $t = 0$ , el conmutador se mueve instantáneamente a la posición b. Determine

- $v_o(0^+)$ ,
- $dv_o(0^+)/dt$ ,
- $v_o(t)$  para  $t \geq 0$ .

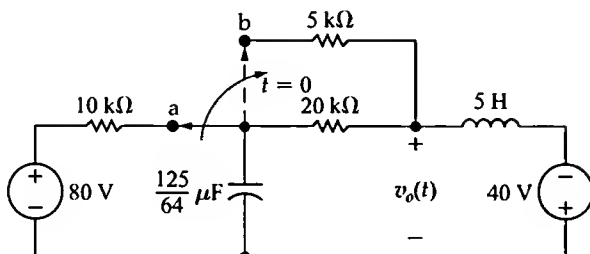


Figura P8.46

- 8.47. Suponga que la tensión del condensador en el circuito de la Figura 8.15 está subamortiguada. Suponga también que no hay energía almacenada en los elementos del circuito en el momento de cerrar el conmutador.
- Demuestre que  $dv_C/dt = (\omega_0^2/\omega_d)Ve^{-\alpha t} \sin \omega_d t$ .
  - Demuestre que  $dv_C/dt = 0$  cuando  $t = n\pi/\omega_d$ , donde  $n = 0, 1, 2, \dots$
  - Sea  $t_n = n\pi/\omega_d$ ; demuestre que  $v_C(t_n) = V - V(-1)^n e^{-\alpha n\pi/\omega_d}$ .
  - Demuestre que

$$\alpha = \frac{1}{T_d} \ln \frac{v_C(t_1) - V}{v_C(t_3) - V},$$

donde  $T_d = t_3 - t_1$ .

- 8.48. Suponga que describimos la tensión en un condensador de  $0,1 \mu\text{F}$ , dentro del circuito de la Figura 8.15, de la forma siguiente: después de que el conmutador haya estado cerrado durante varios segundos, la tensión tiene un valor constante de 100 V. La primera vez que la tensión excede el valor de 100 V, alcanza un pico de 163,84 V. Esto sucede  $\pi/7$  ms después de cerrar el conmutador. La segunda vez que la tensión excede de 100 V, alcanza un pico de valor 126,02 V. Este segundo pico tiene lugar  $3\pi/7$  ms después de cerrar el conmutador. En el momento de cerrar el conmutador, no hay energía almacenada ni en el condensador ni en la bobina. Determine los valores numéricos de  $R$  y  $L$ . (*Sugerencia:* resuelva primero el Problema 8.47).
- 8.49. El conmutador del circuito mostrado en la Figura P8.49 ha estado cerrado durante un largo período de tiempo antes de abrirlo en  $t = 0$ . Suponga que los parámetros del circuito son tales que la respuesta está subamortiguada.
- Determine la expresión correspondiente a  $v_o(t)$  en función de  $v_g$ ,  $\alpha$ ,  $\omega_d$ ,  $C$  y  $R$  para  $t \geq 0$ .
  - Determine la expresión que nos da el valor de  $t$  cuando la magnitud de  $v_o$  es máxima.

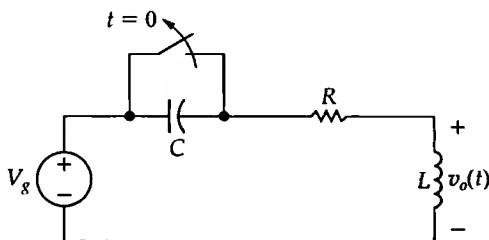


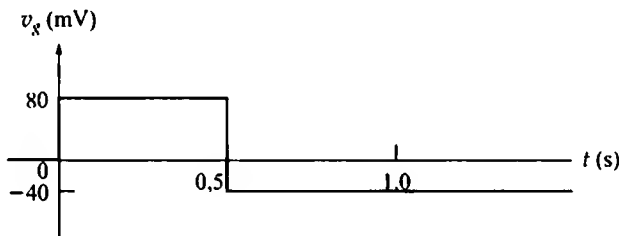
Figura P8.49

- 8.50. Los parámetros de circuito en el circuito de la Figura P8.49 son  $R = 4800 \Omega$ ,  $L = 64 \text{ mH}$ ,  $C = 4 \text{ nF}$  y  $v_g = -72 \text{ V}$ .

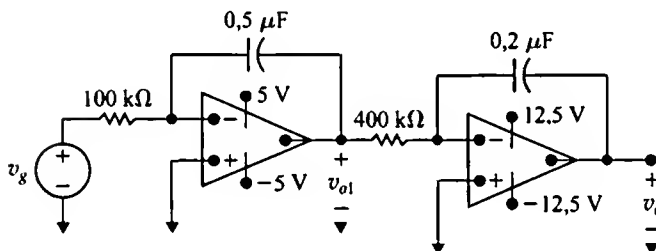
- Expresar  $v_o(t)$  numéricamente para  $t \geq 0$ .
- Después de abrirse el conmutador, ¿cuántos microsegundos transcurrirán antes de que la tensión en la bobina alcance un máximo?
- ¿Cuál es el máximo valor de la tensión en la bobina?
- Repita los apartados (a)-(c) reduciendo el valor de  $R$  a  $480 \Omega$ .

**8.51.** Aplicamos la señal de tensión de la Figura P8.51(a) a los amplificadores integradores en cascada que se muestran en la Figura P8.51(b). No hay energía almacenada en los condensadores en el momento de aplicar la señal.

- Determine las expresiones numéricas correspondientes a  $v_o(t)$  y  $v_{o1}(t)$  para los intervalos de tiempo  $0 \leq t \leq 0,5 \text{ s}$  y  $0,5 \text{ s} \leq t \leq t_{\text{sat}}$ .
- Calcule el valor de  $t_{\text{sat}}$ .



(a)



(b)

Figura P8.51

- Modificamos el circuito de la Figura P8.51(b) añadiendo una resistencia de  $1 \text{ M}\Omega$  en paralelo con el condensador de  $0,5 \mu\text{F}$  y una resistencia de  $5 \text{ M}\Omega$  en paralelo con el condensador de  $0,2 \mu\text{F}$ . Al igual que en el Problema 8.51, no hay energía almacenada en los condensadores en el momento de aplicar la señal. Determine las expresiones numéricas correspondientes a  $v_o(t)$  y  $v_{o1}(t)$  para los intervalos de tiempo  $0 \leq t \leq 0,5 \text{ s}$  y  $t \geq 0,5 \text{ s}$ .
- Demuestre que, si no hay energía almacenada en el circuito de la Figura 8.19 en el momento en que  $v_g$  cambia de valor,  $dv_o/dt$  es igual a cero en  $t = 0$ .
- Determine la ecuación correspondiente a  $v_o(t)$  para  $0 \leq t \leq t_{\text{sat}}$  en el circuito mostrado en la Figura 8.19 si  $v_{o1}(0) = 5 \text{ V}$  y  $v_o(0) = 8 \text{ V}$ .
  - ¿Cuánto tarda el circuito en alcanzar la saturación?
- Resuelva de nuevo el Ejemplo 8.14 eliminando las resistencias de realimentación  $R_1$  y  $R_2$ .
  - Resuelva de nuevo el Ejemplo 8.14 con  $v_{o1}(0) = -2 \text{ V}$  y  $v_o(0) = 4 \text{ V}$ .

- 8.56. a) Determine la ecuación diferencial que relaciona la tensión de salida con la tensión de entrada para el circuito mostrado en la Figura P8.56.
- b) Compare el resultado con la Ecuación 8.75 cuando  $R_1 C_1 = R_2 C_2 = RC$  en la Figura 8.18.
- c) ¿Cuál es la ventaja del circuito mostrado en la Figura P8.56?

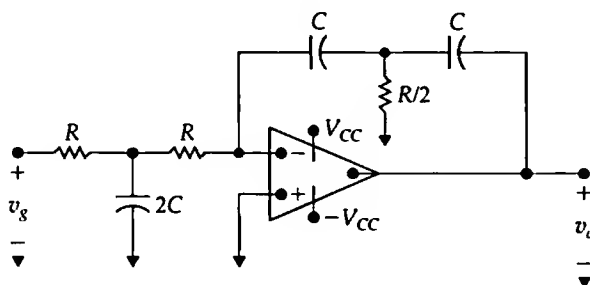


Figura P8.56

- 8.57. Vamos a ilustrar el modo en que pueden interconectarse varios circuitos con amplificador operacional para resolver una ecuación diferencial.
- a) Determine la ecuación diferencial que gobierna el sistema masa-muelle mostrado en la Figura P8.57(a). Suponga que la fuerza ejercida por el muelle es directamente proporcional al desplazamiento del mismo, que la masa es constante y que la fuerza de rozamiento es directamente proporcional a la velocidad de la masa móvil.
- b) Vuelva a escribir la ecuación diferencial hallada en el apartado (a) de modo que la derivada de mayor orden quede expresada en función de los demás términos de la ecuación. Ahora, suponga que hay disponible una tensión igual a  $d^2x/dt^2$  y que podemos generar  $dx/dt$  y  $x$  por integraciones sucesivas. Podemos sintetizar los coeficientes de la ecuación mediante circuitos amplificadores y combinar los términos requeridos para generar  $d^2x/dt^2$  utilizando un amplificador sumador. Teniendo estas ideas presentes, analice la interconexión mostrada en la Figura P8.57(b). En particular, describa el propósito de cada área sombreada del circuito y describa la señal en los puntos etiquetados como B, C, D, E y F, suponiendo que la señal en A representa  $d^2x/dt^2$ . Explique también los parámetros  $R$ ;  $R_1$ ,  $C_1$ ;  $R_2$ ,  $C_2$ ;  $R_3$ ,  $R_4$ ;  $R_5$ ,  $R_6$ ; y  $R_7$ ,  $R_8$  en función de los coeficientes de la ecuación diferencial.
- 8.58. a) Demuestre la Ecuación 8.92.  
 ◆ b) Demuestre la Ecuación 8.93.  
 c) Demuestre la Ecuación 8.97.
- 8.59. Demuestre la Ecuación 8.99.  
 ◆
- 8.60. a) Utilizando los mismos valores numéricos que se han empleado en el ejemplo de la Perspectiva práctica del capítulo, calcule el instante en que la tensión en bornes del condensador es máxima.  
 ◆ b) Calcule el valor máximo de  $v_c$ .  
 c) Compare los valores obtenidos en los apartados (a) y (b) con  $t_{\text{máx}}$  y  $v_c(t_{\text{máx}})$ .
- 8.61. Los valores de los parámetros en el circuito de la Figura 8.21 son  $R = 3 \Omega$ ,  $L = 5 \text{ mH}$ ,  $C = 0,25 \mu\text{F}$ ,  $V_{\text{cc}} = 12 \text{ V}$  y  $a = 50$ . Suponga que el conmutador se abre cuando la corriente en el devanado primario es de 4 A.  
 ◆

- a) ¿Cuánta energía habrá almacenada en el circuito en  $t = 0^+$ ?
- b) Suponga que la bujía no genera la chispa de descarga. ¿Cuál será la máxima tensión disponible en la bujía?
- c) ¿Cuál es la tensión en el condensador cuando la tensión en la bujía alcanza su máximo valor?

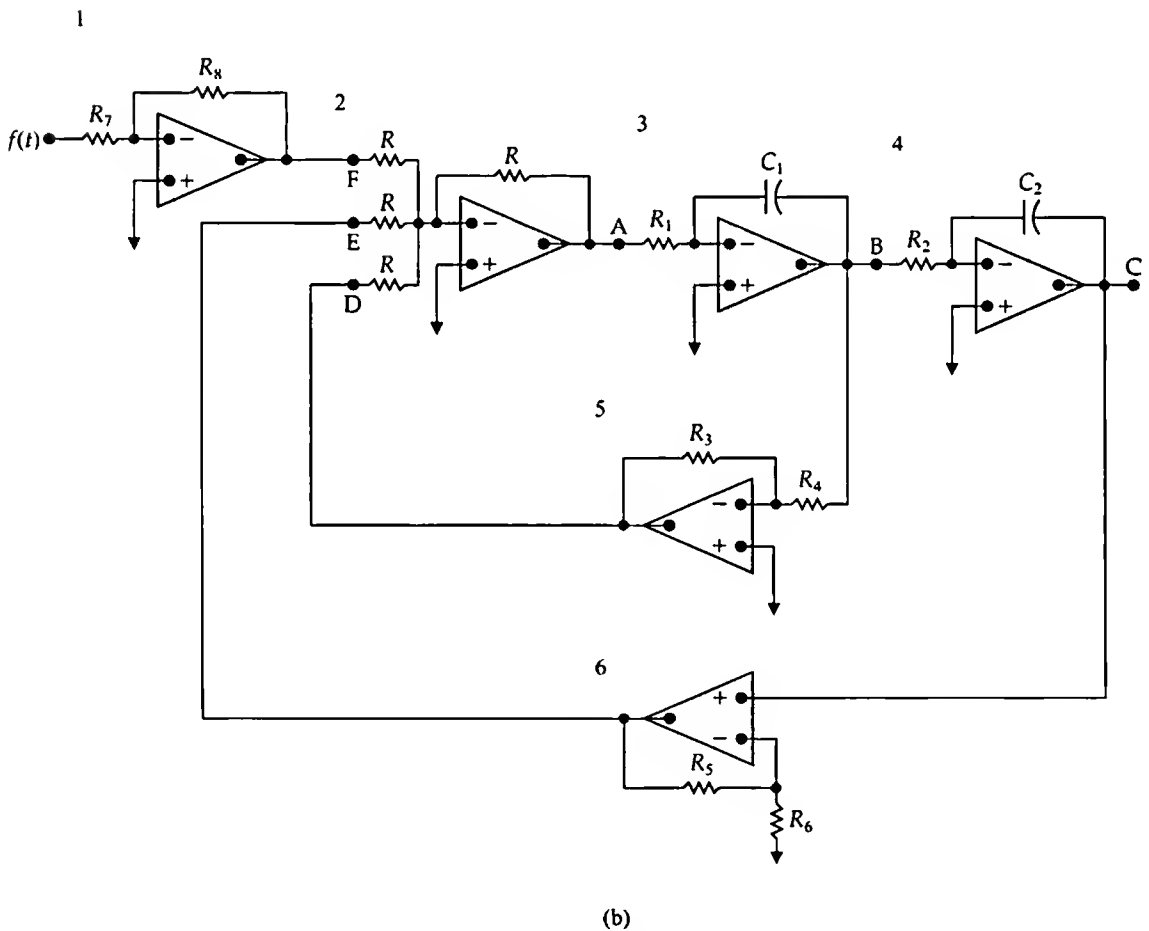
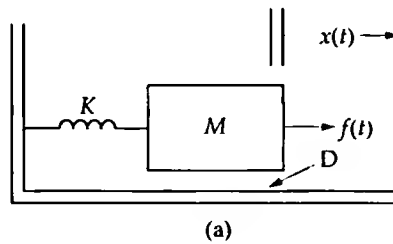


Figura P8.57

# CAPÍTULO

# 9

# Análisis de régimen permanente sinusoidal

## Contenido del capítulo

- 9.1. Fuentes sinusoidales
- 9.2. La respuesta sinusoidal
- 9.3. Fasores
- 9.4. Elementos de circuito pasivos en el dominio de la frecuencia
- 9.5. Leyes de Kirchhoff en el dominio de la frecuencia
- 9.6. Simplificaciones serie, paralelo y triángulo-estrella
- 9.7. Transformaciones de fuentes y circuitos equivalentes de Thévenin-Norton
- 9.8. Método de las tensiones de nodo
- 9.9. El método de las corrientes de malla
- 9.10. El transformador
- 9.11. El transformador ideal
- 9.12. Diagramas de fasores

Hasta ahora, nos hemos centrado en el análisis de circuitos con fuentes constantes; en este capítulo, ya estamos en disposición de considerar circuitos excitados por fuentes de corriente o de tensión variables en el tiempo. En particular, nos interesan las fuentes en las que el valor de la tensión o de la corriente varía de forma sinusoidal. Las fuentes sinusoidales y su efecto sobre el comportamiento de un circuito constituyen una importante área de estudio por diversas razones. En primer lugar, la generación, transmisión, distribución y consumo de la energía eléctrica suelen tener lugar en condiciones esencialmente de régimen permanente sinusoidal. En segundo lugar, una comprensión del comportamiento sinusoidal hace posible predecir el comportamiento de circuitos que tengan fuentes no sinusoidales. En tercer lugar, el comportamiento sinusoidal de régimen permanente suele permitir simplificar el diseño de los sistemas eléctricos. Así, un diseñador puede enunciar las especificaciones en términos de la respuesta de régimen permanente sinusoidal deseada y diseñar el circuito o el sistema para que cumpla dichas características. Si el dispositivo satisface las especificaciones, el diseñador sabrá que el circuito podrá responder satisfactoriamente a entradas no sinusoidales.

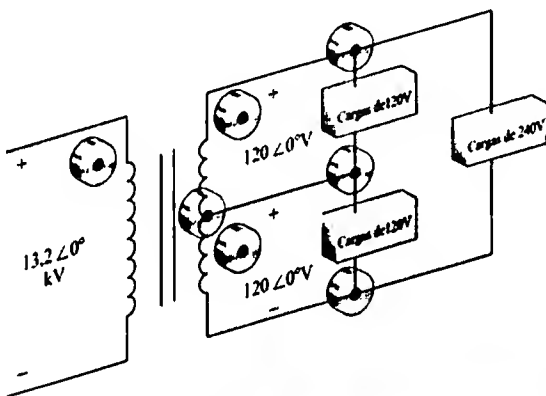
Los capítulos siguientes del libro se basan en buena medida en una adecuada comprensión de las técnicas necesarias para analizar circuitos excitados por fuentes sinusoidales. Afortunadamente, las técnicas de análisis y simplificación de circuitos que hemos presentado en los Capítulos 1-4 son aplicables a circuitos que tengan tanto fuentes sinusoidales como fuentes de continua, por lo que parte del material que vamos a exponer en este capítulo nos resultará bastante familiar. Los principales desafíos a la hora de abordar por vez primera el

análisis sinusoidal son el desarrollo de las apropiadas ecuaciones de modelado y la necesidad de trabajar en el campo matemático de los números complejos.

## Perspectiva práctica

### Circuito de distribución doméstico

Los sistemas de alimentación que generan, transmiten y distribuyen la energía eléctrica están diseñados para operar en régimen permanente sinusoidal. En algunos países, como en los Estados Unidos, el circuito de distribución doméstico estándar es el circuito de 240/120 V a tres hilos que se muestra en la siguiente figura.



El transformador se utiliza para reducir la tensión de distribución de la red de 13,2 kV a 240 V. La toma central en el devanado secundario proporciona la alimentación a 120 V. La frecuencia de operación de los sistemas de alimentación en los Estados Unidos es de 60 Hz, mientras que en España es de 50 Hz. Los valores de tensión mencionados son valores rms. La razón para definir un valor rms de una señal variable en el tiempo se explica en el Capítulo 10.



### Objetivos del capítulo

1. Entender el concepto de fasores y ser capaz de realizar una transformación fasorial y una transformación fasorial inversa.
2. Ser capaz de transformar un circuito con una fuente sinusoidal al dominio de la frecuencia utilizando conceptos de fasores.
3. Saber cómo utilizar las siguientes técnicas de análisis de circuitos para resolver un circuito en el dominio de la frecuencia:
  - leyes de Kirchhoff;
  - simplificaciones serie, paralelo y triángulo-estrella;
  - división de tensión y de corriente;
  - equivalentes de Thévenin y de Norton;
  - método de las tensiones de nodo; y
  - método de las corrientes de malla.
4. Ser capaz de analizar circuitos que contengan transformadores lineales utilizando el método de fasores.
5. Comprender las restricciones de los transformadores ideales y ser capaz de analizar circuitos que contengan transformadores ideales utilizando métodos de fasores.

## 9.1. Fuentes sinusoidales

Una **fente de tensión sinusoidal** (independiente o dependiente) produce una tensión que varía sinusoidalmente con el tiempo. Una **fente de corriente sinusoidal** (independiente o dependiente) produce una corriente que varía sinusoidalmente con el tiempo. A la hora de analizar las funciones sinusoidales, vamos a utilizar una fente de tensión, pero los resultados también se aplican a las fuentes de corriente.

Podemos expresar una función sinusoidal mediante la función seno o la función coseno. Aunque las dos resultan adecuadas, no podemos usar ambas formas funcionales simultáneamente. En nuestro análisis, vamos a utilizar la función coseno, de modo que escribiremos una tensión sinusoidal de la forma

$$v = V_m \cos(\omega t + \phi). \quad (9.1)$$

Para facilitar las explicaciones correspondientes a los parámetros de la Ecuación 9.1, vamos a referirnos a la gráfica de la tensión en función del tiempo que se muestra en la Figura 9.1.

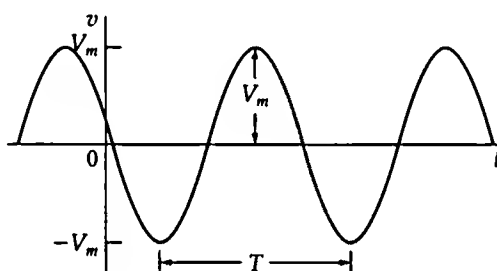


Figura 9.1. Una tensión sinusoidal.

Observe que la tensión sinusoidal se repite a intervalos regulares. Dichas funciones de tipo repetitivo se denominan periódicas. Uno de los parámetros de interés es el tiempo necesario para que la función sinusoidal recorra todo su posible rango de valores. Este tiempo se denomina **período** de la función y se designa mediante la letra  $T$ . El período se mide en segundos. El recíproco de  $T$  nos da el número de ciclos por segundo, o sea la frecuencia, de la función sinusoidal y se designa mediante la letra  $f$ :

$$f = \frac{1}{T}. \quad (9.2)$$

Un ciclo por segundo se denomina hercio, que se representa por Hz. (El término *ciclos por segundo* sólo se usa en raras ocasiones en la literatura técnica contemporánea). El coeficiente de  $t$  en la Ecuación 9.1 contiene el valor numérico de  $T$  o  $f$ . Omega ( $\omega$ ) representa la frecuencia angular de la función sinusoidal:

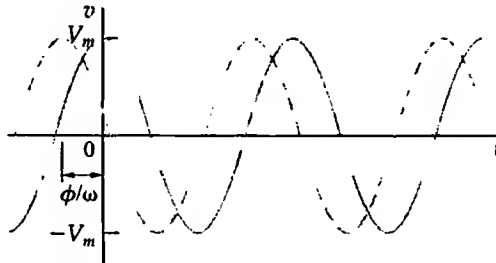
$$\omega = 2\pi f = 2\pi/T \text{ (radianes/segundo)}. \quad (9.3)$$

La Ecuación 9.3 se basa en el hecho de que la función coseno (o la función seno) recorre el conjunto completo de valores cada vez que su argumento,  $\omega t$ , recorre  $2\pi$  radianes ( $360^\circ$ ). Observe, en la Ecuación 9.3, que cada vez que  $t$  sea un múltiplo entero de  $T$ , el argumento  $\omega t$  se habrá incrementado en un múltiplo entero de  $2\pi$  rad.

El coeficiente  $V_m$  proporciona la amplitud máxima de la tensión sinusoidal. Puesto que la función coseno está acotada por los valores  $\pm 1$ , la amplitud de la función sinusoidal estará acotada por los valores  $\pm V_m$ . La Figura 9.1 muestra estas características.



El ángulo  $\phi$  en la Ecuación 9.1 se denomina **ángulo de fase** de la tensión sinusoidal. Este ángulo determina el valor de la función sinusoidal en  $t = 0$ ; por tanto, determina el punto de la onda periódica en el que comenzamos a medir el tiempo. Si se cambia el ángulo de fase  $\phi$ , la función sinusoidal se desplaza a lo largo del eje temporal, pero este desplazamiento no tiene ningún efecto sobre la amplitud ( $V_m$ ) ni sobre la frecuencia angular ( $\omega$ ). Observe, por ejemplo, que si  $\phi$  se reduce a cero, la tensión sinusoidal de la Figura 9.1 se desplaza  $\phi/\omega$  unidades de tiempo hacia la derecha, como se muestra en la Figura 9.2. Observe también que, si  $\phi$  es positivo, la función sinusoidal se desplaza hacia la izquierda, mientras que si  $\phi$  es negativo, la función se desplaza hacia la derecha. (Véase el Problema 9.4).



**Figura 9.2.** La tensión sinusoidal de la Figura 9.1 desplazada a la derecha, de modo que  $\phi = 0$ .

Conviene hacer un comentario con respecto al ángulo de fase:  $\omega t$  y  $\phi$  deben tener las mismas unidades, ya que ambas se suman en el argumento de la función sinusoidal. Puesto que  $\omega t$  está expresada en radianes, cabría esperar que  $\phi$  también lo estuviera. Sin embargo,  $\phi$  se proporciona normalmente en grados y es preciso convertir  $\omega t$  de radianes a grados antes de sumar ambas magnitudes. En este texto, vamos a adherirnos a esta preferencia por los grados, y expresaremos en grados el ángulo de fase. Recuerde, de los estudios de trigonometría, que la fórmula de conversión de radianes a grados está dada por

$$(\text{número de grados}) = \frac{180^\circ}{\pi} (\text{número de radianes}). \quad (9.4)$$

Otra importante característica de la tensión (o corriente) sinusoidal es su **valor rms**. El valor rms de una función periódica se define como la raíz cuadrada del valor medio de la función al cuadrado. Así, si  $v = V_m \cos(\omega t + \phi)$ , el valor rms de  $v$  es

$$V_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} V_m^2 \cos^2(\omega t + \phi) dt}. \quad (9.5)$$

Observe, en la Ecuación 9.5, que se obtiene el valor medio de la tensión al cuadrado integrando  $v^2$  a lo largo de un período (es decir, de  $t_0$  a  $t_0 + T$ ) y luego dividiendo por el rango de integración,  $T$ . Observe también que el punto de partida de la integración,  $t_0$ , es arbitrario.

El valor situado dentro de la raíz en la Ecuación 9.5 se reduce a  $V_m^2/2$  (véase el Problema 9.7). Por tanto, el valor rms de  $v$  es

$$V_{\text{rms}} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}. \quad (9.6)$$

El valor rms de la tensión sinusoidal sólo depende de la amplitud máxima de  $v$ , es decir, de  $V_m$ . El valor rms no depende ni de la frecuencia ni del ángulo de fase. Subrayaremos la importancia del valor rms en relación con los cálculos de eficiencia en el Capítulo 10 (véase la Sección 10.3).

Así, podemos describir completamente una señal sinusoidal específica si conocemos su frecuencia, su ángulo de fase y su amplitud (bien la amplitud máxima o el valor rms). Los Ejemplos 9.1, 9.2 y 9.3 ilustran estas propiedades básicas de la función sinusoidal. En el Ejemplo 9.4 calcularemos el valor rms de una función periódica, y este proceso nos permitirá clarificar el significado del valor rms (el valor rms también se denomina *valor eficaz*).

### EJEMPLO 9.1 Determinación de las características de una corriente sinusoidal

Una corriente sinusoidal tiene una amplitud máxima de 20 A. La corriente describe un ciclo completo en 1 ms. La magnitud de la corriente en el instante cero es de 10 A.

- ¿Cuál es la frecuencia de la corriente en hercios?
- ¿Cuál es la frecuencia en radianes por segundo?
- Escriba la expresión correspondiente a  $i(t)$  utilizando la función coseno. Expresé  $\phi$  en grados.
- ¿Cuál es el valor rms de la corriente?

b)  $v = 2\pi f = 2000\pi \text{ rad/s.}$

c) Tenemos que

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi) \\ = 20 \cos(2000\pi t + \phi),$$

pero  $i(0) = 10 \text{ A}$ . Por tanto,  $10 = 20 \cos \phi$  y  $\phi = 60^\circ$ . Así, la expresión correspondiente a  $i(t)$  es

$$i(t) = 20 \cos(2000\pi t + 60^\circ).$$

d) Teniendo en cuenta el proceso de deducción de la Ecuación 9.6, el valor rms de una corriente sinusoidal es  $I_m/\sqrt{2}$ . Por tanto, el valor rms en nuestro caso será  $20/\sqrt{2}$ , es decir, 14,14 A.

#### SOLUCIÓN

- a) A partir del enunciado del problema,  $T = 1 \text{ ms}$ ; de aquí,  $f = 1/T = 1000 \text{ Hz}$ .

### EJEMPLO 9.2 Determinación de las características de una tensión sinusoidal

Una cierta tensión sinusoidal está dada por la expresión  $v = 300 \cos(120\pi t + 30^\circ)$ .

- ¿Cuál es el período de la tensión en milisegundos?
- ¿Cuál es la frecuencia en hercios?
- ¿Cuál es la magnitud de  $v$  en  $t = 2,778 \text{ ms}$ ?
- ¿Cuál es el valor rms de  $v$ ?

$T = 2\pi/\omega = \frac{1}{60} \text{ s}$ , es decir, 16,667 ms.

b) La frecuencia es  $1/T$ , es decir, 60 Hz.

c) Teniendo en cuenta el apartado (a),

$$\omega = 2\pi/16,667,$$

por lo que, en  $t = 2,778 \text{ ms}$ ,  $\omega t$  es casi igual a 1,047 rad o  $60^\circ$ . Por tanto,

$$v(2,778 \text{ ms}) = 300 \cos(60^\circ + 30^\circ) \\ = 0 \text{ V.}$$

#### SOLUCIÓN

- a) A partir de la expresión correspondiente a  $v$ ,  $\omega = 120\pi \text{ rad/s}$ . Puesto que  $\omega = 2\pi/T$ ,

d)  $V_{rms} = 300/\sqrt{2} = 212,13 \text{ V.}$

**EJEMPLO 9.3** Traducción de una función seno a una función coseno

Podemos transformar la función seno en la función coseno restando  $90^\circ$  ( $\pi/2$  rad) del argumento de la función seno.

- a) Verifique esta transformación demostrando que

$$\text{sen}(\omega t + \theta) = \cos(\omega t + \theta - 90^\circ).$$

- b) Utilice el resultado del apartado (a) para expresar  $\text{sen}(\omega t + 30^\circ)$  como función coseno.

**SOLUCIÓN**

- a) La demostración se basa en la aplicación directa de la identidad trigonométrica

$$\cos(\alpha - \beta) =$$

$$= \cos \alpha \cos \beta + \text{sen} \alpha \text{sen} \beta.$$

Sea  $\alpha = (\omega t + \theta)$  y  $\beta = 90^\circ$ . Como  $\cos 90^\circ = 0$  y  $\text{sen} 90^\circ = 1$ , tendremos

$$\cos(\alpha - \beta) = \text{sen} \alpha$$

$$= \text{sen}(\omega t + \theta)$$

$$= \cos(\omega t + \theta - 90^\circ).$$

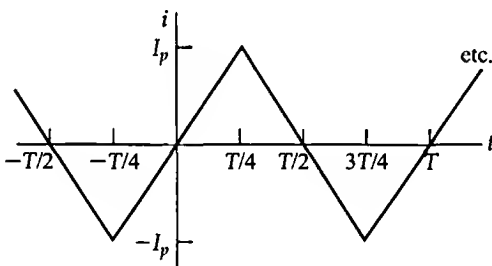
- b) Teniendo en cuenta el apartado (a), se cumplirá

$$\text{sen}(\omega t + 30^\circ) = \cos(\omega t + 30^\circ - 90^\circ)$$

$$= \cos(\omega t - 60^\circ).$$

**EJEMPLO 9.4** Cálculo del valor rms de una forma de onda triangular

Calcule el valor rms de la corriente triangular periódica mostrada en la Figura 9.3. Exprese su respuesta en términos de la corriente de pico  $I_p$ .



**Figura 9.3.** Corriente triangular periódica.

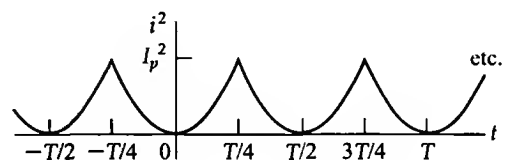
**SOLUCIÓN**

A partir de la Ecuación 9.5, el valor rms de  $i$  es

$$I_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} i^2 dt}.$$

Resulta útil interpretar la integral contenida dentro de la raíz como el área comprendida bajo la función elevada al cuadrado para un intervalo de un período. La función al cuadrado, con el área entre 0 y  $T$  sombreada, se muestra en la Figura 9.4, que también indica que, para esta función concreta, el área bajo la corriente al cuadrado para un intervalo de un período es igual a cuatro veces el área bajo la corriente al cuadrado para el intervalo comprendido entre 0 y  $T/4$  segundos; es decir,

$$\int_{t_0}^{t_0+T} i^2 dt = \int_0^{T/4} i^2 dt.$$



**Figura 9.4.**  $i^2$  en función de  $t$ .

La expresión analítica de  $i$  en el intervalo comprendido entre 0 y  $T/4$  es

$$i = \frac{4I_p}{T}t, \quad 0 < t < T/4.$$

El área bajo la función al cuadrado para un período será

$$\int_{t_0}^{t_0+T} i^2 dt = 4 \int_0^{T/4} \frac{16I_p^2}{T^2} t^2 dt = \frac{I_p^2 T}{3}.$$

El valor medio de la función es simplemente el área correspondiente a un período dividida por el período. Por tanto,

$$i_{\text{media}} = \frac{1}{T} \frac{I_p^2 T}{3} = \frac{1}{3} I_p^2.$$

El valor rms de la corriente será la raíz cuadrada de este valor medio. Por tanto,

$$I_{\text{rms}} = \frac{I_p}{\sqrt{3}}.$$

**NOTA** Evalúe su comprensión de este material intentando resolver los Problemas 9.1-9.3 del capítulo.

## 9.2. La respuesta sinusoidal

Antes de centrarnos en la respuesta en régimen permanente a fuentes sinusoidales, consideremos el problema en términos más amplios, es decir, en términos de la respuesta total. Este análisis nos permitirá poner en perspectiva la solución correspondiente al régimen permanente. El circuito mostrado en la Figura 9.5 describe la naturaleza general del problema. En él,  $v_s$  es una tensión sinusoidal:

$$v_s = V_m \cos(\omega t + \phi). \quad (9.7)$$

Por comodidad, vamos a suponer que la corriente inicial en el circuito es cero y vamos a medir el tiempo desde el momento en que se cierra el conmutador. La tarea consiste en calcular las expresiones correspondientes a  $i(t)$  cuando  $t \geq 0$ . Se trata de una tarea similar a la determinación de la respuesta al escalón de un circuito  $RL$ , que ya vimos en el Capítulo 7. La única diferencia es que la fuente de tensión es ahora una tensión sinusoidal variable en el tiempo, en lugar de ser una tensión constante. Una aplicación directa de la ley de Kirchhoff de las tensiones al circuito mostrado en la Figura 9.5 nos proporciona la ecuación diferencial ordinaria

$$L \frac{di}{dt} + Ri = V_m \cos(\omega t + \phi), \quad (9.8)$$

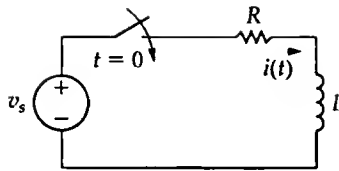
cuya solución formal se analiza en cualquier curso de introducción a las ecuaciones diferenciales. Vamos a pedir al lector que todavía no haya estudiado ecuaciones diferenciales que acepte que la solución correspondiente a  $i$  es

$$i = \frac{-V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos(\phi - \theta) e^{-(R/L)t} + \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos(\omega t + \phi - \theta), \quad (9.9)$$

donde  $\theta$  se define como el ángulo cuya tangente es  $\omega L/R$ ; por tanto, podemos fácilmente determinar  $\theta$  para un circuito excitado por una fuente sinusoidal de frecuencia conocida.

Podemos comprobar la validez de la Ecuación 9.9 verificando que satisface la Ecuación 9.8 para todos los valores  $t \geq 0$ ; dejamos este ejercicio al lector, para que lo resuelva en el Problema 9.10.

El primer término del lado derecho de la Ecuación 9.9 se denomina **componente transitoria** de la corriente, porque dicho término se hace infinitesimal con el paso del tiempo. El segundo término del



**Figura 9.5.** Un circuito  $RL$  excitado por una fuente de tensión sinusoidal.

lado derecho se denomina **componente de régimen permanente** (o de estado estacionario) de la solución. Dicho término existirá mientras el conmutador permanezca cerrado y la fuente continúe suministrando la tensión sinusoidal. En este capítulo, vamos a desarrollar una técnica para el cálculo directo de la respuesta en régimen permanente, evitando así el problema de tener que resolver la ecuación diferencial. Sin embargo, al utilizar esta técnica no podremos obtener ni la componente transitoria ni la respuesta total, que es la suma de las componentes transitoria y de régimen permanente.

Vamos a fijarnos ahora en la componente de régimen permanente de la Ecuación 9.9. Resulta importante recordar las siguientes características de la solución de régimen permanente:

1. La solución de régimen permanente es una función sinusoidal.
2. La frecuencia de la señal de respuesta es idéntica a la frecuencia de la señal aplicada. Esta condición siempre se cumple en un circuito lineal cuando los parámetros del circuito,  $R$ ,  $L$  y  $C$ , sean constantes. (Si hay frecuencias en las señales de respuesta que no están presentes en las señales aplicadas, querrá decir que hay algún elemento no lineal en el circuito).
3. La amplitud máxima de la respuesta de régimen permanente difiere, en general, de la amplitud máxima de la fuente. Para el circuito que estamos analizando, la amplitud máxima de la señal de respuesta es  $V_m / \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$ , mientras que la amplitud máxima de la fuente de señal es  $V_m$ .
4. El ángulo de fase de la señal de respuesta difiere, en general, del ángulo de fase de la fuente. Para el circuito que estamos analizando, el ángulo de fase de la corriente es  $\phi - \theta$  y el de la fuente de tensión es  $\phi$ .

Conviene recordar estas características, porque nos ayudarán a comprender la motivación del desarrollo del método de fasores, que vamos a presentar en la Sección 9.3. En particular, observe que, una vez tomada la decisión de calcular sólo la respuesta en régimen permanente, la tarea se reduce a calcular la amplitud máxima y el ángulo de fase de la señal de respuesta. La forma de onda y la frecuencia de la respuesta ya son conocidas.

**NOTA** Evalúe su comprensión de este material tratando de resolver el Problema 9.9 del capítulo.

## 9.3. Fasores

Un **fasor** es un número complejo que aporta la información de amplitud y de ángulo de fase de una función sinusoidal<sup>1</sup>. El concepto de fasor se basa en la identidad de Euler, que relaciona la función exponencial con la función trigonométrica:

<sup>1</sup> Si no se siente cómodo con los números complejos, repase el Apéndice B.

$$e^{\pm j\theta} = \cos \theta \pm j \operatorname{sen} \theta. \quad (9.10)$$

La Ecuación 9.10 es importante en nuestro análisis porque nos proporciona otra forma de expresar las funciones seno y coseno. Podemos pensar en la función coseno como en la parte real de la función exponencial y podemos pensar en la función seno como en la parte imaginaria de dicha función, es decir,

$$\cos \theta = \Re\{e^{j\theta}\}, \quad (9.11)$$

y

$$\operatorname{sen} \theta = \Im\{e^{j\theta}\}, \quad (9.12)$$

donde  $\Re$  significa «la parte real de» y  $\Im$  significa «la parte imaginaria de».

Puesto que ya hemos decidido utilizar la función coseno para analizar el régimen permanente sinusoidal (véase la Sección 9.1), podemos aplicar la Ecuación 9.11 directamente. En particular, vamos a escribir la función de tensión sinusoidal dada por la Ecuación 9.1 en la forma sugerida por la Ecuación 9.11:

$$\begin{aligned} v &= V_m \cos(\omega t + \phi) = V_m \Re\{e^{j(\omega t + \phi)}\} \\ &= V_m \Re\{e^{j\omega t} e^{j\phi}\}. \end{aligned} \quad (9.13)$$

Podemos mover el coeficiente de  $V_m$  dentro del argumento de la parte real de la función sin alterar el resultado. También podemos invertir el orden de las dos funciones exponenciales contenidas en el argumento y escribir la Ecuación 9.13 como

$$v = \Re\{V_m e^{j\phi} e^{j\omega t}\}. \quad (9.14)$$

En la Ecuación 9.14, observe que la magnitud  $V_m e^{j\phi}$  es un número complejo que aporta la información de amplitud y de ángulo de fase de la tensión sinusoidal dada. Este número complejo es, por definición, la **representación como fasor** o **transformación fasorial** de la función sinusoidal dada. Así,

$$\nabla \quad \text{TRANSFORMACIÓN EN FASOR} \quad \mathbf{V} = V_m e^{j\phi} = \mathcal{P}\{V_m \cos(\omega t + \phi)\}, \quad (9.15)$$

donde la notación  $\mathcal{P}\{V_m \cos(\omega t + \phi)\}$  se lee «el fasor correspondiente a  $V_m \cos(\omega t + \phi)$ ». Por tanto, la transformación en fasor transfiere la función sinusoidal del dominio del tiempo al dominio de los números complejos, que también se denomina **dominio de la frecuencia**, ya que la respuesta depende, en general, de  $\omega$ . Como hemos hecho en la Ecuación 9.15, a lo largo del libro representaremos los fasores mediante letras en negrita. La Ecuación 9.15 es la forma polar de un fasor, pero también podemos expresar un fasor en forma rectangular. Así, podemos reescribir la Ecuación 9.15 como

$$\mathbf{V} = V_m \cos \phi + jV_m \operatorname{sen} \phi. \quad (9.16)$$

Tanto la forma polar como la rectangular son útiles al aplicar a los circuitos el concepto de fasores. Conviene realizar un comentario adicional acerca de la Ecuación 9.15. La considerable utilización de la función exponencial  $e^{j\phi}$  ha hecho que se desarrolle una abreviatura muy frecuentemente utilizada en los libros de texto. Esta abreviatura es la notación de ángulo

$$\underline{1/\phi^\circ} \equiv 1e^{j\phi}.$$

Utilizaremos esta notación ampliamente a lo largo del texto.

## Transformación fasorial inversa

Hasta ahora hemos visto cómo pasar de la función sinusoidal a su correspondiente fasor. Sin embargo, también podemos invertir el proceso, es decir, podemos escribir la expresión de la función sinusoidal correspondiente a un fasor. Así, para  $V = 100 \angle -26^\circ$ , la expresión correspondiente a  $v$  es  $100 \cos(\omega t - 26^\circ)$ , ya que hemos decidido utilizar la función coseno para todas las sinusoides. Observe que no podemos deducir el valor de  $\omega$  a partir del fasor. El fasor sólo aporta información de amplitud y de fase. El paso del fasor a la correspondiente expresión en el dominio del tiempo se denomina *transformación fasorial inversa*, y esta transformación se formaliza mediante la ecuación

$$\mathcal{P}^{-1}\{V_m e^{j\phi}\} = \Re\{V_m e^{j\phi} e^{j\omega t}\}, \quad (9.17)$$

donde la notación  $\mathcal{P}^{-1}\{V_m e^{j\phi}\}$  se lee «transformación fasorial inversa de  $V_m e^{j\phi}$ ». La Ecuación 9.17 indica que, para hallar la transformación fasorial inversa, multiplicamos el fasor por  $e^{j\omega t}$  y luego extraemos la parte real del producto. La transformación en fasores resulta útil en el análisis de circuitos porque reduce la tarea de hallar la amplitud máxima y el ángulo de fase de la respuesta sinusoidal de régimen permanente a una serie de operaciones con números complejos. Las siguientes observaciones permiten verificar esta conclusión:

1. La componente transitoria desaparece con el paso del tiempo, por lo que la componente de régimen permanente de la solución debe también satisfacer la ecuación diferencial. [Véase el Problema 9.10(b)].
2. En un circuito lineal excitado por fuentes sinusoidales, la respuesta en régimen permanente también es sinusoidal y la frecuencia de la respuesta sinusoidal es igual a la frecuencia de la fuente sinusoidal.
3. Utilizando la notación introducida en la Ecuación 9.11, podemos postular que la solución de régimen permanente tiene la forma  $\Re\{A e^{j\beta} e^{j\omega t}\}$ , donde  $A$  es la amplitud máxima de la respuesta y  $\beta$  es el ángulo de fase de la respuesta.
4. Cuando sustituimos en la ecuación diferencial la solución de régimen permanente postulada, el término exponencial  $e^{j\omega t}$  se cancela, dejando la solución de  $A$  y de  $\beta$  en el dominio de los números complejos.

Vamos a ilustrar estas observaciones con el circuito mostrado en la Figura 9.5. Sabemos que la solución de régimen permanente para la corriente  $i$  tiene la forma

$$i_{rp}(t) = \Re\{I_m e^{j\beta} e^{j\omega t}\}, \quad (9.18)$$

donde el subíndice «rp» indica que estamos trabajando con la solución de régimen permanente. Si sustituimos la Ecuación 9.18 en la Ecuación 9.8, se genera la expresión

$$\Re\{j\omega L I_m e^{j\beta} e^{j\omega t}\} + \Re\{R I_m e^{j\beta} e^{j\omega t}\} = \Re\{V_m e^{j\phi} e^{j\omega t}\}. \quad (9.19)$$

Al deducir la Ecuación 9.19 hemos utilizado el hecho de que dentro de la parte real de una operación pueden llevarse a cabo tanto una diferenciación como una multiplicación por una constante. También hemos reescrito el lado derecho de la Ecuación 9.8 utilizando la notación de la Ecuación 9.11. Aplicando las técnicas algebraicas para números complejos, sabemos que la suma de las partes reales es igual a la parte real de la suma. Por tanto, podemos reducir el lado izquierdo de la Ecuación 9.19 a un único término:

$$\Re\{(j\omega L + R)I_m e^{j\beta} e^{j\omega t}\} = \Re\{V_m e^{j\phi} e^{j\omega t}\}. \quad (9.20)$$

Recuerde que nuestra decisión de utilizar la función coseno a la hora de analizar la respuesta de un circuito en régimen permanente sinusoidal hace que tengamos que utilizar el operador  $\Re$  para obtener la Ecuación 9.20. Si hubiéramos elegido usar la función seno en nuestro análisis sinusoidal de régimen permanente, habríamos aplicado directamente la Ecuación 9.12, en lugar de la Ecuación 9.11, y el resultado sería la Ecuación 9.21:

$$\Im\{(j\omega L + R)I_m e^{j\beta} e^{j\omega t}\} = \Im\{V_m e^{j\phi} e^{j\omega t}\}. \quad (9.21)$$

Observe que las magnitudes complejas a ambos lados de la Ecuación 9.21 son idénticas a las de los correspondientes lados de la Ecuación 9.20. Cuando las partes reales e imaginarias de dos magnitudes complejas son iguales, entonces dichas magnitudes son iguales entre sí. Por tanto, a partir de las ecuaciones 9.20 y 9.21,

$$(j\omega L + R)I_m e^{j\beta} = V_m e^{j\phi},$$

o bien

$$I_m e^{j\beta} = \frac{V_m e^{j\phi}}{R + j\omega L}. \quad (9.22)$$

Observe que  $e^{j\omega t}$  ha sido eliminada del proceso de determinación de la amplitud ( $I_m$ ) y del ángulo de fase ( $\beta$ ) de la respuesta. Así, para este circuito, la tarea de hallar  $I_m$  y  $\beta$  implica la manipulación algebraica de las magnitudes complejas  $V_m e^{j\phi}$  y  $R + j\omega L$ . Observe que nos hemos encontrado con formas tanto polares como rectangulares.

Conviene hacer una importante advertencia: la transformada fasorial, junto con la transformada fasorial inversa, permite pasar una y otra vez entre el dominio del tiempo y el dominio de la frecuencia. Por tanto, cuando se obtiene una solución, estaremos en uno de ambos dominios; pero lo que no podemos es estar en ambos dominios simultáneamente. Ninguna solución que contenga una mezcla de nomenclatura correspondiente al dominio del tiempo y al dominio de los fasores tiene sentido alguno.

La transformada fasorial también resulta útil en el análisis de circuitos porque puede aplicarse directamente a la suma de funciones sinusoidales. El análisis de circuitos implica la suma de corrientes y de tensiones, así que resulta obvia la importancia de esta observación. Podemos formalizar esta propiedad de la forma siguiente. Si

$$v = v_1 + v_2 + \cdots + v_n, \quad (9.23)$$

donde todas las tensiones del lado derecho son tensiones sinusoidales de la misma frecuencia, entonces

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \cdots + \mathbf{V}_n. \quad (9.24)$$

Por tanto, la representación fasorial es la suma de los fasores de los términos individuales. En la Sección 9.5 analizaremos el proceso de deducción de la Ecuación 9.24.

Antes de aplicar la transformada fasorial al análisis de circuitos, vamos a ilustrar su utilidad a la hora de resolver un problema con el cual ya estamos familiarizados: la suma de tensiones sinusoidales mediante identidades trigonométricas. El Ejemplo 9.5 muestra cómo la transformada fasorial simplifica enormemente este tipo de problema.



**EJEMPLO 9.5** Suma de cosenos utilizando fasores

Si  $y_1 = 20 \cos(\omega t - 30^\circ)$  e  $y_2 = 40 \cos(\omega t + 60^\circ)$ , exprese  $y = y_1 + y_2$  en forma de una única función sinusoidal.

- a) Resuelva el problema utilizando identidades trigonométricas.  
 b) Resuelva el problema utilizando el concepto de fasores.

**SOLUCIÓN**

- a) Primero expandimos  $y_1$  e  $y_2$ , utilizando el coseno de la suma de dos ángulos, para obtener

$$y_1 = 20 \cos \omega t \cos 30^\circ + 20 \sin \omega t \sin 30^\circ;$$

$$y_2 = 40 \cos \omega t \cos 60^\circ - 40 \sin \omega t \sin 60^\circ.$$

Sumando  $y_1$  e  $y_2$ , obtenemos

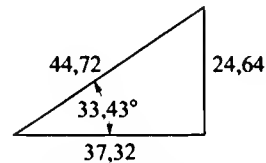
$$\begin{aligned} y &= (20 \cos 30 + 40 \cos 60) \cos \omega t \\ &\quad + (20 \sin 30 - 40 \sin 60) \sin \omega t \\ &= 37,32 \cos \omega t - 24,64 \sin \omega t. \end{aligned}$$

Para combinar estos dos términos, consideramos los coeficientes del coseno y del seno como lados de un triángulo rectángulo (Figura 9.6) y luego multiplicamos y dividimos el lado derecho por la hipotenusa. La expresión correspondiente a  $y$  resulta

$$\begin{aligned} y &= 44,72 \left( \frac{37,32}{44,72} \cos \omega t - \frac{24,64}{44,72} \sin \omega t \right) \\ &= 44,72 (\cos 33,43^\circ \cos \omega t \\ &\quad - \sin 33,43^\circ \sin \omega t). \end{aligned}$$

De nuevo, utilizamos la identidad correspondiente al coseno de la suma de dos ángulos y nos queda

$$y = 44,72 \cos(\omega t + 33,43^\circ).$$



**Figura 9.6.** Triángulo rectángulo utilizado para hallar la solución correspondiente a  $y$ .

- b) Podemos resolver el problema mediante fasores de la forma siguiente: dado que

$$y = y_1 + y_2,$$

entonces, según la Ecuación 9.24,

$$\begin{aligned} Y &= Y_1 + Y_2 \\ &= 20 \angle -30^\circ + 40 \angle 60^\circ \\ &= (17,32 - j10) + (20 + j34,64) \\ &= 37,32 + j24,64 \\ &= 44,72 \angle 33,43^\circ \end{aligned}$$

Una vez conocido el fasor  $Y$ , podemos escribir la correspondiente función trigonométrica para  $y$  tomando la transformada fasorial inversa:

$$\begin{aligned} y &= \mathcal{P}^{-1} \{ 44,72 e^{j33,43^\circ} \} \\ &= \Re \{ 44,72 e^{j33,43^\circ} e^{j\omega t} \} \\ &= 44,72 \cos(\omega t + 33,43^\circ). \end{aligned}$$

Queda clara la superioridad de la técnica basada en fasores a la hora de sumar funciones sinusoidales. Observe que esta técnica requiere familiarizarse con la transformación entre las formas polar y rectangular de los números complejos.

## Evaluación del objetivo 1

- Entender el concepto de fasor y ser capaz de realizar una transformación fasorial y una transformación fasorial inversa.

9.1. Halle el fasor correspondiente a cada una de estas funciones trigonométricas:

a)  $v = 170 \cos(377t - 40^\circ) \text{ V}$ .

b)  $i = 10 \sin(1000t + 20^\circ) \text{ A}$ .

c)  $i = [5 \cos(\omega t + 36,87^\circ) + 10 \cos(\omega t - 53,13^\circ)] \text{ A}$ .

d)  $v = [300 \cos(20.000\pi t + 45^\circ) + 100 \sin(20.000\pi t + 30^\circ)] \text{ mV}$ .

## RESPUESTA

(a)  $170 \angle -40^\circ \text{ V}$ ;

(b)  $10 \angle -70^\circ \text{ A}$ ;

(c)  $11,18 \angle -26,57^\circ \text{ A}$ ;

(d)  $339,90 \angle 61,51^\circ \text{ mV}$ .

9.2. Determine la expresión en el dominio del tiempo correspondiente a cada uno de estos fasores:

a)  $V = 18,6 \angle -54^\circ \text{ V}$ .

b)  $I = (20 \angle 45^\circ - 50 \angle -30^\circ) \text{ mA}$ .

c)  $V = (20 + j80 - 30 \angle 15^\circ) \text{ V}$ .

## RESPUESTA

(a)  $18,6 \cos(\omega t - 54^\circ) \text{ V}$ ;

(b)  $48,81 \cos(\omega t + 126,68^\circ) \text{ mA}$ ;

(c)  $72,79 \cos(\omega t + 97,08^\circ) \text{ V}$ .

**NOTA** Trate también de resolver el Problema 9.12 del capítulo.

## 9.4. Elementos de circuito pasivos en el dominio de la frecuencia

La aplicación sistemática de la transformada fasorial en el análisis de circuitos requiere llevar a cabo dos pasos sucesivos. En primer lugar, debemos establecer la relación entre el fasor de corriente y el fasor de tensión en los terminales de los elementos de circuito pasivos. En segundo lugar, debemos desarrollar la versión de las leyes de Kirchhoff en el dominio de los fasores, lo cual haremos en la Sección 9.5. En esta sección, vamos a establecer la relación entre el fasor de corriente y el fasor de tensión en los terminales de las resistencias, bobinas y condensadores. Comenzaremos con las resistencias y utilizaremos el convenio de signos pasivo a lo largo de nuestro análisis.

### Relación V-I para una resistencia

Aplicando la ley de Ohm, si la corriente en una resistencia varía sinusoidalmente con el tiempo, es decir, si  $i = I_m \cos(\omega t + \theta_i)$ , la tensión en los terminales de la resistencia, como se muestra en la Figura 9.7, será

$$\begin{aligned} v &= R[I_m \cos(\omega t + \theta_i)] \\ &= RI_m[\cos(\omega t + \theta_i)], \end{aligned} \quad (9.25)$$

donde  $I_m$  es la amplitud máxima de la corriente en amperios y  $\theta_i$  es el ángulo de fase de la corriente.

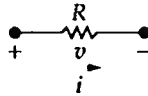


Figura 9.7. Un elemento resistivo atravesado por una corriente sinusoidal.

El fasor correspondiente a esta tensión es

$$\mathbf{V} = RI_m e^{j\theta_i} = RI_m \angle \theta_i. \quad (9.26)$$

Pero  $I_m \angle \theta_i$  es la representación como fasor de la corriente sinusoidal, por lo que podemos escribir la Ecuación 9.26 como

$$\mathbf{V} = R\mathbf{I}, \quad (9.27)$$

que indica que el fasor de tensión en los terminales de una resistencia es simplemente la resistencia multiplicada por el fasor de corriente. La Figura 9.8 muestra el diagrama de circuito para una resistencia en el dominio de la frecuencia.

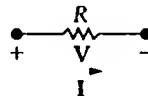


Figura 9.8. Circuito equivalente de una resistencia en el dominio de la frecuencia.

Las Ecuaciones 9.25 y 9.27 nos proporcionan también otra información importante, que es que en los terminales de una resistencia no hay desplazamiento de fase entre la corriente y la tensión. La Figura 9.9 muestra esta relación de fase, siendo en la figura el ángulo de fase tanto de la tensión como de la corriente igual a  $60^\circ$ . Decimos que las señales están **en fase** porque ambas alcanzan valores correspondientes de sus respectivas curvas al mismo tiempo (por ejemplo, ambas alcanzan su máximo positivo en el mismo instante).

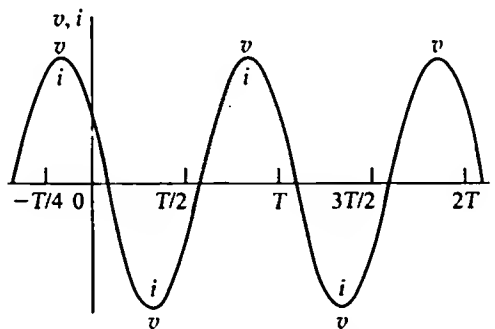


Figura 9.9. Gráfica que muestra que la tensión y la corriente en los terminales de una resistencia están en fase.

## Relación V-I para una bobina

Podemos determinar la relación entre el fasor de corriente y el fasor de tensión en los terminales de una bobina suponiendo una corriente sinusoidal y utilizando  $L di/dt$  para hallar la correspondiente tensión. Así, para  $i = I_m \cos(\omega t + \theta_i)$ , la ecuación correspondiente a la tensión será

$$v = L \frac{di}{dt} = -\omega L I_m \sen(\omega t + \theta_i). \quad (9.28)$$

Reescribimos la Ecuación 9.28 utilizando la función coseno:

$$v = -\omega L I_m \cos(\omega t + \theta_i - 90^\circ). \quad (9.29)$$

La representación como fasor de la tensión dada por la Ecuación 9.29 es

$$\mathbf{V} = -\omega L I_m e^{j(\theta_i - 90^\circ)} = -\omega L I_m e^{j\theta_i} e^{-j90^\circ} = j\omega L I_m e^{j\theta_i} = j\omega L \mathbf{I}. \quad (9.30)$$

Observe que al deducir la Ecuación 9.30 hemos utilizado la identidad

$$e^{-j90^\circ} = \cos 90^\circ - j \sen 90^\circ = -j.$$

La Ecuación 9.30 indica que el fasor de tensión en los terminales de una bobina es igual a  $j\omega L$  multiplicado por el fasor de corriente. La Figura 9.10 muestra el circuito equivalente en el dominio de la frecuencia para una bobina. Es importante observar que la relación entre el fasor de tensión y el fasor de corriente para una bobina se aplica también a la inductancia mutua en una bobina debido a la corriente que fluye en otra bobina acoplada. Es decir, el fasor de tensión en los terminales de una bobina, dentro de una pareja de bobinas con acoplamiento mutuo, es igual a  $j\omega M$  multiplicado por el fasor de corriente de la otra bobina.

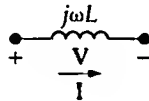


Figura 9.10. Circuito equivalente de una bobina en el dominio de la frecuencia.

Podemos reescribir la Ecuación 9.30 como

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= (\omega L \angle 90^\circ) I_m \angle \theta_i \\ &= \omega L I_m \angle (\theta_i + 90^\circ) \end{aligned} \quad (9.31)$$

que indica que la tensión y la corriente están desfasadas exactamente  $90^\circ$ . En particular, la tensión precede a la corriente en  $90^\circ$ , lo que es lo mismo que decir que la corriente está retardada  $90^\circ$  con respecto a la tensión. La Figura 9.11 ilustra este concepto de que la *tensión precede a la corriente* o de que la *corriente está retardada con respecto a la tensión*. Por ejemplo, la tensión alcanza su pico negativo exactamente  $90^\circ$  antes de que la corriente lo haga. Esta misma observación puede hacerse con respecto al paso por cero en sentido positivo o al pico positivo.

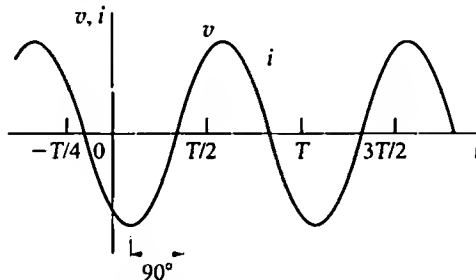


Figura 9.11. Gráfica que muestra la relación de fase entre la corriente y la tensión en los terminales de una bobina ( $\theta_i = 60^\circ$ ).

También podemos expresar el desplazamiento de fase en segundos. Un desplazamiento de fase de  $90^\circ$  corresponde a un cuarto del período, por lo que la tensión precederá a la corriente en  $T/4$  o  $\frac{1}{4f}$  segundos.

## Relación V-I en un condensador

Podemos obtener la relación entre el fasor de corriente y el fasor de tensión en los terminales de un condensador a partir del proceso de deducción que nos llevó a la Ecuación 9.30. En otras palabras, si tenemos en cuenta que para un condensador

$$i = C \frac{dv}{dt},$$

y suponemos que

$$v = V_m \cos(\omega t + \theta_v),$$

entonces

$$I = j\omega CV. \quad (9.32)$$

Ahora, si despejamos en la Ecuación 9.32 la tensión, para expresarla en función de la corriente, obtenemos

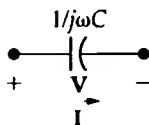
$$V = \frac{1}{j\omega C} I. \quad (9.33)$$

La Ecuación 9.33 indica que el circuito equivalente de un condensador en el dominio de los fasores es el que se muestra en la Figura 9.12.

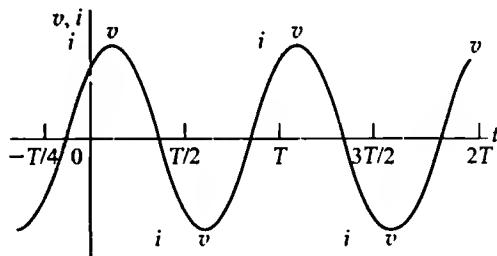
La tensión entre los terminales de un condensador está retardada  $90^\circ$  con respecto a la corriente. Podemos mostrar fácilmente esta relación reescribiendo la Ecuación 9.33 como

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{\omega C} \angle -90^\circ I_m \angle \theta_i \\ &= \frac{I_m}{\omega C} \angle (\theta_i - 90)^\circ. \end{aligned} \quad (9.34)$$

La forma alternativa de expresar la relación de fase contenida en la Ecuación 9.34 consiste en decir que la corriente precede a la tensión en  $90^\circ$ . La Figura 9.13 muestra la relación de fase entre la corriente y la tensión en los terminales de un condensador.



**Figura 9.12.** Circuito equivalente de un condensador en el dominio de la frecuencia.



**Figura 9.13.** Diagrama que muestra la relación de fase entre la corriente y la tensión en los terminales de un condensador ( $\theta_i = 60^\circ$ ).

## Impedancia y reactancia

Concluimos estas explicaciones sobre los elementos de circuito pasivos en el dominio de la frecuencia con una observación de gran importancia. Si comparamos las Ecuaciones 9.27, 9.30 y 9.33, observamos que todas tienen la forma

$$\nabla \quad \text{DEFINICIÓN DE IMPEDANCIA} \qquad \qquad \qquad \mathbf{V} = \mathbf{Z}\mathbf{I}, \qquad \qquad \qquad (9.35)$$

donde  $\mathbf{Z}$  representa la **impedancia** del elemento de circuito. Despejando  $\mathbf{Z}$  en la Ecuación 9.35, podemos ver que la impedancia es el cociente entre el fasor de tensión y el fasor de corriente de un elemento de circuito. Así, la impedancia de una resistencia es  $R$ , la impedancia de una bobina es  $j\omega L$ , la impedancia de la inductancia mutua es  $j\omega M$  y la impedancia de un condensador es  $1/j\omega C$ . En todos los casos, la impedancia se mide en ohmios. Observe que, aunque la impedancia es un número complejo, no se trata de un fasor. Recuerde que un fasor es un número complejo que aparece como coeficiente de  $e^{j\omega t}$ . Por tanto, aunque todos los fasores son números complejos, no todos los números complejos son fasores.

La impedancia en el dominio de la frecuencia es la magnitud análoga a la resistencia, inductancia y capacidad en el dominio del tiempo. La parte imaginaria de la impedancia se denomina **reactancia**. La Tabla 9.1 resume los valores de la impedancia y la reactancia para cada uno de los componentes de circuito básicos.

Y, finalmente, un recordatorio. Si la dirección de referencia de la corriente en un elemento de circuito pasivo está en la dirección del incremento de tensión entre los terminales del elemento, es necesario insertar un signo menos en la ecuación que relaciona la tensión con la corriente.

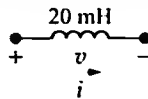
**Tabla 9.1.** Valores de impedancia y de reactancia.

ELEMENTO DE CIRCUITO	IMPEDANCIA	REACTANCIA
Resistencia	$R$	—
Bobina	$j\omega L$	$\omega L$
Condensador	$j(-1/\omega C)$	$-1/\omega C$

### Evaluación del objetivo 2

- Ser capaz de transformar un circuito con una fuente sinusoidal al dominio de la frecuencia utilizando conceptos de fasores.

9.3. La corriente en la bobina de 20 mH es  $10 \cos(10.000t + 30^\circ)$  mA. Calcule (a) la reactancia inductiva; (b) la impedancia de la bobina; (c) el fasor de tensión  $\mathbf{V}$ ; y (d) la ecuación de régimen permanente para  $v(t)$ .

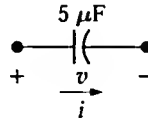


#### RESPUESTA

(a)  $200 \, \Omega$ ; (b)  $j200 \, \Omega$ ; (c)  $2 \angle 120^\circ \text{ V}$ ;

(d)  $2 \cos (10.000t + 120^\circ) \text{ V}$ .

- 9.4. La tensión entre los terminales del condensador de  $5 \mu\text{F}$  es  $30 \cos (4000t + 25^\circ) \text{ V}$ . Calcule (a) la reactancia capacitiva; (b) la impedancia del condensador; (c) el fasor de corriente  $I$ , y (d) la ecuación de régimen permanente para  $i(t)$ .



### RESPUESTA

- (a)  $-50 \Omega$ ; (b)  $-j50 \Omega$ ; (c)  $0,6 \angle 115^\circ \text{ A}$ ;  
(d)  $0,6 \cos (4000t + 115^\circ) \text{ A}$ .

**NOTA** Trate también de resolver los Problemas 9.13 y 9.14 del capítulo.

## 9.5. Leyes de Kirchhoff en el dominio de la frecuencia

Ya hemos señalado en la Sección 9.3, al hacer referencia a las Ecuaciones 9.23 y 9.24, que la transformada fasorial resulta útil en el análisis de circuitos porque puede aplicarse a la suma de funciones sinusoidales. Hemos ilustrado esta utilidad de la transformada en el Ejemplo 9.5. Vamos ahora a formalizar esta observación desarrollando las leyes de Kirchhoff en el dominio de la frecuencia.

### Ley de Kirchhoff de las tensiones en el dominio de la frecuencia

Comenzamos suponiendo que  $v_1$ – $v_n$  representan tensiones alrededor de un lazo cerrado en un circuito. Suponemos también que el circuito está operando en régimen permanente sinusoidal. Por tanto, la ley de Kirchhoff de las tensiones requiere que

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_n = 0, \quad (9.36)$$

que en régimen permanente sinusoidal nos queda

$$V_{m_1} \cos (\omega t + \theta_1) + V_{m_2} \cos (\omega t + \theta_2) + \cdots + V_{m_n} \cos (\omega t + \theta_n) = 0. \quad (9.37)$$

Usamos ahora la identidad de Euler para escribir la Ecuación 9.37 como

$$\Re \{V_{m_1} e^{j\theta_1} e^{j\omega t}\} + \Re \{V_{m_2} e^{j\theta_2} e^{j\omega t}\} + \cdots + \Re \{V_{m_n} e^{j\theta_n} e^{j\omega t}\} \quad (9.38)$$

que podemos reescribir en la forma

$$\Re \{V_{m_1} e^{j\theta_1} e^{j\omega t} + V_{m_2} e^{j\theta_2} e^{j\omega t} + \cdots + V_{m_n} e^{j\theta_n} e^{j\omega t}\} = 0. \quad (9.39)$$

Si sacamos como factor común el término  $e^{j\omega t}$  nos queda

$$\Re \{(V_{m_1} e^{j\theta_1} + V_{m_2} e^{j\theta_2} + \cdots + V_{m_n} e^{j\theta_n}) e^{j\omega t}\} = 0,$$

o

$$\Re \{(V_1 + V_2 + \cdots + V_n) e^{j\omega t}\} = 0. \quad (9.40)$$

Pero  $e^{j\omega t} \neq 0$ , por lo que

$$V_1 + V_2 + \cdots + V_n = 0, \quad (9.41)$$

que es el enunciado de la ley de Kirchhoff de las tensiones aplicado a los fasores de tensión. En otras palabras, la Ecuación 9.36 se aplica a un conjunto de tensiones sinusoidales en el dominio del tiempo, mientras que la Ecuación 9.41 es el enunciado equivalente en el dominio de la frecuencia.

## Ley de Kirchhoff de las corrientes en el dominio de la frecuencia

Podemos aplicar un proceso de deducción similar a un conjunto de corrientes sinusoidales. Así, si

$$i_1 + i_2 + \cdots + i_n = 0, \quad (9.42)$$

entonces

$$I_1 + I_2 + \cdots + I_n = 0, \quad (9.43)$$

donde  $I_1, I_2, \dots, I_n$  son las representaciones en forma de fasor de las corrientes individuales  $i_1, i_2, \dots, i_n$ .

Las Ecuaciones 9.35, 9.41 y 9.43 forman la base para el análisis de circuitos en el dominio de la frecuencia. Observe que la Ecuación 9.35 tiene la misma forma algebraica que la ley de Ohm, mientras que las Ecuaciones 9.41 y 9.43 enuncian las leyes de Kirchhoff para fasores. De este modo, podemos utilizar todas las técnicas desarrolladas para el análisis de circuitos resistivos con el fin de determinar los fasores de corriente y de tensión. No es necesario aprender ninguna nueva herramienta analítica; las herramientas básicas de análisis y simplificación de circuitos que hemos presentado en los Capítulos 2-4 pueden emplearse para analizar circuitos en el dominio de la frecuencia. El análisis de circuitos mediante fasores comprende dos tareas fundamentales: (1) es preciso ser capaz de construir el modelo en el dominio de la frecuencia de un circuito; y (2) hay que saber manipular algebraicamente magnitudes y/o números complejos. Ilustraremos estos aspectos del análisis fasorial en las explicaciones contenidas en las secciones siguientes, comenzando con las simplificaciones serie, paralelo y triángulo-estrella.

### Evaluación del objetivo 3

- Saber cómo utilizar técnicas de análisis de circuitos para resolver un circuito en el dominio de la frecuencia.

9.5. Hay cuatro ramas que terminan en un nodo común. La dirección de referencia para la corriente de cada rama ( $i_1, i_2, i_3$  e  $i_4$ ) se toma como entrante en el nodo. Si

$$i_1 = 100 \cos(\omega t + 25^\circ) \text{ A},$$

$$i_2 = 100 \cos(\omega t + 145^\circ) \text{ A e}$$

$$i_3 = 100 \cos(\omega t - 95^\circ) \text{ A},$$

determine  $i_4$ .

$$\text{RESPUESTA } i_4 = 0.$$

**NOTA** Trate también de resolver los Problemas 9.15 y 9.16 del capítulo.

## 9.6. Simplificaciones serie, paralelo y triángulo-estrella

Las reglas para combinar impedancias en serie o paralelo y para realizar transformaciones triángulo-estrella son iguales que para las resistencias. La única diferencia es que la combinación de impedancias significa la manipulación algebraica de números complejos.



## Combinación de impedancias en serie y en paralelo

Las impedancias en serie pueden combinarse en una única impedancia simplemente sumando las impedancias individuales. El circuito mostrado en la Figura 9.14 define el problema en términos generales. Las impedancias  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  están conectadas en serie entre los terminales a y b. Cuando las impedancias están en serie, las atraviesa el mismo fasor de corriente  $I$ . A partir de la Ecuación 9.35, vemos que la caída de tensión en cada impedancia es  $Z_1 I, Z_2 I, \dots, Z_n I$ , y aplicando la ley de Kirchhoff de las tensiones tenemos que

$$\begin{aligned} V_{ab} &= Z_1 I + Z_2 I + \dots + Z_n I \\ &= (Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n) I. \end{aligned} \quad (9.44)$$

La impedancia equivalente entre los terminales a y b es

$$Z_{ab} = \frac{V_{ab}}{I} = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n. \quad (9.45)$$

El Ejemplo 9.6 ilustra una aplicación numérica de la Ecuación 9.45.

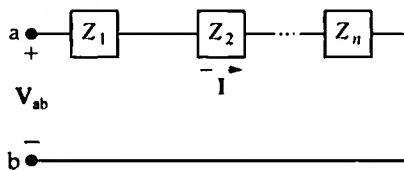


Figura 9.14. Impedancias en serie.

### EJEMPLO 9.6 Combinación de impedancias en serie

Una resistencia de  $90 \, \Omega$ , una bobina de  $32 \, \text{mH}$  y un condensador de  $5 \, \mu\text{F}$  están conectados en serie entre los terminales de una fuente de tensión sinusoidal, como se muestra en la Figura 9.15. La ecuación de régimen permanente para la tensión de fuente  $v_s$  es  $750 \cos(5000t + 30^\circ) \, \text{V}$ .

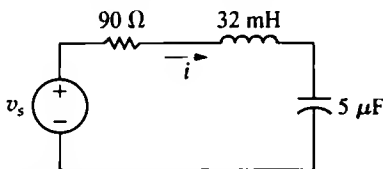


Figura 9.15. Circuito del Ejemplo 9.6.

- Construya el circuito equivalente en el dominio de la frecuencia.
- Calcule la corriente de régimen permanente  $i$  mediante el método de fasores.

### SOLUCIÓN

- A partir de la expresión correspondiente a  $v_s$ , tenemos que  $\omega = 5000 \, \text{rad/s}$ . Por tanto, la impedancia de la bobina de  $32 \, \text{mH}$  es

$$\begin{aligned} Z_L &= j\omega L \\ &= j(5000)(32 \times 10^{-3}) = j160 \, \Omega, \end{aligned}$$

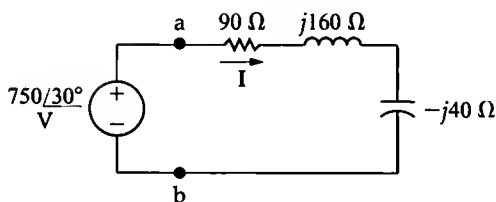
y la impedancia del condensador es

$$Z_C = j \frac{-1}{\omega C} = -j \frac{10^6}{(5000)(5)} = -j40 \, \Omega.$$

El fasor correspondiente a  $v_s$  es

$$V_s = 750 \angle 30^\circ \, \text{V}.$$

La Figura 9.16 ilustra el circuito equivalente en el dominio de la frecuencia del circuito mostrado en la Figura 9.15.



**Figura 9.16.** Circuito equivalente en el dominio de la frecuencia para el circuito mostrado en la Figura 9.15.

- b) Podemos calcular el fasor de corriente simplemente dividiendo la tensión de la fuente por la impedancia equivalente que

existe entre los terminales a y b. A partir de la Ecuación 9.45,

$$\begin{aligned} Z_{ab} &= 90 + j160 - j40 \\ &= 90 + j120 = 150 \angle 53,13^\circ \Omega. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$I = \frac{750 \angle 30^\circ}{150 \angle 53,13^\circ} = 5 \angle -23,13^\circ \text{ A.}$$

Con esto podemos escribir directamente la ecuación de régimen permanente para  $i$ :

$$i = 5 \cos(5000t - 23,13^\circ) \text{ A.}$$

### Evaluación del objetivo 3

- Saber cómo utilizar técnicas de análisis de circuitos para resolver un circuito en el dominio de la frecuencia.

9.6. Para el circuito de la Figura 9.15, con  $V_s = 125 \angle -60^\circ \text{ V}$  y  $\omega = 5000 \text{ rad/s}$ , calcule

- a) el valor de la capacidad que proporciona una corriente de salida  $i$  en régimen permanente con un ángulo de fase de  $-105^\circ$ ;

- b) la magnitud de la corriente de salida  $i$  en régimen permanente.

#### RESPUESTA

(a)  $2,86 \mu\text{F}$ ;

(b)  $0,982 \text{ A}$ .

**NOTA** Trate también de resolver el Problema 9.17 del capítulo.

Las impedancias conectadas en paralelo pueden reducirse a una única impedancia equivalente mediante la relación recíproca

$$\frac{1}{Z_{ab}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \cdots + \frac{1}{Z_n}. \quad (9.46)$$

La Figura 9.17 ilustra la conexión en paralelo de impedancias. Observe que, cuando las impedancias están en paralelo, todas ellas tienen la misma tensión entre sus terminales. Podemos deducir la Ecuación 9.46 directamente a partir de la Figura 9.17 simplemente combinando la ley de Kirchhoff de las corrientes con la versión para fasores de la ley de Ohm, es decir, la Ecuación 9.35. A partir de la Figura 9.17,

$$I = I_1 + I_2 + \cdots + I_n,$$

o bien

$$\frac{V}{Z_{ab}} = \frac{V}{Z_1} + \frac{V}{Z_2} + \cdots + \frac{V}{Z_n}. \quad (9.47)$$

Cancelando el término común de la tensión en la Ecuación 9.47 nos queda la Ecuación 9.46.

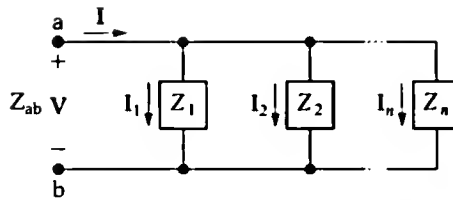


Figura 9.17. Impedancias en paralelo.

A partir de la Ecuación 9.46, para el caso de sólo dos impedancias en paralelo,

$$Z_{ab} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}. \quad (9.48)$$

También podemos expresar la Ecuación 9.46 en términos de la **admitancia**, definida como la recíproca de la impedancia y designada mediante la letra  $Y$ . Así,

$$Y = \frac{1}{Z} = G + jB \text{ (siemens)}. \quad (9.49)$$

La admitancia es, por supuesto, un número complejo, cuya parte real,  $G$ , se denomina **conductancia** y cuya parte imaginaria,  $B$ , se denomina **susceptancia**. Al igual que la admitancia, la conductancia y la susceptancia se miden en siemens (S). Utilizando la Ecuación 9.49 en la Ecuación 9.46, obtenemos

$$Y_{ab} = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n. \quad (9.50)$$

Conviene conocer la admitancia de cada uno de los elementos de circuito pasivos ideales, por lo cual hemos incluido un resumen en la Tabla 9.2.

Tabla 9.2. Valores de admitancia y susceptancia.

ELEMENTO DEL CIRCUITO	ADMITANCIA	SUSCEPTANCIA
Resistencia	$G$ (conductancia)	—
Bobina	$j(-1/\omega L)$	$-1/\omega L$
Condensador	$j\omega C$	$\omega C$

El Ejemplo 9.7 ilustra la aplicación de las Ecuaciones 9.49 y 9.50 a un circuito específico.

### EJEMPLO 9.7 Combinación de impedancias en serie y en paralelo

La fuente de corriente sinusoidal del circuito mostrado en la Figura 9.18 genera la siguiente corriente:

$$i_s = 8 \cos 200.000t \text{ A.}$$

- Construya el circuito equivalente en el dominio de la frecuencia.
- Determine las ecuaciones de régimen permanente para  $v$ ,  $i_1$ ,  $i_2$  e  $i_3$ .

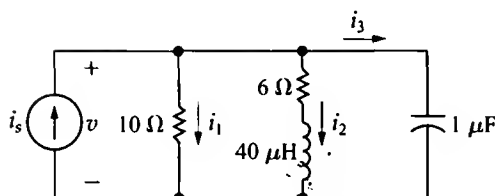


Figura 9.18. Circuito para el Ejemplo 9.7.

### SOLUCIÓN

- a) El fasor correspondiente a la fuente de corriente es  $8\angle 0^\circ$ ; las resistencias se transforman directamente al dominio de la frecuencia como 10 y 6  $\Omega$ ; la bobina de 40  $\mu\text{H}$  tiene una impedancia de  $j8\ \Omega$  a la frecuencia dada de 200.000 rad/s; y a esta frecuencia, el condensador de 1  $\mu\text{F}$  tiene una impedancia de  $-j5\ \Omega$ . La Figura 9.19 muestra el circuito equivalente en el dominio de la frecuencia y los símbolos que representan los fasores de las incógnitas.

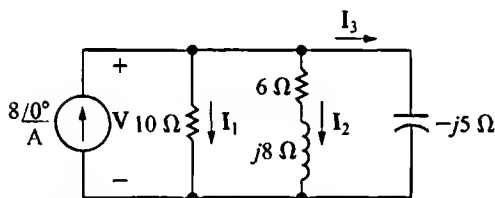


Figura 9.19. Circuito equivalente en el dominio de la frecuencia.

- b) El circuito mostrado en la Figura 9.19 indica que podemos obtener fácilmente la tensión en bornes de la fuente de corriente una vez que conozcamos la impedancia equivalente de las tres ramas en paralelo. Además, una vez conocida  $V$ , podemos calcular los tres fasores de las corrientes  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$  utilizando la Ecuación 9.35. Para hallar la impedancia equivalente de las tres ramas, determinamos primero la admitancia equivalente sumando simplemente las admitancias de cada rama. La admitancia de la primera rama es

$$Y_1 = \frac{1}{10} = 0,1\ \text{S}.$$

la admitancia de la segunda rama es

$$Y_2 = \frac{1}{6 + j8} = \frac{6 - j8}{100} = 0,06 - j0,08\ \text{S},$$

y la admitancia de la tercera rama es

$$Y_3 = \frac{1}{-j5} = j0,2\ \text{S}.$$

La admitancia de las tres ramas será

$$\begin{aligned} Y &= Y_1 + Y_2 + Y_3 \\ &= 0,16 + j0,12 \\ &= 0,2\angle 36,87^\circ\ \text{S}. \end{aligned}$$

La impedancia vista por la fuente de corriente es

$$Z = \frac{1}{Y} = 5\angle -36,87^\circ\ \Omega.$$

La tensión  $V$  tiene un valor

$$V = ZI = 40\angle -36,87^\circ\ \text{V}.$$

Por tanto,

$$I_1 = \frac{40\angle -36,87^\circ}{10} = 4\angle -36,87^\circ = 3,2 - j2,4\ \text{A},$$

$$I_2 = \frac{40\angle -36,87^\circ}{6 + j8} = 4\angle -90^\circ = -j4\ \text{A},$$

e

$$I_3 = \frac{40\angle -36,87^\circ}{5\angle -90^\circ} = 8\angle 53,13^\circ = 4,8 + j6,4\ \text{A}.$$

Podemos verificar los cálculos hasta este punto comprobando que

$$I_1 + I_2 + I_3 = I.$$

Específicamente,

$$3,2 - j2,4 - j4 + 4,8 + j6,4 = 8 + j0.$$

Las ecuaciones correspondientes de régimen permanente en el dominio de tiempo son

$$v = 40 \cos(200.000t - 36,87^\circ)\ \text{V},$$

$$i_1 = 4 \cos(200.000t - 36,87^\circ)\ \text{A},$$

$$i_2 = 4 \cos(200.000t - 90^\circ)\ \text{A},$$

$$i_3 = 8 \cos(200.000t + 53,13^\circ)\ \text{A}.$$

### Evaluación del objetivo 3

- Saber cómo utilizar técnicas de análisis de circuitos para resolver un circuito en el dominio de la frecuencia.
- 9.7.** Una resistencia de  $20\ \Omega$  está conectada en paralelo con una bobina de  $5\ \text{mH}$ . Esta combinación en paralelo está conectada en serie con una resistencia de  $5\ \Omega$  y con un condensador de  $25\ \mu\text{F}$ .
- Calcule la impedancia de esta interconexión si la frecuencia es de  $2\ \text{krad/s}$ .
  - Repita el apartado (a) para una frecuencia de  $8\ \text{krad/s}$ .
  - ¿A qué frecuencia finita se convierte la impedancia de la interconexión en puramente resistiva?
  - ¿Cuál es la impedancia para la frecuencia hallada en el apartado (c)?
- RESPUESTA**
- $9 - j12\ \Omega$ ;
  - $21 + j3\ \Omega$ ;
  - $4\ \text{krad/s}$ ;
  - $15\ \Omega$ .
- 9.8.** La interconexión descrita en el Problema de evaluación 9.7 se conecta a los terminales de una fuente de tensión  $v = 150 \cos 4000t\ \text{V}$ . ¿Cuál es la amplitud máxima de la corriente en la bobina de  $5\ \text{mH}$ ?
- RESPUESTA**
- $7,07\ \text{A}$ .

**NOTA** Trate también de resolver los Problemas 9.18-9.20 del capítulo.

### Transformaciones triángulo-estrella

La transformación  $\Delta$ -Y que hemos explicado en la Sección 3.7 con respecto a los circuitos resistivos también se aplica a las impedancias. La Figura 9.20 define una serie de impedancias conectadas en triángulo junto con su circuito equivalente en estrella. Las impedancias del circuito en estrella en función de las impedancias del circuito en triángulo son:

$$Z_1 = \frac{Z_b Z_c}{Z_a + Z_b + Z_c}, \quad (9.51)$$

$$Z_2 = \frac{Z_c Z_a}{Z_a + Z_b + Z_c}, \quad (9.52)$$

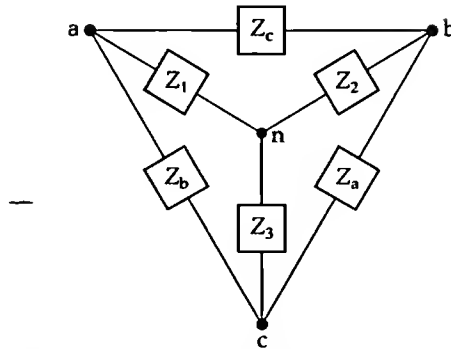
$$Z_3 = \frac{Z_a Z_b}{Z_a + Z_b + Z_c}. \quad (9.53)$$

La transformación  $\Delta$ -Y también puede hacerse a la inversa; es decir, podemos empezar con la estructura en estrella y sustituirla por una estructura en triángulo equivalente. Las impedancias del triángulo en función de las impedancias de la estrella son

$$Z_a = \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_1}, \quad (9.54)$$

$$Z_b = \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_2}, \quad (9.55)$$

$$Z_c = \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_3} \quad (9.56)$$



**Figura 9.20.** Transformación triángulo-estrella.

El proceso utilizado para deducir las Ecuaciones 9.51-9.53 y las Ecuaciones 9.54-9.56 es el mismo que el que ya utilizamos para deducir las ecuaciones correspondientes para circuitos puramente resistivos. De hecho, si comparamos las Ecuaciones 3.44-46 con las Ecuaciones 9.51-9.53 y las Ecuaciones 3.47-3.49 con las Ecuaciones 9.54-9.56, podemos ver que el símbolo  $Z$  ha sustituido al símbolo  $R$ . Revise el Problema 3.61 en lo que respecta a la deducción de las ecuaciones de la transformación  $\Delta$ -Y.

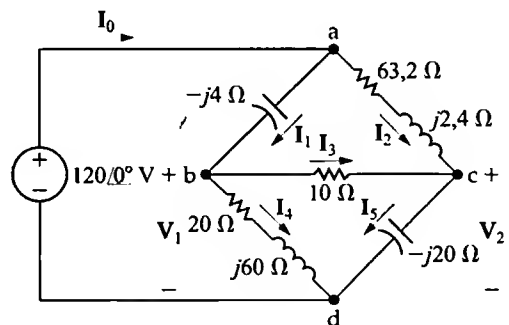
El Ejemplo 9.8 ilustra la utilidad de la transformación  $\Delta$ -Y en el análisis de circuitos mediante fasores.

### EJEMPLO 9.8 Utilización de una transformación triángulo-estrella en el dominio de la frecuencia

Utilice una transformación de impedancias  $\Delta$ -Y para hallar  $I_0$ ,  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$ ,  $I_4$ ,  $I_5$ ,  $V_1$  y  $V_2$  en el circuito de la Figura 9.21.

#### SOLUCIÓN

Observe en primer lugar que el circuito no resulta adecuado para la simplificación serie o paralelo en su configuración original. Una transformación de impedancias  $\Delta$ -Y nos permite hallar todas las corrientes de rama sin recurrir al método de las tensiones de nodo o al de las corrientes de malla. Si sustituimos el triángulo superior (abc) o el inferior (bcd) por su equivalente en estrella, podemos luego simplificar todavía más el circuito resultante mediante combinaciones serie-paralelo. Al decidir cuál de las dos configuraciones en triángulo reemplazar,



**Figura 9.21.** Circuito del Ejemplo 9.8.

conviene comprobar la suma de las impedancias alrededor de cada triángulo, ya que dicho valor forma el denominador de las impedancias equivalentes en estrella. La suma en el triángulo inferior es  $30 + j40$ , así que decidimos eliminar

dicho triángulo del circuito. La impedancia en estrella que se conecta al terminal b es

$$Z_1 = \frac{(20 + j60)(10)}{30 + j40} = 12 + j4 \, \Omega,$$

La impedancia en estrella que se conecta al terminal c es

$$Z_2 = \frac{10(-j20)}{30 + j40} = -3,2 - j2,4 \, \Omega,$$

y la impedancia en estrella que se conecta al terminal d es

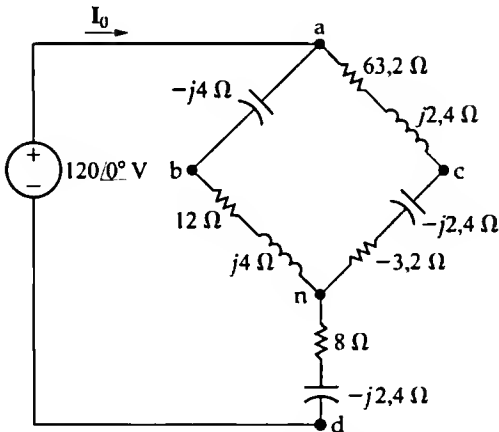
$$Z_3 = \frac{(20 + j60)(-j20)}{30 + j40} = 8 - j24 \, \Omega.$$

Insertando las impedancias equivalentes en estrella en el circuito, obtenemos el circuito mostrado en la Figura 9.22, que podemos simplificar mediante reducciones serie-paralelo. La impedancia en la rama abn es

$$Z_{abn} = 12 + j4 - j4 = 12 \, \Omega,$$

y la impedancia en la rama acn es

$$Z_{acn} = 63,2 + j2,4 - j2,4 - 3,2 = 60 \, \Omega.$$



**Figura 9.22.** El circuito mostrado en la Figura 9.21, habiendo sustituido el triángulo inferior por su configuración en estrella equivalente.

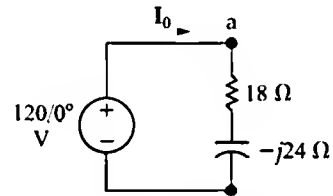
Observe que la rama abn está en paralelo con la rama acn. Por tanto, podemos sustituir estas

dos ramas por una única rama que tenga una impedancia de

$$Z_{an} = \frac{(60)(12)}{72} = 10 \, \Omega.$$

Combinando esta resistencia de 10 Ω con la impedancia existente entre n y d, el circuito mostrado en la Figura 9.22 se reduce al que puede verse en la Figura 9.23. A partir de este último circuito,

$$I_0 = \frac{120 \angle 0^\circ}{18 - j24} = 4 \angle 53,13^\circ = 2,4 + j3,2 \, \text{A}.$$



**Figura 9.23.** Una versión simplificada del circuito mostrado en la Figura 9.22.

Una vez conocida  $I_0$ , podemos volver hacia atrás, a través de los circuitos equivalentes, para hallar las corrientes de rama del circuito original. Comencemos observando que  $I_0$  es la corriente en la rama nd de la Figura 9.22. Por tanto,

$$V_{nd} = (8 - j24)I_0 = 96 - j32 \, \text{V}.$$

Ahora podemos calcular la tensión  $V_{an}$  porque

$$V = V_{an} + V_{nd}$$

y tanto  $V$  como  $V_{nd}$  son conocidas. Así,

$$V_{an} = 120 - 96 + j32 = 24 + j32 \, \text{V}.$$

Ahora calculamos las corrientes de rama  $I_{abn}$  e  $I_{acn}$ :

$$I_{abn} = \frac{24 + j32}{12} = 2 + j\frac{8}{3} \, \text{A}.$$

$$I_{acn} = \frac{24 + j32}{60} = \frac{4}{10} + j\frac{8}{15} \, \text{A}.$$

En términos de las corrientes de rama definidas en la Figura 9.21, tendremos que

$$I_1 = I_{abn} = 2 + j\frac{8}{3} \text{ A},$$

$$I_1 = I_{acn} = \frac{4}{10} + j\frac{8}{15} \text{ A}.$$

Podemos comprobar los cálculos correspondientes a  $I_1$  e  $I_2$  observando que

$$I_1 + I_2 = 2,4 + j3,2 = I_0.$$

Para hallar las corrientes de rama  $I_3$ ,  $I_4$  e  $I_5$ , debemos primero calcular las tensiones  $V_1$  y  $V_2$ . Si observamos la Figura 9.21, vemos que

$$V_1 = 120 \angle 0^\circ - (-j4)I_1 = \frac{328}{3} + j8 \text{ V},$$

$$V_2 = 120 \angle 0^\circ - (63,2 + j2,4)I_2 = 96 - j\frac{104}{3} \text{ V}.$$

Ahora calculamos las corrientes de rama  $I_3$ ,  $I_4$  e  $I_5$ :

$$I_3 = \frac{V_1 - V_2}{10} = \frac{4}{3} + j\frac{12,8}{3} \text{ A},$$

$$I_4 = \frac{V_1}{20 + j60} = \frac{2}{3} - j1,6 \text{ A},$$

$$I_5 = \frac{V_2}{-j20} = \frac{26}{15} + j4,8 \text{ A}.$$

Podemos comprobar los cálculos viendo que

$$I_4 + I_5 = \frac{2}{3} + \frac{26}{15} - j1,6 + j4,8 = 2,4 + j3,2 = I_0,$$

$$I_3 + I_4 = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} + j\frac{12,8}{3} - j1,6 = 2 + j\frac{8}{3} = I_1,$$

$$I_3 + I_2 = \frac{4}{3} + \frac{4}{10} + j\frac{12,8}{3} + j\frac{8}{15} = \frac{26}{15} + j4,8 = I_5.$$

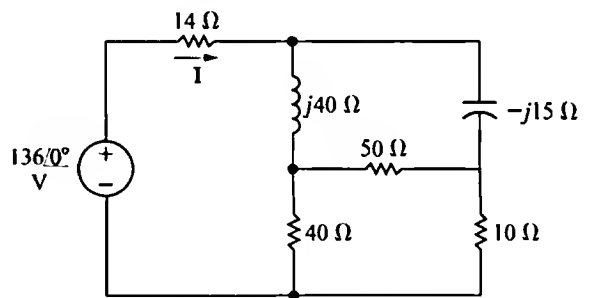
### Evaluación del objetivo 3

- Saber cómo utilizar técnicas de análisis de circuitos para resolver un circuito en el dominio de la frecuencia.

9.9. Utilice una transformación  $\Delta$ -Y para hallar la corriente  $I$  en el circuito mostrado.

**RESPUESTA**

$$I = 4 \angle 28,07^\circ \text{ A}.$$



**NOTA** Trate también de resolver el Problema 9.35 del capítulo.

## 9.7. Transformaciones de fuentes y circuitos equivalentes de Thévenin-Norton

Las transformaciones de fuentes presentadas en la Sección 4.9 y los circuitos equivalentes de Thévenin-Norton explicados en la Sección 4.10 son técnicas analíticas que también pueden aplicarse a los circuitos en el dominio de la frecuencia. Vamos a demostrar la validez de estas técnicas siguiendo el mismo proceso que ya empleamos en las Secciones 4.9 y 4.10, con la salvedad de que sustituiremos la resis-



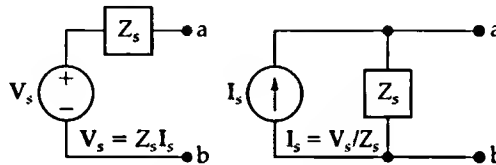


Figura 9.24. Una transformación de fuente en el dominio de la frecuencia.

tencia ( $R$ ) por la impedancia ( $Z$ ). La Figura 9.24 muestra el circuito equivalente según la técnica de transformación de fuentes, con la nomenclatura correspondiente al dominio de la frecuencia.

La Figura 9.25 ilustra la versión en el dominio de la frecuencia de un circuito equivalente de Thévenin. La Figura 9.27 muestra el equivalente en el dominio de la frecuencia de un circuito equivalente de Norton. Las técnicas para determinar la impedancia y la tensión equivalentes de Thévenin son idénticas a las utilizadas en los circuitos resistivos, con la excepción de que los circuitos equivalentes en el dominio de la frecuencia requieren una manipulación de números complejos. Lo mismo cabe decir en lo que respecta a la determinación de la impedancia en la corriente equivalente de Norton.

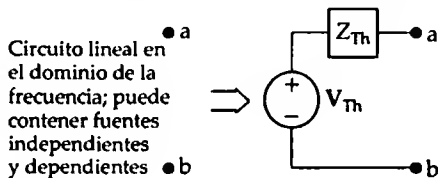


Figura 9.25. Versión en el dominio de la frecuencia de un circuito equivalente de Thévenin.

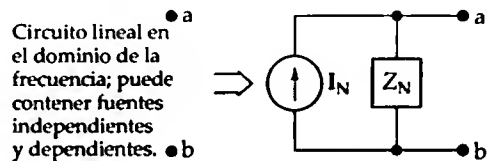


Figura 9.26. Versión en el dominio de la frecuencia de un circuito equivalente de Norton.

El Ejemplo 9.9 muestra la aplicación de la transformación de fuentes al análisis en el dominio de la frecuencia. El Ejemplo 9.10 ilustra los detalles de la determinación de un circuito equivalente de Thévenin en el dominio de la frecuencia.

### EJEMPLO 9.9 Realización de transformaciones de fuentes en el dominio de la frecuencia

Utilice la técnica de transformación de fuentes para hallar el fasor de tensión  $V_0$  en el circuito mostrado en la Figura 9.27.

#### SOLUCIÓN

Podemos sustituir la combinación en serie de la fuente de tensión ( $40\angle 0^\circ$ ) y de la impedancia de  $1 + j3\ \Omega$  por una combinación en paralelo de una fuente de corriente y de esa misma impedancia de  $1 + j3\ \Omega$ . La corriente de la fuente será

$$I = \frac{40}{1 + j3} = \frac{40}{10}(1 - j3) = 4 - j12\text{ A.}$$

Así, podemos modificar el circuito mostrado en la Figura 9.27 para obtener el que se ilustra en

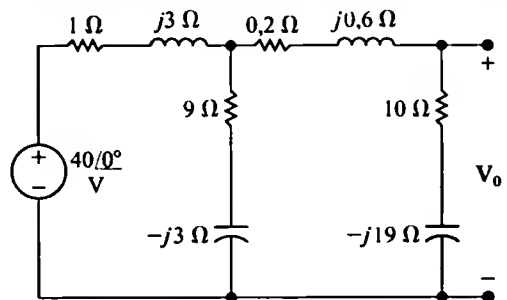
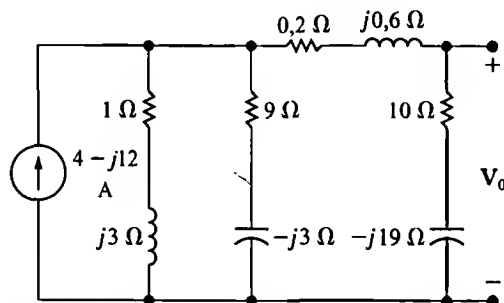


Figura 9.27. Circuito del Ejemplo 9.9.

la Figura 9.28. Observe que la referencia de polaridad de la fuente de 40 V determina la dirección de referencia para  $I$ .



**Figura 9.28.** Primer paso en la reducción del circuito mostrado en la Figura 9.27.

A continuación, combinamos las dos ramas paralelas en una única impedancia,

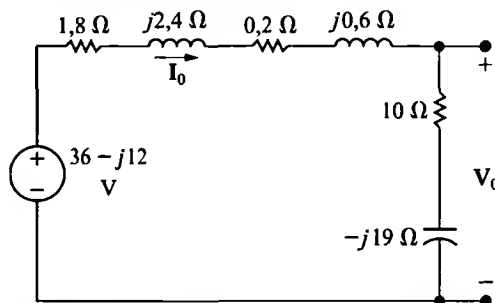
$$Z = \frac{(1 + j3)(9 - j3)}{10} = 1,8 + j2,4 \, \Omega,$$

que está en paralelo con la fuente de corriente de valor  $4 - j12$  A. Otra transformación de fuente convierte esta combinación en paralelo en una combinación en serie compuesta de una fuente de tensión y una impedancia de valor  $1,8 + j2,4 \, \Omega$ . La tensión de la fuente será

$$V = (4 - j12)(1,8 + j2,4) = 36 - j12 \, \text{V}.$$

Utilizando esta transformación de fuente, redibujamos el circuito en la forma que se muestra en la Figura 9.29. Observe la polaridad de la

fuente de tensión. Hemos añadido la etiqueta correspondiente a la corriente desconocida  $I_0$  para facilitar el cálculo de  $V_0$ .



**Figura 9.29.** Segundo paso en la reducción del circuito mostrado en la Figura 9.27.

Observe también que hemos reducido el circuito a un circuito en serie simple. Podemos calcular la corriente  $I_0$  dividiendo la tensión de la fuente por la impedancia total en serie:

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{36 - j12}{12 - j16} = \frac{12(3 - j1)}{4(3 - j4)} \\ &= \frac{39 + j27}{25} = 1,56 + j1,08 \, \text{A}. \end{aligned}$$

Ahora obtenemos el valor de  $V_0$  multiplicando  $I_0$  por la impedancia  $10 - j19$ :

$$\begin{aligned} V_0 &= (1,56 + j1,08)(10 - j19) \\ &= 36,12 - j18,84 \, \text{V}. \end{aligned}$$

### ➔ EJEMPLO 9.10 Determinación de un equivalente de Thévenin en el dominio de la frecuencia

Halle el circuito equivalente de Thévenin con respecto a los terminales a y b para el circuito mostrado en la Figura 9.30.

#### SOLUCIÓN

Primero determinamos la tensión equivalente de Thévenin. Dicha tensión es la tensión en circuito abierto que aparece entre los terminales a y b.

Seleccionamos la referencia para la tensión de Thévenin como positiva en el terminal a. Podemos realizar dos transformaciones de fuentes en relación con la fuente de 120 V y las dos resistencias de 12 y 60 Ω, con el fin de simplificar esta parte del circuito. Al mismo tiempo, estas transformaciones deben preservar la identidad de la tensión de control  $V_x$ , debido a la presencia de la fuente de tensión dependiente.

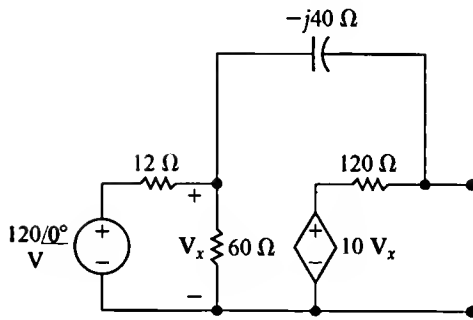


Figura 9.30. Circuito del Ejemplo 9.10.

Realizamos las dos transformaciones de fuente sustituyendo primero la combinación en serie de la fuente de 120 V y de la resistencia de 12 Ω por una fuente de corriente de 10 A en paralelo con 12 Ω. A continuación, sustituimos la combinación en paralelo de las dos resistencias de 12 y 60 Ω por una resistencia de 10 Ω. Finalmente, sustituimos la fuente de 10 A en paralelo con 10 Ω por una fuente de 100 V en serie con 10 Ω. La Figura 9.31 muestra el circuito resultante.

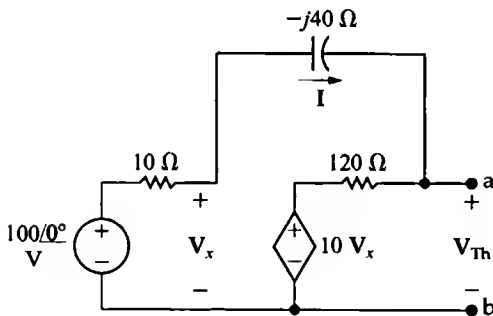


Figura 9.31. Una versión simplificada del circuito mostrado en la Figura 9.30.

Hemos añadido la etiqueta correspondiente a la corriente I a la Figura 9.31 para facilitar las posteriores explicaciones. Observe que, una vez que conocemos el valor de la corriente I, podemos calcular la tensión de Thévenin. Podemos hallar I sumando las tensiones alrededor del lazo cerrado en el circuito mostrado en la Figura 9.31. Si lo hacemos así, tenemos que

$$100 = 10I - j40I + 120I + 10V_x$$

$$= (130 - j40)I + 10V_x.$$

Podemos relacionar la tensión de control  $V_x$  con la corriente I observando en la Figura 9.31 que

$$V_x = 100 - 10I.$$

Entonces,

$$I = \frac{-900}{30 - j40} = 18 \angle -126,87^\circ \text{ A.}$$

Ahora podemos calcular  $V_x$ :

$$V_x = 100 - 180 \angle -126,87^\circ$$

$$= 208 + j144 \text{ V.}$$

Finalmente, observamos en la Figura 9.31 que

$$V_{Th} = 10V_x + 120I$$

$$= 2080 + j1440 + 120(18) \angle -126,87^\circ$$

$$= 784 - j288$$

$$= 835,22 \angle -20,17^\circ \text{ V.}$$

Para obtener la impedancia de Thévenin, podemos utilizar cualquiera de las técnicas que ya hemos empleado anteriormente para hallar la resistencia de Thévenin. Vamos a emplear como ejemplo el método de la fuente de prueba. Recuerde que, al usar este método, desactivamos todas las fuentes independientes del circuito y luego aplicamos una fuente de prueba de tensión o de corriente a los terminales de interés. El cociente entre la tensión y la corriente en la fuente será la impedancia de Thévenin. La Figura 9.32 muestra el resultado de aplicar esta técnica al circuito de la Figura 9.30. Observe que hemos elegido una fuente de prueba con tensión  $V_T$ . Observe también que hemos desactivado la fuente de tensión independiente introduciendo el apropiado cortocircuito y que hemos preservado la identidad de  $V_x$ .

Las corrientes de rama  $I_a$  e  $I_b$  se han añadido al circuito para simplificar las explicaciones referidas al cálculo de  $I_T$ . Aplicando de forma direc-

ta las leyes de Kirchhoff de los circuitos, puede verificarse fácilmente que:

$$I_a = \frac{V_T}{10 - j40}, \quad V_x = 10I_a,$$

$$I_b = \frac{V_T - 10V_x}{120} = \frac{-V_T(9 + j4)}{120(1 - j4)},$$

$$I_T = I_a + I_b = \frac{V_T}{10 - j40} \left( 1 - \frac{9 + j4}{12} \right)$$

$$= \frac{V_T(3 - j4)}{12(10 - j40)},$$

$$Z_{Th} = \frac{V_T}{I_T} = 91,2 - j38,4 \, \Omega.$$

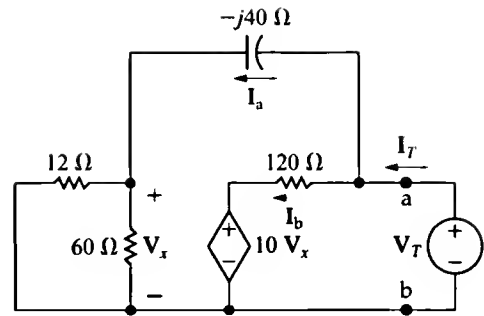


Figura 9.32. Circuito para calcular la impedancia equivalente de Thévenin.

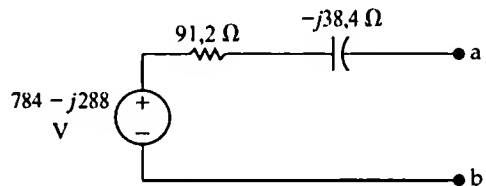


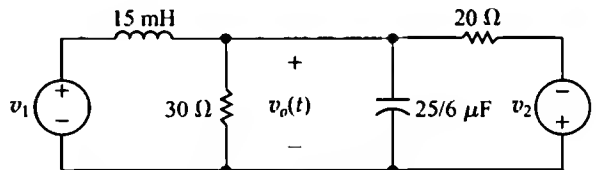
Figura 9.33. Equivalente de Thévenin para el circuito mostrado en la Figura 9.30.

La Figura 9.33 muestra el circuito equivalente de Thévenin.

### Evaluación del objetivo 3

- Saber cómo utilizar técnicas de análisis de circuitos para resolver un circuito en el dominio de la frecuencia.

9.10. Determine la ecuación de régimen permanente para  $v_o(t)$  en el circuito mostrado, utilizando la técnica de transformación de fuentes. Las fuentes de tensión sinusoidales son  $v_1 = 240 \cos(4000t + 53,13^\circ)$  V y  $v_2 = 96 \sin 4000t$  V.



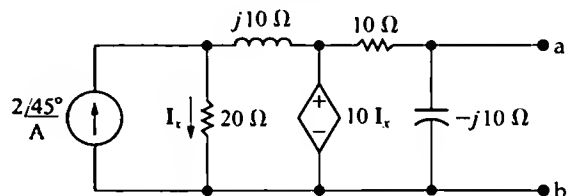
RESPUESTA  $48 \cos(4000t + 36,87^\circ)$  V.

9.11. Calcule el equivalente de Thévenin con respecto a los terminales a y b en el circuito mostrado.

RESPUESTA

$$V_{Th} = V_{ab} = 0,5 \angle -45^\circ \text{ V};$$

$$Z_{Th} = 5 - j5 \, \Omega.$$



**NOTA** Trate también de resolver los Problemas 9.39, 9.42 y 9.43 del capítulo.

## 9.8. Método de las tensiones de nodo

En las Secciones 4.2-4.4, hemos presentado los conceptos básicos del método de las tensiones de nodo para el análisis de circuitos. Podemos aplicar los mismos conceptos a la hora de utilizar el método de las tensiones de nodo para analizar circuitos en el dominio de la frecuencia. El Ejemplo 9.11 ilustra la solución de uno de tales circuitos mediante la técnica de las tensiones de nodo. El Problema de evaluación 9.12 y muchos de los problemas del capítulo le darán la oportunidad de utilizar el método de las tensiones de nodo para determinar respuestas sinusoidales en régimen permanente.

### EJEMPLO 9.11 Utilización del método de las tensiones de nodo en el dominio de la frecuencia

Utilice el método de las tensiones de nodo para hallar las corrientes de rama  $I_a$ ,  $I_b$  e  $I_c$  en el circuito de la Figura 9.34.

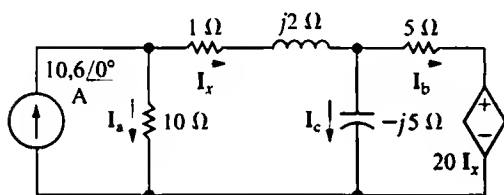


Figura 9.34. Circuito del Ejemplo 9.11.

### SOLUCIÓN

Podemos describir el circuito en términos de dos tensiones de nodo, porque contiene tres nodos esenciales. Hay cuatro ramas conectadas al nodo esencial que se extiende a lo largo de la parte inferior de la Figura 9.34, por lo que lo utilizaremos como nodo de referencia. Los dos nodos esenciales restantes están etiquetados como 1 y 2 en la Figura 9.35, designándose las correspondientes tensiones de nodo mediante  $V_1$  y  $V_2$ .

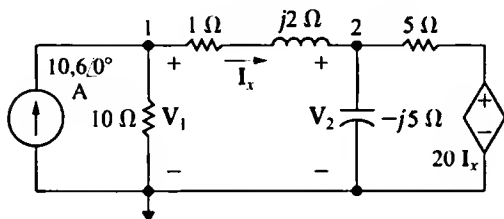


Figura 9.35. El circuito mostrado en la Figura 9.34, con las definiciones correspondientes a las tensiones de nodo.

Sumando las corrientes que salen del nodo 1 se obtiene

$$-10,6 + \frac{V_1}{10} + \frac{V_1 - V_2}{1 + j2} = 0.$$

Multiplicando por  $1 + j2$  y agrupando los coeficientes de  $V_1$  y  $V_2$ , nos queda la expresión

$$V_1(1,1 + j0,2) - V_2 = 10,6 + j21,2.$$

Sumando las corrientes que salen del nodo 2 se obtiene

$$\frac{V_2 - V_1}{1 + j2} + \frac{V_2}{-j5} + \frac{V_2 - 20I_x}{5} = 0.$$

La corriente de control  $I_x$  es

$$I_x = \frac{V_1 - V_2}{1 + j2}.$$

Sustituyendo el valor de  $I_x$  en la ecuación correspondiente al nodo 2, multiplicando por  $1 + j2$  y agrupando los coeficientes de  $V_1$  y  $V_2$ , nos queda la ecuación

$$-5V_1 + (4,8 + j0,6)V_2 = 0.$$

Las soluciones correspondientes a  $V_1$  y  $V_2$  son

$$V_1 = 68,40 - j16,80 \text{ V},$$

$$V_2 = 68 - j26 \text{ V}.$$

Por tanto, las corrientes de rama son

$$I_a = \frac{V_1}{10} = 6,84 - j1,68 \text{ A},$$

$$I_x = \frac{V_1 - V_2}{1 + j2} = 3,76 + j1,68 \text{ A},$$

$$I_b = \frac{V_2 - 20I_x}{5} = -1,44 - j11,92 \text{ A},$$

$$I_c = \frac{V_2}{-j5} = 5,2 + j13,6 \text{ A}.$$

Para verificar los resultados, podemos ver que

$$I_a + I_x = 6,84 - j1,68 + 3,76 + j1,68$$

$$= 10,6 \text{ A},$$

$$I_x = I_b + I_c$$

$$= -1,44 - j11,92 + 5,2 + j13,6$$

$$= 3,76 + j1,68 \text{ A}.$$

### Evaluación del objetivo 3

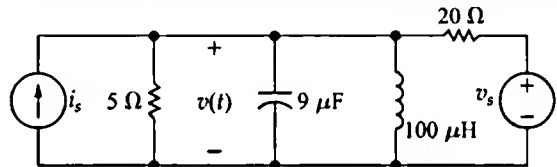
- Saber cómo utilizar técnicas de análisis de circuitos para resolver un circuito en el dominio de la frecuencia.

- 9.12. Utilice el método de las tensiones de nodo para hallar la ecuación de régimen permanente para  $v(t)$  en el circuito mostrado. Las fuentes sinusoidales son

$$i_s = 10 \cos \omega t \text{ A},$$

$$v_s = 100 \text{ sen } \omega t \text{ V},$$

donde  $\omega = 50 \text{ krad/s}$ .



#### RESPUESTA

$$v(t) = 31,62 \cos (50.000t - 71,57^\circ) \text{ V}.$$

**NOTA** Trate también de resolver los Problemas 9.51 y 9.54 del capítulo.

## 9.9. El método de las corrientes de malla

También podemos usar el método de las corrientes de malla para analizar circuitos en el dominio de la frecuencia. Los procedimientos empleados en las aplicaciones del dominio de la frecuencia son iguales a los que ya utilizamos al analizar circuitos resistivos. En las Secciones 4.5-4.7 hemos presentado las técnicas básicas del método de las corrientes de malla; vamos a ilustrar la ampliación de este método a los circuitos en el dominio de la frecuencia en el Ejemplo 9.12.

### EJEMPLO 9.12 Utilización del método de las corrientes de malla en el dominio de la frecuencia

Utilice el método de las corrientes de malla para hallar las tensiones  $V_1$ ,  $V_2$  y  $V_3$  en el circuito mostrado en la Figura 9.36.

#### SOLUCIÓN

El circuito tiene dos mallas y una fuente de tensión dependiente, por lo que debemos escribir

dos ecuaciones de corriente de malla y una ecuación de restricción. La dirección de referencia para las corrientes de malla  $I_1$  e  $I_2$  es en el sentido horario, como se muestra en la Figura 9.37. Una vez hallados los valores de  $I_1$  e  $I_2$ , podemos determinar las tensiones desconocidas. Sumando las tensiones alrededor de la malla 1, obtenemos

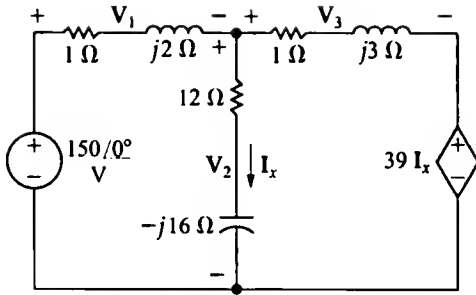


Figura 9.36. Circuito del Ejemplo 9.12.

$$150 = (1 + j2)I_1 + (12 - j16)(I_1 - I_2),$$

$$150 = (13 - j14)I_1 - (12 - j16)I_2.$$

Sumando las tensiones alrededor de la malla 2, se genera la ecuación

$$0 = (12 - j16)(I_2 - I_1) + (1 + j3)I_2 + 39I_x.$$

La Figura 9.37 nos muestra que la corriente de control  $I_x$  es la diferencia entre  $I_1$  e  $I_2$ ; es decir, la restricción es

$$I_x = I_1 - I_2.$$

Sustituyendo esta restricción en la ecuación correspondiente a la malla 2 y simplificando la ecuación resultante, nos queda

$$0 = (27 + j16)I_1 - (26 + j13)I_2.$$

Hallando los valores de  $I_1$  e  $I_2$ , se obtiene

$$I_1 = -26 - j52 \text{ A},$$

$$I_2 = -24 - j58 \text{ A},$$

$$I_x = -2 + j6 \text{ A}.$$

Las tres tensiones son

$$V_1 = (1 + j2)I_1 = 78 - j104 \text{ V},$$

$$V_2 = (12 - j16)I_x = 72 + j104 \text{ V},$$

$$V_3 = (1 + j3)I_2 = 150 - j130 \text{ V},$$

$$39I_x = -78 + j234 \text{ V}.$$

Podemos comprobar los cálculos sumando las tensiones alrededor de los lazos cerrados:

$$-150 + V_1 + V_2 = -150 + 78 - j104 + 72 + j104 = 0,$$

$$-V_2 + V_3 + 39I_x = -72 - j104 + 150 - j130 - 78 + j234 = 0,$$

$$-150 + V_1 + V_3 + 39I_x = -150 + 78 - j104 + 150 - j130 - 78 + j234 = 0.$$

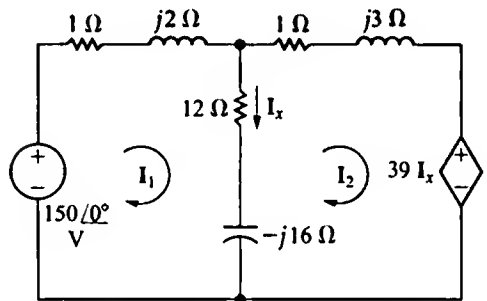


Figura 9.37. Corrientes de malla utilizadas para resolver el circuito mostrado en la Figura 9.36.

## 9.10. El transformador

Un transformador es un dispositivo basado en el acoplamiento magnético. Los transformadores se utilizan tanto en circuitos de comunicaciones como en circuitos de alimentación. En los circuitos de comunicaciones, el transformador se utiliza para adaptar las impedancias y eliminar las señales continuas de determinadas partes del sistema. En los circuitos de alimentación, los transformadores se emplean para conseguir niveles de tensión alterna que faciliten la transmisión, la distribución y consumo de la potencia eléctrica. Es necesario un conocimiento del comportamiento en régimen permanente sinusoidal del transformador a la hora de analizar tanto los sistemas de comunicaciones como los

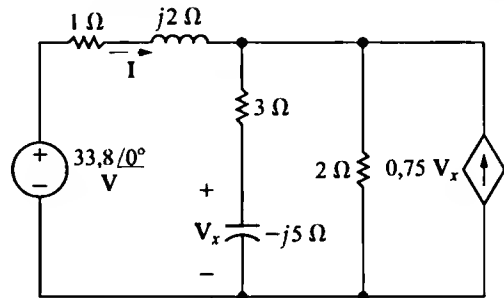
### Evaluación del objetivo 3

- Saber cómo utilizar técnicas de análisis de circuitos para resolver un circuito en el dominio de la frecuencia.

9.13. Utilice el método de las corrientes de malla para hallar el fasor de corriente  $I$  en el circuito mostrado.

**RESPUESTA**

$$I = 29 + j2 = 29,07 \angle 3,95^\circ \text{ A.}$$



**NOTA** Trate también de resolver los Problemas 9.56 y 9.59 del capítulo.

sistemas de alimentación. En esta sección, analizaremos el comportamiento en régimen permanente sinusoidal del **transformador lineal**, que es el que puede encontrarse principalmente en los circuitos de comunicaciones. En la Sección 9.11, trataremos del **transformador ideal**, que se emplea para modelar el transformador ferromagnético que suele usarse en los sistemas de alimentación.

Antes de comenzar, conviene realizar una observación. A la hora de analizar circuitos que contengan inductancia mutua, utilice el método de las corrientes de malla o de lazo para escribir las ecuaciones del circuito. El método de las tensiones de nodo resulta engorroso de utilizar cuando hay presente inductancia mutua. Esto se debe a que las corrientes presentes en las distintas bobinas no pueden escribirse en función de las tensiones de nodo mediante simple inspección.

### Análisis del circuito de un transformador lineal

Puede construirse un **transformador** simple devanando dos bobinas alrededor de un mismo núcleo, para garantizar el acoplamiento magnético. La Figura 9.38 muestra el modelo de circuito en el dominio de la frecuencia para un sistema que utiliza un transformador con el fin de conectar una carga a una fuente. A la hora de analizar este circuito, denominaremos **devanado primario** al devanado del transformador que está conectado a la fuente y **devanado secundario** al devanado que está conectado a la carga. Utilizando esta terminología, los parámetros correspondientes al circuito del transformador son:

$R_1$  = resistencia del devanado primario.

$R_2$  = resistencia del devanado secundario.

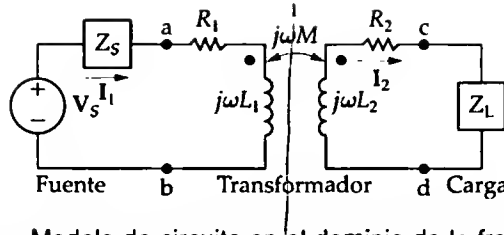
$L_1$  = autoinductancia del devanado primario.

$L_2$  = autoinductancia del devanado secundario.

$M$  = inductancia mutua.

La tensión interna de la fuente sinusoidal es  $V_s$  y la impedancia interna de la fuente es  $Z_s$ . La impedancia  $Z_L$  representa la carga conectada al devanado secundario del transformador. Los fasores de corriente  $I_1$  e  $I_2$  representan las corrientes que atraviesan los devanados primario y secundario del transformador, respectivamente.





**Figura 9.38.** Modelo de circuito en el dominio de la frecuencia para un transformador utilizado para conectar una carga a una fuente.

El análisis del circuito de la Figura 9.38 consiste en determinar  $I_1$  e  $I_2$  en función de los parámetros del circuito  $V_s$ ,  $Z_s$ ,  $R_1$ ,  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $R_2$ ,  $M$ ,  $Z_L$  y  $\omega$ . También nos interesa hallar la impedancia vista cuando se mira al transformador desde los terminales a y b. Para hallar  $I_1$  e  $I_2$ , escribimos primero las dos ecuaciones de las corrientes de malla que describen el circuito:

$$V_s = (Z_s + R_1 + j\omega L_1)I_1 - j\omega MI_2, \quad (9.57)$$

$$0 = -j\omega MI_1 + (R_2 + j\omega L_2 + Z_L)I_2. \quad (9.58)$$

Para facilitar la manipulación algebraica de las Ecuaciones 9.57 y 9.58, definimos

$$Z_{11} = Z_s + R_1 + j\omega L_1 \quad (9.59)$$

$$Z_{22} = R_2 + j\omega L_2 + Z_L, \quad (9.60)$$

donde  $Z_{11}$  es la autoimpedancia total de la malla que contiene el devanado primario del transformador y  $Z_{22}$  es la autoimpedancia total de la malla que contiene el devanado secundario. Empleando la notación introducida en las Ecuaciones 9.59 y 9.60, las soluciones correspondientes a  $I_1$  e  $I_2$  a partir de las Ecuaciones 9.57 y 9.58 son

$$I_1 = \frac{Z_{22}}{Z_{11}Z_{22} + \omega^2 M^2} V_s, \quad (9.61)$$

$$I_2 = \frac{j\omega M}{Z_{11}Z_{22} + \omega^2 M^2} V_s = \frac{j\omega M}{Z_{22}} I_1. \quad (9.62)$$

Para la tensión interna de la fuente  $V_s$ , la impedancia aparece como  $V_s/I_1$ , o

$$\frac{V_s}{I_1} = Z_{\text{int}} = \frac{Z_{11}Z_{22} + \omega^2 M^2}{Z_{22}} = Z_{11} + \frac{\omega^2 M^2}{Z_{22}}. \quad (9.63)$$

La impedancia en los terminales de la fuente es  $Z_{\text{int}} - Z_s$ , por lo que

$$Z_{ab} = Z_{11} + \frac{\omega^2 M^2}{Z_{22}} - Z_s = R_1 + j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{(R_2 + j\omega L_2 + Z_L)}. \quad (9.64)$$

Observe que la impedancia  $Z_{ab}$  es independiente de la polaridad magnética del transformador. La razón es que la inductancia mutua aparece en la Ecuación 9.64 elevada al cuadrado. Esta impedancia tiene un gran interés, porque muestra el modo en que el transformador afecta a la impedancia de la carga, vista desde la fuente. Sin el transformador, la carga estaría conectada directamente a la fuente y ésta vería una impedancia de carga a igual  $Z_L$ ; con el transformador, la carga está conectada a la fuen-

te a través del transformador y la fuente ve una impedancia de carga que es una versión modificada de  $Z_L$ , como puede verse en el tercer término de la Ecuación 9.64.

### Impedancia reflejada

El tercer término de la Ecuación 9.64 se denomina **impedancia reflejada** ( $Z_r$ ), porque es la impedancia equivalente de la bobina secundaria y de la impedancia de carga que se transmite, o refleja, hacia el lado primario del transformador. Observe que la impedancia reflejada se debe exclusivamente a la existencia de inductancia mutua; en otras palabras, si las dos bobinas estuvieran desacopladas,  $M$  sería cero,  $Z_r$  sería cero y  $Z_{ab}$  sería simplemente la autoimpedancia del devanado primario.

Para considerar con más detalle la impedancia reflejada, vamos a expresar primero la impedancia de carga en forma rectangular:

$$Z_L = R_L + jX_L, \quad (9.65)$$

donde la reactancia de carga  $X_L$  tiene su propio signo algebraico. En otras palabras,  $X_L$  será una cantidad positiva si la carga es inductiva y una cantidad negativa si la carga es capacitiva. Ahora usamos la Ecuación 9.65 para escribir la impedancia reflejada en forma rectangular:

$$\begin{aligned} Z_r &= \frac{\omega^2 M^2}{R_2 + R_L + j(\omega L_2 + X_L)} \\ &= \frac{\omega^2 M^2 [(R_2 + R_L) - j(\omega L_2 + X_L)]}{(R_2 + R_L)^2 + (\omega L_2 + X_L)^2} \\ &= \frac{\omega^2 M^2}{|Z_{22}|^2} [(R_2 + R_L) - j(\omega L_2 + X_L)]. \end{aligned} \quad (9.66)$$

El proceso de obtención de la Ecuación 9.66 aprovecha el hecho de que, cuando  $Z_L$  está escrita en forma rectangular, la autoimpedancia de la malla que contiene el devanado secundario es

$$Z_{22} = R_2 + R_L + j(\omega L_2 + X_L). \quad (9.67)$$

Ahora observe, en la Ecuación 9.66, que la autoimpedancia del circuito secundario se refleja hacia el circuito primario según un factor de escala igual a  $(\omega M/|Z_{22}|)^2$ , y que el signo de la componente reactiva  $(\omega L_2 + X_L)$  se invierte. Por tanto, el transformador lineal refleja el conjugado de la autoimpedancia del circuito secundario ( $Z_{22}^*$ ) hacia el devanado primario, multiplicándolo además por un valor escalar. El Ejemplo 9.13 ilustra el análisis de un circuito que contiene un transformador lineal mediante el método de las corrientes de malla.

### EJEMPLO 9.13 Análisis de un transformador lineal en el dominio de la frecuencia

Los parámetros de un transformador lineal son  $R_1 = 200 \, \Omega$ ,  $R_2 = 100 \, \Omega$ ,  $L_1 = 9 \, \text{H}$ ,  $L_2 = 4 \, \text{H}$  y  $k = 0.5$ . El transformador sirve para acoplar a una fuente de tensión sinusoidal una impedancia

que está compuesta por una resistencia de  $800 \, \Omega$  en serie con un condensador de  $1 \, \mu\text{F}$ . La fuente de  $300 \, \text{V}$  (rms) tiene una impedancia interna de  $500 + j100 \, \Omega$  y una frecuencia de  $400 \, \text{rad/s}$ .

- a) Construya un circuito equivalente en el dominio de la frecuencia para el sistema.
- b) Calcule la autoimpedancia del circuito primario.
- c) Calcule la autoimpedancia del circuito secundario.
- d) Calcule la autoimpedancia reflejada hacia el devanado primario.
- e) Calcule el factor de escala para la impedancia reflejada.
- f) Calcule la impedancia vista cuando se mira hacia los terminales del devanado primario del transformador.
- g) Calcule el equivalente de Thévenin con respecto a los terminales c y d.
- b) La autoimpedancia del circuito primario es
- $$Z_{11} = 500 + j100 + 200 + j3600$$
- $$= 700 + j3700 \Omega.$$
- c) La autoimpedancia del circuito secundario es
- $$Z_{22} = 100 + j1600 + 800 - j2500$$
- $$= 900 - j900 \Omega.$$
- d) La impedancia reflejada hacia el devanado primario es
- $$Z_r = \left( \frac{1200}{900 - j900} \right)^2 (900 + j900)$$
- $$= \frac{8}{9} (900 + j900) = 800 + j800 \Omega.$$

### SOLUCIÓN

- a) La Figura 9.39 muestra el circuito equivalente en el dominio de la frecuencia. Observe que la tensión interna de la fuente sirve como fasor de referencia y que  $V_1$  y  $V_2$  representan las tensiones en los terminales del transformador. A la hora de construir el circuito de la Figura 9.39, hemos realizado los cálculos siguientes:

$$j\omega L_1 = j(400)(9) = j3600 \Omega,$$

$$j\omega L_2 = j(400)(4) = j1600 \Omega,$$

$$M = 0,5\sqrt{(9)(4)} = 3 \text{ H},$$

$$j\omega M = j(400)(3) = j1200 \Omega, \quad /$$

$$\frac{1}{j\omega C} = \frac{10^6}{j400} = -j2500 \Omega.$$

- e) El factor de escala con el que se refleja  $Z_{22}$  es  $8/9$ .
- f) La impedancia vista al mirar hacia los terminales primarios del transformador es la impedancia del devanado primario más la impedancia reflejada, es decir,
- $$Z_{ab} = 200 + j3600 + 800 + j800$$
- $$= 1000 + j4400 \Omega.$$
- g) La tensión de Thévenin será igual al valor en circuito abierto de  $V_{cd}$ . El valor en circuito abierto de  $V_{cd}$  es igual a  $j1200$  veces el valor en circuito abierto de  $I_1$ . El valor en circuito abierto de  $I_1$  es

$$I_1 = \frac{300 \angle 0^\circ}{700 + j3700}$$

$$= 79,67 \angle -79,29^\circ \text{ mA}.$$

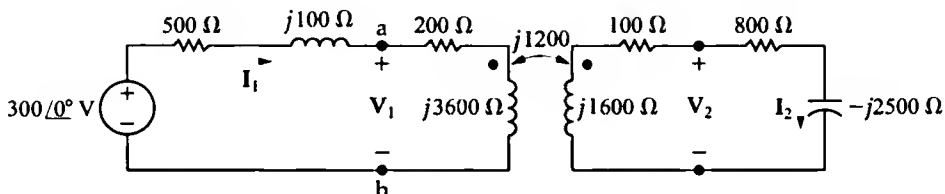


Figura 9.39. Circuito equivalente en el dominio de la frecuencia para el Ejemplo 9.13.

Por tanto

$$\begin{aligned} V_{Th} &= j1200(79,67 \angle -79,29^\circ) \times 10^{-3} \\ &= 95,60 \angle 10,71^\circ \text{ V.} \end{aligned}$$

La impedancia de Thévenin será igual a la impedancia del devanado secundario más la impedancia reflejada desde el primario cuando se sustituye la fuente de tensión por un cortocircuito. Por tanto,

$$\begin{aligned} Z_{Th} &= 100 + j1600 \\ &+ \left( \frac{1200}{|700 + j3700|} \right)^2 (700 - j3700) \end{aligned}$$

$$= 171,09 + j1224,26 \Omega.$$

El equivalente de Thévenin se muestra en la Figura 9.40.

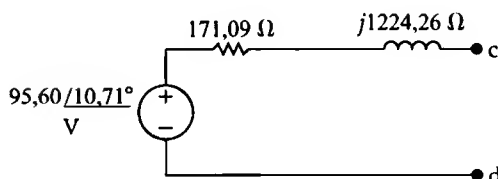
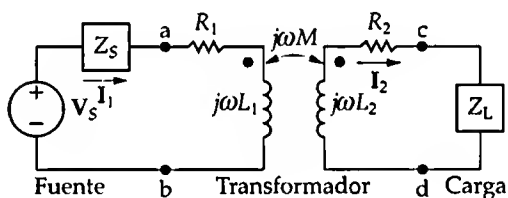


Figura 9.40. Circuito equivalente de Thévenin para el Ejemplo 9.13.

## Evaluación del objetivo 4

- Ser capaz de analizar circuitos que contengan transformadores lineales utilizando el método de fasores.

**9.14.** Un transformador lineal se utiliza para acoplar a una fuente de tensión sinusoidal una carga compuesta por una resistencia de  $360 \Omega$  en serie con una bobina de  $0,25 \text{ H}$ , como se muestra en la figura. La fuente de tensión tiene una impedancia interna igual a  $184 + j0 \Omega$  y una tensión máxima de  $245,20 \text{ V}$ , y está operando a  $800 \text{ rad/s}$ . Los parámetros del transformador son  $R_1 = 100 \Omega$ ,  $L_1 = 0,5 \text{ H}$ ,  $R_2 = 40 \Omega$ ,  $L_2 = 0,125 \text{ H}$  y  $k = 0,4$ . Calcule (a) la impedancia reflejada; (b) la corriente en el devanado primario; y (c) la corriente en el secundario.



### RESPUESTA

- (a)  $10,24 - j7,68 \Omega$ ;
- (b)  $0,5 \cos(800t - 53,13^\circ) \text{ A}$ ;
- (c)  $0,08 \cos 800t \text{ A}$ .

**NOTA** Trate también de resolver los Problemas 9.66 y 9.67 del capítulo.

## 9.11. El transformador ideal

Un transformador ideal está compuesto por dos bobinas magnéticamente acopladas que tienen  $N_1$  y  $N_2$  vueltas, respectivamente, y que exhiben estas tres propiedades:

1. El coeficiente de acoplamiento es la unidad ( $k = 1$ ).
2. La autoinductancia de cada bobina es infinita ( $L_1 = L_2 = \infty$ ).

3. Las pérdidas en las bobinas, debidas a la resistencia parásita, son despreciables.

Nuestro análisis del comportamiento de los transformadores ideales comienza a partir de la Ecuación 9.64, que describe la impedancia en los terminales de una fuente conectada a un transformador lineal. Vamos a repetir aquí dicha ecuación y a analizarla con más detalle.

### Análisis de los valores limitadores

Cuando  $L_1$  y  $L_2$  se hacen infinitamente grandes y, al mismo tiempo, el coeficiente de acoplamiento se aproxima a la unidad, obtenemos una útil relación entre la impedancia de entrada y la impedancia de carga, dada por  $Z_{ab}$  en la Ecuación 9.64:

$$\begin{aligned} Z_{ab} &= Z_{11} + \frac{\omega^2 M^2}{Z_{22}} - Z_s \\ &= R_1 + j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{(R_2 + j\omega L_2 + Z_L)}. \end{aligned} \quad (9.68)$$

Los transformadores devanados alrededor de núcleos ferromagnéticos pueden aproximarse a estas condiciones. Aun cuando dichos transformadores son no lineales, podemos obtener información útil construyendo un modelo ideal que ignore las no linealidades.

Para ver cómo cambia  $Z_{ab}$  cuando  $k = 1$  y  $L_1$  y  $L_2$  se hacen infinitamente grandes, introduzcamos primero la notación

$$Z_{22} = R_2 + R_L + j(\omega L_2 + X_L) = R_{22} + jX_{22}$$

y volvamos a reordenar la Ecuación 9.68:

$$\begin{aligned} Z_{ab} &= R_1 + \frac{\omega^2 M^2 R_{22}}{R_{22}^2 + X_{22}^2} + j \left( \omega L_1 - \frac{\omega^2 M^2 X_{22}}{R_{22}^2 + X_{22}^2} \right) \\ &= R_{ab} + jX_{ab}. \end{aligned} \quad (9.69)$$

En este punto, debemos tener cuidado con el coeficiente de  $j$  en la Ecuación 9.69, porque, a medida que  $L_1$  y  $L_2$  tienden a infinito, este coeficiente es la diferencia entre dos magnitudes de gran tamaño. Por tanto, antes de incrementar  $L_1$  y  $L_2$ , escribamos el coeficiente en la forma

$$X_{ab} = \omega L_1 - \frac{(\omega L_1)(\omega L_2)X_{22}}{R_{22}^2 + X_{22}^2} = \omega L_1 \left( 1 - \frac{\omega L_2 X_{22}}{R_{22}^2 + X_{22}^2} \right), \quad (9.70)$$

donde aplicamos el hecho de que, cuando  $k = 1$ ,  $M^2 = L_1 L_2$ . Efectuando la resta dentro del paréntesis nos queda

$$X_{ab} = \omega L_1 \left( \frac{R_{22}^2 + \omega L_2 X_L + X_L^2}{R_{22}^2 + X_{22}^2} \right), \quad (9.71)$$

y si sacamos  $\omega L_2$  como factor común, obtenemos

$$X_{ab} = \frac{L_1}{L_2} \frac{X_L + (R_{22}^2 + X_L^2)/\omega L_2}{(R_{22}/\omega L_2)^2 + [1 + (X_L/\omega L_2)]^2}. \quad (9.72)$$

A medida que  $k$  se aproxima al valor 1,0 el cociente  $L_1/L_2$  se aproxima al valor constante  $(N_1/N_2)^2$ , como puede verse a partir de las Ecuaciones 6.54 y 6.55. La explicación es que, a medida que el aco-

plamiento se hace mayor, las dos permeancias  $\mathcal{P}_1$  y  $\mathcal{P}_2$  se hacen iguales. La Ecuación 9.72 se reduce entonces a

$$X_{ab} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 X_L, \quad (9.73)$$

a medida que  $L_1 \rightarrow \infty$ ,  $L_2 \rightarrow \infty$  y  $k \rightarrow 1, 0$ .

El mismo razonamiento nos permite simplificar la resistencia reflejada en la Ecuación 9.69:

$$\frac{\omega^2 M^2 R_{22}}{R_{22}^2 + X_{22}^2} = \frac{L_1}{L_2} R_{22} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 R_{22}. \quad (9.74)$$

Aplicando los resultados de las Ecuaciones 9.73 y 9.74 a la ecuación 9.69, se obtiene

$$Z_{ab} = R_1 + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 R_2 + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 (R_L + jX_L). \quad (9.75)$$

Compare este resultado con el de la Ecuación 9.68. Aquí vemos que, cuando el coeficiente de acoplamiento se aproxima a la unidad y las autoinductancias de las bobinas acopladas tienden a infinito, el transformador refleja hacia el lado primario la resistencia del devanado secundario y la impedancia de carga con un factor de escala que es igual al cociente de las vueltas ( $N_1/N_2$ ) elevado al cuadrado. Por tanto, podemos describir el comportamiento en los terminales del transformador ideal en función de dos características. En primer lugar, el número de voltios por vuelta es el mismo en cada bobina, es decir,

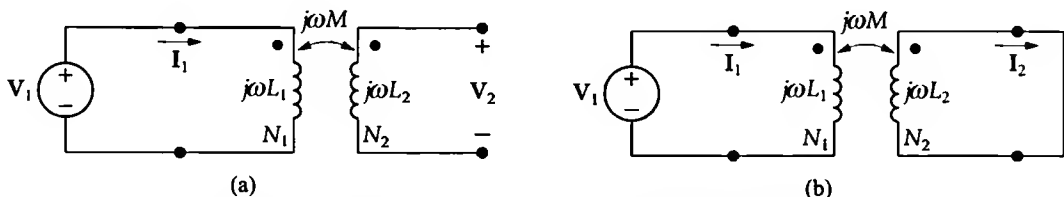
$$\left| \frac{\mathbf{V}_1}{N_1} \right| = \left| \frac{\mathbf{V}_2}{N_2} \right|. \quad (9.76)$$

En segundo lugar, el número de amperios-vueltas es igual para cada bobina, es decir,

$$|\mathbf{I}_1 N_1| = |\mathbf{I}_2 N_2| \quad (9.77)$$

Es necesario utilizar valores absolutos en las Ecuaciones 9.76 y 9.77 porque todavía no hemos establecido las polaridades de referencia para las corrientes y las tensiones. En breve veremos de qué forma hay que tener en cuenta los signos.

La Figura 9.41 muestra dos bobinas magnéticamente acopladas sin pérdidas ( $R_1 = R_2 = 0$ ). Vamos a utilizar la Figura 9.41 para validar las Ecuaciones 9.76 y 9.77. En la Figura 9.41(a), la bobina 2 está abierta; en la Figura 9.41(b), la bobina 2 está cortocircuitada. Aunque vamos a realizar el análisis en términos de la operación en régimen permanente sinusoidal, los mismos resultados pueden aplicarse también a los valores instantáneos de  $v$  e  $i$ .



**Figura 9.41.** Circuitos utilizados para verificar las relaciones entre voltios por vuelta y amperios-vuelta para un transformador ideal.

## Determinación de los cocientes de las tensiones y corrientes

Observe, en la Figura 9.41(a), que la tensión en los terminales de la bobina en circuito abierto puede atribuirse completamente a la corriente que atraviesa la bobina 1; por tanto,

$$V_2 = j\omega M I_1. \quad (9.78)$$

La corriente en la bobina 1 es

$$I_1 = \frac{V_1}{j\omega L_1}. \quad (9.79)$$

A partir de las Ecuaciones 9.78 y 9.79,

$$V_2 = \frac{M}{L_1} V_1. \quad (9.80)$$

Para un acoplamiento perfecto (igual a la unidad), la inductancia mutua es  $\sqrt{L_1 L_2}$ , por lo que la Ecuación 9.80 nos queda

$$V_2 = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} V_1. \quad (9.81)$$

Para un acoplamiento igual a la unidad, el flujo que atraviesa la bobina 1 es igual que el que atraviesa la bobina 2, por lo que sólo nos hace falta una permeancia para describir la autoinductancia de cada bobina. Por tanto, la Ecuación 9.81 queda

$$V_2 = \sqrt{\frac{N_2^2 \mathcal{P}}{N_1^2 \mathcal{P}}} V_1 = \frac{N_2}{N_1} V_1 \quad (9.82)$$

o bien

✦ **RELACIÓN DE TENSIONES PARA UN TRANSFORMADOR IDEAL**

$$\frac{V_1}{N_1} = \frac{V_2}{N_2}. \quad (9.83)$$

Sumando las tensiones alrededor de la bobina cortocircuitada de la Figura 9.41(b), se obtiene

$$0 = -j\omega M I_1 + j\omega L_2 I_2, \quad (9.84)$$

de donde, para  $k = 1$ ,

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{L_2}{M} = \frac{L_2}{\sqrt{L_1 L_2}} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} = \frac{N_2}{N_1}. \quad (9.85)$$

La Ecuación 9.85 es equivalente a

✦ **RELACIÓN DE CORRIENTES PARA UN TRANSFORMADOR IDEAL**

$$I_1 N_1 = I_2 N_2. \quad (9.86)$$

La Figura 9.42 muestra el símbolo gráfico para un transformador ideal. Las líneas verticales en el símbolo representan las capas de material magnético a partir de las cuales se suelen construir los núcleos ferromagnéticos. El símbolo nos recuerda que las bobinas devanadas alrededor de núcleos ferromagnéticos se comportan de forma muy similar a un transformador ideal.

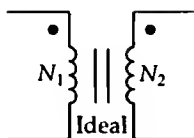


Figura 9.42. Símbolo gráfico para un transformador ideal.

Son varias las razones que explican esto. El material ferromagnético crea un espacio con una alta permeancia; por esta razón, la mayor parte del flujo magnético queda atrapada dentro del material del núcleo, estableciéndose un estrecho acoplamiento magnético entre las bobinas que comparten el mismo núcleo. Una alta permeancia implica también una alta autoinductancia, porque  $L = N^2\Phi$ . Finalmente, las bobinas acopladas ferromagnéticamente permiten transferir la potencia de forma muy eficiente desde una bobina a la otra. Resulta común conseguir eficiencias superiores al 95%, así que el ignorar las pérdidas no es una suposición inadecuada en la mayoría de las aplicaciones.

### Determinación de la polaridad de los cocientes de tensiones y corrientes

Veamos ahora cómo podemos evitar utilizar valores absolutos en las Ecuaciones 9.76 y 9.77. Observe que no aparecieron valores absolutos a la hora de deducir las ecuaciones 9.83 y 9.86. En esas ecuaciones no hacían falta valores absolutos porque habíamos establecido polaridades de referencia para las tensiones y direcciones de referencia para las corrientes. Además, conocíamos las marcas de polaridad magnética de las dos bobinas acopladas.

Las reglas para usar el signo algebraico adecuado en las Ecuaciones 9.76 y 9.77 son las siguientes:

#### ✦ CONVENIO DE PUNTOS PARA LOS TRANSFORMADORES IDEALES

1. Si las tensiones  $V_1$  y  $V_2$  de las bobinas son ambas positivas o ambas negativas en el terminal con marca, utilice un signo más en la Ecuación 9.76. En caso contrario, utilice un signo menos.
2. Si las corrientes  $I_1$  e  $I_2$  de las bobinas son ambas entrantes o ambas salientes de los terminales marcados, utilice un signo negativo en la Ecuación 9.77. En caso contrario, utilice un signo positivo.

Los cuatro circuitos mostrados en la Figura 9.43 ilustran estas reglas.

El cociente de las vueltas de los dos devanados es un parámetro importante para el transformador ideal. El cociente de vueltas se define como  $N_1/N_2$  o  $N_2/N_1$ ; ambas formas aparecen en diversos libros de texto. En éste, utilizaremos  $a$  para designar el cociente  $N_2/N_1$ , es decir,

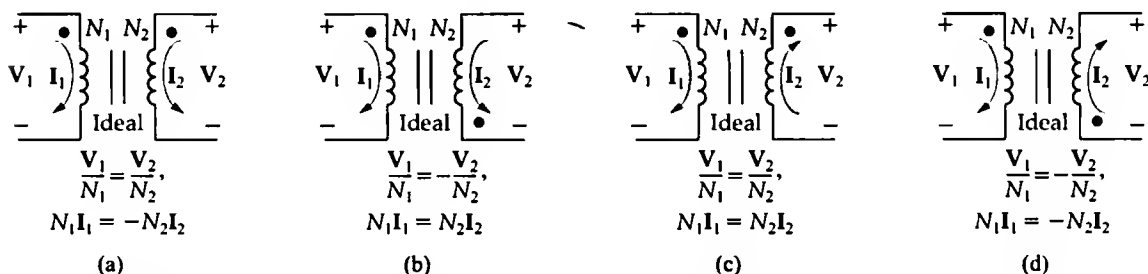


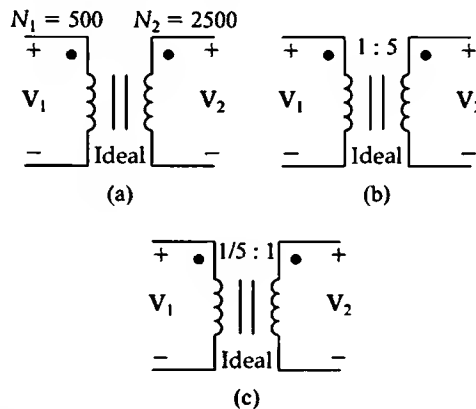
Figura 9.43. Circuitos que muestran los signos algebraicos apropiados para relacionar las tensiones y corrientes en los terminales de un transformador ideal.



$$a = \frac{N_2}{N_1}. \quad (9.87)$$

La Figura 9.44 muestra tres formas de representar el cociente de vueltas en un transformador ideal. La Figura 9.44(a) muestra el número de vueltas en cada bobina explícitamente. La Figura 9.44(b) muestra que el cociente  $N_2/N_1$  es 5 a 1 y la Figura 9.44(c) muestra que el cociente  $N_2/N_1$  es 1 a  $\frac{1}{5}$ .

El Ejemplo 9.14 ilustra el análisis de un circuito que contiene un transformador ideal.



**Figura 9.44.** Tres formas de mostrar que el cociente de vueltas de un transformador ideal es igual a 5.

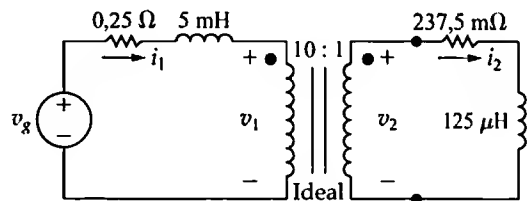
### EJEMPLO 9.14 Análisis de un circuito con transformador ideal en el dominio de la frecuencia

La impedancia de carga conectada al devanado secundario del transformador ideal de la Figura 9.45 está compuesta de una resistencia de  $237,5 \text{ m}\Omega$  en serie con una bobina de  $125 \text{ }\mu\text{H}$ .

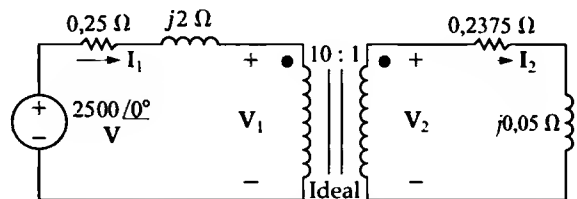
Si la fuente de tensión sinusoidal ( $v_g$ ) está generando la tensión  $2500 \cos 400t \text{ V}$ , calcule las ecuaciones de régimen permanente para: (a)  $i_1$ ; (b)  $v_1$ ; (c)  $i_2$  y (d)  $v_2$ .

### SOLUCIÓN

- a) Comenzamos construyendo el circuito fasorial equivalente. La fuente de tensión será  $2500 \angle 0^\circ \text{ V}$ ; la bobina de  $5 \text{ mH}$  se convierte en una impedancia de valor  $j2 \text{ }\Omega$ ; y la bobina de  $125 \text{ }\mu\text{H}$  se convierte en una impedancia de valor  $j0,05 \text{ }\Omega$ . El circuito equivalente en el dominio de la frecuencia se muestra en la Figura 9.46.



**Figura 9.45.** Circuito del Ejemplo 9.14.



**Figura 9.46.** Circuito en el dominio de la frecuencia para el Ejemplo 9.14.

A partir de esta figura, vemos que

$$2500 \angle 0^\circ = (0,25 + j2)I_1 + V_1,$$

y

$$V_1 = 10V_2 = 10[(0,2375 + j0,05)I_2].$$

Dado que

$$I_2 = 10I_1$$

tendremos

$$V_1 = 10(0,2375 + j0,05)10I_1$$

$$= (23,75 + j5)I_1.$$

Por tanto,

$$2500 \angle 0^\circ = (24 + j7)I_1,$$

o

$$I_1 = 100 \angle -16,26^\circ \text{ A.}$$

Por tanto, la ecuación de régimen permanente correspondiente a  $i_1$  es

$$i_1 = 100 \cos(400t - 16,26^\circ) \text{ A.}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } V_1 &= 2500 \angle 0^\circ - (100 \angle -16,26^\circ) \\ &\quad (0,25 + j2) \\ &= 2500 - 80 - j185 \\ &= 2420 - j185 \\ &= 2427,06 \angle -4,37^\circ \text{ V.} \end{aligned}$$

De aquí,

$$v_1 = 2427,06 \cos(400t - 4,37^\circ) \text{ V.}$$

$$\text{c) } I_2 = 10I_1 = 1000 \angle -16,26^\circ \text{ A.}$$

Por tanto,

$$i_2 = 1000 \cos(400t - 16,26^\circ) \text{ A.}$$

$$\text{d) } V_2 = 0,1V_1 = 242,71 \angle -4,37^\circ \text{ V.}$$

lo que nos da

$$v_2 = 242,71 \cos(400t - 4,37^\circ) \text{ V.}$$

## Utilización de un transformador ideal para la adaptación de impedancias

Los transformadores ideales también pueden utilizarse para aumentar o disminuir la impedancia de una carga. El circuito mostrado en la Figura 9.47 ilustra esta aplicación. La impedancia vista por la fuente de tensión no ideal ( $V_s$  en serie con  $Z_s$ ) es  $V_1/I_1$ . La tensión y la corriente en los terminales de la impedancia de carga ( $V_2$  e  $I_2$ ) están relacionadas con  $V_1$  e  $I_1$  por la relación de vueltas del transformador, es decir,

$$V_1 = \frac{V_2}{a}, \quad (9.88)$$

y además

$$I_1 = aI_2. \quad (9.89)$$

Por tanto, la impedancia vista por la fuente es

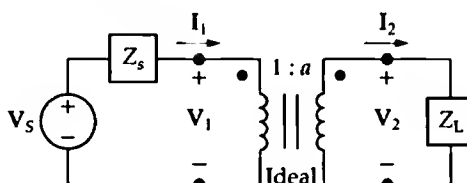
$$Z_{IN} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{1}{a^2} \frac{V_2}{I_2}, \quad (9.90)$$

pero el cociente  $V_2/I_2$  es la impedancia de carga  $Z_L$ , por lo que la Ecuación 9.90 se puede escribir

$$Z_{IN} = \frac{1}{a^2} Z_L. \quad (9.91)$$

Por tanto, la bobina secundaria del transformador ideal refleja la impedancia de carga hacia la bobina primaria con el factor de escala  $1/a^2$ .

Observe que el transformador ideal cambia la magnitud de  $Z_L$ , pero no afecta a su ángulo de fase. El que  $Z_{IN}$  sea mayor o menor que  $Z_L$  dependerá de la relación de vueltas  $a$ .



**Figura 9.47.** Utilización de un transformador ideal para acoplar una carga a una fuente.

El transformador ideal (o su equivalente no ideal, el transformador con núcleo ferromagnético) puede utilizarse para adaptar la magnitud de  $Z_L$  a la magnitud de  $Z_s$ . En el Capítulo 10 se explicarán las razones por las que puede convenir realizar esta adaptación.

Como veremos, los transformadores ideales se utilizan para aumentar o disminuir las tensiones entre una carga y una fuente. Así, los transformadores ideales se emplean a menudo en las empresas de generación y distribución de energía eléctrica, ya que se necesita reducir el nivel de tensión del tendido eléctrico a otros niveles más seguros, susceptibles de ser usados en un entorno residencial.

### Evaluación del objetivo 5

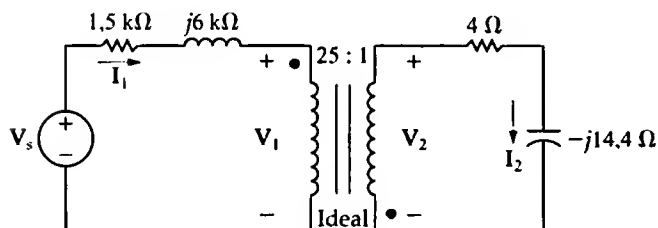
- Ser capaz de analizar circuitos con transformadores ideales.

9.15. La tensión de la fuente en el circuito de la figura adjunta es  $25 \angle 0^\circ$  kV. Calcule la amplitud y el ángulo de fase de  $V_2$  e  $I_2$ .

#### RESPUESTA

$$V_2 = 1868,15 \angle 142,39^\circ \text{ V};$$

$$I_2 = 125 \angle 216,87^\circ \text{ A}.$$



**NOTA** Trate también de resolver el Problema 9.71 del capítulo.

## 9.12. Diagramas de fasores

Al utilizar el método de los fasores para analizar la operación en régimen permanente sinusoidal de un circuito, la elaboración de un diagrama de los fasores de corriente y de tensión puede proporcionarnos más datos acerca del comportamiento del circuito. Un diagrama de fasores muestra la magnitud del ángulo de fase de cada fasor en el plano de los números complejos. Los ángulos de fase se miden en sentido contrario al de las agujas del reloj a partir del eje real positivo, mientras que las magnitudes

se miden a partir del origen de coordenadas. Por ejemplo, la Figura 9.48 muestra los fasores  $10 \angle 30^\circ$ ,  $12 \angle 150^\circ$ ,  $5 \angle -45^\circ$  y  $8 \angle -170^\circ$ .

La elaboración de diagramas de fasores para una serie de variables de circuito generalmente requiere representar tanto corrientes como tensiones. Como resultado, hacen falta dos escalas de magnitud diferentes, una para las corrientes y otra para las tensiones. La capacidad de visualizar un fador en el plano de los números complejos puede resultar útil a la hora de comprobar los cálculos realizados mediante una calculadora o de forma manual. La calculadora de bolsillo típica no permite imprimir los datos introducidos, pero cuando muestre el ángulo calculado, puede comparárselo con nuestra imagen mental como forma de comprobar si se han introducido los valores apropiados. Por ejemplo, suponga que quiere hallar la forma polar de  $-7 - j3$ . Sin necesidad de realizar ningún cálculo, podemos esperar que la magnitud sea superior a 7 y que el ángulo se encuentre en el tercer cuadrante, siendo más negativo que  $-135^\circ$  o menos positivo que  $225^\circ$ , como se ilustra en la Figura 9.49.

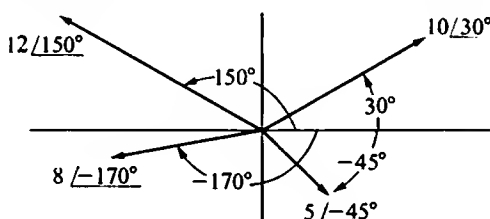


Figura 9.48. Una representación gráfica de fasores.

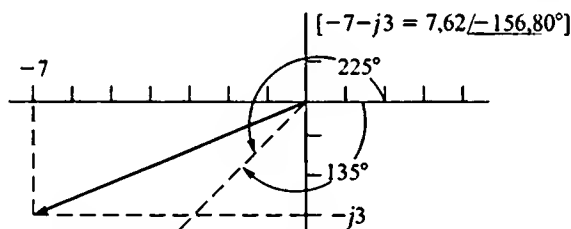


Figura 9.49. El número complejo  $-7 - j3$ .

Los Ejemplos 9.15 y 9.16 ilustran la construcción y uso de diagramas de fasores. Utilizaremos dichos diagramas en capítulos subsiguientes cuando nos permitan obtener datos adicionales sobre la operación en régimen permanente sinusoidal del circuito que estemos investigando. El Problema 9.76 muestra el modo en que un diagrama de fasores puede ayudarnos a explicar la operación de un circuito de desplazamiento de fase.

### EJEMPLO 9.15 Utilización de diagramas de fasores para analizar un circuito

Para el circuito de la Figura 9.50, utilice un diagrama de fasores para hallar el valor de  $R$  y haga que la corriente que atraviesa dicha resistencia,  $i_R$ , esté retardada  $45^\circ$  con respecto a la corriente de la fuente,  $i_s$ , cuando

$$\omega = 5 \text{ krad/s.}$$

### SOLUCIÓN

Según la ley de Kirchhoff de las corrientes, la suma de las corrientes  $I_R$ ,  $I_L$  e  $I_C$  debe ser igual a la corriente de la fuente  $I_s$ . Si suponemos que el ángulo de fase de la tensión  $V_m$  es cero, podemos dibujar los fasores de corriente

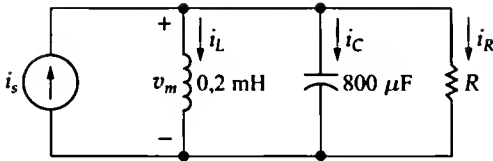


Figura 9.50. Circuito del Ejemplo 9.15.

para cada componente. El fasor de corriente para la bobina está dado por

$$I_L = \frac{V_m \angle 0^\circ}{j(5000)(0,2 \times 10^{-3})} = V_m \angle -90^\circ,$$

mientras que el fasor de corriente para el condensador es

$$I_C = \frac{V_m \angle 0^\circ}{-j/(5000)(800 \times 10^{-6})} = 4V_m \angle 90^\circ,$$

y el fasor de corriente de la resistencia será

$$I_R = \frac{V_m \angle 0^\circ}{R} = \frac{V_m}{R} \angle 0^\circ.$$

Estos fasores se muestran en la Figura 9.51. El diagrama de fasores también muestra el fasor de corriente de la fuente, con línea punteada, el cual debe ser la suma de los fasores de corriente de los tres componentes del circuito y debe formar un ángulo de  $45^\circ$  en sentido positivo con el fasor de corriente de la resistencia. Como puede ver, al sumarse los fasores se obtiene un triángulo isósceles, por lo que la longitud del fasor de corriente de la resistencia debe ser igual a  $3V_m$ . Por tanto, el valor de la resistencia es  $\frac{1}{3} \Omega$ .

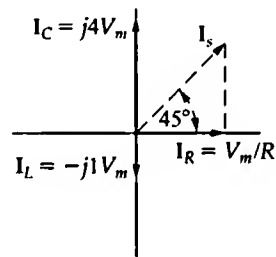


Figura 9.51. Diagrama de fasores para las corrientes de la Figura 9.50.

### EJEMPLO 9.16 Utilización de diagramas de fasores para analizar los efectos de carga capacitiva

El circuito de la Figura 9.52 tiene una carga compuesta por la combinación en paralelo de una resistencia y una bobina. Utilice diagramas de fasores para explorar el efecto de añadir un condensador en paralelo con los terminales de la carga; nos interesa, en concreto, el efecto que ese condensador tendrá sobre la amplitud de  $V_s$  si ajustamos  $V_s$  de modo que la amplitud de  $V_L$  permanezca constante. Las compañías eléctricas utilizan esta técnica para controlar la caída de tensión en las líneas.

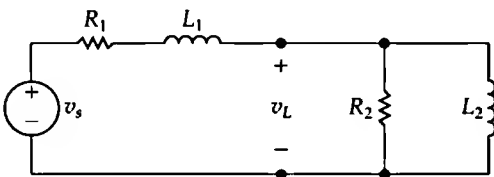


Figura 9.52. Circuito del Ejemplo 9.16.

### SOLUCIÓN

Comenzamos suponiendo que hay una capacidad igual a cero en paralelo con la carga. Después de construir el diagrama de fasores para el caso de capacidad cero, podemos añadir el condensador y estudiar su efecto sobre la amplitud  $V_s$ , manteniendo la amplitud de  $V_L$  constante. La Figura 9.53 muestra el equivalente en el dominio de la frecuencia del circuito mostrado en la Figura 9.52. Hemos añadido los fasores de las corrientes de rama  $I$ ,  $I_a$  e  $I_b$  a la Figura 9.53 para facilitar las explicaciones.

La Figura 9.54 muestra la construcción paso a paso del diagrama de fasores. Recuerde que no estamos interesados en las posiciones ni en los valores específicos de los fasores en este ejemplo, sino sólo en el efecto general de añadir un condensador en paralelo con los terminales de la carga. Por tanto, lo que nos interesa es hallar las

posiciones relativas de los fasores antes y después de añadir el condensador.

Si interpretamos el diagrama de fasores refiriéndonos al circuito mostrado en la Figura 9.53, podemos observar lo siguiente:

- Puesto que estamos manteniendo constante la amplitud de la tensión de la carga, seleccionemos  $V_L$  como referencia. Para mayor comodidad, situamos este fasor en el eje real positivo.
- Sabemos que  $I_a$  está en fase con  $V_L$  y que su magnitud es  $|V_L|/R_2$ . (En el diagrama de fasores, la escala de magnitudes para los fasores de corriente es independiente de la escala de magnitudes correspondiente a los fasores de tensión).

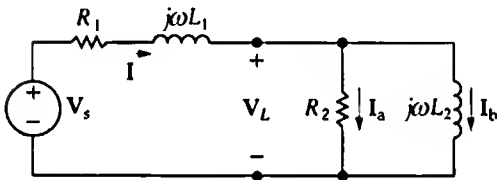


Figura 9.53. Equivalente en el dominio de la frecuencia del circuito de la Figura 9.52.

- Sabemos que  $I_b$  está retardado  $90^\circ$  con respecto a  $V_L$  y que su magnitud es  $|V_L|/\omega L_2$ .
- La corriente de línea  $I$  es igual a la suma de  $I_a$  e  $I_b$ .
- La caída de tensión en  $R_1$  está en fase con la corriente de línea y la caída de tensión en  $j\omega L_1$  está adelantada  $90^\circ$  con respecto a la corriente de línea.
- La tensión de la fuente es la suma de la tensión de la carga y de la caída en la línea, es decir,  $V_s = V_L + (R_1 + j\omega L_1)I$ .

Observe que el diagrama de fasores completo que se ilustra en el paso 6 de la Figura 9.54 muestra claramente las relaciones de amplitud y de ángulo de fase entre todas las corrientes y tensiones de la Figura 9.53.

Ahora añadamos la rama capacitiva mostrada en la Figura 9.55. Estamos manteniendo  $V_L$  constante, por lo que construimos el diagrama de

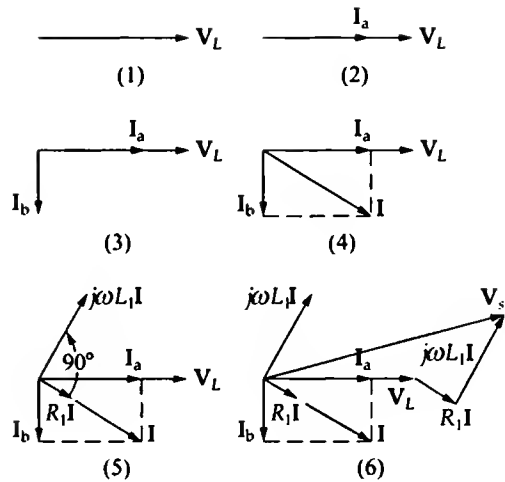


Figura 9.54. Construcción paso a paso del diagrama de fasores del circuito de la Figura 9.53.

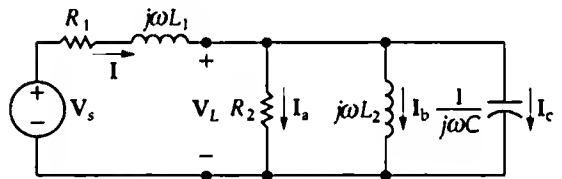


Figura 9.55. Adición de un condensador al circuito mostrado en la Figura 9.53.

fasores para el circuito de la Figura 9.55 siguiendo los mismos pasos que en la Figura 9.54, con la salvedad de que, en el paso 4, añadimos la corriente  $I_c$  del condensador al diagrama. Al hacerlo,  $I_c$  está adelantada  $90^\circ$  con respecto a  $V_L$ , siendo su magnitud  $|V_L\omega C|$ . La Figura 9.56 muestra el efecto de  $I_c$  sobre la corriente de línea: tanto la magnitud como el ángulo de fase de la corriente de línea  $I$ .

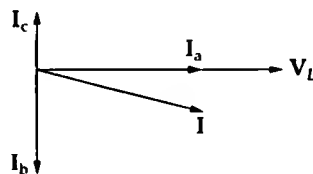
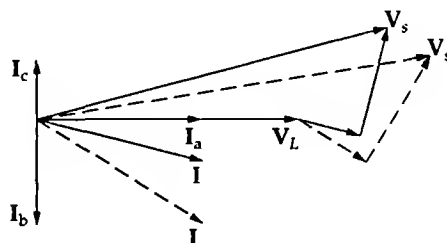


Figura 9.56. El efecto de la corriente del condensador  $I_c$  sobre la corriente de línea  $I$ .

cambian al cambiar la magnitud de  $I_c$ . A medida que  $I$  cambia, también lo hacen la magnitud y el ángulo de fase de la caída de tensión en la línea. Cuando la caída de tensión en la línea varía, la magnitud y el ángulo de fase de  $V_s$  cambian. El diagrama de fasores mostrado en la Figura 9.57 ilustra estas observaciones. Los fasores con línea punteada representan las corrientes y tensiones correspondientes antes de la adición del condensador.

Así, comparando los fasores punteados de  $I$ ,  $R_1 I$ ,  $j\omega L_1 I$  y  $V_s$  con los otros fasores correspondientes, podemos ver claramente cuál es efecto de añadir  $C$  al circuito. En particular, observe que se reduce la amplitud de la tensión de la fuente y que, a pesar de ello, se mantiene la amplitud de la tensión de la carga. En la práctica, este resultado significa que, a medida que se incrementa la

carga (es decir, a medida que se incrementan  $I_a$  e  $I_b$ ), podemos añadir condensadores al sistema (es decir, incrementar  $I_c$ ) para poder mantener  $V_L$  en la presencia de una gran carga sin incrementar la amplitud de la tensión de la fuente.



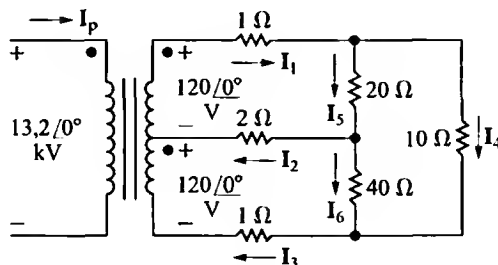
**Figura 9.57.** El efecto de añadir un condensador en paralelo con la carga al circuito mostrado en la Figura 9.53 si se mantiene  $V_L$  constante.

**NOTA** Evalúe su comprensión de este material tratando de resolver los Problemas 9.75 y 9.76 del capítulo.

## Perspectiva práctica

### Un circuito para instalaciones domésticas

Volvamos al circuito de distribución de energía en entornos domésticos que hemos presentado al principio del capítulo. Vamos a modificar el circuito ligeramente, añadiendo una resistencia a cada conductor del lado secundario del transformador, con el fin de simular más apropiadamente el comportamiento de los materiales utilizados para el cableado en entornos residenciales. El circuito modificado se muestra en la Figura 9.58. En el Problema 9.85 calcularemos las seis corrientes de rama en el lado secundario del transformador de distribución y luego mostraremos cómo calcular la corriente en el devanado primario.



**Figura 9.58.** Circuito de distribución.

**NOTA** Evalúe su comprensión de esta Perspectiva práctica tratando de resolver los Problemas 9.85 y 9.86 del capítulo.

## RESUMEN

- La ecuación general para una **fente sinusoidal** es

$$v = V_m \cos(\omega t + \phi) \text{ (fuente de tensión),}$$

o

$$i = I_m \cos(\omega t + \phi) \text{ (fuente de corriente),}$$

donde  $V_m$  (o  $I_m$ ) es la amplitud máxima,  $\omega$  es la frecuencia y  $\phi$  es el ángulo de fase (véase la página 400).

- La frecuencia,  $\omega$ , de una respuesta sinusoidal es igual a la frecuencia de la fuente sinusoidal que esté excitando al circuito. La amplitud y el ángulo de fase de la respuesta suelen ser diferentes de los de la fuente (véase la página 405).

- La mejor forma de calcular las tensiones y corrientes en régimen permanente en un circuito excitado por fuentes sinusoidales consiste en realizar el análisis en el dominio de la frecuencia. Las siguientes transformaciones matemáticas nos permiten movernos entre los dominios del tiempo y de la frecuencia.

- La transformada fasorial (desde el dominio del tiempo al dominio de la frecuencia):

$$\mathbf{V} = V_m e^{j\phi} = \mathcal{P}\{V_m \cos(\omega t + \phi)\}.$$

- La transformada fasorial inversa (desde el dominio de la frecuencia al dominio del tiempo):

$$\mathcal{P}^{-1}\{V_m e^{j\phi}\} = \Re\{V_m e^{j\phi} e^{j\omega t}\}.$$

(Véanse las páginas 406-407).

- A la hora de trabajar con señales variables sinusoidales, recuerde que la tensión está adelantada  $90^\circ$  con respecto a la corriente en los terminales de una bobina, mientras que la corriente está adelantada  $90^\circ$  con respecto a la tensión en los terminales de un condensador (véanse las páginas 412-413).

- La **impedancia** ( $Z$ ) juega el mismo papel en el dominio de la frecuencia que la resistencia, la inductancia y la capacidad en el dominio del tiempo. Específicamente, la relación entre el fasor de corriente y el fasor de tensión para las resistencias, bobinas y condensadores es

$$\mathbf{V} = \mathbf{Z}\mathbf{I},$$

donde la dirección de referencia para  $\mathbf{I}$  obedece al convenio de signos pasivo. El recíproco de la impedancia es la **admitancia** ( $Y$ ), así que otra forma de expresar la relación entre la corriente y la tensión para las resistencias, bobinas y condensadores en el dominio de la frecuencia es

$$\mathbf{V} = \mathbf{I}/Y.$$

(Véanse las páginas 413 y 418).

- Todas las técnicas de análisis de circuitos desarrolladas en los Capítulos 2-4 para circuitos resistivos se aplican también a los circuitos en régimen permanente sinusoidal en el dominio de la frecuencia. Estas técnicas comprenden la ley de Kirchhoff

**Tabla 9.3.** Impedancia y valores relacionados.

ELEMENTO	IMPEDANCIA ( $Z$ )	REACTANCIA	ADMITANCIA ( $Y$ )	SUSCEPTANCIA
Resistencia	$R$ (resistencia)	—	$G$ (conductancia)	—
Condensador	$j(-1/\omega C)$	$-1/\omega C$	$j\omega C$	$\omega C$
Bobina	$j\omega L$	$\omega L$	$j(-1/\omega L)$	$-1/\omega L$



de las tensiones, la ley de Kirchhoff de las corrientes, las combinaciones en serie y en paralelo de impedancias, la división de tensión y de corriente, los métodos de las tensiones de nodo y de las corrientes de malla, las transformaciones de fuentes y los equivalentes de Thévenin y de Norton.

- El **transformador lineal de doble devanado** es un dispositivo de acoplamiento formado por dos bobinas que están devanadas sobre el mismo núcleo no magnético. La **impedancia reflejada** es la impedancia del circuito secundario vista desde los terminales del circuito primario, o viceversa. La impedancia reflejada de un transformador lineal vista desde el lado primario es el conjugado de la autoimpedancia del circuito secundario, multiplicado por el factor  $(\omega M/|Z_{22}|)^2$  (véanse las páginas 432 y 434).

- El **transformador ideal de doble devanado** es un transformador lineal con las siguientes propiedades especiales: acoplamiento perfecto ( $k = 1$ ), autoinductancia infinita en cada bobina ( $L_1 = L_2 = \infty$ ) y bobinas sin pérdidas ( $R_1 = R_2 = 0$ ). El comportamiento del circuito está gobernado por la relación de vueltas  $n = N_2/N_1$ . En particular, los voltios por vuelta son iguales en cada devanado, es decir,

$$\frac{V_1}{N_1} = \pm \frac{V_2}{N_2},$$

y los amperios-vuelta son iguales en cada devanado, es decir,

$$N_1 I_1 = \pm N_2 I_2.$$

(Véase la página 436).

## PROBLEMAS

- 9.1. Una cierta tensión sinusoidal está dada por la expresión

$$v = 10 \cos(3769,91t - 53,13^\circ).$$

Calcule (a)  $f$  en hercios; (b)  $T$  en milisegundos; (c)  $V_m$ ; (d)  $v(0)$ ; (e)  $\phi$  en grados y radianes; (f) el valor más pequeño positivo de  $t$  para el que  $v = 0$ ; y (g) el valor más pequeño positivo de  $t$  para el que  $dv/dt = 0$ .

- 9.2. Calcule el valor eficaz de la tensión sinusoidal con rectificación de media onda que se muestra en la figura.

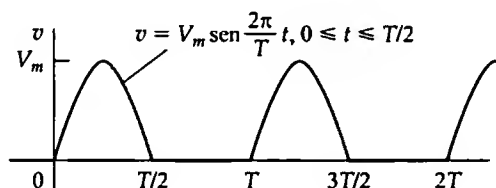


Figura P9.2

- 9.3. Considere la tensión sinusoidal  $v(t) = 40 \cos(100\pi t + 60^\circ)$  V.

- a) ¿Cuál es la amplitud máxima de la tensión?
- b) ¿Cuál es la frecuencia en hercios?
- c) ¿Cuál es la frecuencia en radianes por segundo?
- d) ¿Cuál es el ángulo de fase en radianes?
- e) ¿Cuál es el ángulo de fase en grados?

- f) ¿Cuál es el período en milisegundos?
- g) ¿Cuál es el primer instante después de  $t = 0$  en que  $v = -40$  V?
- h) La función sinusoidal se desplaza 10/3 ms hacia la derecha a lo largo del eje temporal. ¿Cuál es la ecuación resultante de  $v(t)$ ?
- i) ¿Cuál es el número mínimo de milisegundos que habrá que desplazar la función hacia la derecha para que la ecuación correspondiente a  $v(t)$  sea  $40 \sin 100\pi t$  V?
- j) ¿Cuál es el número mínimo de milisegundos que habrá que desplazar la función hacia la izquierda para que la ecuación correspondiente a  $v(t)$  sea  $40 \cos 100\pi t$  V?
- 9.4. Dibuje en una única gráfica  $v = 100 \cos (\omega t + \phi)$  en función de  $\omega t$  para  $\phi = -60^\circ, -30^\circ, 0^\circ, 30^\circ$  y  $60^\circ$ .
- a) Indique si la función de la tensión se está desplazando hacia la derecha o hacia la izquierda a medida que  $\phi$  es cada vez más positiva.
- b) ¿Cuál es la dirección de desplazamiento si  $\phi$  cambia de 0 a  $30^\circ$ ?
- 9.5. Una tensión sinusoidal es cero en  $t = -2\pi/3$  ms y se está incrementando a una tasa de 80.000 V/s. La amplitud máxima de la tensión es de 80 V.
- a) ¿Cuál es la frecuencia de  $v$  en radianes por segundo?
- b) ¿Cuál es la ecuación correspondiente a  $v$ ?
- 9.6. En  $t = -2$  ms, una cierta tensión sinusoidal es cero y está creciendo hacia los valores positivos. La siguiente vez que la tensión es cero es en  $t = 8$  ms. También sabemos que la tensión es 80,9 V en  $t = 0$ .
- a) ¿Cuál es la frecuencia de  $v$  en hercios?
- b) ¿Cuál es la ecuación correspondiente a  $v$ ?
- 9.7. Demuestre que

$$\int_{t_0}^{t_0+T} V_m^2 \cos^2 (\omega t + \phi) dt = \frac{V_m^2 T}{2}$$

- 9.8. El valor rms de la tensión sinusoidal suministrada a través de un enchufe doméstico en EE.UU. es de 120 V. ¿Cuál es el máximo valor de la tensión en el enchufe?
- 9.9. La tensión aplicada al circuito mostrado en la Figura 9.5 en  $t = 0$  es  $20 \cos (800t + 25^\circ)$ . La resistencia del circuito es de  $80 \Omega$  y la corriente inicial que atraviesa la bobina de 75 mH es cero.
- a) Determine  $i(t)$  para  $t \geq 0$ .
- b) Escriba las ecuaciones correspondientes a las componentes transitoria y de régimen permanente de  $i(t)$ .
- c) Determine el valor numérico de  $i$  después de que el conmutador haya estado cerrado durante 1,875 ms.
- d) ¿Cuáles son la amplitud máxima, la frecuencia (en radianes por segundo) y el ángulo de fase de la corriente de régimen permanente?
- e) ¿Cuántos grados están desfasados entre sí la tensión y la corriente de régimen permanente?
- 9.10. a) Demuestre que la Ecuación 9.9 es la solución de la Ecuación 9.8. Puede hacerlo sustituyendo la Ecuación 9.9 en el lado izquierdo de la Ecuación 9.8 y luego observando que es igual

al lado derecho de la ecuación para todos los valores de  $t > 0$ . En  $t = 0$ , la Ecuación 9.9 debe reducirse al valor inicial de la corriente.

- b) Puesto que la componente transitoria se desvanece a medida que transcurre el tiempo y puesto que nuestra solución debe satisfacer la ecuación diferencial para todos los valores de  $t$ , la componente de régimen permanente, por sí misma, debe también satisfacer la ecuación diferencial. Verifique esta observación demostrando que la componente de régimen permanente de la Ecuación 9.9 satisface la Ecuación 9.8.

**9.11.** Utilice el concepto de fasores para combinar las siguientes ecuaciones sinusoidales en una única expresión trigonométrica:

- a)  $y = 50 \cos(500t + 60^\circ) + 100 \cos(500t - 30^\circ)$ ,
- b)  $y = 200 \cos(377t + 50^\circ) - 100 \sin(377t + 150^\circ)$ ,
- c)  $y = 80 \cos(100t + 30^\circ) - 100 \sin(100t - 135^\circ) + 50 \cos(100t - 90^\circ)$ , y
- d)  $y = 250 \cos \omega t + 250 \cos(\omega t + 120^\circ) + 250 \cos(\omega t - 120^\circ)$ .

**9.12.** se aplica entre los terminales de una bobina una tensión sinusoidal de 1000 Hz con una amplitud máxima de 200 V en  $t = 0$ . La amplitud máxima de la corriente de régimen permanente en la bobina es de 25 A.

- a) ¿Cuál es la frecuencia de la corriente que atraviesa la bobina?
- b) ¿Cuál es el ángulo de fase de la tensión?
- c) ¿Cuál es el ángulo de fase de la corriente?
- d) ¿Cuál es la reactancia inductiva de la bobina?
- e) ¿Cuál es la inductancia de la bobina en henrios?
- f) ¿Cuál es la impedancia de la bobina?

**9.13.** Una tensión sinusoidal de 50 kHz tiene un ángulo de fase igual a cero y una amplitud máxima de 10 mV. Cuando aplicamos esta tensión a los terminales de un condensador, la corriente de régimen permanente resultante tiene una amplitud máxima de 628,32  $\mu\text{A}$ .

- a) ¿Cuál es la frecuencia de la corriente en radianes por segundo?
- b) ¿Cuál es el ángulo de fase de la corriente?
- c) ¿Cuál es la reactancia capacitiva del condensador?
- d) ¿Cuál es la capacidad del condensador en microfaradios?
- e) ¿Cuál es la impedancia del condensador?

**9.14.** Una resistencia de  $10 \Omega$  y un condensador de  $5 \mu\text{F}$  están conectados en paralelo. Esta combinación en paralelo está también en paralelo con una combinación en serie de una resistencia de  $8 \Omega$  y una bobina de  $300 \mu\text{H}$ . Estas tres ramas paralelas son excitadas por una fuente de corriente sinusoidal cuya corriente es  $922 \cos(20.000t + 30^\circ) \text{ A}$ .

- a) Dibuje el circuito equivalente en el dominio de la frecuencia.
- b) Referencie la tensión en bornes de la fuente de corriente como un incremento en la dirección de la corriente de la fuente y halle el fasor de tensión resultante.
- c) Determine la ecuación de régimen permanente para  $v(t)$ .

**9.15.** Conectamos en serie una resistencia de  $40 \Omega$ , una bobina de  $5 \text{ mH}$  y un condensador de  $1,25 \mu\text{F}$ . Estos elementos conectados en serie son excitados por una fuente de tensión sinusoidal cuya tensión es  $600 \cos(8000t + 20^\circ) \text{ V}$ .

- Dibuje el circuito equivalente en el dominio de la frecuencia.
- Referencie la corriente en la dirección del incremento de tensión en bornes de la fuente y calcule el fasor de corriente resultante.
- Determine la ecuación de régimen permanente para  $i(t)$ .

9.16. Determine la ecuación de régimen permanente para  $i_o(t)$  en el circuito de la Figura P9.16 si  $v_s = 100 \sin 50t$  mV.

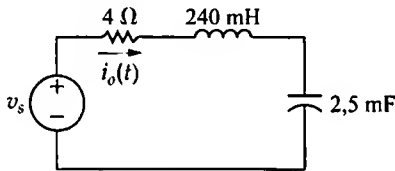


Figura P9.16

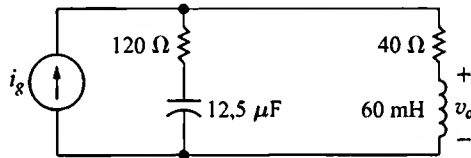


Figura P9.18

9.19. Las ecuaciones de régimen permanente para la tensión y la corriente en los terminales del circuito mostrado en la Figura P9.19 son

$$v_g = 300 \cos(5000\pi t + 78^\circ) \text{ V},$$

$$i_g = 6 \sin(5000\pi t + 123^\circ) \text{ A}.$$

- ¿Cuál es la impedancia vista por la fuente?
- ¿Cuántos microsegundos estará desfasada la corriente con respecto a la tensión?

9.20. El circuito de la Figura P9.20 está operando en régimen permanente sinusoidal. Determine la ecuación de régimen permanente para  $v_o(t)$  si  $v_g = 40 \cos 50.000t$  V.

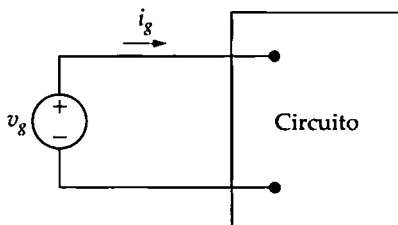


Figura P9.19

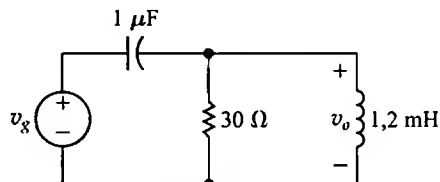


Figura P9.20

9.21. a) Demuestre que, a una frecuencia dada  $\omega$ , los circuitos de las Figuras P9.21(a) y (b) tendrán la misma impedancia entre los terminales a y b si

$$R_1 = \frac{R_2}{1 + \omega^2 R_2^2 C_2^2},$$

$$C_1 = \frac{1 + \omega^2 R_2^2 C_2^2}{\omega^2 R_2^2 C_2}.$$

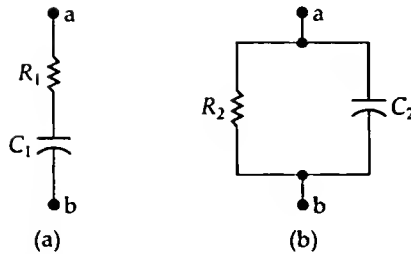


Figura 9.21

b) Calcule los valores de resistencia y de capacidad que, al ser conectados en serie, tendrán la misma impedancia a 40 krad/s que una resistencia de 1000  $\Omega$  conectada en paralelo con un condensador de 50 nF.

9.22. a) Demuestre que, a una frecuencia dada  $\omega$ , los circuitos de las Figuras P9.21(a) y (b) tendrán la misma impedancia entre los terminales a y b si

$$R_2 = \frac{1 + \omega^2 R_1^2 C_1^2}{\omega^2 R_1 C_1^2},$$

$$C_2 = \frac{C_1}{1 + \omega^2 R_1^2 C_1^2}.$$

(Sugerencia: los dos circuitos tendrán la misma impedancia si tienen la misma admitancia).

b) Calcule los valores de resistencia y de capacidad que, al conectarse en paralelo, tendrán la misma impedancia a 50 krad/s que una resistencia de 1 k $\Omega$  conectada en serie con una capacidad de 40 nF.

9.23. a) Demuestre que, a una frecuencia dada  $\omega$ , los circuitos de las Figuras P9.23(a) y (b) tendrán la misma impedancia entre los terminales a y b si

$$R_1 = \frac{\omega^2 L_2^2 R_2}{R_2^2 + \omega^2 L_2^2}, \quad L_1 = \frac{R_2^2 L_2}{R_2^2 + \omega^2 L_2^2}.$$

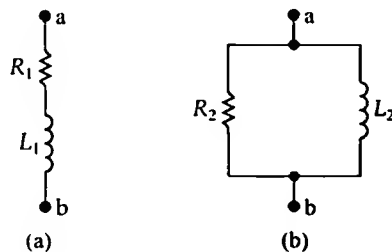


Figura P9.23

- b) Calcule los valores de resistencia y de inductancia que, al ser conectados en serie, tendrán la misma impedancia a 4 krad/s que una resistencia de 5 k $\Omega$  conectada en paralelo con una bobina de 1,25 H.

- 9.24. a) Demuestre que, a una frecuencia dada  $\omega$ , los circuitos de las Figuras P9.23(a) y (b) tendrán la misma impedancia entre los terminales a y b si

$$R_2 = \frac{R_1^2 + \omega^2 L_1^2}{R_1}, \quad L_2 = \frac{R_1^2 + \omega^2 L_1^2}{\omega^2 L_1}.$$

(Sugerencia: los dos circuitos tendrán la misma impedancia si tienen la misma admitancia).

- b) Calcule los valores de resistencia y de inductancia que, al conectarse en paralelo, tendrán la misma impedancia a 1 krad/s que una resistencia de 8 k $\Omega$  conectada en serie con una bobina de 4 H.

- 9.25. El circuito mostrado en la Figura P9.25 está operando en régimen permanente sinusoidal. Determine el valor de  $\omega$  si

$$i_o = 100 \sin(\omega t + 173,13^\circ) \text{ mA},$$

$$v_g = 500 \cos(\omega t + 30^\circ) \text{ V}.$$

- 9.26. La frecuencia de la fuente de tensión sinusoidal del circuito de la Figura P9.26 se ajusta hasta que la corriente  $i_o$  está en fase con  $v_g$ .



- a) Calcule la frecuencia en hercios.  
b) Calcule la ecuación de régimen permanente para  $i_o$  (a la frecuencia encontrada en el apartado anterior) si  $v_g = 30 \cos \omega t$  V.

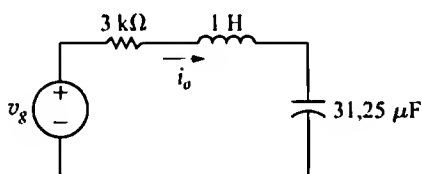


Figura P9.25

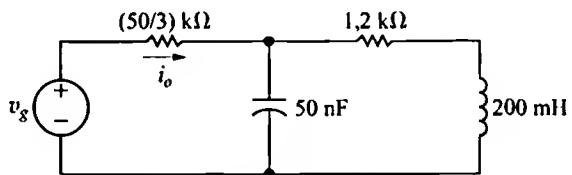


Figura P9.26

- 9.27. El circuito mostrado en la Figura P9.27 está operando en régimen permanente sinusoidal. La bobina se ajusta hasta que la corriente  $i_o$  está en fase con la tensión sinusoidal  $v_g$ .



- a) Especifique la inductancia en henrios si  $v_g = 100 \cos 500t$  V.  
b) Proporcione la ecuación de régimen permanente para  $i_x$  cuando  $L$  tiene el valor encontrado en el apartado (a).

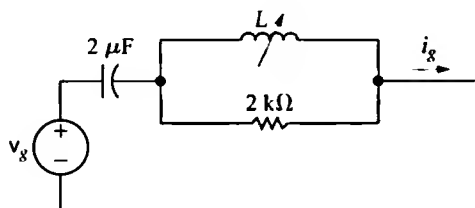


Figura P9.27

- 9.28. a) Para el circuito mostrado en la Figura P9.28, determine la frecuencia (en radianes por segundo) para la que la impedancia  $Z_{ab}$  es puramente resistiva.



b) Calcule el valor de  $Z_{ab}$  para la frecuencia hallada en el apartado (a).

- 9.29. Calcule  $Z_{ab}$  en el circuito mostrado en la Figura P9.29 cuando el circuito está operando a una frecuencia de 100 krad/s.

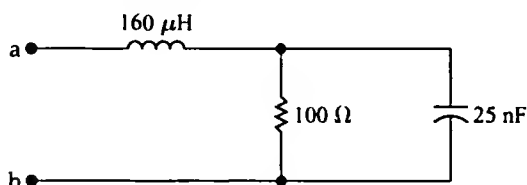


Figura P9.28

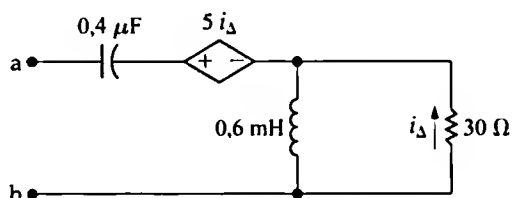


Figura P9.29

- 9.30. a) La tensión de la fuente en el circuito de la Figura P9.30 es  $v_g = 200 \cos 500t$  V. Calcule los valores de  $L$  tales que  $i_g$  esté en fase con  $v_g$  cuando el circuito esté operando en régimen permanente.



b) Para los valores de  $L$  hallados en el apartado (a) calcule las ecuaciones de régimen permanente para  $i_g$ .

- 9.31. La frecuencia de la fuente de corriente sinusoidal del circuito de la Figura P9.31 se ajusta hasta que  $v_o$  está en fase con  $i_g$ .



a) ¿Cuál es el valor de  $\omega$  en radianes por segundo?

b) Si  $i_g = 0,25 \cos \omega t$  mA (donde  $\omega$  es la frecuencia hallada en el apartado anterior), ¿cuál es la ecuación de régimen permanente para  $v_o$ ?

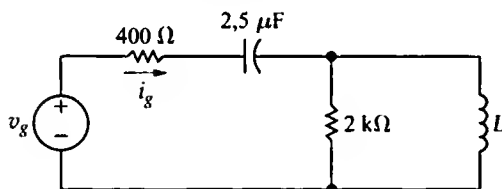


Figura P9.30

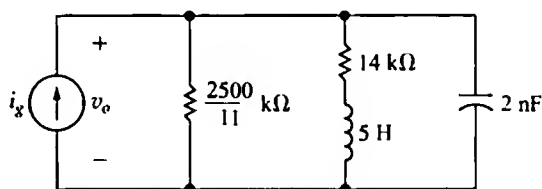


Figura P9.31

- 9.32. a) La frecuencia de la tensión de la fuente en el circuito de la Figura P9.32 se ajusta hasta que  $i_g$  está en fase con  $v_g$ . ¿Cuál es el valor de  $\omega$  en radianes por segundo?



b) Si  $v_g = 20 \cos \omega t$  V (donde  $\omega$  es la frecuencia hallada en el apartado anterior), ¿cuál es la ecuación de régimen permanente para  $v_o$ ?

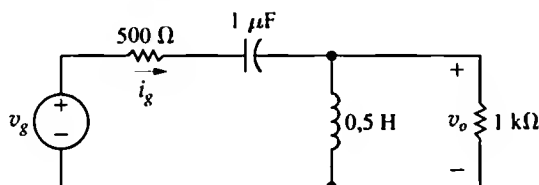


Figura P9.32

- 9.33. Calcule la impedancia  $Z_{ab}$  en el circuito mostrado en la Figura P9.33. Expresé  $Z_{ab}$  en forma tanto polar como rectangular.

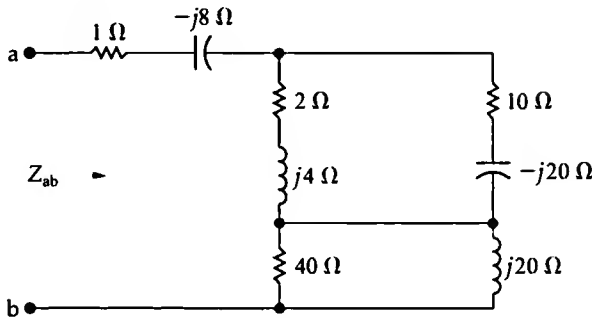


Figura P9.33

- 9.34. Calcule la impedancia  $Y_{ab}$  en el circuito mostrado en la Figura P9.34. Expresé  $Y_{ab}$  en forma tanto polar como rectangular. Proporcione el valor de  $Y_{ab}$  en milisiemens.

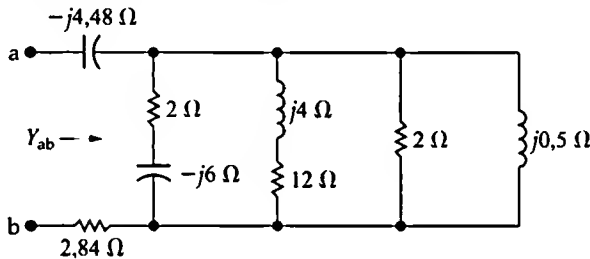


Figura P9.34

- 9.35. Calcule  $Z_{ab}$  para el circuito mostrado en la Figura P9.35.

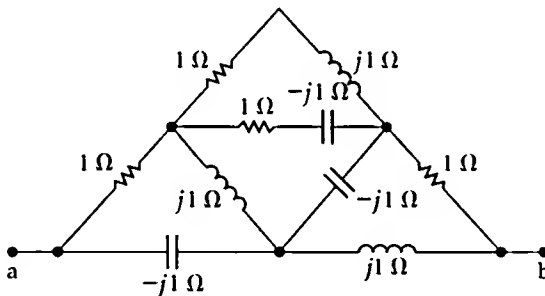


Figura P9.35

- 9.36. Utilice el concepto de división de tensión para hallar la ecuación de régimen permanente para  $v_o(t)$  en el circuito de la Figura P9.36 si  $v_g = 100 \cos 8000t$  V.

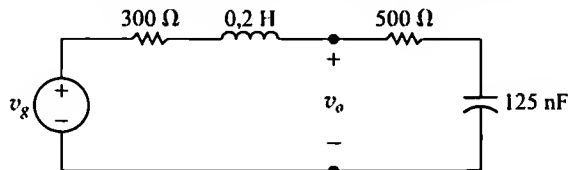


Figura P9.36

- 9.37. Utilice el concepto de división de corriente para hallar la ecuación de régimen permanente para  $i_o$  en el circuito de la Figura P9.37 si  $i_g = 400 \cos 20.000t$  mA.





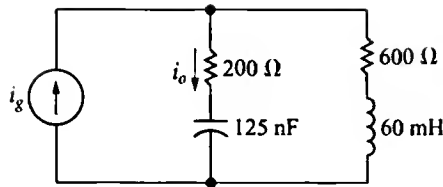


Figura P9.37

9.38. Calcule  $I_b$  y  $Z$  en el circuito mostrado en la Figura P9.38 si  $V_g = 25\angle 0^\circ\ \text{V}$  e  $I_a = 5\angle 90^\circ\ \text{A}$ .

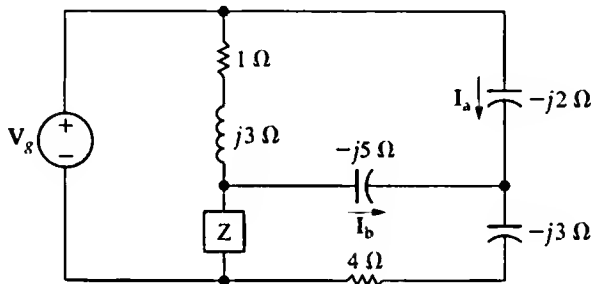


Figura 9.38

9.39. El circuito de la Figura P9.39 está operando en régimen permanente sinusoidal. Determine  $v_o(t)$  si  $i_g(t) = 3 \cos 200t\ \text{mA}$ .

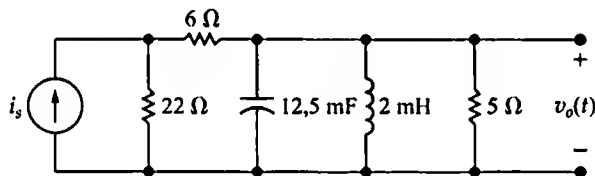


Figura P9.39

9.40. El fasor de corriente  $I_a$  en el circuito mostrado en la Figura P9.40 es  $2\angle 0^\circ\ \text{A}$ .



a) Calcule  $I_b$ ,  $I_c$  y  $V_g$ .

b) Si  $\omega = 800\ \text{rad/s}$ , escriba las ecuaciones correspondientes a  $i_b(t)$ ,  $i_c(t)$  y  $v_g(t)$ .

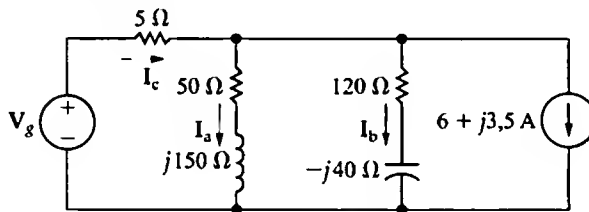


Figura P9.40

9.41. La fuente de tensión sinusoidal del circuito de la Figura P9.41 está generando una tensión igual a  $247.49 \cos(1000t + 45^\circ)\ \text{V}$ .

a) Calcule la tensión de Thévenin con respecto a los terminales a y b.

b) Calcule la impedancia de Thévenin con respecto a los terminales a y b.

c) Dibuje el equivalente de Thévenin.

9.42. Determine el circuito equivalente de Thévenin con respecto a los terminales a y b para el circuito mostrado en la Figura P9.42.

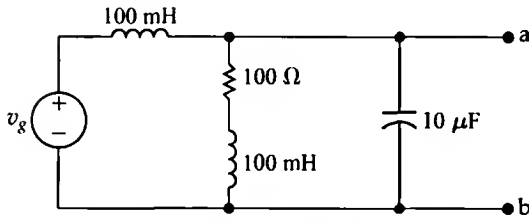


Figura P9.41

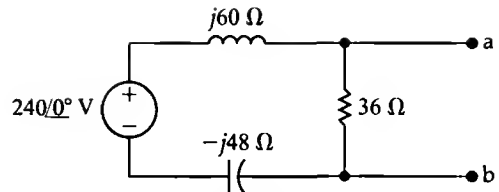


Figura P9.42

- 9.43. Determine el circuito equivalente de Norton con respecto a los terminales a y b para el circuito mostrado en la Figura P9.43 si  $V_s = 5\angle 0^\circ$  V.

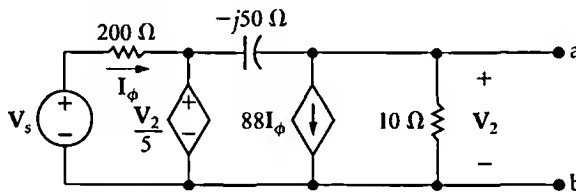


Figura P9.43

- 9.44. Determine el circuito equivalente de Norton con respecto a los terminales a y b para el circuito mostrado en la Figura P9.44.

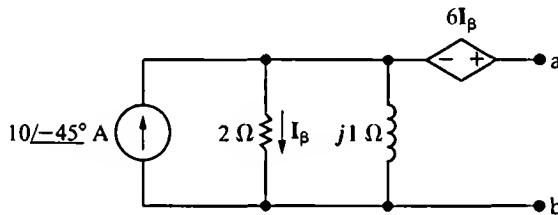


Figura P9.44

- 9.45. Determine el circuito equivalente de Norton con respecto a los terminales a y b para el circuito mostrado en la Figura P9.45.

- 9.46. Determine la impedancia de Thévenin vista en los terminales a y b del circuito de la Figura P9.46 si la frecuencia de operación es  $(200/\pi)$  Hz.

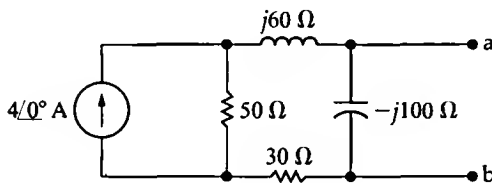


Figura P9.45

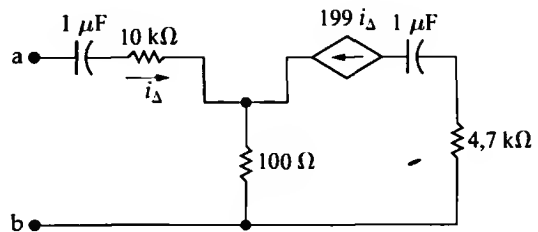


Figura P9.46

- 9.47. El dispositivo de la Figura P9.47 se representa en el dominio de la frecuencia mediante un equivalente de Norton. Cuando conectamos al dispositivo una resistencia con una impedancia de  $5\text{ k}\Omega$ , el valor de  $V_0$  es  $5 - j15$  V. Cuando conectamos al dispositivo un condensador con una

impedancia de  $-j3 \text{ k}\Omega$ , el valor de  $I_0$  es  $4,5 - j6 \text{ mA}$ . Determine la corriente de Norton  $I_N$  y la impedancia de Norton  $Z_N$ .

- 9.48. Determine el circuito equivalente de Thévenin con respecto a los terminales a y b para el circuito mostrado en la Figura P9.48.

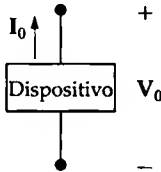


Figura P9.47

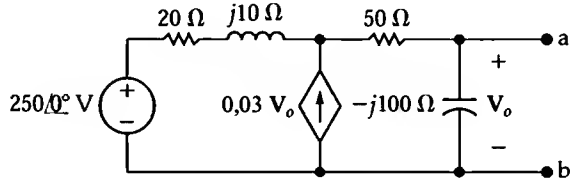


Figura P9.48

- 9.49. Determine el circuito equivalente de Thévenin con respecto a los terminales a y b para el circuito mostrado en la Figura P9.49.
- 9.50. El circuito mostrado en la Figura P9.50 está operando a una frecuencia de  $10 \text{ rad/s}$ . Suponga que  $\alpha$  es real y está comprendido entre  $-10$  y  $+10$ , es decir,  $-10 \leq \alpha \leq 10$ .
- Calcule el valor de  $\alpha$  tal que la impedancia de Thévenin en los terminales a y b sea puramente resistiva.
  - ¿Cuál es el valor de la impedancia de Thévenin para el valor de  $\alpha$  hallado en el apartado (a)?
  - ¿Puede  $\alpha$  ajustarse de modo que la impedancia de Thévenin sea igual a  $500 - j500 \Omega$ ? Si es así, ¿cuál es el valor correspondiente de  $\alpha$ ?
  - ¿Para qué valores de  $\alpha$  será inductiva la impedancia de Thévenin?

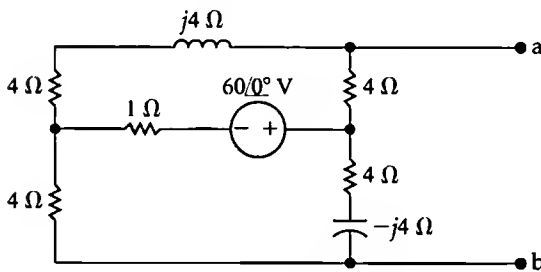


Figura P9.49

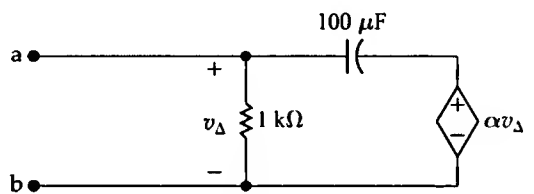


Figura P9.50

- 9.51. Utilice el método de las tensiones de nodo para hallar  $V_0$  en el circuito de la Figura P9.51.

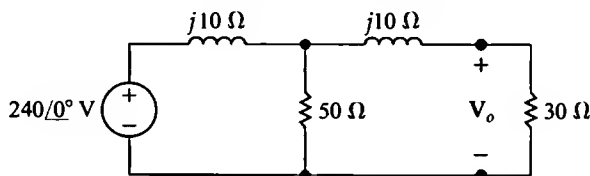


Figura P9.51

- 9.52. Utilice el método de las tensiones de nodo para hallar la ecuación de régimen permanente correspondiente a  $v_0(t)$  en el circuito de la Figura P9.52 si



$$v_{g1} = 20 \cos(2000t - 36,87^\circ) \text{ V},$$

$$v_{g2} = 50 \sin(2000t - 16,26^\circ) \text{ V}.$$

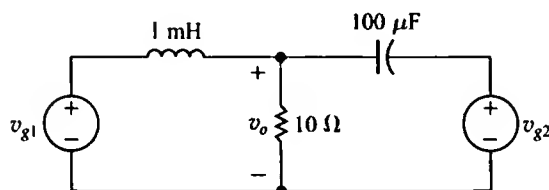


Figura P9.52

- 9.53. Utilice transformaciones de fuentes para hallar la ecuación de régimen permanente correspondiente a  $v_o(t)$  en el circuito de la Figura P9.52.
- 9.54. Utilice el método de las corrientes de malla para hallar la ecuación de régimen permanente correspondiente a  $v_o(t)$  en el circuito de la Figura P9.52.
- 9.55. Utilice el principio de superposición para hallar la ecuación de régimen permanente correspondiente a la tensión  $v_o(t)$  en el circuito de la Figura P9.52.
- 9.56. Utilice el método de las tensiones de nodo para hallar el fasor de tensión  $V_o$  en el circuito mostrado en la Figura P9.56. Exprese la tensión en forma tanto polar como rectangular.

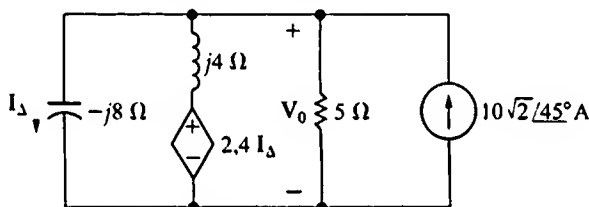


Figura P9.56

- 9.57. Utilice el método de las tensiones de nodo para hallar  $V_o$  e  $I_o$  en el circuito mostrado en la Figura P9.57.

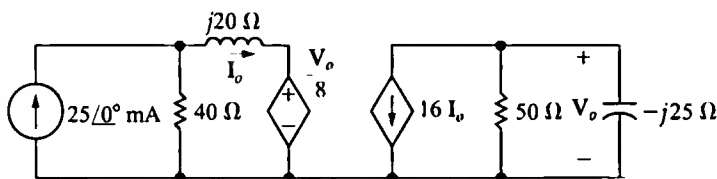


Figura P9.57

- 9.58. Utilice el método de las corrientes de malla para hallar la ecuación de régimen permanente correspondiente a  $i_o(t)$  en el circuito de la Figura P9.58 si

$$v_a = 100 \cos 50.000t \text{ V},$$

$$v_b = 100 \sin(50.000t + 180^\circ) \text{ V}.$$

- 9.59. Utilice el método de las corrientes de malla para hallar el fasor de corriente  $I_x$  en el circuito mostrado en la Figura P9.59.
- 9.60. Utilice el método de las tensiones de nodo para hallar el fasor de la tensión en bornes del condensador de  $-j4 \Omega$  en el circuito de la Figura P9.59. Suponga que la tensión es positiva en el terminal izquierdo del condensador.

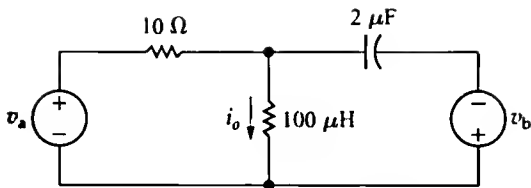


Figura P9.58

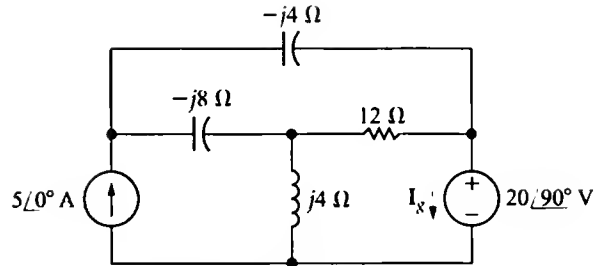


Figura P9.59

- 9.61. Utilice el método de las corrientes de malla para hallar la ecuación de régimen permanente correspondiente a la tensión  $v_o$  en el circuito mostrado en la Figura P9.61 si  $v_g$  es igual a  $400 \cos 5000t$  V.

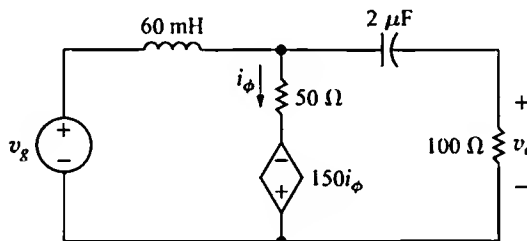


Figura P9.61

- 9.62. Utilice el método de las corrientes de malla para hallar las corrientes de rama  $I_a$ ,  $I_b$ ,  $I_c$  e  $I_d$  en el circuito mostrado en la Figura P9.62.

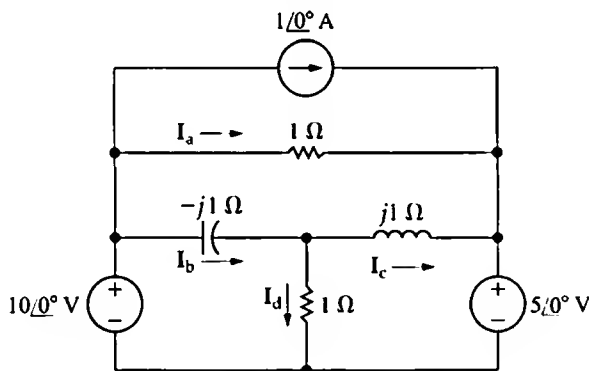


Figura P9.62

- 9.63. Determine el valor de  $Z$  en el circuito mostrado en la Figura P9.63 si  $V_g = 100 - j50$  V,  $I_g = 30 + j20$  A y  $V_b = 140 + j30$  V.

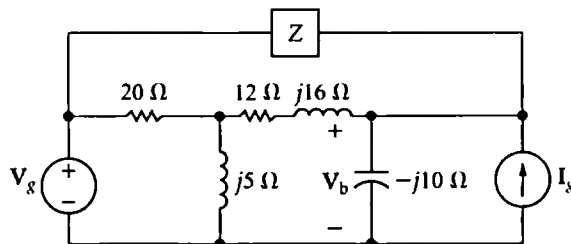


Figura P9.63

- 9.64. a) Para el circuito mostrado en la Figura P9.64, determine la ecuación de régimen permanente para  $v_o$  si  $i_g = 2 \cos(16 \times 10^5 t)$  A.



- b) ¿Cuántos nanosegundos está retrasada  $v_o$  con respecto a  $i_g$ ?

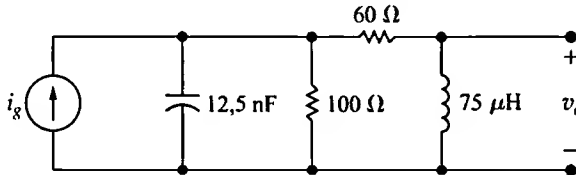


Figura P9.64

- 9.65. Halle las ecuaciones de régimen permanente para las corrientes de rama  $i_a$  e  $i_b$  en el circuito mostrado en la Figura P9.65 si  $v_a = 50 \sin 10^6 t$  V y  $v_b = 25 \cos(10^6 t + 90^\circ)$  V.

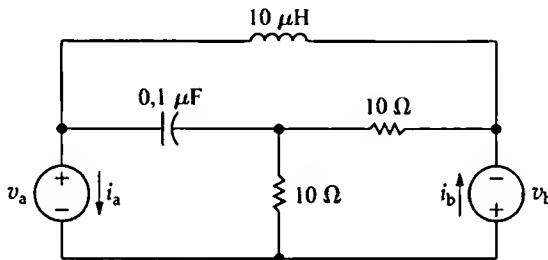


Figura P9.65

- 9.66. a) Calcule las ecuaciones de régimen permanente para las corrientes  $i_g$  e  $i_L$  en el circuito de la Figura P9.66 cuando  $v_g = 70 \cos 5000 t$  V.



- b) Determine el coeficiente de acoplamiento.

- c) Halle la energía almacenada en las bobinas magnéticamente acopladas en  $t = 100\pi \mu s$  y  $t = 200\pi \mu s$ .

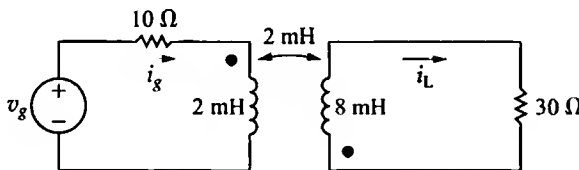


Figura P9.66

- 9.67. Para el circuito de la Figura P9.67, determine el equivalente de Thévenin con respecto a los terminales c y d.

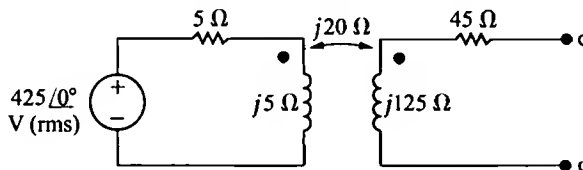


Figura P9.67

- 9.68. La fuente de tensión sinusoidal del circuito mostrado en la Figura P9.68 está operando a una frecuencia de 200 krad/s. El coeficiente de acoplamiento se ajusta hasta que la amplitud de pico de  $i_1$  sea máxima.



a) ¿Cuál es el valor de  $k$ ?

b) ¿Cuál es la amplitud de pico de  $i_1$  si  $v_g = 560 \cos(2 \times 10^5 t)$  V?

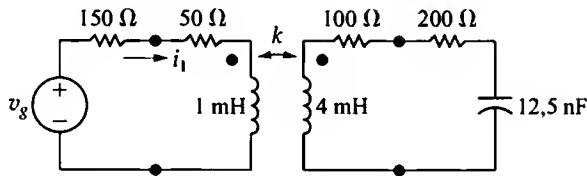


Figura P9.68

9.69. El valor de  $k$  en el circuito de la Figura P9.69 se ajusta de modo que  $Z_{ab}$  sea puramente resistiva cuando  $\omega = 4$  krad/s. Determine  $Z_{ab}$ .

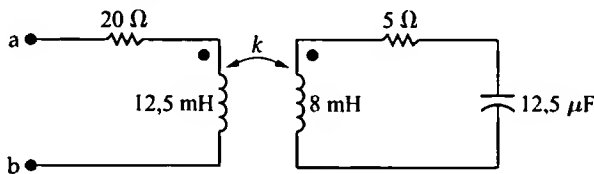


Figura P9.69

9.70. Una combinación en serie de una resistencia de  $300 \Omega$  y una bobina de  $100$  mH se conecta a una fuente de tensión sinusoidal mediante un transformador lineal. La fuente está operando a una frecuencia de  $1$  krad/s. A esta frecuencia, la impedancia interna de la fuente es  $100 + j13.74 \Omega$ . La tensión rms en los terminales de la fuente es de  $50$  V cuando no está cargada. Los parámetros del transformador lineal son  $R_1 = 41.68 \Omega$ ,  $L_1 = 180$  mH,  $R_2 = 500 \Omega$ ,  $L_2 = 500$  mH y  $M = 270$  mH.

a) ¿Cuál es el valor de la impedancia reflejada hacia el primario?

b) ¿Cuál es el valor de la impedancia vista desde los terminales de la fuente no ideal?

9.71. Calcule la impedancia  $Z_{ab}$  en el circuito de la Figura P9.71 si  $Z_L = 80 \angle 60^\circ \Omega$ .

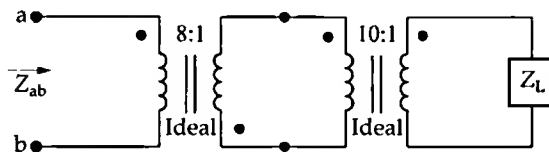


Figura P9.71

9.72. A primera vista, puede parecer en la Ecuación 9.69 que una carga inductiva podría hacer que la reactancia vista mirando hacia los terminales primarios (es decir,  $X_{ab}$ ) fuera capacitiva. Intuitivamente, sabemos que esto es imposible. Demuestre que  $X_{ab}$  nunca puede ser negativa si  $X_L$  es una reactancia inductiva.

9.73. a) Demuestre que la impedancia vista al mirar hacia los terminales a y b del circuito de la Figura P9.73 está dada por la expresión

$$Z_{ab} = \frac{Z_L}{\left(1 + \frac{N_1}{N_2}\right)^2}.$$

b) Demuestre que, si se invierte la marca de polaridad en cualquiera de las bobinas, entonces

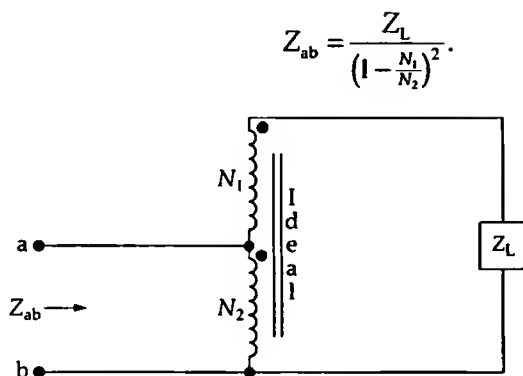


Figura P9.73

- 9.74. a) Demuestre que la impedancia vista al mirar hacia los terminales a y b del circuito de la Figura P9.74 está dada por la expresión

$$Z_{ab} = \left(1 + \frac{N_1}{N_2}\right)^2 Z_L.$$

- b) Demuestre que, si se invierte la marca de polaridad en cualquiera de las bobinas, entonces

$$Z_{ab} = \left(1 - \frac{N_1}{N_2}\right)^2 Z_L.$$

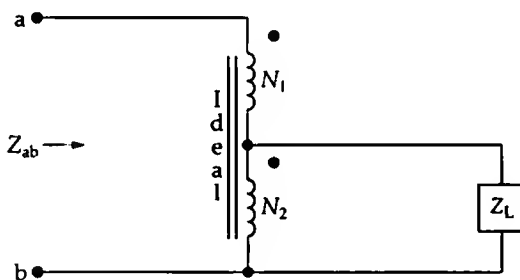


Figura P9.74

- 9.75. Los parámetros del circuito mostrado en la Figura 9.53 son  $R_1 = 0,1 \, \Omega$ ,  $\omega L_1 = 0,8 \, \Omega$ ,  $R_2 = 24 \, \Omega$ ,  $\omega L_2 = 32 \, \Omega$  y  $V_L = 240 + j0 \, \text{V}$ .
- Calcule el fasor de tensión  $V_s$ .
  - Conecte un condensador en paralelo con la bobina, manteniendo  $V_L$  constante, y ajuste el condensador hasta que la magnitud de  $I$  sea mínima. ¿Cuál es la reactancia capacitiva? ¿Cuál es el valor de  $V_s$ ?
  - Halle el valor de la reactancia capacitiva que mantiene lo más pequeña posible la magnitud de  $I$  y que al mismo tiempo hace que

$$|V_s| = |V_L| = 240 \, \text{V}.$$

- 9.76. Demuestre, utilizando un diagrama de fasores, lo que sucede con la magnitud y el ángulo de fase de la tensión  $v_o$  en el circuito de la Figura P9.76 a medida que se hace variar  $R_x$  entre cero e infinito. La amplitud y el ángulo de fase de la tensión de la fuente se mantienen constantes a medida que  $R_x$  varía.





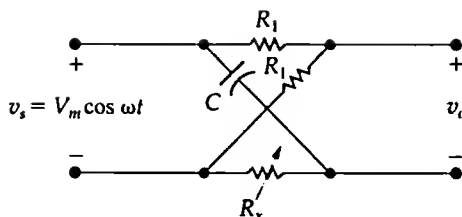


Figura 9.76

- 9.77. a) Para el circuito mostrado en la Figura P9.77, calcule  $V_s$  y  $V_I$ .  
 b) Construya un diagrama de fasores que muestre la relación entre  $V_s$ ,  $V_I$  y la tensión de carga de  $120 \angle 0^\circ$  V.  
 c) Repita los apartados (a) y (b) suponiendo que la resistencia de carga cambia de  $7,5 \Omega$  a  $2,5 \Omega$  y que la reactancia de carga cambia de  $12 \Omega$  a  $4 \Omega$ . Suponga que la tensión de la carga permanece constante, con el valor  $120 \angle 0^\circ$  V. ¿Cuánto habrá que incrementar la amplitud de  $V_s$  para mantener un valor de 120 V en la tensión de carga?  
 d) Repita el apartado (c) suponiendo que, al mismo tiempo que cambian la resistencia y la reactancia de carga, se conecta una reactancia capacitiva de  $-2 \Omega$  entre los terminales de carga.

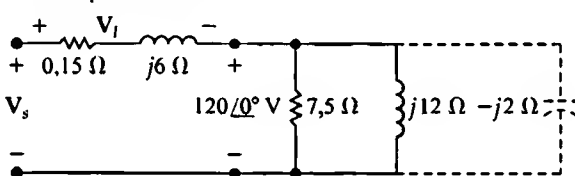


Figura P9.77

- 9.78. La fuente de tensión sinusoidal del circuito de la Figura P9.78 está generando la tensión  $v_g = 4 \cos 200t$  V. Si el amplificador operacional es ideal, ¿cuál es la ecuación de régimen permanente para  $v_o(t)$ ?

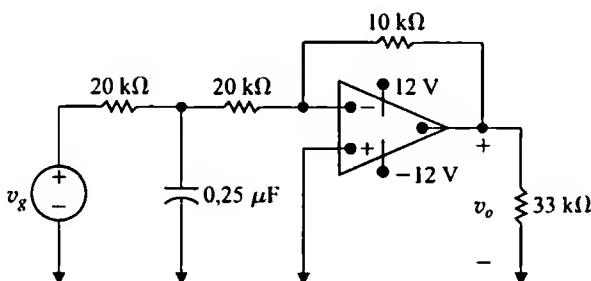


Figura P9.78

- 9.79. El condensador de  $0,25 \mu\text{F}$  del circuito mostrado en la Figura P9.78 se sustituye por un condensador variable. El condensador se ajusta hasta que la tensión de salida está adelantada  $135^\circ$  con respecto a la tensión de entrada.  
 a) Calcule el valor de  $C$  en microfaradios.  
 b) Escriba la ecuación de régimen permanente para  $v_o(t)$  cuando  $C$  tiene el valor hallado en el apartado (a).
- 9.80. El amplificador operacional del circuito mostrado en la Figura P9.80 es ideal. Determine la ecuación de régimen permanente para  $v_o(t)$  cuando  $v_g = 2 \cos 10^6 t$  V.

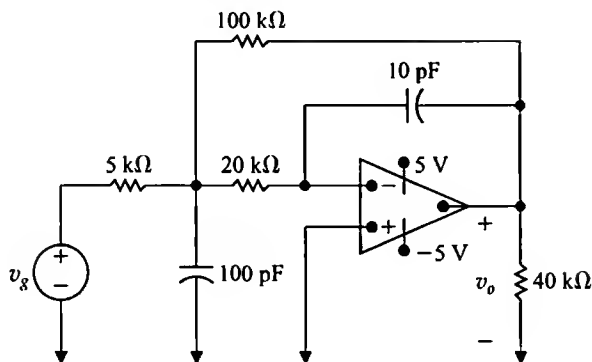


Figura P9.80

9.81. El amplificador operacional del circuito de la Figura P9.81 es ideal.



- Escriba la ecuación de régimen permanente para  $v_o(t)$ .
- ¿Cuál es la amplitud máxima que  $v_g$  puede tener antes de que el amplificador se sature?

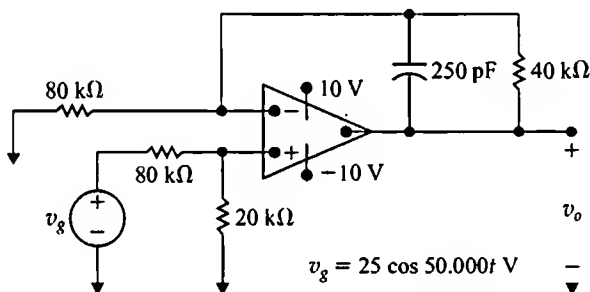


Figura P9.81

9.82. El amplificador operacional del circuito mostrado en la Figura P9.82 es ideal. La tensión de la fuente ideal sinusoidal es  $v_g = 6 \cos 10^5 t$  V.



- ¿Cuál es el valor más pequeño que  $C_o$  puede tener antes de que la tensión de salida en régimen permanente deje de tener una forma de onda sinusoidal pura?
- Para el valor de  $C_o$  hallado en el apartado (a), escriba la ecuación de régimen permanente de  $v_o$ .

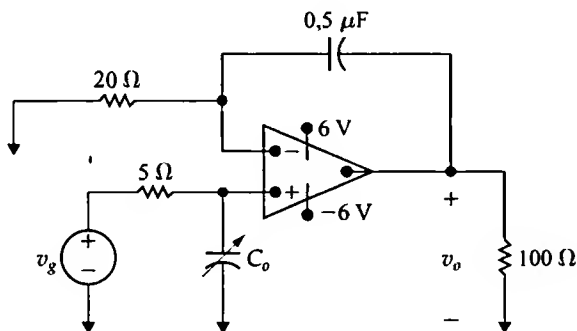
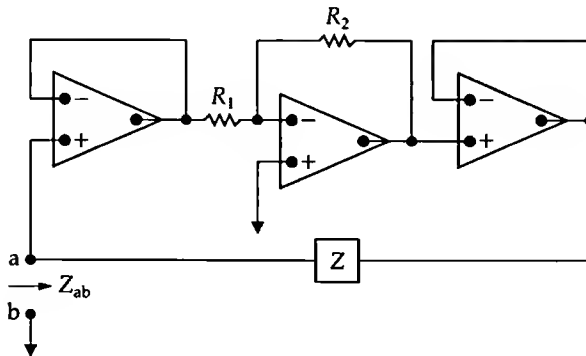


Figura P9.82

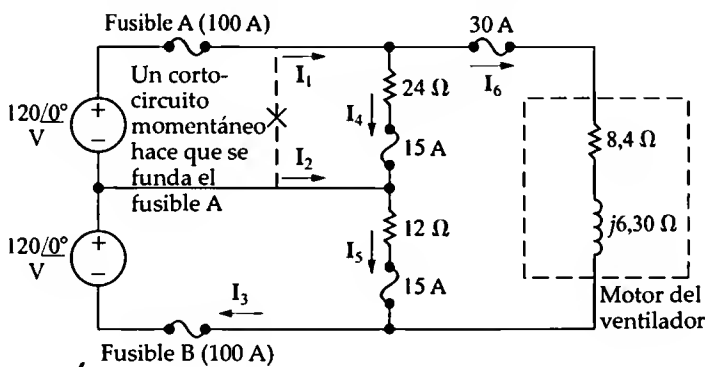
9.83. a) Calcule la impedancia de entrada  $Z_{ab}$  para el circuito de la Figura P9.83. Expresé  $Z_{ab}$  en función de  $Z$  y  $K$ , siendo  $K = (R_2/R_1)$ .

b) Si  $Z$  es un elemento puramente capacitivo, ¿cuál es la capacidad que se ve al mirar hacia los terminales a y b?



**Figura P9.83**

**9.84.** Los profesionales de la ingeniería tienen en ocasiones la oportunidad de actuar como testigos expertos en casos jurídicos relacionados con daños personales o materiales. Como ejemplo del tipo de problema para el que puede solicitarse la opinión de uno de estos expertos, considere el siguiente suceso. Al finalizar su jornada laboral, un granjero va los establos y se encuentra, para su consternación, con que los animales están muertos. Al tratar de hallar el origen del problema, ve que un fusible se ha quemado, haciendo que se detuviera el motor de un ventilador de 240 V. La falta de ventilación hizo que los animales perecieran asfixiados. El fusible estropeado está ubicado en el conmutador especial que conecta la granja con la red eléctrica. Antes de presentar la demanda, la compañía de seguros quiere saber si el circuito eléctrico que alimentaba la granja funcionaba correctamente. Los abogados de la compañía de seguros están un tanto extrañados, porque la esposa del granjero, que se encontraba en casa el día del accidente, convaliente de una operación sin importancia, fue perfectamente capaz de ver la televisión durante la tarde. Además, cuando fue a la cocina para comenzar a preparar la cena, el reloj eléctrico indicaba la hora correcta. Los abogados contratan a un ingeniero para que les explique (1) por qué el reloj eléctrico de la cocina y el aparato de televisión del comedor continuaron operando después de que se fundiera el fusible del conmutador principal y (2) por qué el segundo fusible del conmutador principal no se fundió después de que se atascara el motor del ventilador. Tras comprobar las cargas en el circuito de distribución trifásico antes de la ruptura del fusible A, nuestro ingeniero construye el modelo de circuito mostrado en la Figura P9.84. Las impedancias de los conductores de línea y del conductor neutro pueden suponerse despreciables.



**Figura P9.84**

- Calcule las corrientes de rama  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$ ,  $I_4$ ,  $I_5$  e  $I_6$  antes de que se rompiera el fusible A.
- Calcule las corrientes de rama después de romperse el fusible A. Suponga que el motor atascado del ventilador se comporta como un cortocircuito.
- Explique por qué el reloj y el aparato de televisión no se vieron afectados por el cortocircuito momentáneo que hizo que se fundiera el fusible A.
- Suponga que el motor del ventilador está equipado por un mecanismo de desconexión térmica diseñado para interrumpir el circuito del motor si la corriente que atraviesa éste es excesiva. ¿Esperaría que el mecanismo de desconexión térmica actuara? Explique su respuesta.
- Explique por qué el fusible B no se funde al atascarse el motor del ventilador.

9.85. a) Calcule las corrientes de rama  $I_1$ - $I_6$  en el circuito de la Figura 9.58.

- ◆ b) Calcule la corriente  $I_p$  en el primario.

9.86. Suponga que sustituimos la resistencia de  $40\ \Omega$  en el circuito de distribución de la Figura 9.58 por una resistencia de  $20\ \Omega$ .

- ◆ a) Vuelva a calcular la corriente de rama que atraviesa la resistencia de  $2\ \Omega$ ,  $I_2$ .  
 b) Vuelva a calcular la corriente en el primario,  $I_p$ .  
 c) Teniendo en cuenta sus respuestas, ¿resulta deseable que la resistencia de las dos cargas de  $120\ \text{V}$  sea igual?

9.87. La Figura P9.87 muestra un circuito eléctrico residencial. En este modelo, la resistencia  $R_3$  se utiliza para modelar un aparato que funciona a  $240\ \text{V}$ , mientras que las resistencias  $R_1$  y  $R_2$  se emplean para modelar aparatos que funcionan a  $120\ \text{V}$ . Las ramas que transportan las corrientes  $I_1$  e  $I_2$  modelan lo que los electricistas llaman conductores activos del circuito, mientras que la rama que transporta la corriente  $I_n$  modela el conductor neutro. Nuestro propósito al analizar el circuito consiste en mostrar la importancia del conductor neutro para la adecuada operación del circuito. Seleccione el método de análisis de circuitos que prefiera.

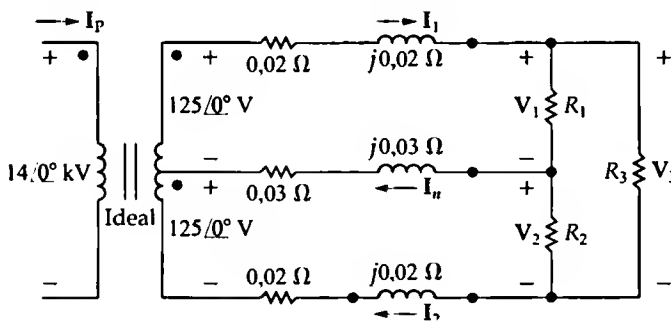


Figura P9.87

- Demuestre que  $I_n$  es cero si  $R_1 = R_2$ .
- Demuestre que  $V_1 = V_2$  si  $R_1 = R_2$ .
- Abra la rama neutra y calcule  $V_1$  y  $V_2$  si  $R_1 = 60\ \Omega$ ,  $R_2 = 600\ \Omega$  y  $R_3 = 10\ \Omega$ .
- Cierre la rama neutra y repita el apartado (c).
- Basándose en sus cálculos, explique por qué nunca se añade un fusible al conductor neutro de manera tal que pudiera interrumpirse dicho conductor mientras hay energía aplicada a los conductores activos.

- 9.88. a) Halle la corriente en el primario para  $I_p$  para los apartados (c) y (d) del Problema 9.87.
- ◆ b) ¿Tienen sentido sus respuestas en términos del comportamiento conocido del circuito?

# CAPÍTULO

# 10

## Contenido del capítulo

- 10.1. Potencia instantánea
- 10.2. Potencia media y reactiva
- 10.3. El valor eficaz en los cálculos de potencia
- 10.4. Potencia compleja
- 10.5. Cálculos de potencia
- 10.6. Transferencia máxima de potencia

# Cálculos de potencia en régimen permanente sinusoidal

La ingeniería de los sistemas de potencia ha evolucionado hasta convertirse en una de las subdisciplinas más importantes dentro de la ingeniería eléctrica. El rango de problemas que tratan con la distribución de energía para la realización de algún tipo de trabajo es enorme, yendo desde la determinación de la potencia nominal que permite a un aparato operar de forma segura y eficiente, hasta el diseño del amplio rango de generadores, transformadores y cables que proporcionan energía eléctrica a los consumidores industriales y domésticos.

Casi toda la energía eléctrica se suministra en forma de tensiones y corrientes sinusoidales. Por tanto, después de haber analizado en el Capítulo 9 los circuitos sinusoidales, ahora es el momento lógico para considerar los cálculos de potencia en régimen permanente sinusoidal. Nuestro interés principal se centra en la potencia media distribuida o suministrada desde un par de terminales como resultado de la existencia de tensiones y corrientes sinusoidales. También presentaremos otros tipos de medidas, como la potencia reactiva, la potencia compleja y la potencia aparente. El concepto de valor eficaz de una senoide, que hemos presentado brevemente en el Capítulo 9, tiene particular importancia en el cálculo de la potencia.

Comenzaremos y terminaremos este capítulo con dos conceptos que deben resultar familiares al lector a partir de los capítulos precedentes: la ecuación básica de la potencia (Sección 10.1) y la transferencia máxima de potencia (Sec-

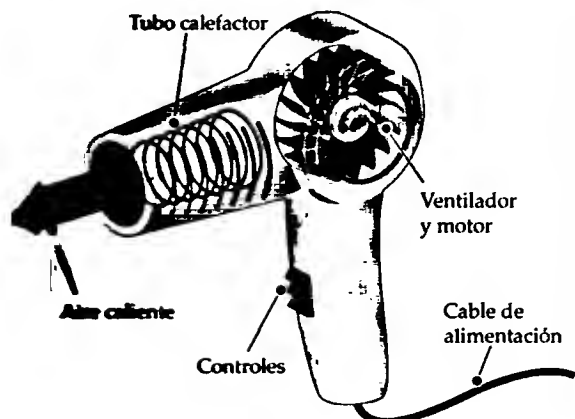
ción 10.6). Entre esas dos secciones, estudiaremos los procesos generales de análisis de la potencia, que también nos resultarán familiares gracias a los estudios realizados en los Capítulos 1 y 4, aunque aquí se necesitan algunas técnicas matemáticas adicionales para tratar con señales sinusoidales, en lugar de señales continuas.

## Perspectiva práctica

### Secadores

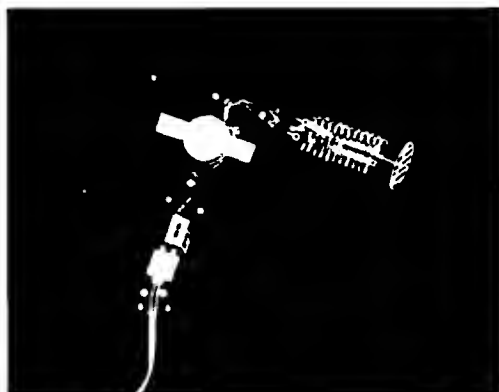
En el Capítulo 9 hemos calculado las tensiones y corrientes de régimen permanente en circuitos eléctricos excitados por fuentes sinusoidales. En este capítulo, vamos a analizar el tema de la potencia en dicho tipo de circuitos. Las técnicas que desarrollemos resultarán útiles para analizar muchos de los dispositivos eléctricos que podemos encontrar en nuestra vida cotidiana, porque las fuentes sinusoidales constituyen el método predominante para proporcionar energía eléctrica a las viviendas, a las escuelas y a las empresas.

Un tipo común de dispositivo eléctrico es el secador, que transforma la energía eléctrica en energía térmica. El secador forma parte de un conjunto más amplio de aparatos, los calefactores, que incluyen las estufas y hornos eléctricos, las tostadoras, las planchas eléctricas, los calentadores de agua, las secadoras de ropa y los secadores de pelo. Uno de los aspectos críticos del diseño de un secador es su consumo de potencia. La potencia es importante por dos razones: cuanta más potencia use un secador, más gasto implicará su funcionamiento aunque, por otro lado, más calor producirá.



### Objetivos del capítulo

1. Comprender los siguientes conceptos sobre potencia alterna, las relaciones existentes entre ellos y el modo de calcularlos en un circuito:
  - potencia instantánea;
  - potencia media (real);
  - potencia reactiva;
  - potencia compleja;
  - factor de potencia.
2. Comprender la condición para la entrega de máxima potencia real a una carga de un circuito de alterna y ser capaz de calcular la impedancia de carga requerida para entregar una potencia máxima real a la carga.
3. Ser capaz de calcular todas las formas de potencia en circuitos de alterna con transformadores lineales y con transformadores ideales.



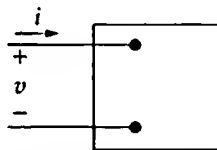
Muchos secadores eléctricos tienen diferentes rangos de potencia, para regular la cantidad de calor suministrada por el dispositivo. Podríamos preguntarnos cómo se consigue mediante estos controles proporcionar diferentes niveles de calor. El ejemplo de Perspectiva práctica al final de este capítulo examina el diseño de un secador de pelo con tres posiciones de operación.

Veremos cómo el diseño proporciona tres diferentes niveles de potencia, que corresponden a tres niveles distintos de calefacción.

## 10.1. Potencia instantánea

Comenzaremos nuestras investigaciones sobre los cálculos de potencia sinusoidal con el familiar circuito mostrado en la Figura 10.1. Aquí,  $v$  e  $i$  son señales sinusoidales de régimen permanente. Utilizando el convenio de signos pasivo, la potencia en cualquier instante es

$$p = vi. \quad (10.1)$$



**Figura 10.1.** Representación como caja negra de un circuito utilizado para el cálculo de la potencia.

Ésta es la **potencia instantánea**. Recuerde que, si la dirección de referencia de la corriente está en la dirección del incremento de tensión, la Ecuación 10.1 debe escribirse con un signo menos. La potencia instantánea se mide en vatios cuando la tensión está en voltios y la corriente en amperios. En primer lugar, vamos a escribir las expresiones correspondientes a  $v$  e  $i$ :

$$v = V_m \cos(\omega t + \theta_v), \quad (10.2)$$

$$i = I_m \cos(\omega t + \theta_i), \quad (10.3)$$

donde  $\theta_v$  es el ángulo de fase de la tensión y  $\theta_i$  es el ángulo de fase de la corriente.

Estamos operando en régimen permanente sinusoidal, así que podemos elegir cualquier instante conveniente como tiempo cero. Los ingenieros que diseñan sistemas para transferir grandes cantidades de potencia suelen encontrar cómodo utilizar como origen de tiempos un instante en que la corriente esté pasando por un máximo positivo. Este sistema de referencia requiere un desplazamiento de la tensión y de la corriente según un ángulo  $\theta_i$ . Con ello, las Ecuaciones 10.2 y 10.3 nos quedan

$$v = V_m \cos(\omega t + \theta_v - \theta_i), \quad (10.4)$$

$$i = I_m \cos \omega t. \quad (10.5)$$

Si sustituimos las Ecuaciones 10.4 y 10.5 en la Ecuación 10.1, la expresión para la potencia instantánea será

$$p = V_m I_m \cos(\omega t + \theta_v - \theta_i) \cos \omega t. \quad (10.6)$$

Podríamos utilizar la Ecuación 10.6 directamente para calcular la potencia media; sin embargo, aplicando un par de identidades trigonométricas, podemos reescribir la Ecuación 10.6 de una manera bastante más informativa.



Comenzamos aplicando la identidad trigonométrica<sup>1</sup>

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \cos (\alpha - \beta) + \frac{1}{2} \cos (\alpha + \beta)$$

para desarrollar la Ecuación 10.6; si hacemos  $\alpha = \omega t + \theta_v - \theta_i$  y  $\beta = \omega t$  nos queda

$$p = \frac{V_m I_m}{2} \cos (\theta_v - \theta_i) + \frac{V_m I_m}{2} \cos (2\omega t + \theta_v - \theta_i). \quad (10.7)$$

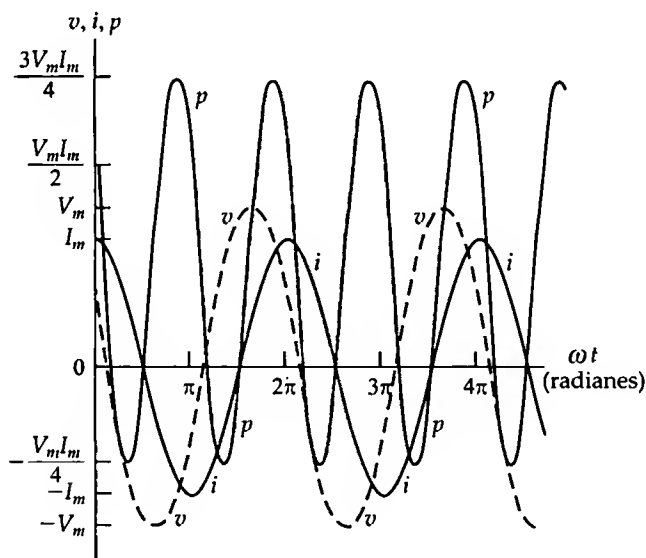
Ahora usamos la identidad trigonométrica

$$\cos (\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

para desarrollar el segundo término del lado derecho de la Ecuación 10.7, lo que nos da

$$p = \frac{V_m I_m}{2} \cos (\theta_v - \theta_i) + \frac{V_m I_m}{2} \cos (\theta_v - \theta_i) \cos 2\omega t - \frac{V_m I_m}{2} \sin (\theta_v - \theta_i) \sin 2\omega t. \quad (10.8)$$

La Figura 10.2 muestra la relación existente entre  $v$ ,  $i$  y  $p$ , basándose en la suposición de que  $\theta_v = 60^\circ$  y  $\theta_i = 0^\circ$ . Puede ver que la frecuencia de la potencia instantánea es el doble de la frecuencia de la tensión o la corriente. Esta observación también se sigue directamente si analizamos los dos términos finales del lado derecho de la Ecuación 10.8. Por tanto, la potencia instantánea recorre dos ciclos completos por cada ciclo de tensión o de corriente. Observe también que la potencia instantánea puede ser negativa durante una parte de cada ciclo, aunque la red conectada a los terminales sea pasiva.



**Figura 10.2.** Potencia instantánea, tensión y corriente en función de  $\omega t$  para funcionamiento en régimen permanente sinusoidal.

<sup>1</sup> Véase el Apéndice F.

En una red completamente pasiva, una potencia negativa implica que se está extrayendo la energía almacenada en las bobinas o condensadores. El hecho de que la potencia instantánea varíe con el tiempo durante la operación en régimen permanente sinusoidal de un circuito explica por qué algunos aparatos con motor (como las neveras) experimentan vibraciones y requieren la utilización de mecanismos de amortiguamiento para que la vibración no sea excesiva.

Ahora estamos preparados para usar la Ecuación 10.8 con el fin de calcular la potencia media en los terminales del circuito representado por la Figura 10.1 y, durante el proceso, introducir el concepto de potencia reactiva.

## 10.2. Potencia media y reactiva

Comenzamos observando que la Ecuación 10.8 tiene tres términos, que podemos reescribir como sigue:

$$p = P + P \cos 2\omega t + Q \sin 2\omega t, \quad (10.9)$$

donde

$$\spadesuit \quad \text{POTENCIA MEDIA (REAL)} \quad P = \frac{V_m I_m}{2} \cos (\theta_v - \theta_i), \quad (10.10)$$

$$\spadesuit \quad \text{POTENCIA REACTIVA} \quad Q = \frac{V_m I_m}{2} \sin (\theta_v - \theta_i). \quad (10.11)$$

$P$  se denomina **potencia media** y  $Q$  se denomina **potencia reactiva**. La potencia media también se llama, en ocasiones, **potencia real**, porque describe una potencia que es transformada en un circuito de energía eléctrica a energía no eléctrica dentro de un circuito. Aunque los dos términos son intercambiables, en este texto utilizaremos principalmente el término *potencia media*.

Resulta fácil ver por qué se llama a  $P$  potencia media. La potencia media asociada con las señales sinusoidales es el promedio de la potencia instantánea a lo largo de un período, es decir,

$$P = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} p \, dt, \quad (10.12)$$

donde  $T$  es el período de la función sinusoidal. Los límites de la Ecuación 10.12 implican que podemos iniciar el proceso de integración en cualquier instante  $t_0$  que nos resulte conveniente, pero debemos terminar la integración exactamente un período después (podríamos integrar a lo largo de  $nT$ , siendo  $n$  un entero, siempre y cuando multipliquemos la integral por  $1/nT$ ).

Podemos determinar la potencia media sustituyendo la Ecuación 10.9 directamente en la Ecuación 10.12 y luego realizando la integración. Pero observe que el valor medio de  $p$  está dado por el primer término del lado derecho de la Ecuación 10.9, porque la integral tanto de  $\cos 2\omega t$  como de  $\sin 2\omega t$  a lo largo de un período es cero. Por tanto, la potencia media está dada por la Ecuación 10.10.

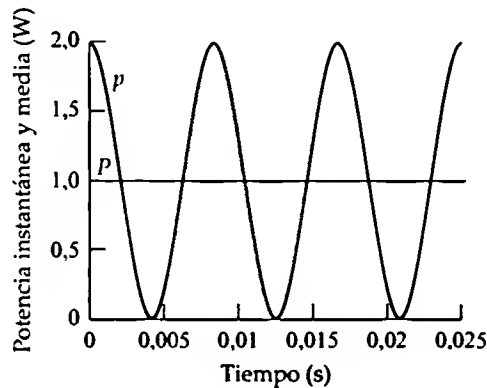
Podemos tratar de comprender mejor el significado de todos los términos de la Ecuación 10.9 y las relaciones existentes entre ellos examinando la potencia en circuitos que sean puramente resistivos, puramente inductivos o puramente capacitivos.

### Potencia en circuitos puramente resistivos

Si el circuito conectado entre los dos terminales es puramente resistivo, la tensión y la corriente estarán en fase, lo que quiere decir que  $\theta_v = \theta_i$ . La Ecuación 10.9 se reduce entonces a

$$p = P + P \cos 2\omega t. \quad (10.13)$$

La potencia instantánea expresada en la Ecuación 10.13 se denomina **potencia instantánea real**. La Figura 10.3 muestra una gráfica de la Ecuación 10.13 para un circuito representativo puramente resistivo, donde hemos supuesto que  $\omega = 377 \text{ rad/s}$ . Por definición, la potencia media,  $P$ , es el promedio de  $p$  a lo largo de un período. Por tanto, resulta fácil ver, simplemente examinando la gráfica, que  $P = 1$  para este circuito. Observe, en la Ecuación 10.13, que la potencia instantánea real nunca puede ser negativa, lo que también se ilustra en la Figura 10.3. En otras palabras, no es posible extraer potencia de una red puramente resistiva. Por el contrario, toda la energía eléctrica se disipa en forma de energía térmica.



**Figura 10.3.** Potencia real instantánea y potencia media para un circuito puramente resistivo.

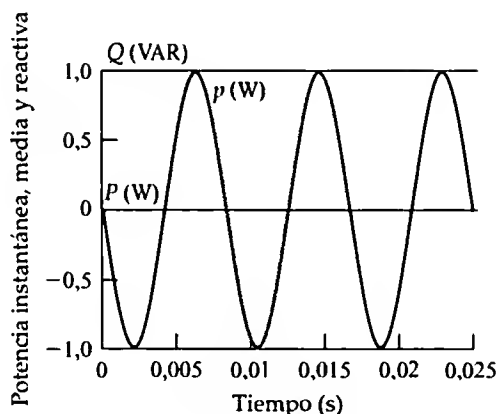
## Potencia en circuitos puramente inductivos

Si el circuito conectado a los dos terminales es puramente inductivo, la tensión y la corriente están desfasadas precisamente  $90^\circ$ . En particular, la corriente está retardada  $90^\circ$  con respecto a la tensión (es decir,  $\theta_i = \theta_v - 90^\circ$ ); por tanto,  $\theta_v - \theta_i = +90^\circ$ . La expresión para la potencia instantánea se reduce entonces a

$$p = -Q \sin 2\omega t. \quad (10.14)$$

En un circuito puramente inductivo, la potencia media es cero. Por tanto, no hay transformación de energía eléctrica en energía no eléctrica. La potencia instantánea en los terminales de un circuito puramente inductivo está continuamente intercambiándose entre el circuito y la fuente que está excitando al circuito, con una frecuencia igual a  $2\omega$ . En otras palabras, cuando  $p$  es positiva, se está almacenando energía en los campos magnéticos asociados con los elementos inductivos, mientras que cuando  $p$  es negativa se está extrayendo energía de dichos campos magnéticos.

Una medida de la potencia asociada con los circuitos puramente inductivos es la potencia reactiva  $Q$ . El nombre *potencia reactiva* proviene de la caracterización de una bobina como un elemento reactivo; su impedancia es puramente reactiva. Observe que la potencia media  $P$  y la potencia reactiva  $Q$  tienen la misma dimensión. Para distinguir entre la potencia media y la potencia reactiva utilizamos las unidades de *vatio* (W) para la potencia media y de *var* (*voltio-amperio reactivo* o VAR) para la potencia reactiva. La Figura 10.4 muestra la potencia instantánea para un circuito representativo puramente inductivo, suponiendo que  $\omega = 377 \text{ rad/s}$  y  $Q = 1 \text{ VAR}$ .

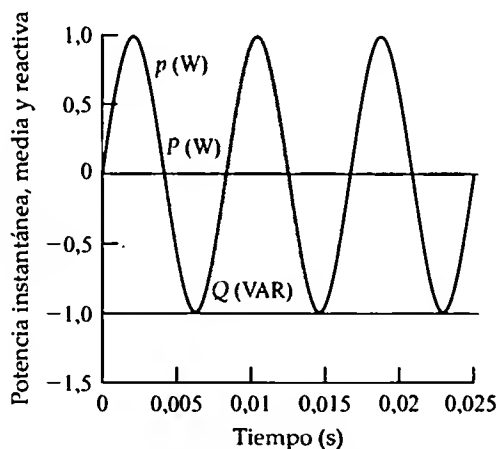


**Figura 10.4.** Potencia instantánea real, potencia media y potencia reactiva para un circuito puramente inductivo.

### Potencia en circuitos puramente capacitivos

Si el circuito conectado a los terminales es puramente capacitivo, la tensión y la corriente están desfasadas precisamente  $90^\circ$ . En este caso, la corriente está adelantada  $90^\circ$  con respecto a la tensión (es decir,  $\theta_i = \theta_v + 90^\circ$ ); por tanto,  $\theta_v - \theta_i = -90^\circ$ . La ecuación correspondiente a la potencia instantánea nos queda entonces

$$p = -Q \sin 2\omega t. \quad (10.15)$$



**Figura 10.5.** Potencia real instantánea y potencia media para un circuito puramente capacitivo.

De nuevo, la potencia media es cero, por lo que no hay transformación de energía eléctrica en energía no eléctrica. En un circuito puramente capacitivo, se está intercambiando potencia continuamente entre la fuente que excita al circuito y el campo eléctrico asociado con los elementos capacitivos. La Figura 10.5 ilustra la potencia instantánea para un circuito representativo puramente capacitivo, suponiendo que  $\omega = 377 \text{ rad/s}$  y  $Q = -1 \text{ VAR}$ .

Observe que la decisión de utilizar la corriente como referencia hace que  $Q$  sea positiva para las bobinas (es decir,  $\theta_v - \theta_i = 90^\circ$ ) y negativa para los condensadores (es decir,  $\theta_v - \theta_i = -90^\circ$ ). Los ingenieros de potencia tienen en cuenta esta diferencia en el signo algebraico de  $Q$  diciendo que las bobinas demandan (o absorben) vars magnetizantes, mientras que los condensadores entregan (o suministran) vars magnetizantes. Hablaremos con más detalle acerca de este convenio más adelante.

## Factor de potencia

El ángulo  $\theta_v - \theta_i$  juega un papel importante en el cálculo tanto de la potencia media como de la potencia reactiva, y se lo denomina **ángulo del factor de potencia**. El coseno de este ángulo se denomina **factor de potencia** (abreviado, fp) y el seno de este ángulo se denomina **factor reactivo** (abreviado, fr). Así,

### ✦ FACTOR DE POTENCIA

$$fp = \cos(\theta_v - \theta_i), \quad (10.16)$$

$$fr = \sin(\theta_v - \theta_i). \quad (10.17)$$

Conocer el valor del factor de potencia no nos permite determinar el valor del ángulo del factor de potencia, porque  $\cos(\theta_v - \theta_i) = \cos(\theta_i - \theta_v)$ . Para describir completamente este ángulo, utilizamos las frases descriptivas **factor de potencia en retardo** y **factor de potencia en adelanto**. Un factor de potencia en retardo implica que la corriente está retrasada con respecto a la tensión, lo que quiere decir que tenemos una carga inductiva. Un factor de potencia en adelanto implica que la corriente está adelantada con respecto a la tensión, por lo que tendremos una carga capacitiva. Tanto el factor de potencia como el factor reactivo son magnitudes que nos facilitan la descripción de las cargas eléctricas.

El Ejemplo 10.1 ilustra la interpretación de  $P$  y  $Q$  mediante un cálculo numérico.

## EJEMPLO 10.1 Cálculo de la potencia media y reactiva

- a) Calcule la potencia media y la potencia reactiva en los terminales de la red mostrada en la Figura 10.6 si

$$v = 100 \cos(\omega t + 15^\circ) \text{ V},$$

$$i = 4 \sin(\omega t - 15^\circ) \text{ A}.$$

- b) Indique si la red contenida en la caja está absorbiendo o entregando potencia media.  
c) Indique si la red contenida dentro de la caja está absorbiendo o entregando vars magnetizantes.

### SOLUCIÓN

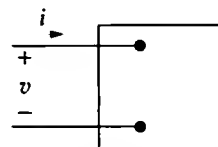
- a) Puesto que  $i$  está expresada en términos de la función seno, el primer paso para el cálculo de  $P$  y  $Q$  consistirá en reescribir  $i$  como una función coseno:

$$i = 4 \cos(\omega t - 105^\circ) \text{ A}.$$

Ahora calculamos  $P$  y  $Q$  directamente a partir de las Ecuaciones 10.10 y 10.11.

$$P = \frac{1}{2}(100)(4) \cos[15 - (-105)] = -100 \text{ W},$$

$$Q = \frac{1}{2}100(4) \sin[15 - (-105)] = 173,21 \text{ VAR}.$$



**Figura 10.6.** Un par de terminales utilizados para el cálculo de potencia.

- b) Observe en la Figura 10.6 el uso del convenio de signos pasivo. Debido a esto, el valor negativo de  $-100\text{ W}$  implica que la red contenida en la caja está entregando potencia media a los terminales.
- c) El convenio de signos pasivo implica que, como  $Q$  es positiva, la red contenida dentro de la caja está absorbiendo vars magnetizantes a través de los terminales.

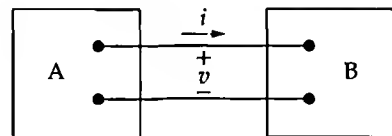
### Evaluación del objetivo 1

- Comprender los conceptos de potencia alterna, las relaciones existentes entre ellos y el modo de calcular la potencia en un circuito.

10.1. Para cada uno de los siguientes conjuntos de tensiones y corrientes, calcule la potencia real y la potencia reactiva en la línea que une las redes A y B en el circuito mostrado. En cada paso, indique si la potencia fluye de A a B o viceversa. Indique también si se están transfiriendo vars magnetizantes de A a B o viceversa.

- a)  $v = 100 \cos(\omega t - 45^\circ)\text{ V}$ ;  
 $i = 20 \cos(\omega t + 15^\circ)\text{ A}$ .  
 b)  $v = 100 \cos(\omega t - 45^\circ)\text{ V}$ ;  
 $i = 20 \cos(\omega t + 165^\circ)\text{ A}$ .  
 c)  $v = 100 \cos(\omega t - 45^\circ)\text{ V}$ ;  
 $i = 20 \cos(\omega t - 105^\circ)\text{ A}$ .  
 d)  $v = 100 \cos \omega t\text{ V}$ ;  
 $i = 20 \cos(\omega t + 120^\circ)\text{ A}$ .

10.2. Calcule el factor de potencia y el factor reactivo para la red contenida en la caja de la Figura 10.6, cuya tensión y corriente se describen en el Ejemplo 10.1.



### RESPUESTA

- (a)  $P = 500\text{ W (A a B)}$ ,  
 $Q = -866,03\text{ VAR (B a A)}$ ;  
 (b)  $P = -866,03\text{ W (B a A)}$ ,  
 $Q = 500\text{ VAR (A a B)}$ ;  
 (c)  $P = 500\text{ W (A a B)}$ ,  
 $Q = 866,03\text{ VAR (A a B)}$ ;  
 (d)  $P = -500\text{ W (B a A)}$ ,  
 $Q = -866,03\text{ VAR (B a A)}$ .

*Sugerencia:* utilice  $-i$  para calcular el factor de potencia y el factor reactivo.

### RESPUESTA

$\text{fp} = 0,5$  en adelante;  $\text{fr} = 0,866$ .

**NOTA** Trate también de resolver el Problema 10.1 del capítulo.

## Valores nominales de los aparatos eléctricos

La potencia media se utiliza para cuantificar la potencia que los electrodomésticos necesitan. En la Tabla 10.1 se presenta la potencia media nominal y el consumo anual estimado en kilovatios-hora de algunos tipos de aparatos comunes. Los valores de consumo de energía se han obtenido estimando el número de horas anuales que se utilizan dichos aparatos. Por ejemplo, una cafetera tiene un consumo anual estimado de  $140\text{ kWh}$  y un consumo medio de potencia durante la operación de  $1,2\text{ kW}$ . Por tanto, estamos suponiendo que una cafetera se utiliza  $140/1,2$ , es decir,  $116,67$  horas por año, lo que equivale aproximadamente a 19 minutos diarios.

El Ejemplo 10.2 utiliza la Tabla 10.1 para determinar si cuatro aparatos comunes pueden estar simultáneamente en operación sin exceder la capacidad de consumo de corriente de la vivienda.

### EJEMPLO 10.2 Cálculos de potencia relativos a los aparatos domésticos

Suponga que el circuito al que están conectadas las tomas en una cocina típica está alimentado con un conductor protegido por un fusible de 20 A o un disyuntor de 20 A. Suponga también que tenemos cuatro electrodomésticos alimentados a 120 V y operando simultáneamente: una cafetera, un aparato para cocer huevos, una parrilla eléctrica y una tostadora.

¿Se verá interrumpido el circuito por el dispositivo protector?

### SOLUCIÓN

En la Tabla 10.1 vemos que la potencia media total consumida por todos los electrodomésticos es

$$P = 1200 + 516 + 1196 + 1146 = 4058 \text{ W.}$$

La corriente total que atraviesa el dispositivo protector será

$$I_{\text{eff}} = \frac{4058}{120} \approx 33.82 \text{ A.}$$

Así que la respuesta es que el dispositivo protector interrumpirá el circuito.

**Tabla 10.1.** Requerimientos anuales de energía de algunos electrodomésticos.

APARATO	POTENCIA MEDIA	CONSUMO ANUAL ESTIMADO (kWh)*
<b>Aparatos de cocina</b>		
Cafetera	1.200	140
Lavaplatos	1.201	165
Aparato para cocer huevos	516	14
Parrilla eléctrica	1.196	100
Batidora	127	2
Horno, microondas (sólo)	1.450	190
Horno completo	12.200	596
Tostadora	1.146	39
<b>Lavandería</b>		
Secadora de ropa	4.856	993
Lavadora, automática	512	103
Calentador de agua	2.475	4.219
Calentador ultrarrápido	4.474	4.811
<b>Confort</b>		
Acondicionador de aire (habitación)	860	860*
Deshumidificador	257	377

(Continúa)

(Continuación)

APARATO	POTENCIA MEDIA	CONSUMO ANUAL ESTIMADO (kWh) <sup>a</sup>
Ventilador	88	43
Calefactor (portátil)	1.322	176
<b>Salud y belleza</b>		
Secador de pelo	600	25
Afeitadora eléctrica	15	0,5
Lámpara de bronceado	279	16
<b>Entretenimiento</b>		
Radio	71	86
Televisión en color con TRC	240	528
Televisión de estado sólido	145	320
<b>Varios</b>		
Reloj	2	17
Aspiradora	630	46
<p>a) Basado en un uso normal. A la hora de utilizar estos números para efectuar estimaciones, hay que tomar en consideración factores tales como el tamaño del aparato específico, el área geográfica donde se utilice y el patrón de uso individual. Tenga en cuenta que no siempre pueden sumarse los valores de potencia, ya que no todas las unidades suelen estar en operación al mismo tiempo.</p> <p>b) Basado en 1000 horas de operación por año. Este número varía ampliamente dependiendo del área geográfica y del tamaño específico de la unidad.</p> <p>Fuente: Edison Electric Institute.</p>		

**NOTA** Evalúe su comprensión de este material tratando de resolver los Problemas 10.3 y 10.4 del capítulo.

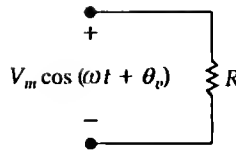
### 10.3. El valor eficaz en los cálculos de potencia

Al presentar el valor eficaz o valor rms de una tensión (o corriente) sinusoidal en la Sección 9.1, hemos mencionado que dicho valor juega un importante papel en los cálculos de potencia. Vamos a analizar ahora ese papel.

Suponga que aplicamos una tensión sinusoidal a los terminales de una resistencia, como se muestra en la Figura 10.7, y que queremos determinar la potencia media entregada a la resistencia. A partir de la Ecuación 10.12,

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{V_m^2 \cos^2 (\omega t + \phi_v)}{R} dt \\
 &= \frac{1}{R} \left[ \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} V_m^2 \cos^2 (\omega t + \phi_v) dt \right].
 \end{aligned} \tag{10.18}$$





**Figura 10.7.** Una tensión sinusoidal aplicada a los terminales de una resistencia.

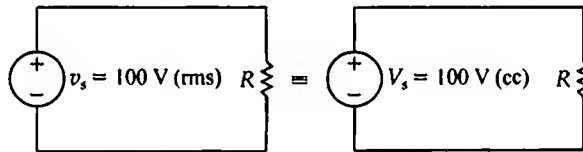
Comparando la Ecuación 10.18 con la Ecuación 9.5, vemos que la potencia media entregada a  $R$  es simplemente el valor rms de la tensión elevado al cuadrado y dividido por  $R$ , es decir,

$$P = \frac{V_{\text{rms}}^2}{R}. \quad (10.19)$$

Si la resistencia está atravesada por una corriente sinusoidal, como por ejemplo  $I_m \cos(\omega t + \phi_i)$ , la potencia media entregada a la resistencia será

$$P = I_{\text{rms}}^2 R. \quad (10.20)$$

Como ya hemos dicho, el valor rms se denomina también **valor eficaz** de la tensión (o corriente) sinusoidal. El valor rms tiene una propiedad interesante: dada una carga resistiva equivalente,  $R$ , y un periodo de tiempo equivalente,  $T$ , el valor rms de una fuente sinusoidal entrega la misma energía a  $R$  que una fuente de continua del mismo valor. Por ejemplo, una fuente de continua de 100 V entrega la misma energía en  $T$  segundos que una fuente sinusoidal de 100 V<sub>rms</sub>, suponiendo resistencias de carga equivalentes (véase el Problema 10.5).



**Figura 10.8.** El valor eficaz de  $v_s$  (100 V rms) entrega la misma potencia a  $R$  que la tensión continua  $V_s$  (100 V cc).

La Figura 10.8 ilustra esta equivalencia. Desde el punto de vista de la energía, el efecto de las dos fuentes es idéntico. Es por eso por lo que el término *valor eficaz* se utiliza de forma intercambiable con el de *valor rms*.

La potencia media dada por la Ecuación 10.10 y la potencia reactiva dada por la Ecuación 10.11 puede describirse en términos de los valores eficaces:

$$\begin{aligned} P &= \frac{V_m I_m}{2} \cos(\theta_v - \theta_i) = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \frac{I_m}{\sqrt{2}} \cos(\theta_v - \theta_i) \\ &= V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos(\theta_v - \theta_i); \end{aligned} \quad (10.21)$$

y, mediante una manipulación similar,

$$Q = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \sin(\theta_v - \theta_i). \quad (10.22)$$

El valor eficaz de la señal sinusoidal en los cálculos de potencia se utiliza tan ampliamente que los valores nominales de tensión y de corriente para los circuitos y equipos que consumen energía se proporcionan en términos de los valores rms. Por ejemplo, la tensión nominal del cableado eléctrico para

entornos residenciales suele ser de 240 V/120 V. Estos niveles de tensión son los valores rms de las tensiones sinusoidales suministradas por la compañía eléctrica, que proporciona la energía a dos niveles de tensión, según el área geográfica y el tipo de aparato. Muchos electrodomésticos, como las lámparas, las planchas y las tostadoras, indican mediante algún tipo de etiqueta los valores rms nominales. Por ejemplo, una lámpara de 120 V, 100 W tiene una resistencia de  $120^2/100$ , es decir,  $144\ \Omega$ , y consume una corriente rms igual a  $120/144$ , es decir, 0,833 A. El valor de pico de la corriente que atraviesa la lámpara es  $0,833\sqrt{2}$ , que es igual a 1,18 A.

El fasor correspondiente a una función sinusoidal puede también expresarse en términos del valor rms. El módulo del fasor rms es igual al valor rms de la función sinusoidal. Si un fasor está basado en el valor rms, lo indicamos mediante un enunciado explícito, mediante el símbolo «rms» entre paréntesis junto al fasor, o mediante el sufijo «eff», como en la Ecuación 10.21.

En el Ejemplo 10.3 se ilustra el uso de los valores rms para el cálculo de potencia.

### EJEMPLO 10.3 Determinación de la potencia media entregada a una resistencia por una tensión sinusoidal

- a) Aplicamos una tensión sinusoidal con una amplitud máxima de 625 V a los terminales de una resistencia de  $50\ \Omega$ . Calcule la potencia media entregada a la resistencia.
- b) Repita el apartado (a) hallando primero la corriente que atraviesa la resistencia.

media entregada a la resistencia de  $50\ \Omega$  será

$$P = \frac{(441,94)^2}{50} = 3906,25\ \text{W}.$$

- b) La amplitud máxima de la corriente que atraviesa la resistencia es  $625/50$ , que es igual a 12,5 A. El valor rms de la corriente será  $12,5/\sqrt{2}$ , que equivale aproximadamente a 8,84 A. Por tanto, la potencia media entregada a la resistencia es

$$P = (8,84)^2 50 = 3906,25\ \text{W}.$$

### SOLUCIÓN

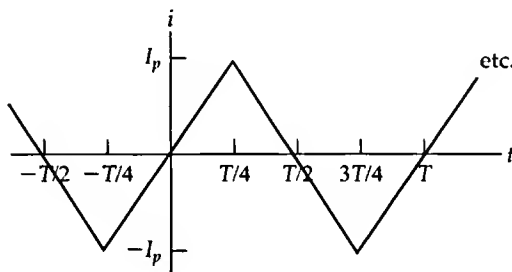
- a) El valor rms de la tensión sinusoidal es  $625/\sqrt{2}$  o aproximadamente 441,94 V. A partir de la Ecuación 10.19, la potencia

### Evaluación del objetivo 1

- Comprender los conceptos de potencia alterna, la relación existente entre ellos y el modo de calcular la potencia en un circuito.

- 10.3. La corriente triangular periódica del Ejemplo 9.4, que aquí repetimos, tiene un valor de pico de 180 mA. Calcule la potencia media que esta corriente entrega a una resistencia de  $5\ \text{k}\Omega$ .

**RESPUESTA** 54 W.



**NOTA** Trate también de resolver el Problema 10.6 del capítulo.

## 10.4. Potencia compleja

**Antes** de analizar los diversos métodos de cálculo en la potencia real y reactiva en los circuitos que operan en régimen permanente sinusoidal, necesitamos introducir y definir el concepto de potencia compleja. La potencia compleja es la suma compleja de la potencia real y de la potencia reactiva, es decir,

$$\text{POTENCIA COMPLEJA} \quad S = P + jQ. \quad (10.23)$$

Como veremos, podemos calcular la potencia compleja directamente a partir de los fasores de tensión y de corriente de un circuito. A continuación, puede usarse la Ecuación 10.23 para calcular la potencia media y la potencia reactiva, porque  $P = \Re\{S\}$  y  $Q = \Im\{S\}$ .

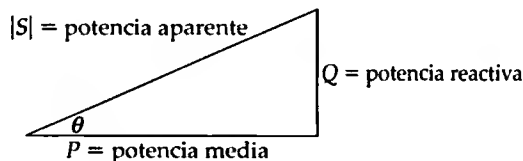
Desde el punto de vista de las dimensiones, la potencia compleja tiene las mismas que la potencia media o la potencia reactiva. Sin embargo, para distinguir la potencia compleja de los otros dos tipos de potencia, utilizamos como unidades los voltio-ampérios (VA). Así, usaremos los voltio-ampérios para la potencia compleja, los vatios para la potencia media y los vars para la potencia reactiva, como se resume en la Tabla 10.2.

**Tabla 10.2.** Tres tipos de potencia y sus unidades.

TIPO DE POTENCIA	UNIDADES .
Potencia compleja	voltio-ampérios
Potencia media	vatios
Potencia reactiva	vars

Otra ventaja de utilizar la potencia compleja es la interpretación geométrica que proporciona. A la hora de trabajar con la Ecuación 10.23, piense en  $P$ ,  $Q$  y  $|S|$  como los lados de un triángulo recto, como se muestra en la Figura 10.9. Resulta fácil demostrar que el ángulo  $\theta$  del triángulo de potencia es el ángulo del factor de potencia  $\theta_v - \theta_i$ . Para el triángulo recto mostrado en la Figura 10.9,

$$\tan \theta = \frac{Q}{P}. \quad (10.24)$$



**Figura 10.9.** Triángulo de potencia.

Pero, por las definiciones de  $P$  y  $Q$  (Ecuaciones 10.10 y 10.11, respectivamente),

$$\begin{aligned} \frac{Q}{P} &= \frac{(V_m I_m / 2) \sin(\theta_v - \theta_i)}{(V_m I_m / 2) \cos(\theta_v - \theta_i)} \\ &= \tan(\theta_v - \theta_i). \end{aligned} \quad (10.25)$$

Por tanto,  $\theta = \theta_v - \theta_i$ . Las relaciones geométricas aplicables a un triángulo recto implican también que las cuatro dimensiones del triángulo de potencia (los tres lados y el ángulo del factor de potencia) pueden determinarse sin más que conocer cualesquiera dos de las cuatro.

La magnitud de la potencia compleja se denomina **potencia aparente**. Específicamente,

$$\nabla \quad \text{POTENCIA APARENTE} \quad |S| = \sqrt{P^2 + Q^2}. \quad (10.26)$$

La potencia aparente, como la potencia compleja, se mide en voltio-amperios. El requisito de consumo de potencia aparente, o de voltio-amperios, para un dispositivo diseñado para convertir energía eléctrica en energía no eléctrica es más importante que el requisito de potencia media. Aunque la potencia media representa la salida útil del dispositivo conversor de energía, la potencia aparente representa la capacidad en voltio-amperios requerida para suministrar la potencia media. Como puede verse en el triángulo de potencia de la Figura 10.9, a menos que el ángulo del factor de potencia sea cero grados (es decir, que el dispositivo sea puramente resistivo,  $\text{fp} = 1$  y  $Q = 0$ ), la capacidad en voltio-amperios requerida por el dispositivo es mayor que la potencia media usada por el mismo. Como veremos en el Ejemplo 10.6, resulta conveniente operar los dispositivos con un factor de potencia cercano a 1.

Muchos aparatos útiles (como las neveras, ventiladores, acondicionadores de aire, tubos fluorescentes y lavadoras) y la mayoría de las cargas industriales operan con un factor de potencia en retardo. El factor de potencia de estas cargas se corrige en ocasiones añadiendo un condensador al propio dispositivo o conectando condensadores entre los dos conductores de la línea que alimenta a la carga. Este último método se utiliza a menudo para cargas de gran tamaño de tipo industrial. Muchos de los problemas del capítulo le darán la oportunidad de realizar algunos cálculos para corregir una carga con factor de potencia en retardo y mejorar la operación del circuito.

El Ejemplo 10.4 utiliza el triángulo de potencia para calcular diversas magnitudes asociadas con una carga eléctrica.

#### EJEMPLO 10.4 Cálculo de la potencia compleja

Una carga eléctrica opera a 240 V rms. La carga absorbe una potencia media de 8 kW con un factor de potencia en retardo de 0,8.

- Calcule la potencia compleja de la carga.
- Calcule la impedancia de la carga.

#### SOLUCIÓN

- El factor de potencia está descrito como en retardo, así que sabemos que la carga es inductiva y que el signo algebraico de la potencia reactiva es positivo. A partir del triángulo de potencia mostrado en la Figura 10.10,

$$P = |S| \cos \theta,$$

$$Q = |S| \sin \theta.$$

Ahora, como  $\cos \theta = 0,8$ ,  $\sin \theta = 0,6$ . Por tanto,

$$|S| = \frac{P}{\cos \theta} = \frac{8 \text{ kW}}{0,8} = 10 \text{ kVA},$$

$$Q = 10 \sin \theta = 6 \text{ kVAR},$$

y

$$S = 8 + j6 \text{ kVA}.$$

- Teniendo en cuenta el cálculo de la potencia compleja de la carga, vemos que  $P = 8$  kW. Utilizando la Ecuación 10.21,

$$P = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos(\theta_v - \theta_i)$$

$$= (240) I_{\text{eff}} (0,8) = 8000 \text{ W}.$$

Si despejamos  $I_{\text{eff}}$ ,

$$I_{\text{eff}} = 41,67 \text{ A.}$$

Ya sabemos el ángulo de la impedancia de carga, ya que es el ángulo del factor de potencia,

$$\theta = \cos^{-1}(0,8) = 36,87^\circ.$$

También sabemos que  $\theta$  es positivo, porque el factor de potencia es de retardo, lo que indica una carga inductiva. Calculamos la magnitud de la impedancia de carga a partir de su definición como cociente entre el módulo de la tensión y el módulo de la corriente:

$$|Z| = \frac{|V_{\text{eff}}|}{|I_{\text{eff}}|} = \frac{240}{41,67} = 5,76.$$

Por tanto,

$$Z = 5,76 \angle 36,87^\circ \Omega = 4,608 + j3,456 \Omega.$$

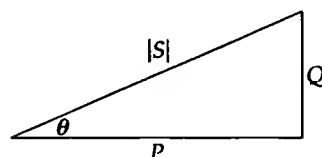


Figura 10.10. Triángulo de potencia.

## 10.5. Cálculos de potencia

Nos encontramos ya en disposición de desarrollar ecuaciones adicionales que pueden usarse para calcular la potencia real, reactiva y compleja. Comenzaremos combinando las Ecuaciones 10.10, 10.11 y 10.23 para obtener

$$\begin{aligned} S &= \frac{V_m I_m}{2} \cos(\theta_v - \theta_i) + j \frac{V_m I_m}{2} \sin(\theta_v - \theta_i) \\ &= \frac{V_m I_m}{2} [\cos(\theta_v - \theta_i) + j \sin(\theta_v - \theta_i)] \\ &= \frac{V_m I_m}{2} e^{j(\theta_v - \theta_i)} = \frac{1}{2} V_m I_m \angle (\theta_v - \theta_i). \end{aligned} \quad (10.27)$$

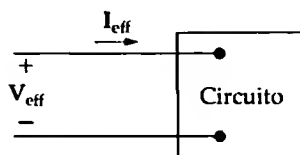
Si utilizamos los valores eficaces de la tensión y la corriente sinusoidales, la Ecuación 10.27 nos queda

$$S = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \angle (\theta_v - \theta_i). \quad (10.28)$$

Las Ecuaciones 10.27 y 10.28 constituyen importantes relaciones en los cálculos de potencia, porque muestran que, si se conocen los fasores de corriente y de tensión en un par de terminales, la potencia compleja asociada con ese par de terminales es igual a la mitad del producto de la tensión por el conjugado de la corriente, o al producto del fasor de tensión rms y del conjugado del fasor de corriente rms. Podemos ver esto para los fasores de tensión y corriente rms de la Figura 10.11 de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} S &= V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \angle (\theta_v - \theta_i) \\ &= V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} e^{j(\theta_v - \theta_i)} \\ &= V_{\text{eff}} e^{j\theta_v} I_{\text{eff}} e^{-j\theta_i} \\ &= V_{\text{eff}} I_{\text{eff}}^* \end{aligned} \quad (10.29)$$

POTENCIA COMPLEJA



**Figura 10.11.** Fasores de tensión y de corriente asociados con un par de terminales.

Observe que  $I_{\text{eff}}^* = I_{\text{eff}} e^{-j\theta_i}$  se sigue de la identidad de Euler y de las identidades trigonométricas  $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$  y  $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$ :

$$\begin{aligned} I_{\text{eff}} e^{-j\theta_i} &= I_{\text{eff}} \cos(-\theta_i) + j I_{\text{eff}} \sin(-\theta_i) \\ &= I_{\text{eff}} \cos(\theta_i) - j I_{\text{eff}} \sin(\theta_i) \\ &= I_{\text{eff}}^*. \end{aligned}$$

La misma técnica de derivación podría aplicarse a la Ecuación 10.27, obteniéndose

$$S = \frac{1}{2} \mathbf{V} \mathbf{I}^*. \quad (10.30)$$

Tanto la Ecuación 10.29 como la 10.30 están basadas en el convenio de signos pasivo. Si la referencia de la corriente es en la dirección del incremento de tensión entre los terminales, basta con insertar un signo menos en el lado derecho de cada una de esas dos ecuaciones.

Para ilustrar el uso de la Ecuación 10.30 en el cálculo de la potencia, vamos a usar el mismo circuito que ya empleamos en el Ejemplo 10.1. Si utilizamos la representación fasorial de la tensión y la corriente en los terminales,

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= 100 \angle 15^\circ \text{ V}, \\ \mathbf{I} &= 4 \angle -105^\circ \text{ A}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} (100 \angle 15^\circ) (4 \angle +105^\circ) = 200 \angle 120^\circ \\ &= -100 + j173.21 \text{ VA}. \end{aligned}$$

Una vez calculada la potencia compleja, podemos obtener las potencias real y reactiva, ya que  $S = P + jQ$ . Por tanto

$$\begin{aligned} P &= -100 \text{ W}, \\ Q &= 173.21 \text{ VAR}. \end{aligned}$$

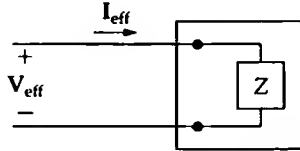
Las interpretaciones de los signos algebraicos de  $P$  y  $Q$  son idénticas a las ya comentadas en la solución del Ejemplo 10.1.

## Formas alternativas de la potencia compleja

Las Ecuaciones 10.29 y 10.30 tienen diversas variaciones útiles. Aquí, vamos a usar la versión de las ecuaciones basada en el valor rms, porque los valores rms son el tipo más común de representación de las tensiones y las corrientes en los cálculos de potencia.

La primera variante de la Ecuación 10.29 se obtiene sustituyendo la tensión por el producto de la corriente y la impedancia. En otras palabras, siempre podremos representar el circuito contenido en la caja de la Figura 10.11 mediante una impedancia equivalente, como se muestra en la Figura 10.12. Si hacemos esto,

$$V_{\text{eff}} = Z I_{\text{eff}}. \quad (10.31)$$



**Figura 10.12.** Circuito general de la Figura 10.11 sustituido por una impedancia equivalente.

Sustituyendo la Ecuación 10.31 en la Ecuación 10.29 se obtiene

$$\begin{aligned} S &= Z I_{\text{eff}} I_{\text{eff}}^* \\ &= |I_{\text{eff}}|^2 Z \\ &= |I_{\text{eff}}|^2 (R + jX) \\ &= |I_{\text{eff}}|^2 R + j |I_{\text{eff}}|^2 X = P + jQ, \end{aligned} \quad (10.32)$$

de donde

$$P = |I_{\text{eff}}|^2 R = \frac{1}{2} I_m^2 R, \quad (10.33)$$

$$Q = |I_{\text{eff}}|^2 X = \frac{1}{2} I_m^2 X. \quad (10.34)$$

En la Ecuación 10.34,  $X$  es la reactancia de la inductancia equivalente o de la capacidad equivalente del circuito. Recuerde que en las explicaciones anteriores relativas a la reactancia vimos que ésta es positiva para los circuitos inductivos y negativa para los circuitos capacitivos.

Una segunda variante útil de la Ecuación 10.29 se obtiene al sustituir la corriente por la tensión dividida por la impedancia:

$$S = V_{\text{eff}} \left( \frac{V_{\text{eff}}}{Z} \right)^* = \frac{|V_{\text{eff}}|^2}{Z^*} = P + jQ. \quad (10.35)$$

Observe que, si  $Z$  es un elemento puramente resistivo,

$$P = \frac{|V_{\text{eff}}|^2}{R}, \quad (10.36)$$

mientras que si  $Z$  es un elemento puramente reactivo,

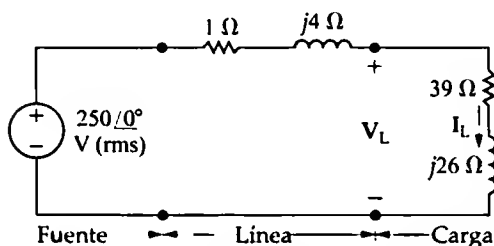
$$Q = \frac{|V_{\text{eff}}|^2}{X}. \quad (10.37)$$

En la Ecuación 10.37,  $X$  es positiva para una bobina y negativa para un condensador.

Los siguientes ejemplos ilustran diversos cálculos de potencia en circuitos que operan en régimen permanente sinusoidal.

**EJEMPLO 10.5** Cálculo de la potencia media y reactiva

En el circuito mostrado en la Figura 10.13, alimentamos una carga con una impedancia igual a  $39 + j26 \Omega$  a través de una línea que tiene una impedancia de  $1 + j4 \Omega$ . El valor eficaz, o rms, de la fuente de tensión es de 250 V.



**Figura 10.13.** Circuito del Ejemplo 10.5.

- Calcule la corriente de carga  $I_L$  y la tensión  $V_L$ .
- Calcule la potencia media y la potencia reactiva suministradas a la carga.
- Calcule la potencia media y la potencia reactiva entregadas a la línea.
- Calcule la potencia media y la potencia reactiva suministradas por la fuente.

**SOLUCIÓN**

- a) Las impedancias de línea y de carga están en serie, por lo que la corriente de carga es igual a la tensión dividida por la impedancia total, es decir:

$$I_L = \frac{250 \angle 0^\circ}{40 + j30} = 4 - j3 = 5 \angle -36,87^\circ \text{ A (rms)}.$$

Puesto que la tensión está dada en forma de valor rms, la corriente es también rms. La tensión de la carga es el producto de la corriente de carga por la impedancia de carga:

$$\begin{aligned} V_L &= (39 + j26)I_L = 234 - j13 \\ &= 234,36 \angle -3,18^\circ \text{ V (rms)} \end{aligned}$$

- b) La potencia media y la potencia reactiva entregadas a la carga pueden calcularse usando la Ecuación 10.29. Si lo hacemos así,

$$\begin{aligned} S &= V_L I_L^* = (234 - j13)(4 + j3) \\ &= 975 + j650 \text{ VA.} \end{aligned}$$

Por tanto, la carga está absorbiendo una potencia media de 975 W y una potencia reactiva de 650 VAR.

- c) La potencia media y la potencia reactiva entregadas a la línea pueden calcularse de la forma más fácil posible utilizando las Ecuaciones 10.33 y 10.34, ya que conocemos la corriente de línea. Si lo hacemos así,

$$P = (5)^2(1) = 25 \text{ W,}$$

$$Q = (5)^2(4) = 100 \text{ VAR.}$$

Observe que la potencia reactiva asociada con la línea es positiva, porque la reactancia de la línea es inductiva.

- d) Una forma de calcular la potencia media y la potencia reactiva suministradas por la fuente consiste en sumar la potencia compleja suministrada a la línea y la potencia compleja suministrada a la carga, es decir:

$$\begin{aligned} S &= 25 + j100 + 975 + j650 \\ &= 1000 + j750 \text{ VA.} \end{aligned}$$

La potencia compleja de la fuente también puede calcularse a partir de la Ecuación 10.29:

$$S_s = -250 I_L^*.$$

El signo menos se inserta en la Ecuación 10.29 siempre que la referencia de la corriente se encuentre en la dirección del incremento de tensión. Así,

$$S_s = -250(4 + j3) = -(1000 + j750) \text{ VA.}$$

El signo menos implica que la fuente está suministrando tanto potencia media como



potencia reactiva magnetizante. Observe que este resultado concuerda con los cálculos previos de  $S$ , como debe ser, por-

que la fuente debe producir toda la potencia media y reactiva absorbidas por la línea y por la carga.

### EJEMPLO 10.6 Cálculo de la potencia con cargas en paralelo

Las dos cargas del circuito mostrado en la Figura 10.14 pueden describirse de la forma siguiente: la carga 1 absorbe una potencia media de 8 kW con un factor de potencia en adelanto igual a 0,8. La carga 2 absorbe 20 kVA con un factor de potencia en retardo igual a 0,6.

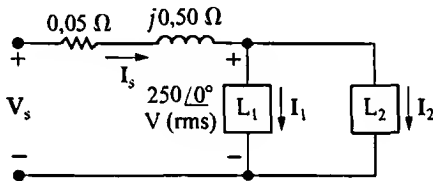


Figura 10.14. Circuito del Ejemplo 10.6.

- Determine el factor de potencia de la combinación en paralelo de las dos cargas.
- Determine la potencia aparente requerida para alimentar las cargas, la magnitud de la corriente,  $I_s$ , y la pérdida de potencia media en la línea de transmisión.
- Sabiendo que la frecuencia de la fuente es de 60 Hz calcule el valor del condensador que permitiría corregir el factor de potencia para obtener un valor 1 colocándolo en paralelo con las dos cargas. Vuelva a calcular los valores del apartado (b) para la carga con el factor de potencia corregido.

### SOLUCIÓN

- Suponemos que todos los fasores de tensión y de corriente en este problema representan valores eficaces. Observe, en el diagrama de circuito de la Figura 10.14, que  $I_s = I_1 + I_2$ . La potencia compleja total absorbida por las dos cargas es

$$S = (250)I_s^*$$

$$\begin{aligned} &= (250)(I_1 + I_2)^* \\ &= (250)I_1^* + (250)I_2^* \\ &= S_1 + S_2. \end{aligned}$$

Podemos sumar geoméricamente las potencias complejas, utilizando los triángulos de potencia para cada carga, como se muestra en la Figura 10.15. Por hipótesis,

$$\begin{aligned} S_1 &= 8000 - j \frac{8000(0,6)}{(0,8)} \\ &= 8000 - j6000 \text{ VA}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2 &= 20.000(0,6) + j20.000(0,8) \\ &= 12.000 + j16.000 \text{ VA}. \end{aligned}$$

De aquí se sigue que

$$S = 20.000 + j10.000 \text{ VA},$$

y también

$$I_s^* = \frac{20.000 + j10.000}{250} = 80 + j40 \text{ A}.$$

Por tanto,

$$I_s = 80 - j40 = 89,4 \angle -26,57^\circ \text{ A}.$$

Así, el factor de potencia de la carga combinada es

$$\begin{aligned} \text{fp} &= \cos(0 + 26,57^\circ) \\ &= 0,8944 \text{ en retardo}. \end{aligned}$$

El factor de potencia de las dos cargas en paralelo es de retardo, porque la potencia reactiva neta es positiva.

- La potencia aparente que debe suministrarse a estas cargas es

$$|S| = |20 + j10| = 22,36 \text{ kVA.}$$

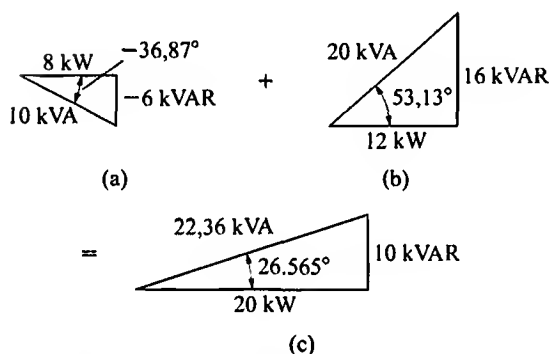
La magnitud de la corriente que suministra esta potencia aparente es

$$|I_s| = |80 - j40| = 89,44 \text{ A.}$$

La potencia media que se pierde en la línea es el resultado del flujo de la corriente a través de la resistencia de la línea:

$$P_{\text{línea}} = |I_s|^2 R = (89,44)^2 (0,05) = 400 \text{ W.}$$

Observe que la potencia suministrada total es  $20.000 + 400 = 20.400 \text{ W}$ , aun cuando las cargas sólo requieren un total de  $20.000 \text{ W}$ .



**Figura 10.15.** (a) Triángulo de potencia para la carga 1. (b) Triángulo de potencia para la carga 2. (c) Suma de los triángulos de potencia.

- c) Como podemos ver en el triángulo de potencia de la Figura 10.15(c), se puede corregir el factor de potencia y hacer que tenga un valor 1 sin más que colocar un condensador en paralelo con las cargas existentes, de modo que el condensador suministre  $10 \text{ kVAR}$  de potencia reactiva magnetizante. El valor del condensador se calcula de la forma siguiente. En primer lugar, hallamos la reactancia capacitiva a partir de la Ecuación 10.37:

$$X = \frac{|V_{\text{eff}}|^2}{Q} = \frac{(250)^2}{-10.000} = -6,25 \Omega.$$

Recuerde que la impedancia reactiva de un condensador es  $-1/\omega C$  y que  $\omega = 2\pi(60) = 376,99 \text{ rad/s}$ , si la frecuencia de la fuente es de  $60 \text{ Hz}$ . Por tanto,

$$C = \frac{-1}{\omega X} = \frac{-1}{(376,99)(-6,25)} = 424,4 \mu\text{F}.$$

La adición del condensador como tercera carga está representada en forma geométrica como la suma de los dos triángulos de potencia que se muestran en la Figura 10.16. Cuando el factor de potencia es 1, la potencia aparente y la potencia media son iguales, como puede verse en el triángulo de potencia de la Figura 10.16(c). Por tanto, la potencia aparente después de corregir el factor de potencia será

$$|S| = P = 20 \text{ kVA.}$$

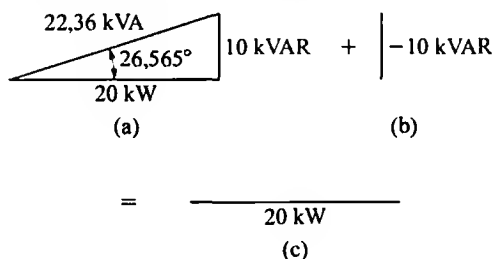
La magnitud de la corriente que suministra esta potencia aparente es

$$|I_s| = \frac{20.000}{250} = 80 \text{ A.}$$

La potencia media perdida en la línea se reduce así a

$$P_{\text{línea}} = |I_s|^2 R = (80)^2 (0,05) = 320 \text{ W.}$$

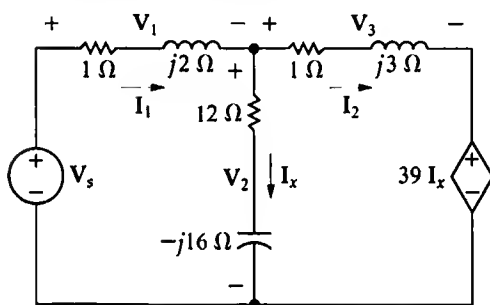
Ahora, la potencia suministrada total es  $20.000 + 320 = 20.320 \text{ W}$ . Observe que la adición del condensador ha reducido las pérdidas de línea de  $400 \text{ W}$  a  $320 \text{ W}$ .



**Figura 10.16.** (a) La suma de los triángulos de potencia para las cargas 1 y 2. (b) El triángulo de potencia para un condensador de  $424,4 \mu\text{F}$  a  $60 \text{ Hz}$ . (c) La suma de los triángulos de potencia de (a) y (b).

### EJEMPLO 10.7 Igualación de la potencia suministrada y la potencia absorbida en un circuito de alterna

- Calcule la potencia media y la potencia reactiva totales suministradas a cada impedancia en el circuito mostrado en la Figura 10.17.
- Calcule la potencia media y la potencia reactiva asociadas con cada fuente del circuito.
- Verifique que la potencia media suministrada es igual a la potencia media absorbida y que la potencia reactiva magnetizante suministrada es igual a la potencia reactiva magnetizante absorbida.



$$V_s = 150 \angle 0^\circ \text{ V}$$

$$V_1 = (78 - j104) \text{ V} \quad I_1 = (-26 - j52) \text{ A}$$

$$V_2 = (72 + j104) \text{ V} \quad I_x = (-2 + j6) \text{ A}$$

$$V_3 = (150 - j130) \text{ V} \quad I_2 = (-24 - j58) \text{ A}$$

Figura 10.17. Circuito del Ejemplo 10.7, con su solución.

Por tanto, esta impedancia está absorbiendo una potencia media de 1600 W y una potencia reactiva de 3380 VAR. La potencia compleja suministrada a la impedancia de  $(12 - j16) \Omega$  es

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{1}{2} V_2 I_x^* = P_2 + jQ_2 \\ &= \frac{1}{2} (72 + j104)(-2 - j6) \\ &= 240 - j320 \text{ VA.} \end{aligned}$$

En consecuencia, la impedancia en la rama vertical está absorbiendo 240 W y suministrando 320 VAR. La potencia compleja suministrada a la impedancia de  $(1 + j3) \Omega$  es

$$\begin{aligned} S_3 &= \frac{1}{2} V_3 I_2^* = P_3 + jQ_3 \\ &= \frac{1}{2} (150 - j130)(-24 + j58) \\ &= 1970 + j5910 \text{ VA.} \end{aligned}$$

Esta impedancia está absorbiendo 1970 W y 5910 VAR.

- La potencia compleja asociada con la fuente de tensión independiente es

$$\begin{aligned} S_s &= -\frac{1}{2} V_s I_1^* = P_s + jQ_s \\ &= -\frac{1}{2} (150)(-26 + j52) \\ &= 1950 - j3900 \text{ VA.} \end{aligned}$$

Observe que la fuente de tensión independiente está absorbiendo una potencia media de 1950 W y suministrando 3900 VAR. La potencia compleja asociada con la fuente de tensión controlada por corriente es

$$S_x = \frac{1}{2} (39 I_x)(I_x^*) = P_x + jQ_x$$

### SOLUCIÓN

- La potencia compleja suministrada a la impedancia de  $(1 + j2) \Omega$  es

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2} V_1 I_1^* = P_1 + jQ_1 \\ &= \frac{1}{2} (78 - j104)(-26 + j52) \\ &= \frac{1}{2} (3380 + j6760) \\ &= 1690 + j3380 \text{ VA.} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}(-78 + j234)(-24 + j58)$$

$$= -5850 - j5070 \text{ VA.}$$

La fuente dependiente está suministrando tanto potencia media como potencia reactiva magnetizante.

- c) La potencia total absorbida por las impedancias pasivas y por la fuente de tensión independiente es

$$P_{\text{absorbida}} = P_1 + P_2 + P_3 + P_s$$

$$= 5850 \text{ W.}$$

La fuente de tensión independiente es el

único elemento del circuito que está suministrando potencia media. Por tanto,

$$P_{\text{suministrada}} = 5850 \text{ W.}$$

Las dos ramas horizontales están absorbiendo potencia reactiva magnetizante. Así,

$$Q_{\text{absorbida}} = Q_1 + Q_3 = 9290 \text{ VAR.}$$

Tanto la fuente de tensión independiente como el condensador en la rama de la impedancia vertical y la fuente de tensión dependiente están suministrando potencia reactiva magnetizante. Por tanto,

$$Q_{\text{suministrada}} = 9290 \text{ VAR.}$$

### Evaluación del objetivo 1

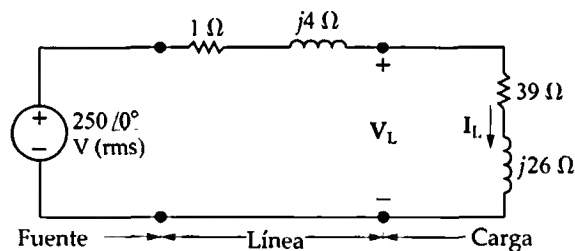
- Comprender los conceptos de potencia alterna, las relaciones existentes entre ellos y el modo de calcular la potencia en un circuito.

- 10.4. Colocamos en paralelo con la impedancia de carga del circuito mostrado un condensador que tiene una reactancia capacitiva de  $-52 \Omega$ . Calcule:

- Los fasores rms  $V_L$  e  $I_L$ .
- La potencia media y la potencia reactiva magnetizante absorbidas por la impedancia de carga de  $(39 + j26) \Omega$ .
- La potencia media y la potencia reactiva magnetizante absorbidas por la impedancia de línea de  $(1 + j4) \Omega$ .
- La potencia media y la potencia reactiva magnetizante suministradas por la fuente.
- La potencia reactiva magnetizante suministrada por el condensador de derivación.

#### RESPUESTA

- (a)  $252,20 \angle -4,54^\circ \text{ V (rms)}$ ,  
 $5,38 \angle -38,23^\circ \text{ A (rms)}$ ;  
 (b)  $1129,09 \text{ W}$ ,  $752,73 \text{ VAR}$ ;



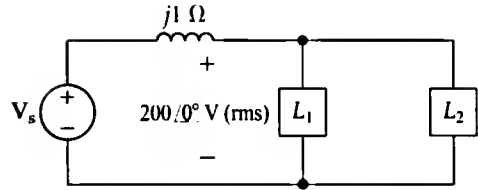
- (c)  $23,52 \text{ W}$ ,  $94,09 \text{ VAR}$ ;  
 (d)  $1152,62 \text{ W}$ ,  $-376,36 \text{ VAR}$ ;  
 (e)  $1223,18 \text{ VAR}$ .

- 10.5. La tensión rms en los terminales de una carga es de  $250 \text{ V}$ . La carga está absorbiendo una potencia media de  $40 \text{ kW}$  y suministrando una potencia reactiva magnetizante de  $30 \text{ kVAR}$ . Construya dos modelos de impedancia equivalente de la carga.

**RESPUESTA**  $1 \Omega$  en serie con  $0,75 \Omega$  de reactancia capacitiva;  $1,5625 \Omega$  en paralelo con  $2,083 \Omega$  de reactancia capacitiva.

- 10.6.** Calcule el fasor de tensión  $V_s$  (rms) en el circuito mostrado si las cargas  $L_1$  y  $L_2$  están absorbiendo 15 kVA con un factor de potencia de 0,6 en retardo y 6 kVA con un factor de potencia de 0,8 en adelanto, respectivamente. Expresé  $V_s$  en forma polar.

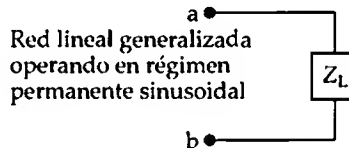
**RESPUESTA**  $251,64 \angle 15,91^\circ \text{ V}$ .



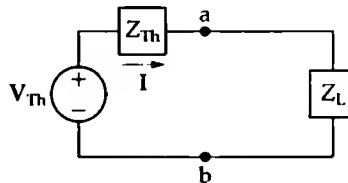
**NOTA** Trate también de resolver los Problemas 10.14, 10.16 y 10.18 del capítulo.

## 10.6. Transferencia máxima de potencia

Recuerde que en el Capítulo 4 vimos que ciertos sistemas (por ejemplo, los que transmiten información mediante señales eléctricas) necesitan ser capaces de transferir una cantidad máxima de potencia desde la fuente hasta la carga. Ahora volvemos a examinar el concepto de transferencia máxima de potencia en el contexto de una red en régimen permanente sinusoidal, comenzando con la Figura 10.18. Debemos determinar la impedancia de carga  $Z_L$  que permite entregar una potencia media máxima a los terminales a y b. Cualquier red lineal puede ser vista desde los terminales de la carga en términos de un circuito equivalente de Thévenin. Por tanto, la tarea se reduce a encontrar el valor de  $Z_L$  que hace que se suministre una potencia media máxima a  $Z_L$  en el circuito mostrado en la Figura 10.19.



**Figura 10.18.** Circuito para describir la transferencia máxima de potencia.



**Figura 10.19.** El circuito mostrado en la Figura 10.18, sustituyendo la red por su equivalente de Thévenin.

Para que la transferencia de potencia media sea máxima,  $Z_L$  debe ser igual al conjugado de la impedancia de Thévenin, es decir,

✎ **CONDICIÓN PARA TRANSFERENCIA MÁXIMA DE POTENCIA MEDIA**

$$Z_L = Z_{Th}^* \quad (10.38)$$

Podemos deducir la Ecuación 10.38 mediante unas simples operaciones de **cálculo elemental**. Comenzamos expresando  $Z_{Th}$  y  $Z_L$  en forma rectangular:

$$Z_{Th} = R_{Th} + jX_{Th} \quad (10.39)$$

$$Z_L = R_L + jX_L. \quad (10.40)$$

Tanto en la Ecuación 10.39 como en la 10.40, el término de la reactancia lleva su propio signo algebraico, positivo para la inductancia y negativo para la capacidad. Puesto que estamos haciendo un cálculo de potencia media, suponemos que la amplitud de la tensión de Thévenin está expresada mediante su valor rms. También usamos la tensión de Thévenin como fasor de referencia. En estas condiciones, a partir de la Figura 10.19, el valor rms de la corriente de carga  $I$  será

$$I = \frac{V_{Th}}{(R_{Th} + R_L) + (X_{Th} + X_L)}. \quad (10.41)$$

La potencia media suministrada a la carga es

$$P = |I|^2 R_L. \quad (10.42)$$

Sustituyendo la Ecuación 10.41 en la Ecuación 10.42 se obtiene

$$P = \frac{|V_{Th}|^2 R_L}{(R_{Th} + R_L)^2 + (X_{Th} + X_L)^2}. \quad (10.43)$$

Cuando trabaje con la Ecuación 10.43, recuerde siempre que  $V_{Th}$ ,  $R_{Th}$  y  $X_{Th}$  son valores fijos, mientras que  $R_L$  y  $X_L$  son variables independientes. Por tanto, para maximizar  $P$ , debemos encontrar los valores de  $R_L$  y  $X_L$  para los que  $\partial P/\partial R_L$  y  $\partial P/\partial X_L$  son ambas cero. Teniendo en cuenta la Ecuación 10.43,

$$\frac{\partial P}{\partial X_L} = \frac{-|V_{Th}|^2 2R_L(X_L + X_{Th})}{[(R_{Th} + R_L)^2 + (X_{Th} + X_L)^2]^2}. \quad (10.44)$$

$$\frac{\partial P}{\partial R_L} = \frac{|V_{Th}|^2 [(R_{Th} + R_L)^2 + (X_L + X_{Th})^2 - 2R_L(R_L + R_{Th})]}{[(R_{Th} + R_L)^2 + (X_{Th} + X_L)^2]^2}. \quad (10.45)$$

Según la Ecuación 10.44,  $\partial P/\partial X_L$  será cero cuando

$$X_L = -X_{Th}. \quad (10.46)$$

Según la Ecuación 10.45,  $\partial P/\partial R_L$  será cero cuando

$$R_L = \sqrt{R_{Th}^2 + (X_L + X_{Th})^2}. \quad (10.47)$$

Observe que, cuando combinamos la Ecuación 10.46 con la Ecuación 10.47, ambas derivadas son cero cuando  $Z_L = Z_{Th}^*$ .

### Máxima potencia media absorbida

La máxima potencia media que puede suministrarse a  $Z_L$  cuando ésta es igual al conjugado de  $Z_{Th}$  se calcula directamente a partir del circuito de la Figura 10.19. Cuando  $Z_L = Z_{Th}^*$ , la corriente rms de carga es  $V_{Th}/2R_L$  y la máxima potencia media suministrada a la carga es

$$P_{\max} = \frac{|V_{Th}|^2 R_L}{4R_L^2} = \frac{1}{4} \frac{|V_{Th}|^2}{R_L}. \quad (10.48)$$

Si la tensión de Thévenin está expresada en términos de su amplitud máxima, y no en función de su amplitud rms, la Ecuación 10.48 queda

$$P_{\max} = \frac{1}{8} \frac{V_m^2}{R_L} \quad (10.49)$$

## Máxima transferencia de potencia cuando $Z$ está restringida

Sólo puede suministrarse una potencia media máxima a  $Z_L$  si ésta puede hacerse igual al conjugado de  $Z_{Th}$ . Existen situaciones donde esto no es posible. En primer lugar,  $R_L$  y  $X_L$  pueden estar restringidas a un rango limitado de valores. En este caso, la condición óptima para  $R_L$  y  $X_L$  consiste en ajustar  $X_L$  lo más próxima posible a  $-X_{Th}$  y luego ajustar  $R_L$  lo más próxima a  $\sqrt{R_{Th}^2 + (X_L + X_{Th})^2}$  que sea posible (véase el Ejemplo 10.9).

Un segundo tipo de restricción se produce cuando se puede variar la magnitud de  $Z_L$ , pero no su ángulo de fase. Con esta restricción, se transfiere la mayor cantidad posible de potencia a la carga cuando la magnitud de  $Z_L$  es igual a la magnitud de  $Z_{Th}$ , es decir, cuando

$$|Z_L| = |Z_{Th}| \quad (10.50)$$

Dejamos como Problema 10.32 para el lector la demostración de la Ecuación 10.50.

Para redes puramente resistivas, la transferencia máxima de potencia se produce cuando la resistencia de carga es igual a la resistencia de Thévenin. Recuerde que ya hemos demostrado este resultado al presentar el concepto de transferencia máxima de potencia en el Capítulo 4.

Los Ejemplos 10.8-10.11 ilustran el problema de obtener una transferencia máxima de potencia en las situaciones que acabamos de describir.

### EJEMPLO 10.8 Determinación de la transferencia máxima de potencia sin restricciones de carga

- Para el circuito mostrado en la Figura 10.20, determine la impedancia  $Z_L$  que permite transferir una potencia media máxima a  $Z_L$ .
- ¿Cuál es la máxima potencia media transferida a la impedancia de carga determinada en el apartado (a)?

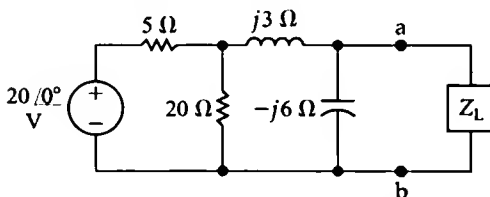


Figura 10.20. Circuito del Ejemplo 10.8.

### SOLUCIÓN

- Comenzamos determinando el equivalente de Thévenin con respecto a los terminales de carga a y b. Después de dos transformaciones de fuente con la fuente de 20 V, la resistencia de 5 Ω y la resistencia de 20 Ω, simplificamos el circuito mostrado en la Figura 10.20 para obtener el que se muestra en la Figura 10.21. En estas condiciones,

$$\begin{aligned} V_{Th} &= \frac{16 \angle 0^\circ}{4 + j3 - j6} (-j6) \\ &= 19,2 \angle -53,13^\circ = 11,52 - j15,36 \text{ V.} \end{aligned}$$

Hallamos la impedancia de Thévenin desactivando la fuente independiente y calcu-

lando la impedancia que se ve al mirar hacia los terminales a y b. Así,

$$Z_{Th} = \frac{(-j6)(4 + j3)}{4 + j3 - j6} = 5,76 - j1,68 \Omega.$$

Para obtener una máxima transferencia de potencia media, la impedancia de carga debe ser el conjugado de  $Z_{Th}$ , por lo que

$$Z_L = 5,76 + j1,68 \Omega.$$

- b) Calculamos la máxima potencia media suministrada a  $Z_L$  a partir del circuito mostrado en la Figura 10.22, donde hemos sustituido la red original por su equivalente de Thévenin. Analizando la Figura 10.22, vemos que la magnitud rms de la corriente de carga  $I$  es

$$I_{eff} = \frac{19,2/\sqrt{2}}{2(5,76)} = 1,1785 \text{ A.}$$

La potencia media suministrada a la carga será

$$P = I_{eff}^2(5,76) = 8 \text{ W.}$$

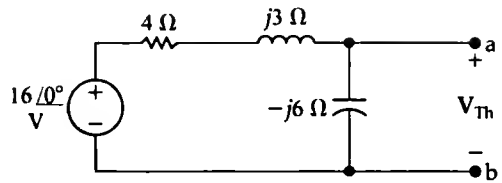


Figura 10.21. Simplificación de la Figura 10.20 mediante transformaciones de fuentes.

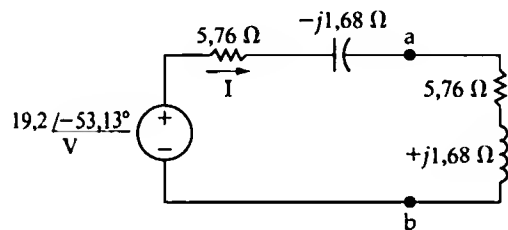


Figura 10.22. El circuito mostrado en la Figura 10.20, habiendo sustituido la red original por su equivalente de Thévenin.

### EJEMPLO 10.9 Determinación de la transferencia máxima de potencia con restricciones de la impedancia de carga

- a) Para el circuito mostrado en la Figura 10.23, ¿qué valor de  $Z_L$  da como resultado una máxima transferencia de potencia media hacia  $Z_L$ ? ¿Cuál es la potencia máxima en miliwatios?
- b) Suponga que puede variarse la resistencia de carga entre 0 y  $4000 \Omega$  y que la reactancia capacitiva de la carga puede variarse entre 0 y  $-2000 \Omega$ . ¿Qué valores de  $R_L$  y  $X_L$  permiten transferir la mayor cantidad de potencia media hacia la carga? ¿Cuál es la máxima potencia media que puede transferirse con estas restricciones?

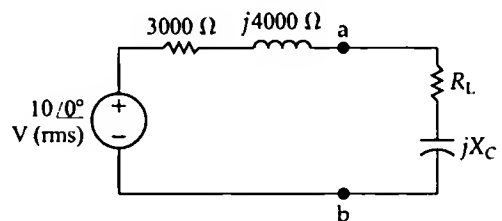


Figura 10.23. Circuito de los Ejemplos 10.9 y 10.10.

carga debe ser igual al conjugado de la impedancia de Thévenin. Por tanto, hacemos

$$R_L = 3000 \Omega \text{ y } X_L = -4000 \Omega,$$

lo que es equivalente a

$$Z_L = 3000 - j4000 \Omega.$$

### SOLUCIÓN

- a) Si no hay restricciones en lo que respecta a los valores de  $R_L$  y  $X_L$ , la impedancia de



Puesto que la tensión de la fuente está dada en forma de valor rms, la potencia media suministrada a  $Z_L$  será

$$P = \frac{1}{4} \frac{10^2}{3000} = \frac{25}{3} \text{ mW} = 8,33 \text{ mW}.$$

- b) Puesto que  $R_L$  y  $X_L$  están restringidas, primero hacemos  $X_L$  lo más próxima a  $-4000 \Omega$  que sea posible; por tanto,  $X_L = -2000 \Omega$ . A continuación, asignamos a  $R_L$  un valor lo más próximo a  $\sqrt{R_{Th}^2 + (X_L + X_{Th})^2}$  que sea posible. En estas condiciones,

$$R = \sqrt{3000^2 + (-2000 + 4000)^2} = 3605,55 \Omega.$$

Ahora, puesto que podemos variar  $R_L$  entre 0 y  $4000 \Omega$ , asignamos a  $R_L$  el valor de  $3605,55 \Omega$ . Por tanto, la impedancia de carga deberá ajustarse con el valor

$$Z_L = 3605,55 - j2000 \Omega.$$

Si asignamos a  $Z_L$  este valor, el valor de la corriente de carga será

$$I_{eff} = \frac{10 \angle 0^\circ}{6605,55 + j2000} = 1,4489 \angle -16,85^\circ \text{ mA}.$$

La potencia media suministrada a la carga es

$$P = (1,4489 \times 10^{-3})^2 (3605,55) = 7,57 \text{ mW}.$$

Este valor es la potencia máxima que podemos suministrar a la carga teniendo en cuenta las restricciones relativas a  $R_L$  y  $X_L$ . Observe que esta potencia es inferior a la que podría suministrarse si no hubiera restricciones; en el apartado (a) hemos visto que podían llegar a suministrarse  $8,33 \text{ mW}$ .

### EJEMPLO 10.10 Cálculo de la transferencia máxima de potencia con restricciones relativas al ángulo de impedancia

Conectamos una impedancia de carga con un ángulo de fase constante de  $-36,87^\circ$  a los terminales a y b del circuito de la Figura 10.23. Variamos la magnitud de  $Z_L$  hasta que la potencia media suministrada sea la máxima posible, teniendo presente la restricción mencionada.

- a) Calcule el valor de  $Z_L$  en forma rectangular.  
b) Calcule la potencia media suministrada a  $Z_L$ .

#### SOLUCIÓN

- a) Aplicando la Ecuación 10.50, sabemos que la magnitud de  $Z_L$  es igual a la magnitud de  $Z_{Th}$ . Por tanto,

$$|Z_L| = |Z_{Th}| = |3000 + j4000| = 5000 \Omega$$

Ahora, como el ángulo de fase de  $Z_L$  es  $-36,87^\circ$ , tendremos

$$Z_L = 5000 \angle -36,87^\circ = 4000 - j3000 \Omega.$$

- b) Siendo  $Z_L$  igual a  $4000 - j3000 \Omega$ , la corriente de carga será

$$I_{eff} = \frac{10}{7000 + j1000} = 1,4142 \angle -8,13^\circ \text{ mA},$$

y la potencia media suministrada a la carga tendrá el valor

$$P = (1,4142 \times 10^{-3})^2 (4000) = 8 \text{ mW}.$$

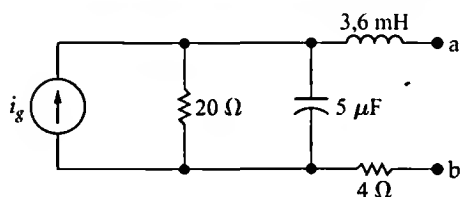
Este valor es la máxima potencia que puede suministrarse mediante este circuito a una impedancia de carga cuyo ángulo tenga un valor constante de  $-36,87^\circ$ . De nuevo, recalquemos que este valor es inferior a la máxima potencia que podría suministrarse a  $Z_L$  si no hubiera ningún tipo de restricción.

## Evaluación del objetivo 2

- Comprender las condiciones para el suministro de máxima potencia real a una carga en un circuito de alterna.

10.7. La corriente de la fuente en el circuito mostrado es  $3 \cos 5000t$  A.

- ¿Qué impedancia habrá que conectar entre los terminales a y b para obtener una transferencia máxima de potencia media?
- ¿Cuál es la potencia media transferida para la impedancia calculada en el apartado (a)?
- Suponga que se restringe la carga, de modo que sólo puede emplearse una resistencia pura. ¿Qué tamaño de resistencia conectada entre a y b permitirá transferir una cantidad máxima de potencia media?



- ¿Cuál es la potencia media transferida a la resistencia calculada en el apartado (c)?

## RESPUESTA

- (a)  $20 - j10 \Omega$ ; (b) 18 W;  
(c) 22,36  $\Omega$ ; (d) 17,00 W.

**NOTA** Trate también de resolver los Problemas 10.33, 10.38 y 10.39 del capítulo.

### EJEMPLO 10.11 Cálculo de la transferencia máxima de potencia en un circuito con un transformador ideal

Ajustamos la resistencia variable del circuito de la Figura 10.24 hasta entregar una cantidad máxima de potencia media a  $R_L$ .

- ¿Cuál es el valor de  $R_L$  en ohmios?
- ¿Cuál es la máxima potencia media (en vatios) suministrada a  $R_L$ ?

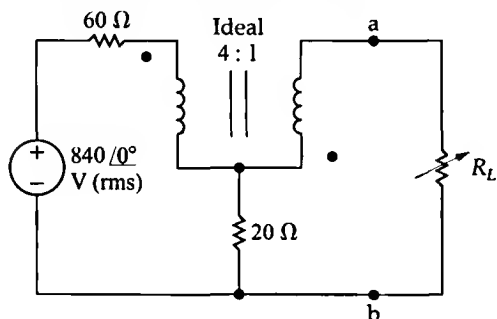


Figura 10.24. Circuito del Ejemplo 10.11.

## SOLUCIÓN

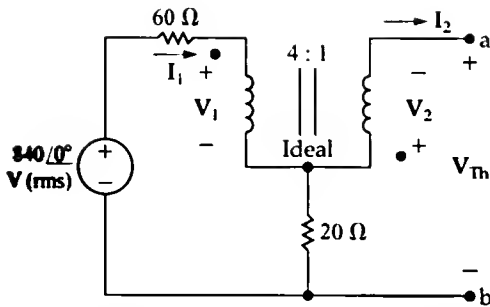
- Primero hallamos el equivalente de Thévenin con respecto a los terminales de  $R_L$ . El circuito para determinar la tensión en circuito abierto se muestra en la Figura 10.25. Las variables  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $I_1$  e  $I_2$  se han añadido para facilitar las explicaciones.

En primer lugar, observemos que el transformador ideal impone las siguientes restricciones a las variables  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $I_1$  e  $I_2$ :

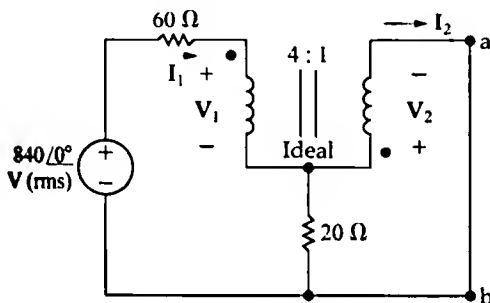
$$V_2 = \frac{1}{4} V_1, \quad I_1 = -\frac{1}{4} I_2.$$

El valor de circuito abierto de  $I_2$  es cero, por lo que  $I_1$  es cero. De aquí se sigue que

$$V_1 = 840 \angle 0^\circ \text{ V}, \quad V_2 = 210 \angle 0^\circ \text{ V}.$$



**Figura 10.25.** Circuito utilizado para hallar la tensión de Thévenin.



**Figura 10.26.** Circuito utilizado para calcular la corriente de cortocircuito.

En la Figura 10.25 observamos que  $V_{Th}$  es el negado de  $V_2$ , por lo que

$$V_{Th} = -210 \angle 0^\circ \text{ V.}$$

El circuito mostrado en la Figura 10.26 se utiliza para determinar la corriente de cortocircuito. Considerando  $I_1$  e  $I_2$  como corrientes de malla, las dos ecuaciones de las mallas serán

$$840 \angle 0^\circ = 80I_1 - 20I_2 + V_1,$$

$$0 = 20I_2 - 20I_1 + V_2.$$

Cuando combinamos estas dos ecuaciones de las corrientes de malla con las ecuaciones de restricción, obtenemos

$$840 \angle 0^\circ = -40I_2 + V_1,$$

$$0 = 25I_2 + \frac{V_1}{4}.$$

Resolviendo el sistema para hallar el valor de cortocircuito de  $I_2$ , nos queda

$$I_2 = -6 \text{ A.}$$

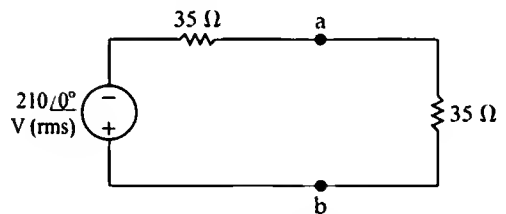
Por tanto, la resistencia de Thévenin es

$$R_{Th} = \frac{-210}{-6} = 35 \Omega.$$

Se suministrará una potencia máxima a  $R_L$  cuando ésta tenga un valor igual a  $35 \Omega$ .

- b) La manera más fácil de determinar la potencia máxima suministrada a  $R_L$  consiste en utilizar el equivalente de Thévenin. Analizando el circuito mostrado en la Figura 10.27, vemos que

$$P_{max} = \left( \frac{-210}{70} \right)^2 (35) = 315 \text{ W.}$$

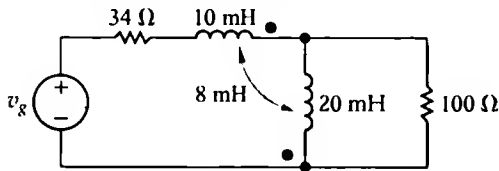


**Figura 10.27.** El equivalente de Thévenin cargado para transferencia máxima de potencia.

### Evaluación del objetivo 3

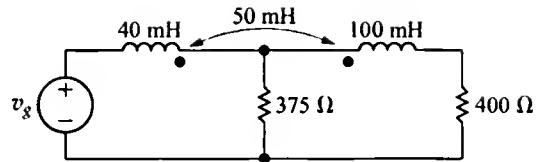
- Ser capaz de calcular todas las formas de potencia en circuitos de alterna con transformadores lineales y con transformadores ideales.

- 10.8. Calcule la potencia media suministrada a la resistencia de  $100\ \Omega$  en el circuito mostrado si  $v_g = 660 \cos 5000t\ \text{V}$ .



**RESPUESTA** 612,5 W.

- 10.9. a) Calcule la potencia media suministrada a la resistencia de  $400\ \Omega$  en el circuito mostrado si  $v_g = 248 \cos 10.000t\ \text{V}$ .  
 b) Calcule la potencia media suministrada a la resistencia de  $375\ \Omega$ .  
 c) Calcule la potencia generada por la fuente de tensión ideal. Verifique el resultado demostrando que la potencia absorbida es igual a la potencia generada.



**RESPUESTA**

- (a) 50 W; (b) 49,2 W;  
 (c) 99,2 W;  $50 + 49,2 = 99,2\ \text{W}$ .

- 10.10. Resuelva el Ejemplo 10.11 si la marca de polaridad de la bobina conectada al terminal a se encuentra en la parte superior.

**RESPUESTA** (a) 15  $\Omega$ ; (b) 735 W.

- 10.11. Resuelva el Ejemplo 10.10 si reducimos la fuente de tensión a  $146\angle 0^\circ\ \text{V rms}$  e invertimos la relación de vueltas para obtener 1:4.

**RESPUESTA** (a) 1460  $\Omega$ ; (b) 58,4 W.

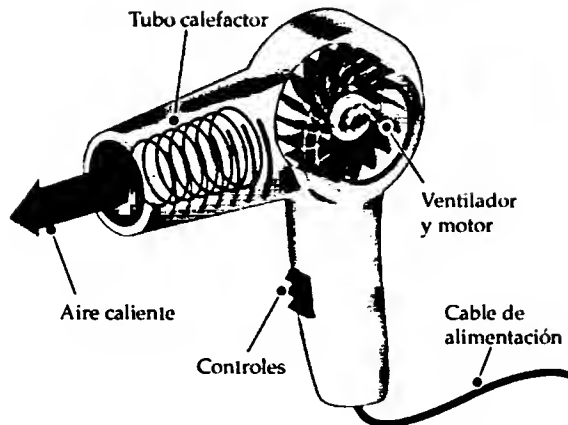
**NOTA** Trate también de resolver los Problemas 10.43, 10.44 y 10.55-10.57 del capítulo.

## Perspectiva práctica

### Calefactores

Un secador de mano contiene un elemento calefactor, que es simplemente una resistencia que se calienta por la corriente sinusoidal que la atraviesa, y un ventilador que expulsa por la parte frontal de la unidad el aire caliente que rodea la resistencia. Esto se muestra esquemáticamente en la Figura 10.28. El tubo calefactor en esta figura es una resistencia hecha de hilo de nicromo arrollado. El nicromo es una aleación de hierro, cromo y níquel. Dos propiedades de este material lo hacen ideal para su utilización en calefactores. En primer lugar, tiene una resistencia eléctrica mayor que la mayoría de los demás metales, por lo que hace falta menos cantidad de material para conseguir la resistencia necesaria; esto permite que el calefactor sea muy compacto. En segundo lugar, a diferencia de muchos otros metales, el nicromo no se oxida cuando se lo calienta al rojo en presencia de aire, por lo que el elemento calefactor tiene un largo tiempo de vida.

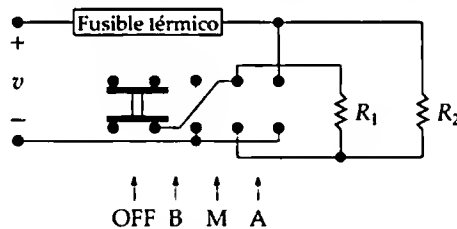
En la Figura 10.29 se muestra un diagrama de circuito de los controles del secador de pelo. Ésta es la única parte del circuito del secador que nos permite controlar el grado de calefacción. El resto del circuito proporciona potencia al motor del ventilador y no nos interesa aquí. El cable arrollado que forma el tubo calefactor tiene una toma en mitad del devanado, lo que divide éste en dos partes. Hemos modelado este hecho en la citada figura mediante dos resistencias en serie,  $R_1$  y  $R_2$ . Los controles para encender el secador y seleccionar el grado de calefacción utilizan un conmutador de cuatro posiciones en el que dos parejas de terminales del circuito se pueden cortocircuitar mediante un par de barras metá-



**Figura 10.28.** Representación esquemática de un secador de pelo.

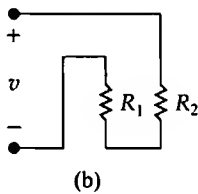
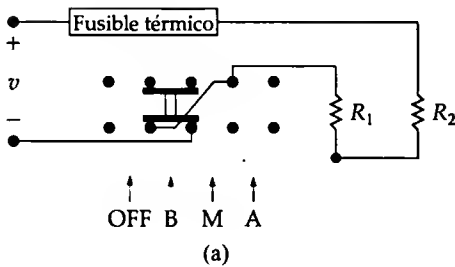
licas deslizantes. La posición del conmutador determina qué pareja de terminales se cortocircuita. Las barras metálicas están conectadas mediante un aislante, por lo que no hay ningún camino de conducción entre las parejas de terminales cortocircuitados.

El circuito de la Figura 10.29 contiene un fusible térmico. Se trata de un dispositivo protector que actúa normalmente como un cortocircuito. Sin embargo, si la temperatura cerca del calefactor se vuelve peligrosamente alta, el fusible térmico pasa a ser un circuito abierto, interrumpiendo el flujo de corriente y reduciendo el riesgo de fuego o de daños personales. El fusible térmico proporciona protección para el caso de que falle el motor o de que la salida de aire quede bloqueada. Aunque el diseño del sistema protector no es parte de este ejemplo, sí es importante resaltar que el análisis de la seguridad personal constituye una parte esencial del trabajo de un ingeniero eléctrico.

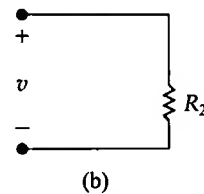
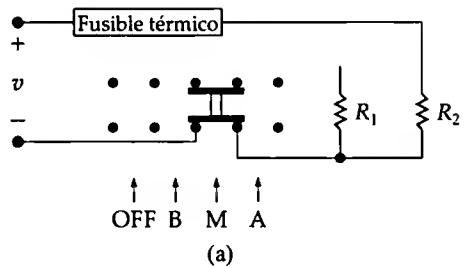


**Figura 10.29.** Diagrama de circuito para los controles del secador de pelo.

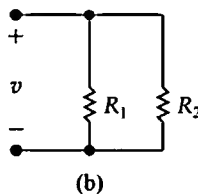
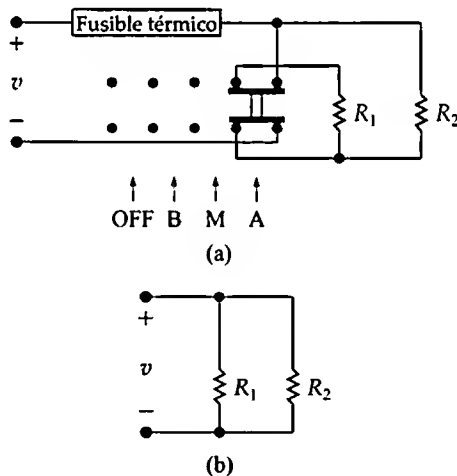
Ahora que hemos modelado los controles del secador de pelo, vamos a determinar los componentes del circuito que están presentes para las tres posiciones del conmutador. Para empezar, hemos redibujado el circuito de la Figura 10.29 en la Figura 10.30(a) para el caso de la posición BAJA del conmutador. Hemos eliminado los cables que quedan en circuito abierto para hacer más claro el diagrama. En la Figura 10.30(b) se muestra un circuito equivalente simplificado. La Figura 10.31 es similar, pero para la posición MEDIA, mientras que la Figura 10.32 muestra el circuito para la posición ALTA. Observe, en estas figuras, que en la posición BAJA, la fuente de tensión ve las resistencias  $R_1$  y  $R_2$  en serie; en la posición MEDIA, la fuente de tensión sólo ve la resistencia  $R_2$ ; y en la posición ALTA, la fuente de tensión ve las resistencias en paralelo.



**Figura 10.30.** (a) El circuito de la Figura 10.29, redibujado para la posición BAJA del conmutador.  
(b) Un circuito equivalente simplificado para el circuito del apartado (a).



**Figura 10.31.** (a) El circuito de la Figura 10.29, redibujado para la posición MEDIA del conmutador.  
(b) Un circuito equivalente simplificado para el circuito del apartado (a).



**Figura 10.32.** (a) El circuito de la Figura 10.29, redibujado para la posición ALTA del conmutador.  
(b) Un circuito equivalente simplificado para el circuito del apartado (a).

**NOTA** Evalúe su comprensión de esta Perspectiva práctica tratando de resolver los Problemas 10.66-10.68 del capítulo.

## RESUMEN

■ La **potencia instantánea** es el producto de la tensión y la corriente instantáneas en los terminales, es decir,  $p = \pm vi$ . El signo

positivo se utiliza cuando la dirección de referencia de la corriente va de la referencia de polaridad positiva de la tensión a la

negativa. La frecuencia de la potencia instantánea es el doble de la frecuencia de la tensión (o corriente).

(Véase la página 472).

- La **potencia media** es el valor medio de la potencia instantánea a lo largo de un período. Esta es la potencia convertida de forma eléctrica a forma no eléctrica y viceversa. Esta conversión es la razón de que la potencia media se denomine también potencia real. La potencia media, con el convenio de signos pasivo, se expresa como

$$P = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i)$$

$$= V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos(\theta_v - \theta_i).$$

(Véase la página 474).

- La **potencia reactiva** es la potencia eléctrica intercambiada entre el cambio magnético de una bobina y la fuente que la excita o entre el campo eléctrico de un condensador y la fuente que lo excita. La potencia reactiva nunca se convierte a potencia no eléctrica. La potencia reactiva, con el convenio de signos pasivo, se expresa como

$$Q = \frac{1}{2} V_m I_m \sin(\theta_v - \theta_i)$$

$$= V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \sin(\theta_v - \theta_i).$$

- Tanto la potencia media como la reactiva pueden expresarse en términos de la corriente y la tensión de pico ( $V_m$ ,  $I_m$ ) o eficaces ( $V_{\text{eff}}$ ,  $I_{\text{eff}}$ ). Los valores eficaces se utilizan ampliamente tanto en aplicaciones industriales como de consumo. Los términos *valor eficaz* y *valor rms* son sinónimos.

(Véase la página 474).

- El **factor de potencia** es el coseno del ángulo de fase entre la tensión y la corriente:

$$\text{fp} = \cos(\theta_v - \theta_i).$$

Los términos *en retardo* y *en adelanto*, añadidos a la descripción del factor de potencia, indican si la corriente está retardada o adelantada con respecto a la tensión y, por tanto, si la carga es inductiva o capacitiva.

(Véase la página 477).

- El **factor reactivo** es el seno del ángulo de fase entre la tensión y la corriente:

$$\text{fr} = \sin(\theta_v - \theta_i).$$

(Véase la página 477).

- La **potencia compleja** es la suma compleja de las potencias real y reactiva, es decir,

$$S = P + jQ$$

$$= \frac{1}{2} \mathbf{VI}^* = \mathbf{V}_{\text{eff}} \mathbf{I}_{\text{eff}}^*$$

$$= I_{\text{eff}}^2 Z = \frac{V_{\text{eff}}^2}{Z^*}.$$

(Véase la página 483).

- La **potencia aparente** es la magnitud de la potencia compleja:

$$|S| = \sqrt{P^2 + Q^2}.$$

(Véase la página 484).

- El **vatio** se utiliza como unidad tanto para la potencia instantánea como para la real. El **var** (voltio-amperio reactivo o VAR) se utiliza como unidad para la potencia reactiva. La unidad para la potencia compleja y la potencia aparente es el **voltio-amperio** (VA) (véase la página 483).

- La **máxima transferencia de potencia** en circuitos que operen en régimen permanente sinusoidal se produce cuando la impedancia de carga es el conjugado de la impedancia de Thévenin vista desde los terminales de la impedancia de carga (véase la página 493).

## PROBLEMAS

- 10.1.** Los siguientes conjuntos de valores de  $v$  e  $i$  corresponden al circuito mostrado en la Figura 10.1. Para cada conjunto de valores, calcule  $P$  y  $Q$  e indique si el circuito contenido en la caja está absorbiendo o entregando (1) potencia media y (2) vars magnetizantes.
- $v = 100 \cos(\omega t + 50^\circ)$  V,  $i = 10 \cos(\omega t + 15^\circ)$  A.
  - $v = 40 \cos(\omega t - 15^\circ)$  V,  $i = 20 \cos(\omega t + 60^\circ)$  A.
  - $v = 400 \cos(\omega t + 30^\circ)$  V,  $i = 10 \sin(\omega t + 240^\circ)$  A.
  - $v = 200 \sin(\omega t + 250^\circ)$  V,  $i = 5 \cos(\omega t + 40^\circ)$  A.
- 10.2.** Demuestre que el valor máximo de la potencia instantánea dada por la Ecuación 10.9 es  $P + \sqrt{P^2 + Q^2}$  y que el valor mínimo es  $P - \sqrt{P^2 + Q^2}$ .
- 10.3.** a) Un estudiante universitario está secándose el pelo con un secador mientras tiene encendida la lámpara de bronceado y está mirando un partido de baloncesto en una televisión en color con tubo de rayos catódicos. Al mismo tiempo, su compañero de habitación está limpiando la alfombra con la aspiradora mientras tiene encendido el aire acondicionado. Si todos estos aparatos están alimentados mediante un circuito de 120 V protegido por un disyuntor de 15 A, ¿interrumpirá el disyuntor la corriente?
- b) ¿Podrá el estudiante ver la televisión si apaga la lámpara de bronceado y si su compañero de habitación apaga la aspiradora?
- 10.4.** a) Una computadora personal con monitor y teclado consume 40 W a 115 V (rms). Calcule el valor rms de la corriente que transporta el cable de alimentación.
- b) Una impresora láser para la computadora personal del apartado (a) tiene un consumo nominal de 90 W a 115 V (rms). Si conectamos la impresora a la misma toma que la computadora, ¿cuál es el valor rms de la corriente extraída de la toma?
- 10.5.** Aplicamos una tensión continua de  $V_{cc}$  V a una resistencia de  $R \Omega$ . Aplicamos asimismo una tensión sinusoidal de  $v_s$  V a una resistencia de  $R \Omega$ . Demuestre que la tensión continua suministrará la misma cantidad de energía en  $T$  segundos (donde  $T$  es el período de la tensión sinusoidal) que la tensión sinusoidal, siempre que  $V_{cc}$  sea igual al valor rms de  $v_s$ . (*Sugerencia:* iguale las dos expresiones correspondientes a la energía suministrada a la resistencia).
- 10.6.** a) Calcule el valor rms de la tensión periódica mostrada en la Figura P10.6.
- b) Si aplicamos esta tensión a los terminales de una resistencia de  $2,25 \Omega$ , ¿cuál será la potencia media disipada en la resistencia?
- 10.7.** Calcule el valor rms de la corriente periódica mostrada en la Figura P10.7.
- 10.8.** La corriente mostrada en la Figura P10.7 disipa una potencia media de 3 kW en una resistencia. ¿Cuál es el valor de dicha resistencia?
- 10.9.** Calcule la potencia media, la potencia reactiva y la potencia aparente absorbidas por la carga del circuito de la Figura P10.9 si  $i_g$  es igual a  $40 \cos 1250t$  mA.
- ☐
- 10.10.** Calcule la potencia media suministrada por la fuente de corriente ideal del circuito de la Figura P10.10 si  $i_g = 4 \cos 5000t$  mA.
- ☐



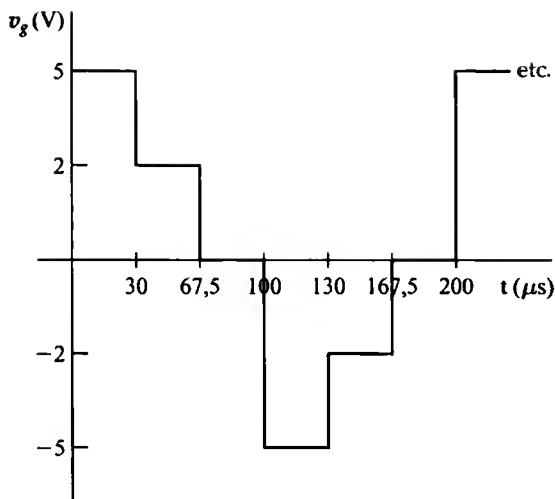


Figura P10.6

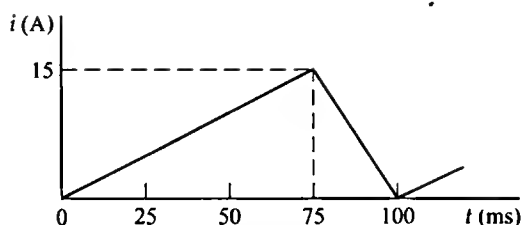


Figura P10.7

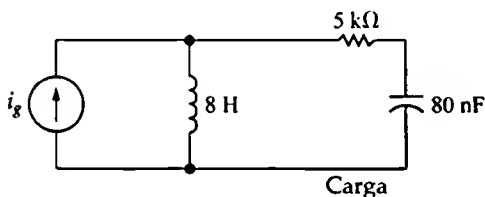


Figura P10.9

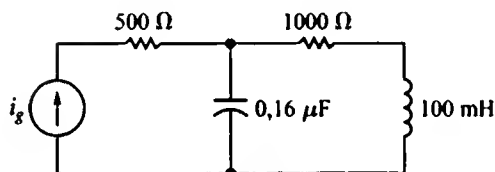


Figura P10.10

**10.11** Calcule la potencia media disipada en la resistencia de  $40 \Omega$  del circuito de la Figura P10.11 si  $i_g = 4 \cos 10^5 t$  A.

**10.12.** La impedancia de carga de la Figura P10.12 absorbe 2500 W y genera 5000 vars magnetizantes. La fuente de tensión sinusoidal genera 7500 W.

- Calcule los valores de la reactancia inductiva de línea que satisfacen estas restricciones.
- Para cada valor de reactancia de línea hallado en el apartado (a), demuestre que los vars magnetizantes generados son iguales a los vars magnetizantes absorbidos.

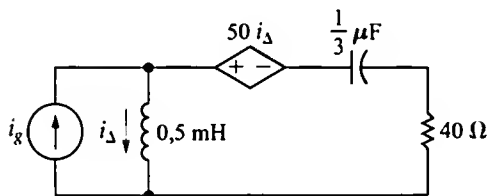


Figura P10.11

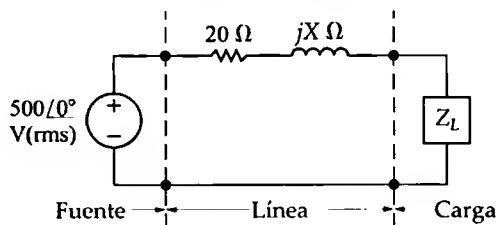


Figura P10.12

**10.13.** El amplificador operacional del circuito mostrado en la Figura P10.13 es ideal. Calcule la potencia media suministrada a la resistencia de  $1000 \Omega$  cuando  $v_g = \cos 1000t$  V.

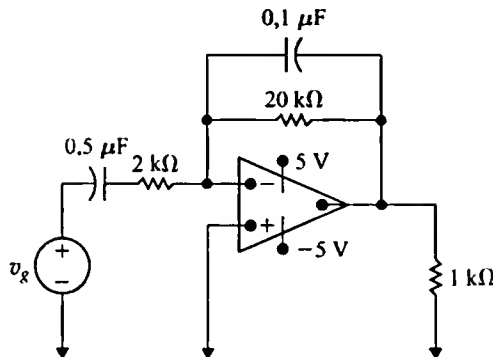


Figura 10.13

10.14. Una carga compuesta por una resistencia de  $480 \, \Omega$  en paralelo con un condensador de  $5/9 \, \mu\text{F}$  se conecta a los terminales de una fuente de tensión sinusoidal  $v_g$ , siendo  $v_g = 240 \cos 5000t \, \text{V}$ .

- ¿Cuál es el valor de pico de la potencia instantánea entregada por la fuente?
- ¿Cuál es el valor de pico de la potencia instantánea absorbida por la fuente?
- ¿Cuál es la potencia media suministrada a la carga?
- ¿Cuál es la potencia reactiva suministrada a la carga?
- ¿Está la carga absorbiendo o generando vars magnetizantes?
- ¿Cuál es el factor de potencia de la carga?
- ¿Cuál es el factor reactivo de la carga?

10.15. La tensión  $V_g$  en el circuito en el dominio de la frecuencia mostrado en la Figura P10.15 es  $170 \angle 0^\circ \, \text{V (rms)}$ .

- Determine la potencia media y la potencia reactiva en los terminales de la fuente de tensión.
- ¿Está la fuente de tensión absorbiendo o suministrando potencia media?
- ¿Está la fuente de tensión absorbiendo o suministrando vars magnetizantes?
- Determine la potencia media y la potencia reactiva asociadas con cada rama de impedancia del circuito.
- Verifique la igualdad entre la potencia media suministrada y la absorbida.
- Verifique la igualdad entre los vars magnetizantes suministrados y los absorbidos.

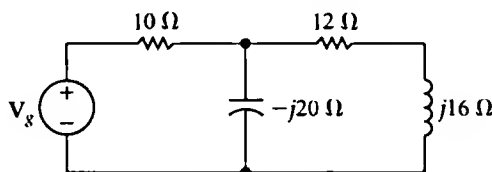


Figura 10.15

- 10.16. a) Calcule la potencia media, la potencia reactiva y la potencia aparente suministradas por la fuente de tensión del circuito de la Figura P10.16 si  $v_g = 10 \cos 10^6 t \, \text{V}$ .
- ☐ b) Compruebe su respuesta al apartado (a) demostrando que  $P_{\text{gen}} = \Sigma P_{\text{abs}}$ .
- c) Compruebe su respuesta al apartado (a) demostrando que  $Q_{\text{gen}} = \Sigma Q_{\text{abs}}$ .

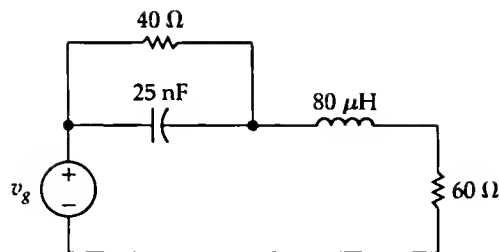


Figura P10.16

10.17. Las tres cargas del circuito de la Figura P10.17 pueden describirse de la forma siguiente: la carga 1 es una resistencia de  $240\ \Omega$  en serie con una reactancia inductiva de  $70\ \Omega$ ; la carga 2 es una reactancia capacitiva de  $120\ \Omega$  en serie con una resistencia de  $160\ \Omega$ ; la carga 3 es una resistencia de  $30\ \Omega$  en serie con una reactancia capacitiva de  $40\ \Omega$ . La frecuencia de la fuente de tensión es de  $60\ \text{Hz}$ .

- Calcule el factor de potencia y el factor reactivo de cada carga.
- Calcule el factor de potencia y el factor reactivo de la carga compuesta vista por la fuente de tensión.

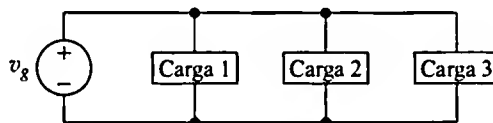


Figura P10.17

10.18. Tres cargas están conectadas en paralelo a una línea de  $250\ \text{V (rms)}$ , como se muestra en la Figura P10.18. La carga 1 absorbe  $16\ \text{kW}$  y  $18\ \text{kVAR}$ . La carga 2 absorbe  $10\ \text{kVA}$  con un factor de potencia de  $0,6$  en adelante. La carga 3 absorbe  $8\ \text{kW}$  con un factor de potencia igual a la unidad.

- Calcule la impedancia equivalente a las tres cargas en paralelo.
- Calcule el factor de potencia de la carga equivalente vista desde los terminales de entrada de la línea.

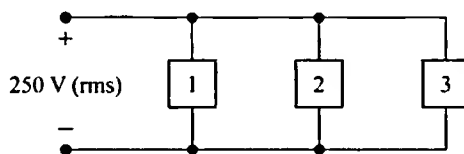


Figura P10.18

10.19. Alimentamos las tres cargas de la Figura 10.19 mediante una línea que tiene una impedancia serie  $0,01 + j0,08\ \Omega$ , como se muestra en la Figura P10.19.

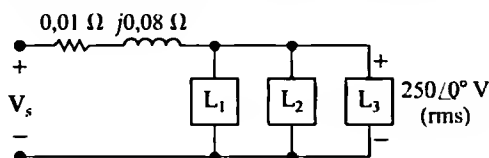


Figura P10.19

- Calcule el valor rms de la tensión ( $V_s$ ) en el otro extremo de la línea.
- Calcule las potencias media y reactiva asociadas con la impedancia de línea.
- Calcule las potencias media y reactiva en el otro extremo de la línea.

d) Calcule la eficiencia ( $\eta$ ) de la línea si la eficiencia se define como

$$\eta = (P_{\text{carga}}/P_{\text{fuente}}) \times 100.$$

- 10.20. Conectamos en paralelo dos cargas de 125 V (rms). Las dos cargas consumen una potencia media total de 4500 W con un factor de potencia de 0,96 en adelante. Una de las cargas consume 2700 W con un factor de potencia de 0,8 en retardo. ¿Cuál es el factor de potencia de la otra carga?
- 10.21. Las tres cargas en paralelo del circuito mostrado en la Figura P10.21 pueden describirse como sigue: la carga 1 está absorbiendo una potencia media de 60 kW y 40 kVAR de vars magnetizantes; la carga 2 está absorbiendo una potencia de 20 kW y generando 10 kVAR de potencia reactiva magnetizante; la carga 3 consta de una resistencia de  $144 \Omega$  en paralelo con una reactancia inductiva de  $96 \Omega$ . Calcule la magnitud rms y el ángulo de fase de  $V_x$  si  $V_o = 2400 \angle 0^\circ$  V (rms).

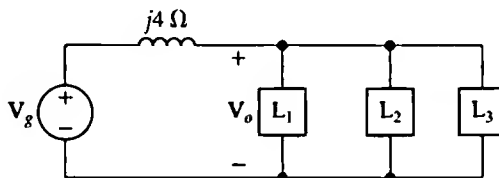


Figura P10.21

- 10.22. Las dos cargas mostradas en la Figura P10.22 pueden describirse como sigue: la carga 1 absorbe una potencia media de 60 kW y suministra 70 kVAR de potencia reactiva magnetizante; la carga 2 tiene una impedancia de  $24 + j7 \Omega$ . La tensión en los terminales de las cargas es  $2500\sqrt{2} \cos 120\pi t$  V.
- a) Calcule el valor rms de la tensión de la fuente.
- b) ¿Cuántos microsegundos está desfasada la tensión de la carga con respecto a la tensión de la fuente?
- c) ¿Está adelantada o retrasada la tensión de la carga con respecto a la tensión de la fuente?

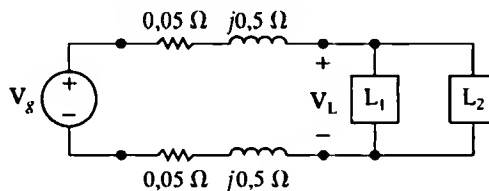


Figura P10.22

- 10.23. a) Calcule las potencias real y reactiva asociadas con cada elemento de circuito de la Figura P9.56.
- b) Compruebe que la potencia media generada es igual a la potencia media absorbida.
- c) Compruebe que los vars magnetizantes generados son iguales a los vars magnetizantes absorbidos.
- 10.24. Repita el Problema 10.23 para el circuito mostrado en la Figura P9.58.
- 10.25. a) Calcule la potencia media disipada en la línea en la Figura P10.25.
- b) Calcule la reactancia capacitiva que, al ser conectada en paralelo con la carga, hará que ésta parezca puramente resistiva.

- c) ¿Cuál es la impedancia equivalente de la carga del apartado (b)?
- d) Calcule la potencia media disipada en la línea cuando la reactancia capacitiva está conectada en paralelo con la carga.
- e) Indique las pérdidas de potencia del apartado (d) como porcentaje de las pérdidas de potencia halladas en el apartado (a).

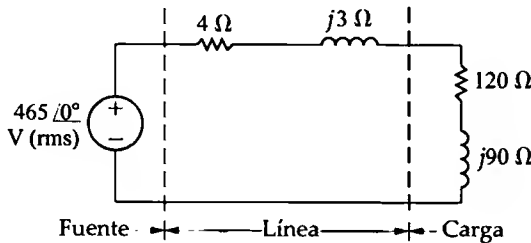


Figura P10.25

**10.26.** Las tres cargas del circuito de la Figura P10.26 pueden describirse de la forma siguiente: la carga 1 está absorbiendo 7,5 kW y 2,5 kVAR; la carga 2 es de 10 kVA con un factor de potencia de 0,28 en adelante; la carga 3 es una resistencia de 12,5 Ω en paralelo con una bobina que tiene una reactancia de 50 Ω.

- a) Calcule la potencia media y la potencia reactiva magnetizante suministradas por cada fuente si  $V_{g1} = V_{g2} = 250 \angle 0^\circ$  V (rms).
- b) Compruebe los cálculos demostrando que los resultados son coherentes con los requisitos

$$\Sigma P_{\text{gen}} = \Sigma P_{\text{abs}}$$

$$\Sigma Q_{\text{gen}} = \Sigma Q_{\text{abs}}$$

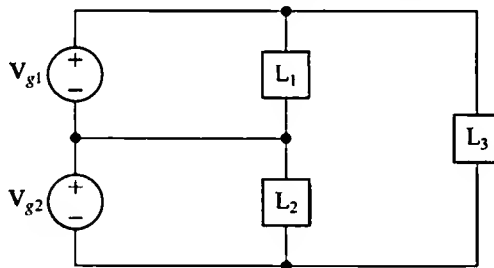


Figura 10.26

**10.27.** Suponga que el circuito mostrado en la Figura P10.26 representa un circuito de distribución residencial en el que las impedancias de los conductores de conexión son despreciables y  $V_{g1} = V_{g2} = 120 \angle 0^\circ$  V (rms). Las tres cargas del circuito son  $L_1$  (una cafetera y una parrilla eléctrica);  $L_2$  (un acondicionador de aire, un secador de pelo y una televisión en color con TRC); y  $L_3$  (un calentador de agua ultrarrápido y un horno completo). Suponga que todos estos aparatos están operando al mismo tiempo. Los conductores de conexión están protegidos con disyuntores de 100 A. ¿Se interrumpirá el suministro eléctrico a esta vivienda? Explique su respuesta.

**10.28.** Las tres cargas del circuito mostrado en la Figura P10.28 son  $S_1 = 4 + j1$  kVA,  $S_2 = 5 + j2$  kVA y  $S_3 = 10 + j0$  kVA.

- a) Calcule la potencia compleja asociada con cada fuente de tensión,  $V_{g1}$  y  $V_{g2}$ .
- b) Verifique que la potencia total real y la potencia total reactiva suministradas por las fuentes son iguales a las absorbidas por la red.

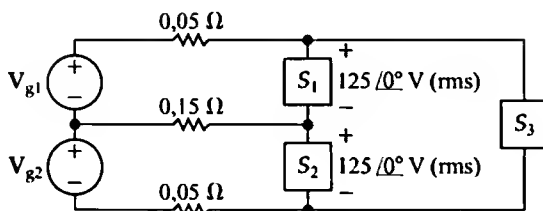


Figura 10.28

- 10.29. a) Calcule  $V_L$  (rms) y  $\theta$  para el circuito de la Figura P10.29 si la carga absorbe 600 VA con un factor de potencia de 0,8 en retardo.  
b) Construya un diagrama de fasores de cada solución obtenida en el apartado (a).

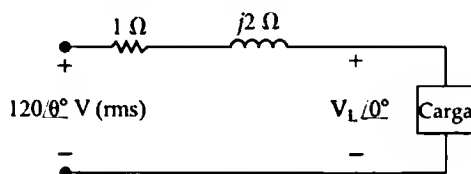


Figura P10.29

- 10.30. Un grupo de pequeños electrodomésticos en un sistema que funciona a 60 Hz requiere 20 kVA con un factor de potencia de 0,85 en retardo cuando opera a 125 V (rms). La impedancia de la línea que alimenta a los electrodomésticos es de  $0,01 + j0,08 \Omega$ . La tensión en la carga es de 125 V (rms).
- ¿Cuál es la magnitud rms de la tensión en bornes de la fuente ideal?
  - ¿Cuál es la pérdida de potencia media en la línea?
  - ¿Qué tamaño de condensador (en microfaradios) en el extremo de la línea correspondiente a la carga se necesita para mejorar el factor de potencia y que éste sea igual a la unidad?
  - Después de instalar el condensador, ¿cuál es la magnitud rms de la tensión en el extremo de la línea correspondiente a la fuente, si la tensión de la carga se mantiene en 125 V (rms)?
  - ¿Cuál es la pérdida de potencia media en la línea para el apartado (d)?
- 10.31. La caída de tensión en régimen permanente entre la carga y el extremo correspondiente a la fuente en la línea mostrada en la Figura P10.31 es excesiva. Colocamos un condensador en paralelo con la carga de 192 kVA y lo ajustamos hasta que la tensión de régimen permanente en el extremo de la línea correspondiente a la fuente tiene la misma magnitud que la tensión en el extremo de la carga, es decir, 4800 V (rms). La carga de 192 kVA está operando con un factor de potencia de 0,8 en retardo. Calcule el tamaño del condensador en microfaradios si el circuito está operando a 60 Hz. Al seleccionar el condensador, tenga presente la necesidad de mantener las pérdidas de potencia en la línea a un nivel razonable.

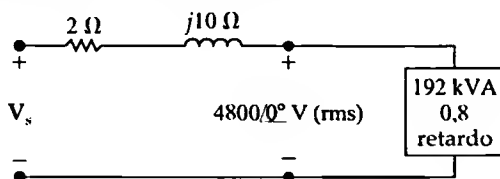


Figura P10.31

- 10.32. Demuestre que, si sólo puede variarse la magnitud de la impedancia de carga, se transferirá la mayor cantidad posible de potencia media a la carga cuando  $|Z_L| = |Z_{Th}|$ . (Sugerencia: al

deducir la expresión correspondiente a la potencia media en la carga, escriba la impedancia de carga ( $Z_L$ ) en la forma  $Z_L = |Z_L| \cos \theta + j|Z_L| \sin \theta$ , y observe que sólo puede variarse  $|Z_L|$ .

- 10.33.** a) Determine la impedancia de carga para el circuito mostrado en la Figura P10.33 que permitirá transferir una cantidad máxima de potencia media a la carga si  $\omega = 10 \text{ krad/s}$ .  
b) Determine la potencia media máxima si  $v_g = 120 \cos 10.000t \text{ V}$ .

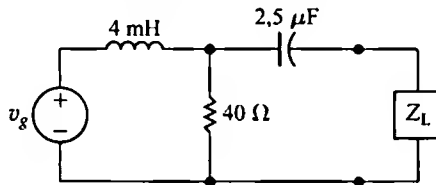


Figura P10.33

- 10.34.** El fasor de tensión  $V_{ab}$  en el circuito mostrado en la Figura P10.34 es  $240 \angle 0^\circ \text{ V (rms)}$  cuando no hay ninguna carga externa conectada a los terminales a y b. Cuando se conecta una carga con una impedancia igual a  $80 - j60 \Omega$  entre los terminales a y b, el valor de  $V_{ab}$  es  $115,2 + j33,6 \text{ V (rms)}$ .  
a) Determine la impedancia que hay que conectar entre los terminales a y b para conseguir una transferencia máxima de potencia media.  
b) Calcule la potencia media máxima transferida a la carga del apartado (a).
- 10.35.** La resistencia variable del circuito mostrado en la Figura P10.35 se ajusta hasta que la potencia media que absorbe alcanza un máximo.  
a) Determine el valor de  $R$ .  
b) Calcule el valor máximo de la potencia media.

Circuito operando en régimen permanente sinusoidal

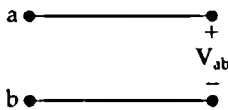


Figura P10.34

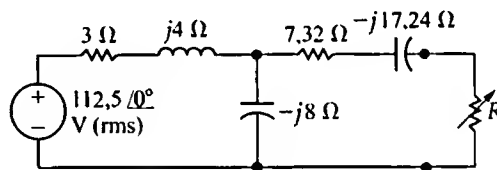


Figura P10.35

- 10.36.** Ajustamos la impedancia de carga  $Z_L$  para el circuito mostrado en la Figura P10.36 hasta conseguir que se entregue una cantidad máxima de potencia media a  $Z_L$ .  
a) Calcule la máxima potencia media suministrada a  $Z_L$ .  
b) ¿Qué porcentaje de la potencia total generada en el circuito se entrega a  $Z_L$ ?

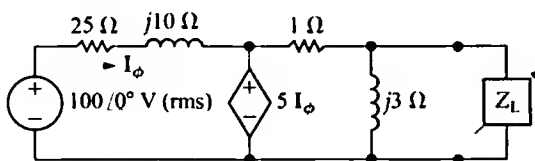


Figura P10.36

- 10.37.** Ajustamos la resistencia variable  $R_o$  en el circuito mostrado en la Figura P10.37 hasta conseguir entregar una potencia media máxima a  $R_o$ .

- ¿Cuál es el valor de  $R_o$  en ohmios?
- Calcule la potencia media suministrada a  $R_o$ .
- Si sustituimos  $R_o$  por una impedancia variable  $Z_o$ , ¿cuál será la máxima potencia media que pueda suministrarse a  $Z_o$ ?
- En el apartado (c), ¿qué porcentaje de la potencia generada en el circuito se entrega a la carga  $R_o$ ?

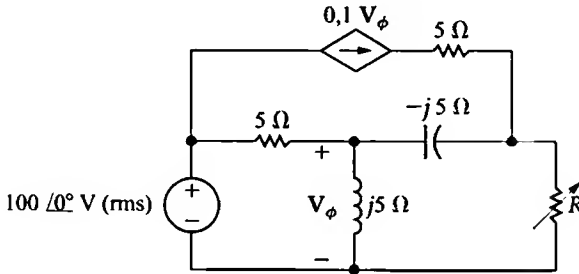


Figura P10.37

10.38. La amplitud de pico de la fuente de tensión sinusoidal del circuito mostrado en la Figura P10.38 es de 180 V y su frecuencia es de 5000 rad/s. La resistencia de carga puede variarse entre 0 y 4000  $\Omega$  y el condensador de carga puede variarse entre 0,1  $\mu\text{F}$  y 0,5  $\mu\text{F}$ .

- Calcule la potencia media suministrada a la carga cuando  $R_o = 2000 \Omega$  y  $C_o = 0,2 \mu\text{F}$ .
- Determine los valores de  $R_o$  y  $C_o$  que permitirán entregar una cantidad máxima de potencia media a  $R_o$ .
- ¿Cuál es esa cantidad máxima de potencia media en el apartado (b)? ¿Es mayor que la potencia calculada en el apartado (a)?
- Si no hay restricciones sobre el valor de  $R_o$  y  $C_o$ , ¿cuál es la máxima potencia media que podrá suministrarse a una carga?
- ¿Cuáles son los valores de  $R_o$  y  $C_o$  para la condición enunciada en el apartado (d)?
- ¿Es la potencia media calculada en el apartado (d) mayor que la calculada en el apartado (c)?

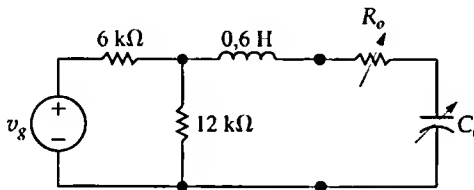


Figura P10.38

- Suponga que la resistencia  $R_o$  de la Figura P10.38 puede variarse entre 0 y 10 k $\Omega$ . Repita los apartados (b) y (c) del Problema 10.38.
- ¿Es la nueva potencia media calculada en el apartado (a) mayor que la hallada en el Problema 10.38(a)?
- ¿Es la nueva potencia media calculada en el apartado (a) inferior a la calculada en el Problema 10.38(d)?

10.40. La tensión en el extremo correspondiente a la fuente del circuito mostrado en la Figura P10.40 se ajusta para que el valor rms de la tensión de carga sea siempre de 13.800 V. Ajustamos tam-



bién el condensador variable hasta que la potencia media disipada en la resistencia de línea sea mínima.

- Si la frecuencia de la fuente sinusoidal es de 60 Hz, ¿cuál es el valor de la capacidad en microfaradios?
- Si eliminamos el condensador del circuito, ¿qué porcentaje de incremento en el módulo de  $V_s$  será necesario para mantener 13.800 V en la carga?
- Si eliminamos el condensador del circuito, ¿cuál es el incremento porcentual en las pérdidas de línea?

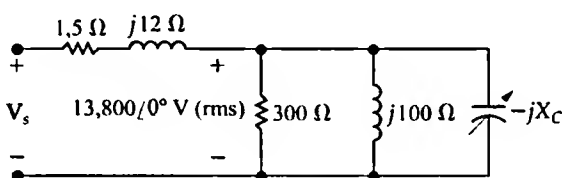


Figura P10.40

- 10.41.** Una fábrica tiene una carga eléctrica de 1600 kW con un factor de potencia de 0,8 en retardo. Queremos añadir una carga adicional con factor de potencia variable a la fábrica. La nueva carga añadirá 320 kW a la potencia real consumida por la fábrica. Queremos ajustar el factor de potencia de la carga añadida para que el factor de potencia global de la fábrica sea de 0,96 en retardo.
- Indique la potencia reactiva asociada con la carga añadida.
  - ¿Está absorbiendo o entregando vars magnetizantes la carga añadida?
  - ¿Cuál es el factor de potencia de la carga adicional?
  - Suponga que la tensión en la entrada de la fábrica es de 2400 V (rms). ¿Cuál es la magnitud rms de la corriente que entra en la fábrica antes de añadir la carga con factor de potencia variable?
  - ¿Cuál es la magnitud rms de la corriente que entra en la fábrica después de añadir la carga con factor de potencia variable?
- 10.42.** Suponga que la fábrica descrita en el Problema 10.41 está alimentada con una línea que tiene una impedancia de  $0,05 + j0,40 \Omega$ . La tensión en la fábrica se mantiene constante a 2400 V (rms).
- Calcule la pérdida de potencia media en la línea antes y después de añadir la carga.
  - Calcule el módulo de la tensión en el extremo de la línea correspondiente a la fuente antes y después de añadir la carga.
- 10.43.** Para el circuito en el dominio de la frecuencia de la Figura P10.43, calcule:

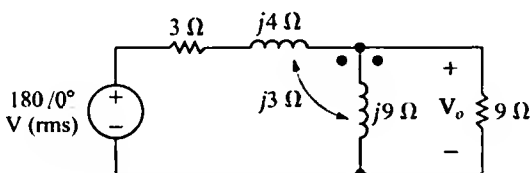


Figura P10.43

- la magnitud rms de  $V_o$ ;
- la potencia media disipada en la resistencia de 9  $\Omega$ ;

- c) el porcentaje de la potencia media generada por la fuente de tensión ideal que se suministra a la resistencia de carga de  $9\ \Omega$ .
- 10.44.** Sustituimos la resistencia de  $9\ \Omega$  del circuito de la Figura P10.43 por una impedancia variable  $Z_o$ . Suponga que ajustamos  $Z_o$  para conseguir una transferencia máxima de potencia media a  $Z_o$ .
- ¿Cuál es la máxima potencia media que puede suministrarse a  $Z_o$ ?
  - ¿Cuál es la potencia media generada por la fuente de tensión ideal cuando se está entregando una potencia media máxima a  $Z_o$ ?
- 10.45.** Los valores de los parámetros en el circuito mostrado en la Figura P10.45 son  $L_1 = 8\text{ mH}$ ,  $L_2 = 2\text{ mH}$ ,  $k = 0,75$ ,  $R_g = 1\ \Omega$  y  $R_L = 7\ \Omega$ . Si  $v_g = 54\sqrt{2} \cos 1000t\text{ V}$ , calcule
- la magnitud rms de  $v_o$ ;
  - la potencia media suministrada a  $R_L$ ;
  - el porcentaje de la potencia media generada por la fuente de tensión ideal que se está suministrando a  $R_L$ .

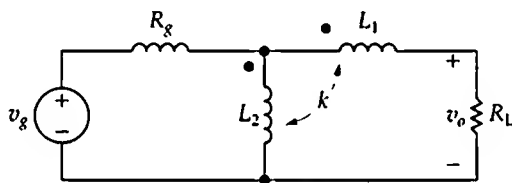


Figura P10.45

- 10.46.** Suponga que la resistencia de carga ( $R_L$ ) del circuito de la Figura P10.45 es ajustable.
- ¿Qué valor de  $R_L$  permitirá transferir a la resistencia de carga una cantidad máxima de potencia media?
  - ¿Cuál es ese valor máximo de la potencia transferida?
- 10.47.** Suponga que el coeficiente de acoplamiento en la Figura P10.45 es ajustable.
- Calcule el valor de  $k$  que hace que  $v_o$  sea igual a cero.
  - Calcule la potencia generada por la fuente cuando  $k$  tiene el valor hallado en el apartado (a).
- 10.48.** Suponga que conectamos a los terminales c y d del circuito mostrado en la Figura P9.67 una impedancia igual al conjugado de la impedancia de Thévenin.
- Calcule la potencia media generada por la fuente de tensión sinusoidal.
  - ¿Qué porcentaje de la potencia generada por la fuente se pierde en el transformador lineal?
- 10.49.** Considere el circuito descrito en el Problema 9.70.
- ¿Cuál es la magnitud rms de la tensión en bornes de la impedancia de carga?
  - ¿Qué porcentaje de la potencia media generada por la fuente no ideal se entrega a la impedancia de carga?
- 10.50.** Ajustamos la impedancia  $Z_L$  en el circuito de la Figura P10.50 para conseguir una máxima transferencia de potencia media a  $Z_L$ . La impedancia interna de la fuente de tensión sinusoidal es  $4 + j7\ \Omega$ .
- ¿Cuál es la máxima potencia media suministrada a  $Z_L$ ?
  - ¿Qué porcentaje de la potencia media suministrada al transformador lineal se entrega a  $Z_L$ ?

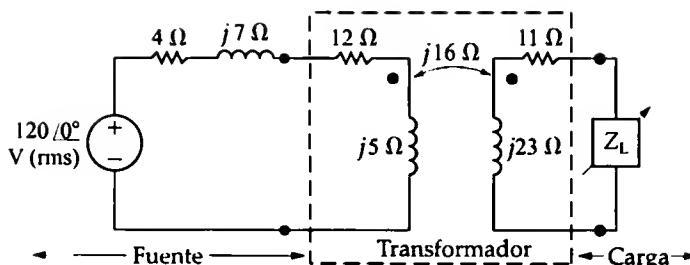


Figura P10.50

- 10.51. a) Calcule la ecuación de régimen permanente para las corrientes  $i_g$  e  $i_L$  en el circuito de la Figura P10.51 cuando  $v_g = 200 \cos 10.000t$  V.
- b) Calcule el coeficiente de acoplamiento.
- c) Calcule la energía almacenada en las bobinas magnéticamente acopladas en  $t = 50\pi$  y  $t = 100\pi \mu s$ .
- d) Calcule la potencia suministrada a la resistencia de  $15 \Omega$ .
- e) Si sustituimos la resistencia de  $15 \Omega$  por una resistencia variable  $R_L$ , ¿qué valor de  $R_L$  permitirá transferir una cantidad máxima de potencia media a  $R_L$ ?
- f) ¿Cuál es ese valor máximo de la potencia media en el apartado (e)?
- g) Suponga que sustituimos la resistencia de  $15 \Omega$  por una impedancia variable  $Z_L$ . ¿Qué valor de  $Z_L$  permitirá transferir una cantidad máxima de potencia media a  $Z_L$ ?
- h) ¿Cuál es esa máxima potencia media en el apartado (g)?

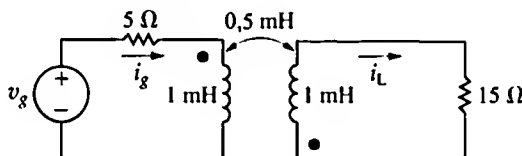


Figura 10.51

- 10.52. a) Calcule las seis corrientes de rama  $I_a$ - $I_f$  en el circuito de la Figura P10.52.
- b) Calcule la potencia compleja en cada rama del circuito.
- c) Verifique los cálculos comprobando que la potencia media generada es igual a la potencia media disipada.
- d) Compruebe los cálculos verificando que los vars magnetizantes generados son iguales a los vars magnetizantes absorbidos.

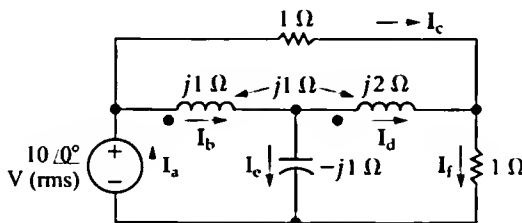


Figura 10.52

- 10.53. Calcule la impedancia vista por la fuente de tensión ideal en el circuito de la Figura P10.53 cuando se ajusta  $Z_o$  para conseguir una máxima transferencia de potencia media a  $Z_o$ .

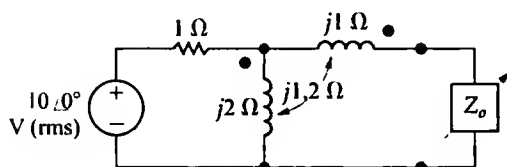


Figura P10.53

- 10.54. a) Calcule la potencia media suministrada a la resistencia de  $8\ \Omega$  en el circuito de la Figura P10.54.  
 b) Calcule la potencia media generada por la fuente de tensión sinusoidal ideal.  
 c) Calcule  $Z_{ab}$ .  
 d) Demuestre que la potencia media generada es igual a la potencia media disipada.

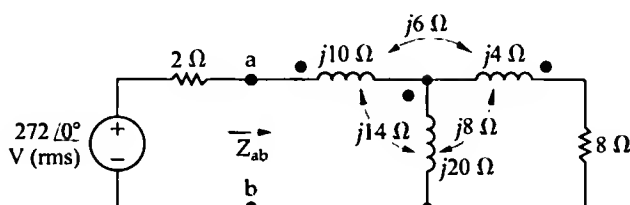


Figura P10.54

- 10.55. a) Calcule la potencia media suministrada por la fuente de corriente sinusoidal en el circuito de la Figura P10.55.  
 b) Calcule la potencia media suministrada a la resistencia de  $20\ \Omega$ .  
 10.56. Calcule la potencia media suministrada a la resistencia de  $10\ \Omega$  al circuito de la Figura P10.56.

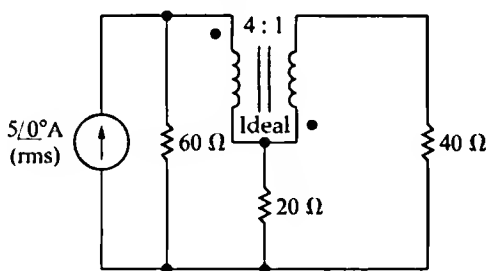


Figura P10.55

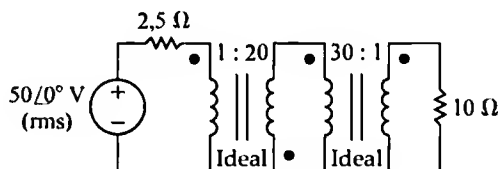


Figura P10.56

- 10.57. El transformador ideal conectado a la carga de  $10\ \Omega$  en el Problema 10.56 se sustituye por un transformador ideal con una relación de vueltas de  $a:1$ .  
 a) ¿Qué valor de  $a$  permite transferir una cantidad máxima de potencia media a la resistencia de  $10\ \Omega$ ?  
 b) ¿Cuál es esa máxima cantidad de potencia media?  
 10.58. a) Si  $N_1$  es igual a 1000 vueltas, ¿cuántas vueltas tendrá que tener el devanado  $N_2$  del transformador ideal del circuito mostrado en la Figura P10.58 para entregar una potencia media máxima a la carga de  $6800\ \Omega$ ?  
 b) Calcule la potencia media suministrada a la resistencia de  $6800\ \Omega$ .

- c) ¿Qué porcentaje de la potencia media suministrada por la fuente de tensión ideal se disipa en el transformador lineal?

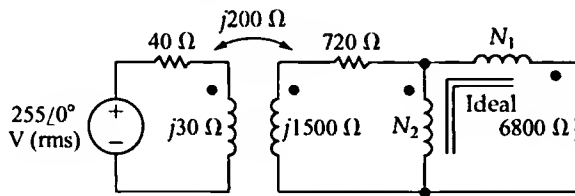


Figura 10.58

- 10.59. a) Calcule la relación de vueltas  $N_1/N_2$  para el transformador ideal del circuito de la Figura P10.59 que hace que se entregue una cantidad máxima de potencia media a la carga de  $400\ \Omega$ .  
 b) Calcule la potencia media suministrada a la carga de  $400\ \Omega$ .  
 c) Determine la tensión  $V_1$ .  
 d) ¿Qué porcentaje de la potencia generada por la fuente de corriente ideal se entrega a la resistencia de  $400\ \Omega$ ?

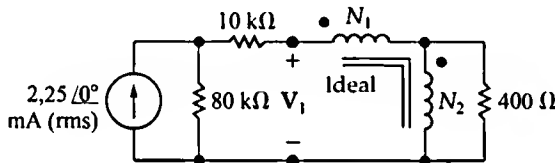


Figura P10.59

- 10.60. a) Calcule la potencia media disipada en cada resistencia del circuito de la Figura P10.60.  
 b) Compruebe sus respuestas demostrando que la potencia total generada es igual a la potencia total absorbida.  
 10.61. La fuente de tensión sinusoidal del circuito de la Figura P10.61 está generando una tensión rms de  $2000\text{ V}$ . La carga de  $4\ \Omega$  del circuito está absorbiendo cuatro veces más potencia media que la carga de  $25\ \Omega$ . Las dos cargas están adaptadas a la fuente sinusoidal, que tiene una impedancia interna de  $500\angle 0^\circ\ \Omega$ .  
 a) Especifique los valores numéricos de  $a_1$  y  $a_2$ .  
 b) Calcule la potencia suministrada a la carga de  $25\ \Omega$ .  
 c) Calcule el valor rms de la tensión que cae en la resistencia de  $4\ \Omega$ .

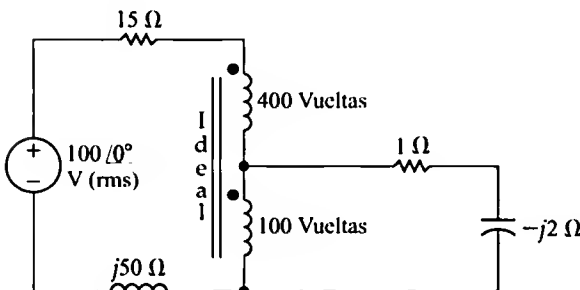


Figura P10.60

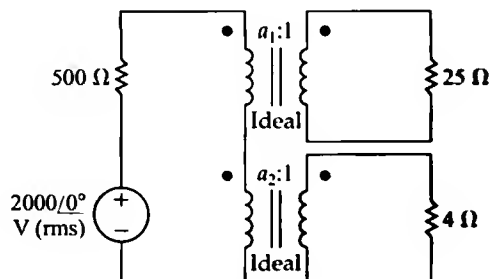


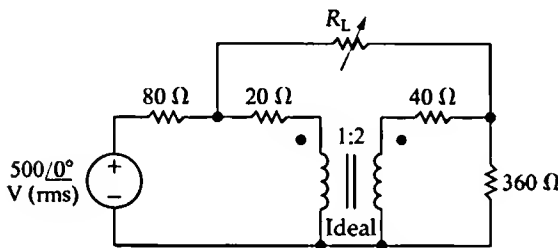
Figura P10.61

**10.62.** Ajustamos la resistencia de carga variable  $R_L$  del circuito mostrado en la Figura P10.62 para conseguir una máxima transferencia de potencia media a  $R_L$ .

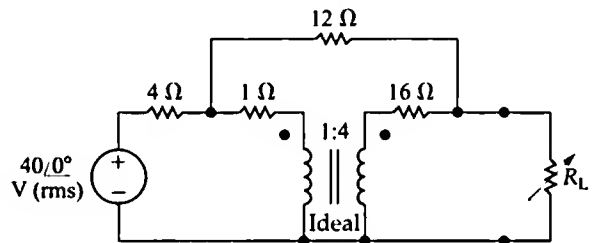


- Calcule la máxima potencia media.
- ¿Qué porcentaje de la potencia media generada por la fuente de tensión ideal se entrega a  $R_L$  cuando  $R_L$  está absorbiendo una potencia media máxima?
- Compruebe la solución demostrando que la potencia desarrollada por la fuente de tensión ideal es igual a la potencia disipada en el circuito.

**10.63.** Repita el Problema 10.62 para el circuito mostrado en la Figura P10.63.



**Figura P10.62**



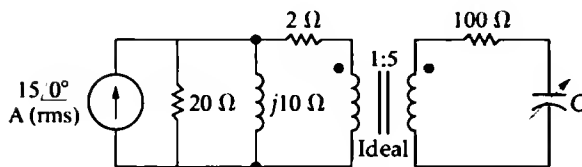
**Figura P10.63**

**10.64.** La fuente de tensión sinusoidal del circuito mostrado en la Figura P10.64 está operando a una frecuencia de 20 krad/s. Ajustamos la reactancia capacitiva variable del circuito hasta que la potencia media suministrada a la resistencia de 100 Ω sea lo mayor posible.

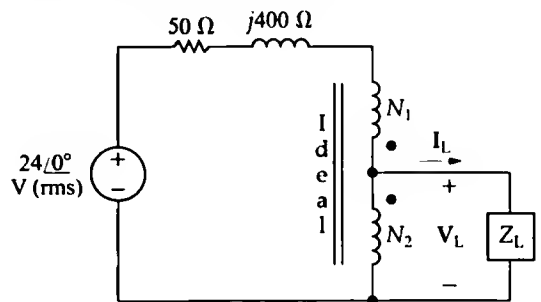
- Calcule el valor de  $C$  en microfaradios.
- Cuando  $C$  tiene el valor hallado en el apartado (a), ¿cuál es la potencia media suministrada a la resistencia de 100 Ω?
- Sustituya la resistencia de 100 Ω por una resistencia variable  $R_o$ . Especifique el valor de  $R_o$  que permite transferir una potencia media máxima a  $R_o$ .
- ¿Cuál es esa potencia media máxima que puede suministrarse a  $R_o$ ?

**10.65.** Ajustamos la impedancia de carga  $Z_L$  en el circuito de la Figura P10.65 hasta conseguir transferir una potencia media máxima a  $Z_L$ .

- Especifique el valor de  $Z_L$  si  $N_1 = 2800$  vueltas y  $N_2 = 700$  vueltas.
- Especifique los valores de  $I_L$  y  $V_L$  cuando  $Z_L$  está absorbiendo una potencia media máxima.



**Figura P10.64**



**Figura P10.65**

**10.66.** El secador de pelo de la Perspectiva práctica utiliza una tensión sinusoidal de 120 V (rms) a 60 Hz. El elemento calefactor debe disipar 250 W en la posición BAJA, 500 W en la posición MEDIA y 1000 W en la posición ALTA.

- Calcule el valor de la resistencia  $R_2$  utilizando la especificación correspondiente a la posición MEDIA, empleando la Figura 10.31.
- Calcule el valor de la resistencia  $R_1$  utilizando la especificación correspondiente a la posición BAJA, empleando los resultados del apartado (a) y la Figura 10.30.
- ¿Se satisface la especificación correspondiente a la posición ALTA?

**10.67.** Como hemos visto en el Problema 10.66, sólo pueden hacerse dos especificaciones de potencia independientes cuando el elemento calefactor del secador está formado por dos resistencias.



- Demuestre que la ecuación correspondiente al valor nominal de potencia en la posición ALTA ( $P_A$ ) es

$$P_A = \frac{P_M^2}{P_M - P_B},$$

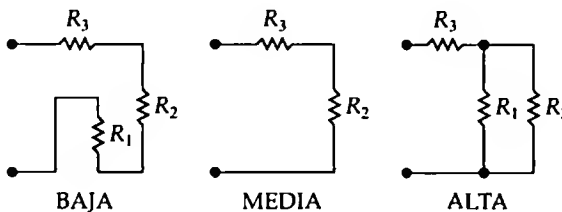
donde  $P_M$  = valor nominal de potencia en la posición MEDIA y  $P_B$  = valor nominal de potencia en la posición BAJA.

- Si  $P_B = 250$  W y  $P_M = 750$  W, ¿cuál será el valor el valor nominal de potencia en la posición ALTA?

**10.68.** Especifique los valores de  $R_1$  y  $R_2$  del circuito del secador de pelo mostrado en la Figura 10.29 si el valor nominal de potencia en la posición mínima es de 240 W y si el valor nominal de potencia en la posición máxima es de 1000 W. Suponga que la tensión de alimentación es de 120 V (rms). (*Sugerencia:* resuelva primero el Problema 10.67).



**10.69.** Si añadimos una tercera resistencia al circuito del secador de pelo de la Figura 10.29, es posible seleccionar tres especificaciones de potencia nominal independientes. Si añadimos la resistencia  $R_3$  en serie con el fusible térmico, entonces los diagramas de circuito correspondientes a las posiciones BAJA, MEDIA y ALTA son los mostrados en la Figura P10.69. Si los tres valores nominales de potencia son 600 W, 900 W y 1200 W, respectivamente, al conectarse a una toma de alimentación de 120 V (rms), ¿qué valores de resistencias habrá que utilizar?



**Figura 10.69**

**10.70.** Nos encargan rediseñar el secador de pelo descrito en el Problema 10.66 para utilizarlo en un país donde la tensión estándar de alimentación es de 220 V (rms). ¿Qué valores de resistencias habrá que utilizar en el diseño para cumplir con las mismas especificaciones de potencia?



# CAPÍTULO

# 11

# Circuitos trifásicos equilibrados

## Contenido del capítulo

- 11.1. Tensiones trifásicas equilibradas
- 11.2. Fuentes de tensión trifásicas
- 11.3. Análisis del circuito estrella-estrella
- 11.4. Análisis del circuito estrella-triángulo
- 11.5. Cálculos de potencia en circuitos trifásicos equilibrados
- 11.6. Medida de la potencia media en circuitos trifásicos

La generación, transmisión, distribución y utilización de grandes cantidades de energía eléctrica se lleva a cabo mediante circuitos trifásicos. El análisis exhaustivo de dicho tipo de sistemas constituye un campo de estudio por propio derecho; resulta, por tanto, imposible tratar todos los temas en un único capítulo. Afortunadamente, para los ingenieros que no estén especializados en sistemas de potencia es suficiente comprender simplemente el comportamiento en régimen permanente sinusoidal de los circuitos trifásicos equilibrados. Definiremos lo que queremos decir por circuito equilibrado más adelante en el capítulo. Podemos aplicar las mismas técnicas de análisis de circuitos presentadas en los capítulos anteriores tanto a los circuitos trifásicos equilibrados como a los no equilibrados. Aquí, utilizaremos dichas técnicas familiares para desarrollar diversos atajos que facilitan el análisis de los circuitos trifásicos equilibrados.

Por razones económicas, los sistemas trifásicos se suelen diseñar para operar en estado equilibrado. Por tanto, en este tratamiento introductorio, tiene sentido considerar únicamente dicho tipo de circuitos. El análisis de los circuitos trifásicos no equilibrados, con el que el lector podrá encontrarse si estudia temas relativos a la electrónica de potencia en cursos posteriores, depende en buena medida de la comprensión de los circuitos equilibrados.

La estructura básica de un sistema trifásico consiste en una serie de fuentes de tensión conectadas a unas cargas por medio de transformadores y líneas de transmisión. Para analizar dicho tipo de circuito, podemos reducirlo a una fuente de tensión conectada a una carga a través de una línea. La omisión del transformador simplifica el análisis sin poner en riesgo la comprensión de los cálculos implicados. La Figura 11.1 muestra un circuito básico. Una característica distintiva de un circuito trifásico equilibrado es que contiene un



## Perspectiva práctica

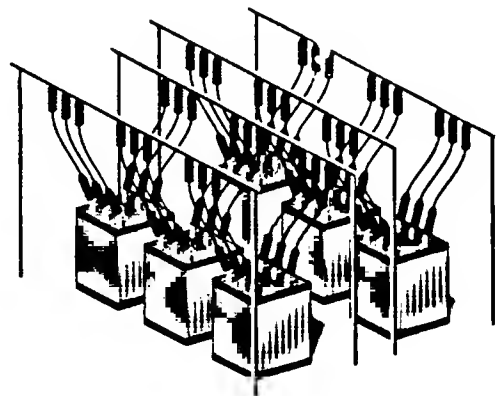
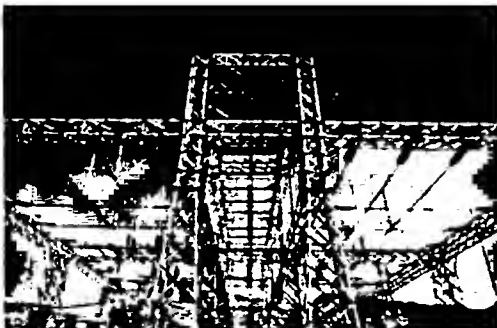
### Transmisión y distribución de energía eléctrica

En este capítulo, vamos a presentar circuitos diseñados para manejar potencia eléctrica en grandes cantidades. Éstos son los circuitos que se utilizan para transportar la energía eléctrica desde las plantas generadoras hasta las instalaciones de los clientes industriales y residenciales. En la perspectiva de diseño del Capítulo 9 hemos presentado ya un circuito de distribución residencial típico. Ahora vamos a centrarnos en el tipo de circuito utilizado para distribuir la energía eléctrica hasta una subdivisión residencial completa.

Una de las restricciones impuestas al diseño y operación de un sistema de distribución de energía eléctrica es el requisito de que se mantenga el nivel de tensión rms en las instalaciones de los clientes. Independientemente de que el circuito esté sólo ligeramente cargado, como por ejemplo de madrugada, o debe alimentar a una carga considerable, como por ejemplo a mediodía en un cálido y húmedo verano, la compañía eléctrica está obligada a suministrar la misma tensión rms. Recuerde, del Capítulo 10, que podemos pensar en un condensador como en un dispositivo capaz de suministrar vars magnetizantes. Por tanto, una técnica para mantener los niveles de tensión en un sistema de distribución de energía eléctrica consiste en incluir condensadores en ubicaciones estratégicas dentro de la red de distribución. La idea que subyace a esta técnica es la de utilizar los condensadores para suministrar vars magnetizantes en las proximidades de las cargas que los requieren, en lugar de enviarlos a través de las líneas desde el generador. Ilustraremos este concepto después de introducir el análisis de los circuitos trifásicos equilibrados.

### Objetivos del capítulo

1. Saber cómo analizar un circuito trifásico equilibrado con conexión estrella-estrella.
2. Saber cómo analizar un circuito trifásico equilibrado con conexión estrella-triángulo.
3. Ser capaz de calcular la potencia (media, reactiva y compleja) en cualquier circuito equilibrado.



conjunto de tensiones trifásicas equilibradas como fuente. Comenzaremos considerando estas tensiones y después continuaremos con el análisis de las relaciones entre tensiones y corrientes en los circuitos de tipo Y-Y e Y- $\Delta$ . Después de considerar la tensión y la corriente en dichos circuitos, concluiremos con sendas secciones sobre la potencia y la manera de medirla.

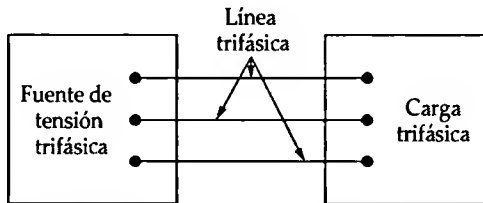


Figura 11.1. Un circuito trifásico básico.

## 11.1. Tensiones trifásicas equilibradas

Un conjunto de tensiones trifásicas equilibradas está compuesto por tres tensiones sinusoidales con idéntica amplitud y frecuencia, pero que están desfasadas entre sí exactamente  $120^\circ$ . Normalmente nos referimos a esas tres fases como a, b y c, utilizando la fase a como fase de referencia. Las tres tensiones se denominan **tensión de fase a**, **tensión de fase b** y **tensión de fase c**.

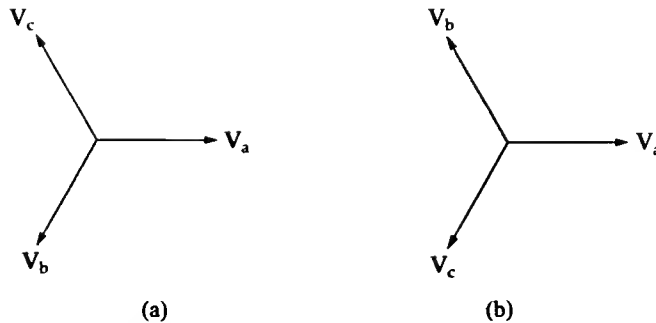
Sólo hay dos posibles relaciones de fase entre la tensión de fase a y las tensiones de fase b y c. Una de las posibilidades es que la tensión de fase b esté retardada  $120^\circ$  con respecto a la tensión de fase a, en cuyo caso la tensión de fase c estará adelantada  $120^\circ$  con respecto a la tensión de fase a. Esta relación de fase se denomina **secuencia de fases abc** (o **positiva**). La otra posibilidad es que la tensión de fase b esté adelantada  $120^\circ$  con respecto a la tensión de fase a, en cuyo caso la tensión de fase c deberá estar retardada  $120^\circ$ . Esta relación de fase se denomina **secuencia de fase acb** (o **negativa**). En notación de fasores, los dos posibles conjuntos de tensiones de fase equilibradas son

$$\begin{aligned} V_a &= V_m \angle 0^\circ, \\ V_b &= V_m \angle -120^\circ, \\ V_c &= V_m \angle +120^\circ, \end{aligned} \quad (11.1)$$

y

$$\begin{aligned} V_a &= V_m \angle 0^\circ, \\ V_b &= V_m \angle +120^\circ, \\ V_c &= V_m \angle -120^\circ. \end{aligned} \quad (11.2)$$

Las Ecuaciones 11.1 se aplican a la secuencia abc o positiva. Las Ecuaciones 11.2 son las correspondientes a la secuencia acb o negativa. La Figura 11.2 muestra los diagramas de fasores de los conjuntos de tensiones descritos por las Ecuaciones 11.1 y 11.2. La secuencia de fases es la ordenación en el sentido de las agujas del reloj de los subíndices que aparecen en el diagrama, comenzando a partir de  $V_a$ . El hecho de que un circuito trifásico pueda tener una de dos posibles secuencias de fase debe tenerse en cuenta a la hora de operar en paralelo dos de tales circuitos. Los circuitos pueden operar en paralelo sólo si tienen la misma secuencia de fases.



**Figura 11.2.** Diagramas de fasores de los conjuntos equilibrados de tensiones trifásicas. (a) Secuencia abc (positiva). (b) Secuencia acb (negativa).

Otra característica importante de un conjunto de tensiones trifásicas equilibradas es que la suma de las tensiones es cero. Así, si nos fijamos en las Ecuaciones 11.1 y 11.2,

$$\mathbf{V}_a + \mathbf{V}_b + \mathbf{V}_c = 0. \quad (11.3)$$

Puesto que la suma de los fasores de tensión es cero, la suma de las tensiones instantáneas también será cero, es decir,

$$v_a + v_b + v_c = 0. \quad (11.4)$$

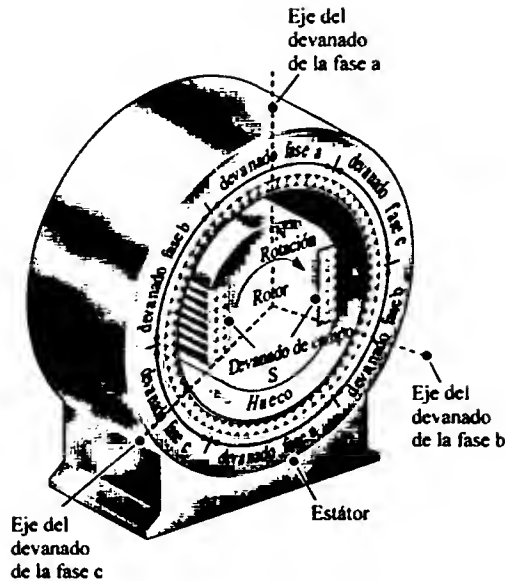
Ahora que hemos presentado la naturaleza de un conjunto equilibrado de tensiones trifásicas, podemos enunciar el primero de los atajos analíticos a los que hemos hecho referencia en la introducción de este capítulo: si conocemos la secuencia de fase y una de las tensiones del conjunto, estará determinado el conjunto completo. Así, para un conjunto trifásico equilibrado, podemos centrarnos en la determinación de la tensión (o de la corriente) en una de las fases, porque una vez conocida esa fase, las otras quedan perfectamente determinadas.

**NOTA** *Evalúe su comprensión del concepto de tensiones trifásicas intentando resolver los Problemas 11.1 y 11.2 del capítulo.*

## 11.2. Fuentes de tensión trifásicas

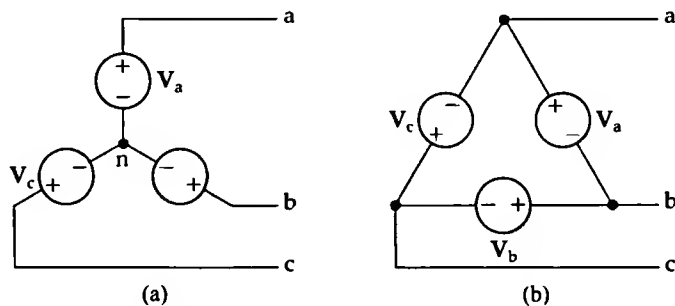
Una fuente de tensión trifásica es un generador con tres devanados separados distribuidos alrededor del estátor. Cada devanado forma una fase del generador. El rotor del generador es un electroimán que se mueve a velocidad síncrona mediante algún tipo de mecanismo, como por ejemplo una turbina de vapor o de gas. La rotación del electroimán induce una tensión sinusoidal en cada uno de los devanados. Los devanados de las fases están diseñados de forma que las tensiones sinusoidales inducidas en ellos tienen igual amplitud y están desfasadas entre sí  $120^\circ$ . Los devanados de fase son estáticos con respecto al electroimán giratorio, por lo que la frecuencia de la tensión inducida en cada devanado es la misma. La Figura 11.3 muestra un diagrama de una fuente trifásica de dos polos.

Hay dos formas de interconectar los diferentes devanados de fase para formar una fuente trifásica: en configuración de estrella (Y) o en configuración de triángulo ( $\Delta$ ). La Figura 11.4 muestra ambos tipos de conexión, utilizando fuentes de tensión ideales para modelar los devanados de fase del generador trifásico. El terminal común en las fuentes conectadas en estrella, etiquetado como  $n$  en la Figura 11.4(a), se denomina **terminal neutro** de la fuente. El terminal neutro puede o no estar disponible para efectuar una conexión externa.



**Figura 11.3.** Diagrama de una fuente de tensión trifásica.

Algunas veces, la impedancia de cada devanado de fase es tan pequeña (comparada con las otras impedancias del circuito) que no tenemos por qué tenerla en cuenta a la hora de modelar el generador; el modelo consistirá entonces, exclusivamente, en una serie de fuentes de tensión ideales, como en la Figura 11.4. Sin embargo, si la impedancia de cada devanado de fase no es despreciable, pondremos la impedancia del devanado en serie con una fuente de tensión sinusoidal ideal. Todos los devanados del dispositivo tienen la misma construcción, por lo que supondremos que las impedancias de los devanados son idénticas. La impedancia del devanado de un generador trifásico es inductiva. La Figura 11.5 muestra el modelo de uno de estos dispositivos, donde  $R_w$  es la resistencia del devanado y  $X_w$  es la reactancia inductiva del devanado.



**Figura 11.4.** Las dos conexiones básicas de una fuente trifásica ideal.

(a) Fuente con conexión en Y. (b) Fuente con conexión en  $\Delta$ .

Puesto que las fuentes y cargas trifásicas pueden estar conectadas en estrella o en triángulo, el circuito básico de la Figura 11.1 representa en realidad las cuatro configuraciones diferentes que se enumeran en la siguiente tabla.

FUENTE	CARGA
Y	Y
Y	$\Delta$
$\Delta$	Y
$\Delta$	$\Delta$

Comenzaremos analizando el circuito Y-Y. Las otras tres configuraciones pueden reducirse a un circuito equivalente Y-Y, por lo que el análisis de este tipo de circuito es la clave para resolver todas las configuraciones trifásicas equilibradas. Posteriormente ilustraremos la reducción de una configuración Y- $\Delta$  y dejaremos el análisis de las configuraciones  $\Delta$ -Y y  $\Delta$ - $\Delta$  para que el lector lo efectúe en la sección de Problemas del capítulo.

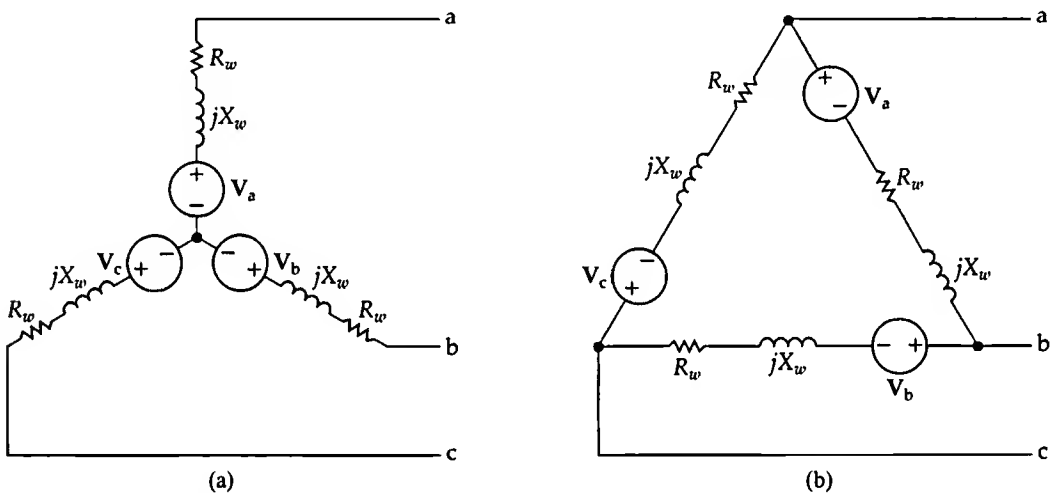


Figura 11.5. Modelo de una fuente trifásica con las impedancias de los devanados: (a) fuente con conexión en Y; y (b) fuente con conexión en  $\Delta$ .

### 11.3. Análisis del circuito estrella-estrella

La Figura 11.6 ilustra un circuito general Y-Y, en el que hemos incluido un cuarto conductor que conecta el neutro de la fuente con el neutro de la carga. Sólo es posible utilizar un cuarto conductor en la configuración Y-Y (hablaremos más sobre esto dentro de unos momentos). En la citada figura,  $Z_{g_a}$ ,  $Z_{g_b}$  y  $Z_{g_c}$  representan la impedancia interna asociada con el devanado de cada fase del generador de tensión;  $Z_{l_a}$ ,  $Z_{l_b}$  y  $Z_{l_c}$  representan la impedancia de las líneas que conectan una fase de la fuente con una fase de la carga;  $Z_0$  es la impedancia del conductor neutro que conecta el neutro de la fuente con el neutro de la carga, y  $Z_A$ ,  $Z_B$  y  $Z_C$  representan la impedancia de cada fase de la carga.

Podemos describir este circuito con una única ecuación de tensión de nodo. Utilizando el neutro de la fuente como nodo de referencia y designando como  $V_N$  la tensión de nodo existente entre los nodos N y n, vemos que la ecuación de tensión de nodo es

$$\frac{V_N}{Z_0} + \frac{V_N - V_{a'n}}{Z_A + Z_{1a} + Z_{ga}} + \frac{V_N - V_{b'n}}{Z_B + Z_{1b} + Z_{gb}} + \frac{V_N - V_{c'n}}{Z_C + Z_{1c} + Z_{gc}} = 0. \quad (11.5)$$

Ésta es la ecuación general para cualquier circuito que tenga la configuración Y-Y mostrada en la Figura 11.6. Pero podemos simplificar la Ecuación 11.5 significativamente si consideramos ahora la definición formal de un circuito trifásico equilibrado. Dicho circuito satisface los siguientes criterios:

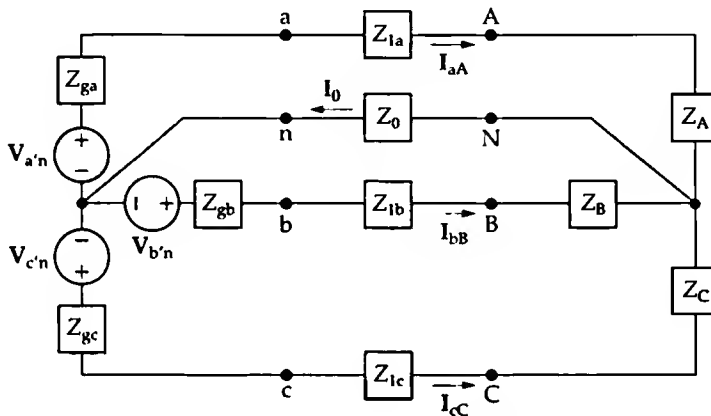


Figura 11.6. Un sistema trifásico Y-Y.

#### ✦ CONDICIONES DE UN CIRCUITO TRIFÁSICO EQUILIBRADO

1. Las fuentes de tensión forman un conjunto de tensiones trifásicas equilibradas. En la Figura 11.6, esto significa que  $V_{a'n}$ ,  $V_{b'n}$  y  $V_{c'n}$  forman un conjunto de tensiones trifásicas equilibradas.
2. La impedancia de cada fase de la fuente de tensión es la misma. En la Figura 11.6, esto quiere decir que  $Z_{ga} = Z_{gb} = Z_{gc}$ .
3. La impedancia de cada conductor de línea (o de fase) es la misma. En la Figura 11.6, esto quiere decir que  $Z_{1a} = Z_{1b} = Z_{1c}$ .
4. La impedancia de cada fase de la carga es la misma. En la Figura 11.6, esto significa que  $Z_A = Z_B = Z_C$ .

No hay ninguna restricción en lo que se refiere a la impedancia del conductor neutro; su valor no tiene ningún efecto a la hora de determinar si el sistema está equilibrado.

Si el circuito de la Figura 11.6 está equilibrado, podemos reescribir la Ecuación 11.5 como

$$V_N \left( \frac{1}{Z_0} + \frac{3}{Z_\phi} \right) = \frac{V_{a'n} + V_{b'n} + V_{c'n}}{Z_\phi}, \quad (11.6)$$

donde

$$Z_\phi = Z_A + Z_{1a} + Z_{ga} = Z_B + Z_{1b} + Z_{gb} = Z_C + Z_{1c} + Z_{gc}.$$

El lado derecho de la Ecuación 11.6 es cero, porque por hipótesis el numerador es un conjunto de tensiones trifásicas equilibradas y  $Z_\phi$  es distinta de cero. El único valor de  $V_N$  que satisface la Ecuación 11.6 es cero. Por tanto, para un circuito trifásico equilibrado,

$$V_N = 0. \quad (11.7)$$

La Ecuación 11.7 es extremadamente importante. Si  $V_N$  es cero, no hay diferencia de potencial entre el neutro de la fuente, n, y el neutro de la carga, N; en consecuencia, la corriente que recorre el conductor neutro es cero. Por tanto, podemos eliminar el conductor neutro de una configuración Y-Y equilibrada ( $I_0 = 0$ ) o sustituirlo por un cortocircuito perfecto entre los nodos n y N ( $V_N = 0$ ). Ambos circuitos equivalentes son útiles a la hora de modelar los circuitos trifásicos equilibrados.

Veamos ahora el efecto que las condiciones de equilibrio tienen sobre las tres corrientes de línea. Refiriéndonos a la Figura 11.6, cuando el sistema está equilibrado, las tres corrientes de línea son

$$I_{aA} = \frac{V_{a'n} - V_N}{Z_A + Z_{1a} + Z_{ga}} = \frac{V_{a'n}}{Z_\phi}, \quad (11.8)$$

$$I_{bB} = \frac{V_{b'n} - V_N}{Z_B + Z_{1b} + Z_{gb}} = \frac{V_{b'n}}{Z_\phi}, \quad (11.9)$$

$$I_{cC} = \frac{V_{c'n} - V_N}{Z_C + Z_{1c} + Z_{gc}} = \frac{V_{c'n}}{Z_\phi}. \quad (11.10)$$

Podemos ver que las tres corrientes de línea forman un conjunto equilibrado de corrientes trifásicas; en otras palabras, la corriente en todas las líneas tiene la misma amplitud y frecuencia y cada línea está desfasada  $120^\circ$  con respecto a las otras dos corrientes de línea. Por tanto, si calculamos la corriente  $I_{aA}$  y conocemos la secuencia de fases, disponemos de un medio directo para determinar  $I_{bB}$  e  $I_{cC}$ . Este procedimiento es similar al que utilizamos para hallar las tensiones de fuente correspondientes a las fases b y c a partir de la tensión de la fase a.

Podemos utilizar la Ecuación 11.8 para construir un circuito Y-Y equilibrado. Partiendo de esta ecuación, la corriente que atraviesa la línea conductora de la fase a es simplemente la tensión generada en el devanado de la fase a del generador dividida por la impedancia total de la fase a del circuito. Por tanto, la Ecuación 11.8 describe el circuito simple que se muestra en la Figura 11.7, en el que el conductor neutro ha sido sustituido por un cortocircuito perfecto. El circuito de la Figura 11.7 se denomina **circuito equivalente monofásico** de un circuito trifásico equilibrado. Debido a las relaciones existentes entre las fases, una vez que resolvamos este circuito podemos determinar fácilmente las tensiones y las corrientes de las otras dos fases. Por tanto, dibujar un circuito equivalente monofásico es un paso importante para comenzar el análisis de un circuito trifásico.

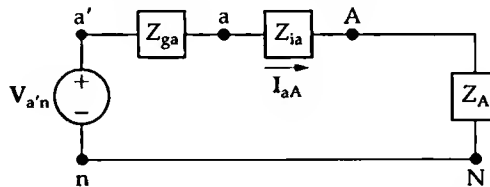


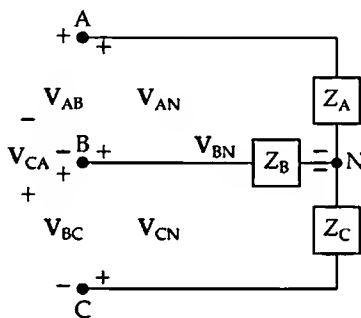
Figura 11.7. Un circuito equivalente monofásico.

Conviene hacer una advertencia. La corriente en el conductor neutro de la Figura 11.7 es  $I_{aA}$ , que no es igual que la corriente en el conductor neutro del circuito trifásico equilibrado, que es

$$I_o = I_{aA} + I_{bB} + I_{cC}. \quad (11.11)$$

Por tanto, el circuito mostrado en la Figura 11.7 proporciona el valor correcto de la corriente de línea, pero sólo nos da la componente de la corriente del neutro que corresponde a la fase a. Siempre que podamos aplicar el circuito equivalente monofásico, las corrientes de línea forman un conjunto trifásico equilibrado y el lado derecho de la Ecuación 11.11 es igual a cero.

Una vez conocida la corriente de línea en la Figura 11.7, el cálculo de las tensiones que nos interesan es relativamente simple. Tiene particular interés la relación existente entre las tensiones que hay entre las líneas y las tensiones entre la línea y el neutro. Vamos a establecer esta relación en los terminales de carga, pero las observaciones que realicemos también son aplicables a los terminales de la fuente. La tensión línea-línea en los terminales de carga puede verse en la Figura 11.8. Dichas tensiones son  $V_{AB}$ ,  $V_{BC}$  y  $V_{CA}$ , donde la notación de doble sufijo indica una caída de tensión entre el primer nodo y el segundo (como lo que nos interesa es el estado equilibrado, hemos omitido el conductor neutro en la Figura 11.8).



**Figura 11.8.** Tensiones línea-línea y línea-neutro.

Las tensiones línea-neutro son  $V_{AN}$ ,  $V_{BN}$  y  $V_{CN}$ . Podemos describir las tensiones línea-línea en términos de las tensiones línea-neutro, utilizando la ley de Kirchhoff de las tensiones:

$$V_{AB} = V_{AN} - V_{BN}, \quad (11.12)$$

$$V_{BC} = V_{BN} - V_{CN}, \quad (11.13)$$

$$V_{CA} = V_{CN} - V_{AN}, \quad (11.14)$$

Para mostrar la relación existente entre las tensiones línea-línea y las tensiones línea-neutro, vamos a suponer una secuencia positiva, o abc. Utilizando la tensión línea-neutro de la fase a como referencia,

$$V_{AN} = V_\phi \angle 0^\circ, \quad (11.15)$$

$$V_{BN} = V_\phi \angle -120^\circ, \quad (11.16)$$

$$V_{CN} = V_\phi \angle -120^\circ, \quad (11.17)$$

donde  $V_\phi$  representa la magnitud de la tensión línea-neutro. Sustituyendo las Ecuaciones 11.15-11.17 en las Ecuaciones 11.12-11.14, respectivamente, se obtiene

$$V_{AB} = V_\phi \angle 0^\circ - V_\phi \angle -120^\circ = \sqrt{3}V_\phi \angle 30^\circ. \quad (11.18)$$



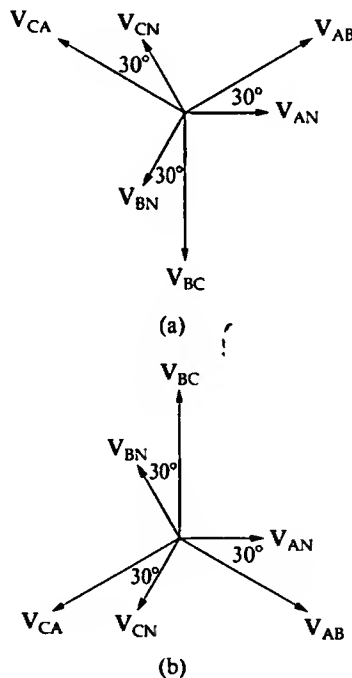
$$V_{BC} = V_\phi \angle -120^\circ - V_\phi \angle 120^\circ = \sqrt{3}V_\phi \angle -90^\circ, \quad (11.19)$$

$$V_{CA} = V_\phi \angle 120^\circ - V_\phi \angle 0^\circ = \sqrt{3}V_\phi \angle 150^\circ, \quad (11.20)$$

Las Ecuaciones 11.18-11.20 revelan que

1. La magnitud de la tensión línea-línea es igual a la magnitud de la tensión línea-neutro multiplicada por  $\sqrt{3}$ .
2. Las tensiones línea-línea forman un conjunto trifásico equilibrado de tensiones.
3. El conjunto de tensiones línea-línea está adelantado  $30^\circ$  con respecto al conjunto de tensiones línea-neutro.

Dejamos como ejercicio para el lector la demostración de que, para una secuencia negativa, el único cambio es que el conjunto de tensiones línea-línea está retardado  $30^\circ$  con respecto al conjunto de tensiones línea-neutro. Los diagramas de fasores mostrados en la Figura 11.9 resumen estas observaciones. Aquí tenemos otro de los atajos que podemos aplicar en nuestro análisis de un sistema equilibrado: si conocemos la tensión línea-neutro en algún punto del circuito, podemos determinar fácilmente la tensión línea-línea en el mismo punto, y viceversa.



**Figura 11.9.** Diagramas de fasores que muestran la relación existente entre las tensiones línea-línea y línea-neutro en un sistema equilibrado. (a) Secuencia abc. (b) Secuencia acb.

Hagamos ahora una pausa para ampliar la terminología. La **tensión de línea** hace referencia a la tensión existente entre cualquier par de líneas; la **tensión de fase** hace referencia a la tensión existente en una única fase. La **corriente de línea** se refiere a la corriente en un único conductor; la **corriente de fase** hace referencia a la corriente en una única fase. Observe que, en una conexión  $\Delta$ , la tensión de línea y la tensión de fase son idénticas, y en una conexión Y, la corriente de línea y la corriente de fase son idénticas.

Puesto que los sistemas trifásicos están diseñados para manejar grandes cantidades de energía eléctrica, todas las especificaciones de tensión y de corriente se proporcionan como valores rms. Cuando se proporcionan valores nominales de tensión, se refieren específicamente a los valores nominales de la tensión de línea. Así, si una línea de transmisión trifásica tiene un valor nominal de 345 kV, el valor nominal de la tensión rms línea-línea será 345.000 V. En este capítulo, expresaremos todas las tensiones y corrientes como valores rms.

Finalmente, la letra griega phi ( $\phi$ ) se utiliza ampliamente en la literatura técnica para designar una magnitud referida a una fase. Así,  $V_\phi$ ,  $I_\phi$ ,  $Z_\phi$ ,  $P_\phi$  y  $Q_\phi$  se interpretan como la tensión/fase, corriente/fase, impedancia/fase, potencia/fase y potencia reactiva/fase, respectivamente.

El Ejemplo 11.1 muestra cómo utilizar las observaciones que hasta ahora hemos hecho para resolver un circuito trifásico equilibrado Y-Y.

### EJEMPLO 11.1 Análisis de un circuito estrella-estrella

Un generador trifásico equilibrado con conexión en estrella y secuencia positiva tiene una impedancia de  $0,2 + j0,5 \Omega/\phi$  y una tensión interna de  $120 \text{ V}/\phi$ . El generador alimenta una carga trifásica equilibrada con conexión en estrella que tiene una impedancia de  $39 + j28 \Omega/\phi$ . La impedancia de la línea que conecta el generador a la carga es de  $0,8 + j1,5 \Omega/\phi$ . La tensión interna de la fase a del generador se utiliza como fasor de referencia.

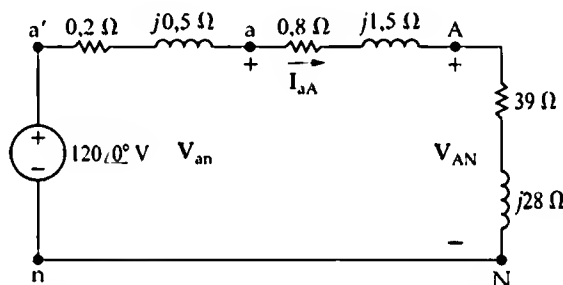


Figura 11.10. Circuito equivalente monofásico para el Ejemplo 11.1.

- Construya el circuito equivalente del sistema para la fase a.
- Calcule las tres corrientes de línea  $I_{aA}$ ,  $I_{bB}$  e  $I_{cC}$ .
- Calcule las tres tensiones de fase en la carga,  $V_{AN}$ ,  $V_{BN}$  y  $V_{CN}$ .
- Calcule las tensiones de línea  $V_{AB}$ ,  $V_{BC}$  y  $V_{CA}$  en los terminales de la carga.
- Calcule las tensiones de fase en los terminales del generador,  $V_{an}$ ,  $V_{bn}$  y  $V_{cn}$ .
- Calcule las tensiones de línea  $V_{ab}$ ,  $V_{bc}$  y  $V_{ca}$  en los terminales del generador.
- Repita los apartados (a)-(f) para una secuencia de fases negativa.

### SOLUCIÓN

- La Figura 11.10 muestra el circuito equivalente monofásico.

- La corriente de línea de la fase a es

$$I_{aA} = \frac{120 \angle 0^\circ}{(0,2 + 0,8 + 39) + j(0,5 + 1,5 + 28)} \\ = \frac{120 \angle 0^\circ}{40 + j30} = 2,4 \angle -36,87^\circ \text{ A.}$$

Para una secuencia de fases positiva,

$$I_{bB} = 2,4 \angle -156,87^\circ \text{ A,}$$

$$I_{cC} = 2,4 \angle 83,13^\circ \text{ A.}$$

- La tensión de fase en el terminal A de la carga es

$$V_{AN} = (39 + j28)(2,4 \angle -36,87^\circ) \\ = 115,22 \angle -1,19^\circ \text{ V.}$$

Para una secuencia de fases positiva,

$$V_{BN} = 115,22 \angle -121,19^\circ \text{ V},$$

$$V_{CN} = 115,22 \angle 118,81^\circ \text{ V}.$$

- d) Para una secuencia de fases positiva, las tensiones de línea están adelantadas  $30^\circ$  con respecto a las tensiones de fase, por lo que

$$V_{AB} = (\sqrt{3} \angle 30^\circ) V_{AN}$$

$$= 199,58 \angle 28,81^\circ \text{ V},$$

$$V_{BC} = 199,58 \angle -91,19^\circ \text{ V},$$

$$V_{CA} = 199,58 \angle 148,81^\circ \text{ V}.$$

- e) La tensión de fase en el terminal a de la fuente es

$$\begin{aligned} V_{an} &= 120 - (0,2 + j0,5)(2,4 \angle -36,87^\circ) \\ &= 120 - 1,29 \angle 31,33^\circ \\ &= 118,90 - j0,67 \\ &= 118,90 \angle -0,32^\circ \text{ V}. \end{aligned}$$

Para una secuencia de fases positiva,

$$V_{bn} = 118,90 \angle -120,32^\circ \text{ V},$$

$$V_{cn} = 118,90 \angle 119,68^\circ \text{ V}.$$

- f) Las tensiones de línea en los terminales de la fuente son

$$V_{ab} = (\sqrt{3} \angle 30^\circ) V_{an}$$

$$= 205,94 \angle 29,68^\circ \text{ V},$$

$$V_{bc} = 205,94 \angle -90,32^\circ \text{ V},$$

$$V_{ca} = 205,94 \angle 149,68^\circ \text{ V}.$$

- g) Cambiar la secuencia de fases no tiene ningún efecto sobre el circuito equivalente

monofásico. Las tres corrientes de línea son

$$I_{aA} = 2,4 \angle -36,87^\circ \text{ A},$$

$$I_{bB} = 2,4 \angle 83,13^\circ \text{ A},$$

$$I_{cC} = 2,4 \angle -156,87^\circ \text{ A}.$$

Las tensiones de fase en la carga son

$$V_{AN} = 115,22 \angle -1,19^\circ \text{ V},$$

$$V_{BN} = 115,22 \angle 118,81^\circ \text{ V},$$

$$V_{CN} = 115,22 \angle -121,19^\circ \text{ V}.$$

Para una secuencia de fases negativa, las tensiones de línea están retardadas  $30^\circ$  con respecto a las tensiones de fase:

$$V_{AB} = (\sqrt{3} \angle 30^\circ) V_{AN}$$

$$= 199,58 \angle -31,19^\circ \text{ V},$$

$$V_{BC} = 199,58 \angle 88,81^\circ \text{ V},$$

$$V_{CA} = 199,58 \angle -151,19^\circ \text{ V}.$$

Las tensiones de fase en los terminales del generador son

$$V_{an} = 118,90 \angle -0,32^\circ \text{ V},$$

$$V_{bn} = 118,90 \angle 119,68^\circ \text{ V},$$

$$V_{cn} = 118,90 \angle -120,32^\circ \text{ V}.$$

Las tensiones de línea en los terminales del generador son

$$V_{ab} = (\sqrt{3} \angle -30^\circ) V_{an}$$

$$= 205,94 \angle -30,32^\circ \text{ V},$$

$$V_{bc} = 205,94 \angle 89,68^\circ \text{ V}.$$

$$V_{ca} = 205,94 \angle -150,32^\circ \text{ V}.$$

### Evaluación del objetivo 1

■ Saber cómo analizar un circuito trifásico equilibrado estrella-estrella.

- 11.1. La tensión entre A y N de un circuito trifásico equilibrado es  $240 \angle -30^\circ$  V. Si la secuencia de fase es positiva, ¿cuál es el valor de  $V_{BC}$ ?

**RESPUESTA**  $415,69 \angle -120^\circ$  V.

- 11.2. La tensión de la fase c de un sistema trifásico equilibrado conectado en Y es  $450 \angle -25^\circ$  V. Si la secuencia de fases es negativa, ¿cuál es el valor de  $V_{AB}$ ?

**RESPUESTA**  $779,42 \angle 65^\circ$  V.

- 11.3. La tensión de fase en los terminales de una carga trifásica equilibrada con conexión en Y es de 2400 V. La carga tiene una impedancia de  $16 + j12 \Omega/\phi$  y está conectada mediante una línea de impedancia igual a  $0,10 + j0,80 \Omega/\phi$ . La fuente con conexión en Y que excita a la línea tiene como secuencia de fases acb y una impedancia interna de

valor  $0,02 + j0,16 \Omega/\phi$ . Utilice la tensión de la fase a en la carga como referencia y calcule (a) las corrientes de línea  $I_{aA}$ ,  $I_{bB}$  e  $I_{cC}$ ; (b) las tensiones de línea en la fuente,  $V_{ab}$ ,  $V_{bc}$  y  $V_{ca}$ ; y (c) las tensiones internas fase-neutro en la fuente,  $V_{a'n}$ ,  $V_{b'n}$  y  $V_{c'n}$ .

#### RESPUESTA

$$(a) I_{aA} = 120 \angle -36,87^\circ \text{ A},$$

$$I_{bB} = 120 \angle 83,13^\circ \text{ A e}$$

$$I_{cC} = 120 \angle -156,87^\circ \text{ A};$$

$$(b) V_{ab} = 4275,02 \angle -28,38^\circ \text{ V},$$

$$V_{bc} = 4275,02 \angle 91,62^\circ \text{ V y}$$

$$V_{ca} = 4275,02 \angle -148,38^\circ \text{ V};$$

$$(c) V_{a'n} = 2482,05 \angle 1,93^\circ \text{ V},$$

$$V_{b'n} = 2482,05 \angle 121,93^\circ \text{ V y}$$

$$V_{c'n} = 2482,05 \angle -118,07^\circ \text{ V}.$$

**NOTA** Trate también de resolver los Problemas 11.8-11.10 del capítulo.

## 11.4. Análisis del circuito estrella-triángulo

Si la carga en un circuito trifásico está conectada en triángulo, puede transformarse en una carga en estrella utilizando la transformación triángulo-estrella que ya hemos explicado en la Sección 9.6. Cuando la carga está equilibrada, la impedancia de cada rama de la estrella será igual a un tercio de la impedancia de cada arista del triángulo, es decir,

✦ **RELACIÓN ENTRE LA IMPEDANCIA TRIFÁSICA CON CONEXIÓN EN TRIÁNGULO Y CONEXIÓN EN ESTRELLA**

$$Z_Y = \frac{Z_\Delta}{3}, \quad (11.21)$$

lo que puede demostrarse directamente a partir de las Ecuaciones 9.51-9.53. Una vez sustituida la carga en  $\Delta$  por su equivalente en Y, la fase a puede modelarse mediante el circuito equivalente monofásico de la Figura 11.11.

Utilizaremos este circuito para calcular las corrientes de línea y luego emplearemos éstas para hallar las corrientes en cada rama de la carga en  $\Delta$  original. La relación entre las corrientes de línea y las corrientes en cada rama del triángulo puede deducirse empleando el circuito de la Figura 11.12.

Cuando una carga (o fuente) está conectada en triángulo, la corriente en cada rama del triángulo es la corriente de fase y la tensión que cae en cada rama es la tensión de fase. La Figura 11.12 muestra que, en la configuración  $\Delta$ , la tensión de fase es igual a la tensión de línea.

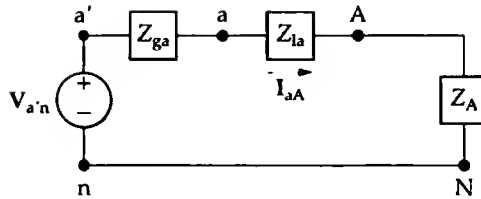


Figura 11.11. Un circuito equivalente monofásico.

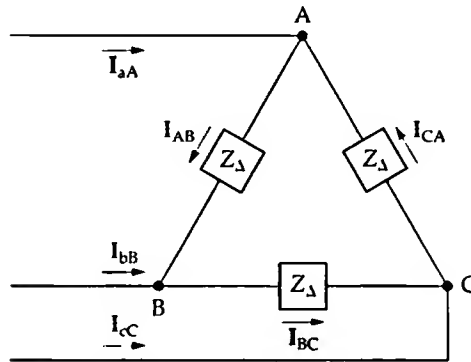


Figura 11.12. Circuito utilizado para establecer la relación entre las corrientes de línea y las corrientes de fase en una carga equilibrada en  $\Delta$ .

Para ver la relación entre las corrientes de fase y las corrientes de línea, vamos a suponer una secuencia de fases positiva y a designar mediante  $I_\phi$  la magnitud de la corriente de fase. Entonces,

$$I_{AB} = I_\phi \angle 0^\circ, \quad (11.22)$$

$$I_{BC} = I_\phi \angle -120^\circ, \quad (11.23)$$

$$I_{CA} = I_\phi \angle 120^\circ, \quad (11.24)$$

Al escribir estas ecuaciones, hemos seleccionado arbitrariamente  $I_{AB}$  como fasor de referencia.

Podemos escribir las corrientes de línea en términos de las corrientes de fase aplicando directamente la ley de Kirchhoff de las corrientes:

$$\begin{aligned} I_{aA} &= I_{AB} - I_{CA} \\ &= I_\phi \angle 0^\circ - I_\phi \angle 120^\circ \\ &= \sqrt{3} I_\phi \angle -30^\circ, \end{aligned} \quad (11.25)$$

$$\begin{aligned} I_{bB} &= I_{BC} - I_{AB} \\ &= I_\phi \angle -120^\circ - I_\phi \angle 0^\circ \\ &= \sqrt{3} I_\phi \angle -150^\circ, \end{aligned} \quad (11.26)$$

$$\begin{aligned} I_{cC} &= I_{CA} - I_{BC} \\ &= I_\phi \angle 120^\circ - I_\phi \angle -120^\circ \\ &= \sqrt{3} I_\phi \angle 90^\circ. \end{aligned} \quad (11.27)$$

Comparando las Ecuaciones 11.25-11.27 con las Ecuaciones 11.22-11.24, vemos que la magnitud de las corrientes de línea es igual a la magnitud de las corrientes de fase multiplicada por  $\sqrt{3}$  y que el conjunto de las corrientes de línea está retardado  $30^\circ$  con respecto al conjunto de las corrientes de fase.

Dejamos como ejercicio al lector la verificación de que, para una secuencia de fases negativa, las corrientes de línea son iguales en magnitud a las corrientes de fase multiplicadas por  $\sqrt{3}$  y están adelantadas  $30^\circ$  con respecto a las corrientes de fase. Así, disponemos de un nuevo atajo para calcular las corrientes de línea a partir de las corrientes de fase (o viceversa) en una carga trifásica equilibrada con conexión en  $\Delta$ . La Figura 11.13 resume esta técnica gráficamente. El Ejemplo 11.2 ilustra los cálculos implicados en el análisis de un circuito trifásico equilibrado con una fuente conectada en Y y una carga conectada en  $\Delta$ .

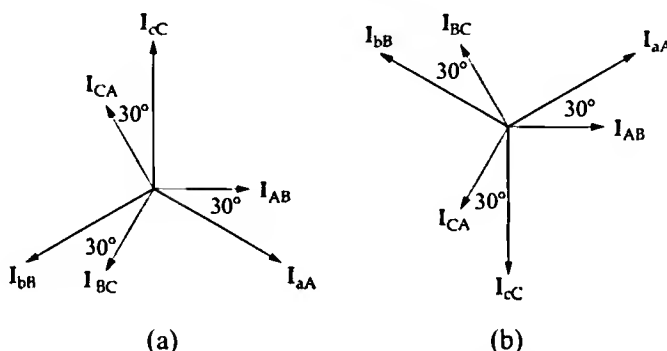


Figura 11.13. Diagramas de fasores que muestran la relación entre las corrientes de línea y las corrientes de fase en una carga conectada en  $\Delta$ . (a) Secuencia positiva. (b) Secuencia negativa.

### EJEMPLO 11.2 Análisis de un circuito estrella-triángulo

La fuente con conexión en Y del Ejemplo 11.1 alimenta a una carga con conexión en  $\Delta$  a través de una línea de distribución cuya impedancia es igual a  $0,3 + j0,9 \Omega/\phi$ . La impedancia de la carga es  $118,5 + j85,8 \Omega/\phi$ . Utilice la tensión interna de la fase a del generador como referencia.

- Construya un circuito equivalente monofásico para el sistema trifásico.
- Calcule las corrientes de línea  $I_{aA}$ ,  $I_{bB}$  e  $I_{cC}$ .
- Calcule las tensiones de fase en los terminales de carga.
- Calcule las corrientes de fase de la carga.
- Calcule las tensiones de línea en los terminales de la fuente.

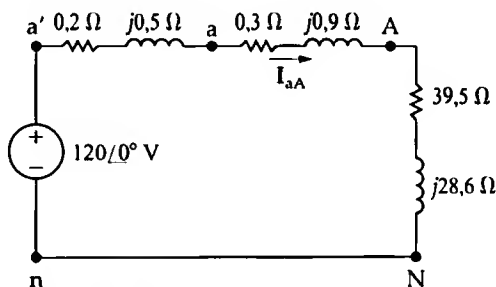


Figura 11.14. Circuito equivalente monofásico para el Ejemplo 11.2.

### SOLUCIÓN

- La Figura 11.14 muestra el circuito equivalente monofásico. La impedancia de carga del equivalente Y es

$$\frac{118,5 + j85,8}{3} = 39,5 + j28,6 \, \Omega / \phi.$$

- b) La corriente de línea de la fase a es

$$I_{aA} = \frac{120 \angle 0^\circ}{(0,2 + 0,3 + 39,5) + j(0,5 + 0,9 + 28,6)}$$

$$= \frac{120 \angle 0^\circ}{40 + j30} = 2,4 \angle -36,87^\circ \text{ A.}$$

De aquí,

$$I_{bB} = 2,4 \angle -156,87^\circ \text{ A,}$$

$$I_{cC} = 2,4 \angle 83,13^\circ \text{ A.}$$

- c) Puesto que la carga tiene una conexión en  $\Delta$ , las tensiones de fase son iguales a las tensiones de línea. Para calcular las tensiones de línea, calculamos primero  $V_{AN}$ :

$$V_{AN} = (39,5 + j28,6)(2,4 \angle -36,87^\circ)$$

$$= 117,04 \angle -0,96^\circ \text{ V.}$$

Puesto que la secuencia de fases es positiva, la tensión de línea  $V_{AB}$  es

$$V_{AB} = (\sqrt{3} \angle 30^\circ) V_{AN}$$

$$= 202,72 \angle 29,04^\circ \text{ V.}$$

Por tanto,

$$V_{BC} = 202,72 \angle -90,96^\circ \text{ V,}$$

$$V_{CA} = 202,72 \angle 149,04^\circ \text{ V.}$$

- d) Las corrientes de fase de la carga pueden calcularse directamente a partir de las corrientes de línea:

$$I_{AB} = \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \angle 30^\circ \right) I_{aA} = 1,39 \angle -6,87^\circ \text{ A.}$$

Una vez conocida  $I_{AB}$ , podemos determinar también las otras corrientes de fase de la carga:

$$I_{BC} = 1,39 \angle -126,87^\circ \text{ A,}$$

$$I_{CA} = 1,39 \angle 113,13^\circ \text{ A.}$$

Observe que podemos comprobar los cálculos de  $I_{AB}$  utilizando el valor de  $V_{AB}$  previamente calculado y la impedancia de la carga conectada en  $\Delta$ ; es decir,

$$I_{AB} = \frac{V_{AB}}{Z_\phi} = \frac{202,72 \angle 29,04^\circ}{118,5 + j85,8}$$

$$= 1,39 \angle -6,87^\circ \text{ A.}$$

- e) Para calcular la tensión de línea en los terminales de la fuente, primero calculamos  $V_{an}$ . La Figura 11.14 muestra que  $V_{an}$  es la caída de tensión en bornes de la impedancia de línea más la impedancia de carga, por lo que

$$V_{an} = (39,8 + j29,5)(2,4 \angle -36,87^\circ)$$

$$= 118,90 \angle -0,32^\circ \text{ V.}$$

La tensión de línea  $V_{ab}$  será

$$V_{ab} = (\sqrt{3} \angle 30^\circ) V_{an}.$$

o

$$V_{ab} = 205,94 \angle 29,68^\circ \text{ V.}$$

Por tanto,

$$V_{bc} = 205,94 \angle -90,32^\circ \text{ V.}$$

$$V_{ca} = 205,94 \angle 149,68^\circ \text{ V.}$$

## Evaluación del objetivo 2

- Saber cómo analizar un circuito trifásico equilibrado con conexión estrella-triángulo.

11.4. La corriente  $I_{CA}$  en una carga trifásica equilibrada con conexión en  $\Delta$  es  $8 \angle -15^\circ \text{ A}$ .

Si la secuencia de fases es positiva, ¿cuál es el valor de  $I_{cC}$ ?

**RESPUESTA**  $13,86 \angle -45^\circ \text{ A}$ .

- 11.5. Alimentamos una carga trifásica equilibrada con conexión en  $\Delta$  mediante un circuito trifásico equilibrado. La dirección de referencia para la corriente de línea correspondiente a la fase b es hacia la carga. El valor de la corriente en la fase b es  $12 \angle 65^\circ \text{ A}$ . Si la secuencia de fases es negativa, ¿cuál es el valor de  $I_{AB}$ ?

**RESPUESTA**  $6,93 \angle -85^\circ \text{ A}$ .

- 11.6. La tensión de línea  $V_{AB}$  en los terminales de una carga trifásica equilibrada con conexión en  $\Delta$  es  $4160 \angle 0^\circ \text{ V}$ . La corriente de línea  $I_{aA}$  es  $69,28 \angle -10^\circ \text{ A}$ .

- a) Calcule la impedancia por cada fase de la carga si la secuencia de fases es positiva.

- b) Repita el apartado (a) para una secuencia de fases negativa.

**RESPUESTA** (a)  $104 \angle -20^\circ \Omega$ .

(b)  $104 \angle +40^\circ \Omega$ .

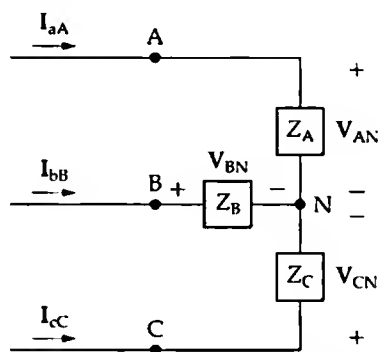
- 11.7. La tensión de línea en los terminales de una carga equilibrada con conexión en  $\Delta$  es de 110 V. Cada fase de la carga está compuesta por una resistencia de  $3,667 \Omega$  en paralelo con una impedancia inductiva de  $2,75 \Omega$ . ¿Cuál es la magnitud de la corriente en la línea que alimenta a la carga?

**RESPUESTA** 86,60 A.

**NOTA** Trate también de resolver el Problema 11.11 del capítulo.

## 11.5. Cálculos de potencia en circuitos trifásicos equilibrados

Hasta ahora, hemos limitado nuestro análisis de los circuitos trifásicos equilibrados a la determinación de las corrientes y las tensiones. Vamos a ver ahora lo relativo al cálculo de la potencia trifásica. Comenzaremos considerando la potencia media suministrada a una carga equilibrada conectada en Y.



**Figura 11.15.** Carga equilibrada en Y utilizada para introducir los cálculos de potencia media en los circuitos trifásicos.

### Potencia media en una carga equilibrada en estrella

La Figura 11.15 muestra una carga conectada en Y, junto con las respectivas corrientes y tensiones. Vamos a calcular la potencia media asociada con cualquiera de las fases utilizando las técnicas presen-



tadas en el Capítulo 10. Partiendo de la Ecuación 10.21, podemos expresar la potencia media asociada con la fase a como

$$P_A = |\mathbf{V}_{AN}| |\mathbf{I}_{aA}| \cos (\theta_{vA} - \theta_{iA}), \quad (11.28)$$

donde  $\theta_{vA}$  y  $\theta_{iA}$  denotan los ángulos de fase de  $\mathbf{V}_{AN}$  e  $\mathbf{I}_{aA}$ , respectivamente. Utilizando la notación introducida en la Ecuación 12.18, podemos hallar la potencia asociada con las fases b y c:

$$P_B = |\mathbf{V}_{BN}| |\mathbf{I}_{bB}| \cos (\theta_{vB} - \theta_{iB}); \quad (11.29)$$

$$P_C = |\mathbf{V}_{CN}| |\mathbf{I}_{cC}| \cos (\theta_{vC} - \theta_{iC}). \quad (11.30)$$

En las Ecuaciones 11.28-11.30, todos los fasores de corriente y de tensión están escritos en función del valor rms de la función sinusoidal que representan.

En un sistema trifásico equilibrado, la magnitud de cada tensión línea-neutro es la misma, al igual que lo es la magnitud de cada corriente de fase. El argumento de las funciones coseno también es el mismo para las tres fases. Hagamos hincapié en estas observaciones introduciendo la siguiente notación:

$$V_\phi = |\mathbf{V}_{AN}| = |\mathbf{V}_{BN}| = |\mathbf{V}_{CN}|, \quad (11.31)$$

$$I_\phi = |\mathbf{I}_{aA}| = |\mathbf{I}_{bB}| = |\mathbf{I}_{cC}|, \quad (11.32)$$

y

$$\theta_\phi = \theta_{vA} - \theta_{iA} = \theta_{vB} - \theta_{iB} = \theta_{vC} - \theta_{iC}. \quad (11.33)$$

Además, para un sistema equilibrado, la potencia entregada a cada fase de la carga es la misma, por lo que

$$P_A = P_B = P_C = P_\phi = V_\phi I_\phi \cos \theta_\phi, \quad (11.34)$$

donde  $P_\phi$  representa la potencia media por cada fase.

La potencia media total entregada a la carga equilibrada con conexión en Y es, simplemente, tres veces la potencia por fase, o

$$P_T = 3P_\phi = 3V_\phi I_\phi \cos \theta_\phi. \quad (11.35)$$

También resulta conveniente expresar la potencia total en términos de las magnitudes rms de la tensión y la corriente de línea. Si representamos mediante  $V_L$  e  $I_L$  las magnitudes rms de la tensión y de la corriente de línea, respectivamente, podemos modificar la Ecuación 11.35 de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} P_T &= 3 \left( \frac{V_L}{\sqrt{3}} \right) I_L \cos \theta_\phi \\ \Rightarrow \quad \text{POTENCIA REAL TOTAL EN UNA CARGA TRIFÁSICA EQUILIBRADA} \\ &= \sqrt{3} V_L I_L \cos \theta_\phi. \end{aligned} \quad (11.36)$$

Al derivar la Ecuación 11.36, hemos utilizado el hecho de que, para una carga equilibrada conectada en Y, la magnitud de la tensión de fase es igual a la magnitud de la tensión de línea dividida entre  $\sqrt{3}$ , y de que la magnitud de la corriente de línea es igual a la magnitud de la corriente de fase. Cuando se utiliza la Ecuación 11.36 para calcular la potencia total entregada a la carga, es preciso recordar que  $\theta_\phi$  es el ángulo de fase entre la tensión y la corriente de la fase.

## Potencia compleja en una carga equilibrada en estrella

También podemos calcular la potencia reactiva y la potencia compleja asociadas con cualquiera de las fases de una carga conectada en Y, utilizando las técnicas presentadas en el Capítulo 10. Para una carga equilibrada, las expresiones correspondientes a la potencia reactiva son

$$\Rightarrow \text{POTENCIA REACTIVA TOTAL EN UNA CARGA TRIFÁSICA EQUILIBRADA} \quad Q_\phi = V_\phi I_\phi \sin \theta_\phi, \quad (11.37)$$

$$Q_T = 3Q_\phi = \sqrt{3}V_L I_L \sin \theta_\phi. \quad (11.38)$$

La Ecuación 10.29 es la base para expresar la potencia compleja asociada con cualquiera de las fases. Para una carga equilibrada,

$$S_\phi = \mathbf{V}_{AN} \mathbf{I}_{aA}^* = \mathbf{V}_{BN} \mathbf{I}_{bB}^* = \mathbf{V}_{CN} \mathbf{I}_{cC}^* = \mathbf{V}_\phi \mathbf{I}_\phi^*, \quad (11.39)$$

donde  $\mathbf{V}_\phi$  e  $\mathbf{I}_\phi$  representan una tensión y una corriente de fase tomadas de la misma fase. Así, en general,

$$\Rightarrow \text{POTENCIA COMPLEJA TOTAL EN UNA CARGA TRIFÁSICA EQUILIBRADA} \quad S_\phi = P_\phi + jQ_\phi = \mathbf{V}_\phi \mathbf{I}_\phi^*, \quad (11.40)$$

$$S_T = 3S_\phi = \sqrt{3}V_L I_L \angle \theta_\phi^\circ. \quad (11.41)$$

## Cálculos de potencia en una carga equilibrada en triángulo

Si la carga está conectada en  $\Delta$ , el cálculo de la potencia (reactiva o compleja) es básicamente el mismo que para una carga conectada en Y. La Figura 11.16 muestra una carga conectada en  $\Delta$ , junto con sus corrientes y tensiones pertinentes. La potencia asociada con cada fase es

$$P_A = |\mathbf{V}_{AB}| |\mathbf{I}_{AB}| \cos (\theta_{vAB} - \theta_{iAB}), \quad (11.42)$$

$$P_B = |\mathbf{V}_{BC}| |\mathbf{I}_{BC}| \cos (\theta_{vBC} - \theta_{iBC}), \quad (11.43)$$

$$P_C = |\mathbf{V}_{CA}| |\mathbf{I}_{CA}| \cos (\theta_{vCA} - \theta_{iCA}). \quad (11.44)$$

Para una carga equilibrada,

$$|\mathbf{V}_{AB}| = |\mathbf{V}_{BC}| = |\mathbf{V}_{CA}| = V_\phi, \quad (11.45)$$

$$|\mathbf{I}_{AB}| = |\mathbf{I}_{BC}| = |\mathbf{I}_{CA}| = I_\phi, \quad (11.46)$$

$$\theta_{vAB} - \theta_{iAB} = \theta_{vBC} - \theta_{iBC} = \theta_{vCA} - \theta_{iCA} = \theta_\phi, \quad (11.47)$$

y

$$P_A = P_B = P_C = P_\phi = V_\phi I_\phi \cos \theta_\phi. \quad (11.48)$$

Observe que la Ecuación 11.48 es igual a la Ecuación 11.34. Así, para una carga equilibrada, independientemente de que esté conectada en Y o en  $\Delta$ , la potencia media por fase es igual al producto de la magnitud rms de la tensión de fase, de la magnitud rms de la corriente de fase y del coseno del ángulo existente entre la tensión y la corriente de fase.

La potencia total suministrada a una carga equilibrada conectada en  $\Delta$  es

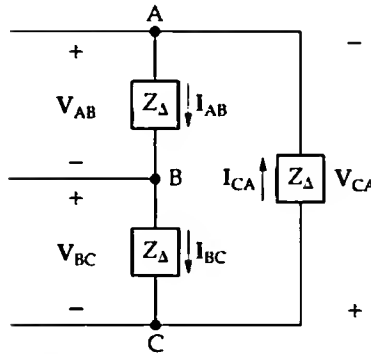


Figura 11.16. Una carga conectada en  $\Delta$  usada para ilustra los cálculos de potencia.

$$\begin{aligned}
 P_T &= 3P_\phi = 3V_\phi I_\phi \cos \theta_\phi \\
 &= 3V_L \left( \frac{I_L}{\sqrt{3}} \right) \cos \theta_\phi \\
 &= \sqrt{3} V_L I_L \cos \theta_\phi.
 \end{aligned} \tag{11.49}$$

Observe que la Ecuación 11.49 es igual a la Ecuación 11.36. Las expresiones correspondientes a la potencia reactiva y a la potencia compleja también tienen la misma forma que las que ya hemos deducido para la carga en Y:

$$Q_\phi = V_\phi I_\phi \sin \theta_\phi; \tag{11.50}$$

$$Q_T = 3Q_\phi = 3V_\phi I_\phi \sin \theta_\phi; \tag{11.51}$$

$$S_\phi = P_\phi + jQ_\phi = V_\phi I_\phi^*; \tag{11.52}$$

$$S_T = 3S_\phi = \sqrt{3} V_L I_L \angle \theta_\phi. \tag{11.53}$$

## Potencia instantánea en los circuitos trifásicos

Aunque lo que nos interesa principalmente son los cálculos de la potencia media, reactiva y compleja, también es importante poder calcular la potencia instantánea total. En un circuito trifásico equilibrado, esta potencia tiene una propiedad interesante: ¡es invariante con el tiempo! Gracias a esto, el **par motor** desarrollado en el eje de un motor trifásico es constante, lo que a su vez implica menos vibraciones en las máquinas que incorporan dichos motores trifásicos.

Tomemos como referencia la tensión instantánea línea-neutro  $v_{AN}$  y, como antes, sea  $\theta_\phi$  el ángulo de fase  $\theta_{v_A} - \theta_{i_A}$ . Entonces, para una secuencia de fases positiva, la potencia instantánea en cada fase será

$$p_A = v_{AN} i_{aA} = V_m I_m \cos \omega t \cos (\omega t - \theta_\phi),$$

$$p_B = v_{BN} i_{bB} = V_m I_m \cos (\omega t - 120^\circ) \cos (\omega t - \theta_\phi - 120^\circ),$$

$$p_C = v_{CN} i_{cC} = V_m I_m \cos (\omega t + 120^\circ) \cos (\omega t - \theta_\phi + 120^\circ),$$

donde  $V_m$  e  $I_m$  representan la amplitud máxima de la tensión de fase y de la corriente de línea, respectivamente. La potencia instantánea total es la suma de las potencias instantáneas de las fases, que es igual a  $1,5V_m I_m \cos \theta_\phi$ ; es decir,

$$p_T = p_A + p_B + p_C = 1,5V_m I_m \cos \theta_\phi.$$

Observe que este resultado es coherente con la Ecuación 11.35, ya que  $V_m = \sqrt{2}V_\phi$  e  $I_m = \sqrt{2}I_\phi$  (véase el Problema 11.21).

Los Ejemplos 11.3-11.5 ilustran los cálculos de potencia en los circuitos trifásicos equilibrados.

### EJEMPLO 11.3 Cálculo de la potencia en un circuito trifásico estrella-estrella

- |   |   |
|---|---|
| <p>a) Calcule la potencia media por fase entregada a la carga con conexión en Y del Ejemplo 11.1.</p> <p>b) Calcule la potencia media total entregada a la carga.</p> <p>c) Calcule la potencia media total perdida en la línea.</p> <p>d) Calcule la potencia media total que se pierde en el generador.</p> <p>e) Calcule el número total de vars magnetizantes absorbidos por la carga.</p> <p>f) Calcule la potencia compleja total suministrada por la fuente.</p> | <p>c) La potencia total que se pierde en la línea es</p> $P_{\text{línea}} = 3(2,4)^2(0,8) = 13,824 \text{ W.}$ <p>d) La potencia interna total que se pierde en el generador es</p> $P_{\text{gen}} = 3(2,4)^2(0,2) = 3,456 \text{ W.}$ <p>e) El número total de vars magnetizantes absorbidos por la carga es</p> $Q_T = \sqrt{3}(199,58)(2,4) \sin 35,68^\circ = 483,84 \text{ VAR.}$ <p>f) La potencia compleja total asociada con la fuente es</p> |
|---|---|

$$S_T = 3S_\phi = -3(120)(2,4) \angle 36,87^\circ$$

$$= -691,20 - j518,40 \text{ VA.}$$

El signo menos indica que se está entregando al circuito tanto potencia real como potencia reactiva magnetizante. Podemos comprobar este resultado calculando la potencia total y la potencia reactiva absorbidas por el circuito:

$$P = 673,92 + 13,824 + 3,456$$

$$= 691,20 \text{ W (correcto),}$$

$$Q = 483,84 + 3(2,4)^2(1,5) +$$

$$3(2,4)^2(0,5)$$

$$= 483,84 + 25,92 + 8,64$$

$$= 518,40 \text{ VAR (correcto).}$$

### SOLUCIÓN

- a) A partir del Ejemplo 11.1,  $V_\phi = 115,22 \text{ V}$ ,  $I_\phi = 2,4 \text{ A}$  y  $\theta_\phi = -1,19 - (-36,87) = 35,68^\circ$ . Por tanto,

$$P_\phi = (115,22)(2,4) \cos 35,68^\circ = 224,64 \text{ W.}$$

La potencia por fase puede también calcularse mediante la expresión  $I_\phi^2 R_\phi$ , con lo que queda

$$P_\phi = (2,4)^2(39) = 224,64 \text{ W.}$$

- b) La potencia media total suministrada a la carga es  $P_T = 3P_\phi = 673,92 \text{ W}$ . Hemos calculado la tensión de línea en el Ejemplo 11.1, por lo que también podemos usar la Ecuación 11.36:

$$P_T = \sqrt{3}(199,58)(2,4) \cos 35,68^\circ = 673,92 \text{ W.}$$

### EJEMPLO 11.4 Cálculo de la potencia en un circuito trifásico estrella-triángulo

- a) Calcule la potencia compleja total suministrada a la carga conectada en  $\Delta$  del Ejemplo 11.2.
- b) ¿Qué porcentaje de la potencia media del generador se está entregando a la carga?

#### SOLUCIÓN

- a) Utilizando los valores correspondientes a la fase a de la solución del Ejemplo 11.2, obtenemos

$$V_{\phi} = V_{AB} = 202,72 \angle 29,04^{\circ} \text{ V},$$

$$I_{\phi} = I_{AB} = 1,39 \angle -6,87^{\circ} \text{ A},$$

Usando las Ecuaciones 11.52 y 11.53 se obtiene

$$\begin{aligned} S_T &= 3(202,72 \angle 29,04^{\circ})(1,39 \angle 6,87^{\circ}) \\ &= 682,56 + j494,21 \text{ VA}. \end{aligned}$$

- b) La potencia total en el extremo de la línea de distribución correspondiente al generador es igual a la potencia total suministrada a la carga más la potencia total que se pierde en la línea; por tanto,

$$P_{\text{entrada}} = 682,56 + 3(2,4)^2(0,3) = 687,74 \text{ W}.$$

El porcentaje de la potencia media que alcanza a la carga es  $682,56/687,74$ , que es igual al 99,25%. Casi el 100% de la potencia media de entrada se entrega a la carga, porque la impedancia de la línea es muy pequeña comparada con la impedancia de la carga.

### EJEMPLO 11.5 Cálculo de la potencia trifásica con una carga no especificada

Una carga trifásica equilibrada requiere 480 kW con un factor de potencia de 0,8 en retardo. La carga está alimentada mediante una línea cuya impedancia es igual a  $0,005 + j0,025 \Omega/\phi$ . La tensión de línea en los terminales de la carga es de 600 V.

- a) Construya un circuito equivalente monofásico del sistema.
- b) Calcule la magnitud de la corriente de línea.
- c) Calcule la magnitud de la tensión de línea en el extremo de la línea correspondiente al generador.
- d) Calcule el factor de potencia en el extremo de la línea correspondiente al generador.

#### SOLUCIÓN

- a) La Figura 11.17 muestra el circuito equivalente monofásico. Hemos seleccionado

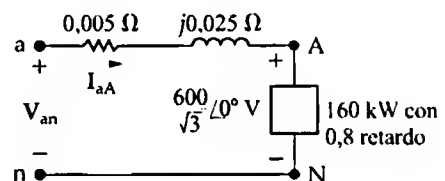


Figura 11.17. Circuito equivalente monofásico para el Ejemplo 11.5.

arbitrariamente la tensión línea-neutro en la carga como referencia.

- b) La corriente de línea  $I_{aA}^*$  está dada por

$$\left(\frac{600}{\sqrt{3}}\right) I_{aA}^* = (160 + j120)10^3.$$

o

$$I_{aA}^* = 577,35 \angle 36,87^{\circ} \text{ A}.$$

Por tanto,  $I_{aA} = 577,35 \angle -36,87^{\circ} \text{ A}$ . La magnitud de la corriente de línea es la magnitud de  $I_{aA}$ :

$$I_L = 577,35 \text{ A.}$$

Podemos obtener una solución alternativa para  $I_L$  a partir de la expresión

$$\begin{aligned} P_T &= \sqrt{3} V_L I_L \cos \theta_p \\ &= \sqrt{3} (600) I_L (0,8) = 480.000 \text{ W;} \\ I_L &= \frac{480.000}{\sqrt{3} (600) (0,8)} \\ &= \frac{1000}{\sqrt{3}} = 577,35 \text{ A.} \end{aligned}$$

- c) Para calcular la magnitud de la tensión de línea en el extremo del generador, calculamos primero  $V_{an}$ . A partir de la Figura 11.17,

$$\begin{aligned} V_{an} &= V_{AN} + Z_{\ell} I_{aA} \\ &= \frac{600}{\sqrt{3}} + (0,005 + j0,025)(577,35 \angle -36,87^\circ) \\ &= 357,51 \angle 1,57^\circ \text{ V.} \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} V_L &= \sqrt{3} |V_{an}| \\ &= 619,23 \text{ V.} \end{aligned}$$

- d) El factor de potencia en el extremo de la línea correspondiente al generador es el coseno del ángulo de fase entre  $V_{an}$  e  $I_{aA}$ :

$$\begin{aligned} \text{fp} &= \cos [1,57^\circ - (-36,87^\circ)] \\ &= \cos 38,44^\circ \\ &= 0,783 \text{ en retardo.} \end{aligned}$$

Un método alternativo para calcular el factor de potencia consiste en calcular primero la potencia compleja en el extremo de la línea correspondiente al generador:

$$\begin{aligned} S_\phi &= (160 + j120)10^3 \\ &\quad + (577,35)^2(0,005 + j0,025) \\ &= 161,67 + j128,33 \text{ kVA} \\ &= 206,41 \angle 38,44^\circ \text{ kVA.} \end{aligned}$$

El factor de potencia es

$$\begin{aligned} \text{fp} &= \cos 38,44^\circ \\ &= 0,783 \text{ en retardo.} \end{aligned}$$

Finalmente, si calculamos la potencia compleja total en el extremo de la línea correspondiente al generador, después de calcular primero la magnitud de la corriente de línea, podemos usar este valor para calcular  $V_L$ . Es decir,

$$\begin{aligned} \sqrt{3} V_L I_L &= 3(206,41) \times 10^3, \\ V_L &= \frac{3(206,41) \times 10^3}{\sqrt{3}(577,35)} \\ &= 619,23 \text{ V.} \end{aligned}$$

### Evaluación del objetivo 3

- Ser capaz de calcular la potencia (media, reactiva y compleja) en cualquier circuito trifásico.

11.8. La potencia media trifásica nominal de la unidad central de proceso (UCP) de una computadora mainframe es de 22.659 W. La línea trifásica que alimenta a la computadora tiene una tensión de línea nominal de 208 V (rms). La corriente de línea es de

73,8 A (rms). La computadora está absorbiendo vars magnetizantes.

- Calcule la potencia reactiva magnetizante total absorbida por la UCP.
- Calcule el factor de potencia.

**RESPUESTA**

- (a) 13.909,50 VAR;  
 (b) 0,852 en retardo.

11.9. La potencia compleja asociada con cada fase de una carga equilibrada es  $144 + j192$  kVA. La tensión de línea en los terminales de la carga es de 2450 V.

- a) ¿Cuál es la magnitud de la corriente de línea que alimenta a la carga?  
 b) La carga está conectada en triángulo y la impedancia de cada fase está com-

puesta por una resistencia en paralelo con una reactancia. Calcule  $R$  y  $X$ .

- c) La carga está conectada en estrella y la impedancia de cada fase está compuesta por una resistencia en serie con una reactancia. Calcule  $R$  y  $X$ .

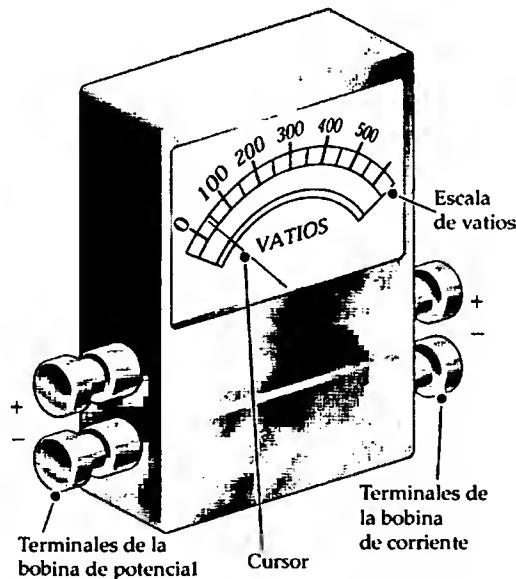
**RESPUESTA**

- (a) 169,67 A;  
 (b)  $R = 41,68 \Omega$ ,  $X = 31,26 \Omega$ ;  
 (c)  $R = 5 \Omega$ ,  $X = 6,67 \Omega$ .

**NOTA** Trate también de resolver los Problemas 11.22 y 11.23 del capítulo.

## 11.6. Medida de la potencia media en circuitos trifásicos

El instrumento básico utilizado para medir la potencia en circuitos trifásicos es el vatímetro electrodinamómetro. Este instrumento contiene dos bobinas. Una de las bobinas, llamada **bobina de corriente**, es estática y está diseñada para transportar una corriente proporcional a la corriente de carga. La segunda bobina, llamada **bobina de potencial**, es móvil y transporta una corriente proporcional a la tensión de la carga. La Figura 11.18 muestra las características más importantes de este vatímetro.



**Figura 11.18.** Características fundamentales del vatímetro electrodinamómetro.

La deflexión media del puntero asociado a la bobina móvil es proporcional al producto del valor eficaz de la corriente en la bobina de corriente, del valor eficaz de la tensión impuesta a la bobina de

potencial y del coseno del ángulo de fase entre la tensión y la corriente. La dirección en la que se desvíe el cursor dependerá de la polaridad instantánea de la corriente que atraviesa la bobina de corriente y de la tensión de la bobina de potencia. Por tanto, cada bobina tiene un terminal con una marca de polaridad (usualmente un signo más) aunque algunas veces se utiliza la doble marca de polaridad  $\pm$ . El cursor del vatímetro se moverá hacia arriba en la escala cuando (1) el terminal con marca de polaridad de la bobina de corriente esté orientado hacia la fuente y (2) el terminal con marca de polaridad de la bobina de potencial esté conectado a la misma línea en la que se haya insertado la bobina de corriente.

## Método de los dos vatímetros

Considere una red genérica dentro de una caja negra a la que se suministra potencia a través de  $n$  líneas conductoras. Dicho sistema se muestra en la Figura 11.19.

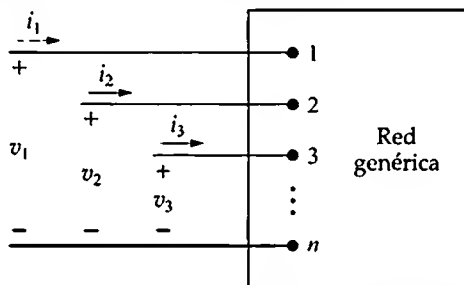


Figura 11.19. Circuito genérico al que se proporciona potencia a través de  $n$  conductores.

Si queremos medir la potencia total en los terminales de la caja, necesitamos conocer  $n - 1$  corrientes y tensiones. Esto es así porque, si seleccionamos un terminal como referencia, sólo hay  $n - 1$  tensiones independientes. De la misma forma, sólo podrán existir  $n - 1$  corrientes independientes en los  $n$  conductores que entran en la caja. Por tanto, la potencia total es la suma de  $n - 1$  términos producto, es decir,  $p = v_1 i_1 + v_2 i_2 + \dots + v_{n-1} i_{n-1}$ .

Aplicando esta observación general, podemos ver que, para un circuito de tres conductores, equilibrados o no, sólo necesitamos dos vatímetros para medir la potencia total. Para un circuito de cuatro conductores, necesitaríamos tres vatímetros si el circuito trifásico fuera no equilibrado, aunque sólo dos si fuera equilibrado, porque en este último caso no hay corriente en la línea neutra. Por tanto, sólo se necesitan dos vatímetros para medir la potencia media total en un sistema trifásico equilibrado.

El método de los dos vatímetros se reduce a determinar la magnitud y el signo algebraico de la potencia media indicada por cada vatímetro. Podemos describir el problema básico por medio del circuito mostrado en la Figura 11.20, donde los dos vatímetros se indican mediante los recuadros sombreados y están etiquetados como  $W_1$  y  $W_2$ . Las designaciones bc y bp para las bobinas indican la bobina de corriente y la bobina de potencial, respectivamente. Hemos decidido insertar las bobinas de corriente de los vatímetros en las líneas aA y cC. Por tanto, la línea bB es la línea de referencia para las dos bobinas de potencial. La carga está conectada en forma de estrella y la impedancia de carga por fase se representa mediante  $Z_\phi = |Z| \angle \theta$ . Este diagrama es completamente genérico, ya que cualquier carga conectada en  $\Delta$  puede representarse mediante su equivalente en Y. Además, para el caso equilibrado, el ángulo de impedancia  $\theta$  no se ve afectado por la transformación  $\Delta$ -Y.

Vamos a deducir ahora una serie de ecuaciones generales para las lecturas de los dos vatímetros. Vamos a suponer que la corriente absorbida por la bobina de potencial del vatímetro es despreciable



comparada con la corriente de línea medida por la bobina de corriente. También vamos a suponer que las cargas pueden modelarse mediante elementos de circuito pasivos, de modo que el ángulo de fase de la impedancia de carga ( $\theta$  en la Figura 11.20) está comprendido entre  $-90^\circ$  (capacitancia pura) y  $+90^\circ$  (inductancia pura). Finalmente, vamos a suponer una secuencia de fases positiva.

A partir de nuestra explicación introductoria sobre la deflexión media del vatímetro, podemos ver que el vatímetro 1 responderá al producto de  $|V_{AB}|$ ,  $|I_{aA}|$  y el coseno del ángulo entre  $V_{AB}$  e  $I_{aA}$ . Si designamos esta lectura del vatímetro como  $W_1$ , podemos escribir

$$\begin{aligned} W_1 &= |V_{AB}| |I_{aA}| \cos \theta_1 \\ &= V_L I_L \cos \theta_1. \end{aligned} \quad (11.54)$$

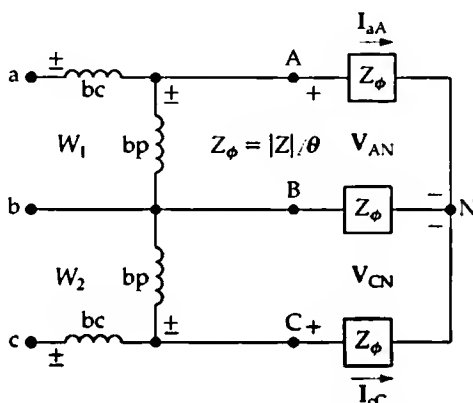


Figura 11.20. Circuito utilizado para analizar el método de los dos vatímetros para la medida de la potencia media entregada a una carga equilibrada.

De aquí se sigue que

$$\begin{aligned} W_2 &= |V_{CB}| |I_{cC}| \cos \theta_2 \\ &= V_L I_L \cos \theta_2. \end{aligned} \quad (11.55)$$

En la Ecuación 11.54,  $\theta_1$  es el ángulo de fase entre  $V_{AB}$  e  $I_{aA}$ , y en la Ecuación 11.55,  $\theta_2$  es el ángulo de fase entre  $V_{CB}$  e  $I_{cC}$ .

Para calcular  $W_1$  y  $W_2$ , expresamos  $\theta_1$  y  $\theta_2$  por medio del ángulo de impedancia  $\theta$ , que también es igual al ángulo entre la tensión y la corriente de fase. Para una secuencia de fases positiva,

$$\theta_1 = \theta + 30^\circ = \theta_\phi + 30^\circ, \quad (11.56)$$

$$\theta_2 = \theta - 30^\circ = \theta_\phi - 30^\circ. \quad (11.57)$$

Dejamos como ejercicio para el lector la demostración de las Ecuaciones 11.56 y 11.57 (véase el Problema 11.32). Cuando sustituimos las Ecuaciones 11.56 y 11.57 en las Ecuaciones 11.54 y 11.55, respectivamente, obtenemos

$$W_1 = V_L I_L \cos (\theta_\phi + 30^\circ), \quad (11.58)$$

$$W_2 = V_L I_L \cos (\theta_\phi - 30^\circ). \quad (11.59)$$

Para hallar la potencia total, sumamos  $W_1$  y  $W_2$ ; así,

$$\begin{aligned}
 P_T &= W_1 + W_2 = 2V_L I_L \cos \theta_\phi \cos 30^\circ \\
 &= \sqrt{3} V_L I_L \cos \theta_\phi,
 \end{aligned}
 \tag{11.60}$$

que es la ecuación correspondiente a la potencia total en un circuito trifásico. Por tanto, hemos confirmado que la suma de las lecturas de los dos vatímetros nos da la potencia media total.

Un examen más atento de las Ecuaciones 11.58 y 11.59 revela los hechos siguientes acerca de las lecturas de los dos vatímetros:

1. Si el factor de potencia es superior a 0,5, ambos vatímetros darán una lectura positiva.
2. Si el factor de potencia es igual a 0,5, uno de los dos vatímetros nos dará un valor cero.
3. Si el factor de potencia es inferior a 0,5, uno de los dos vatímetros nos dará un valor negativo.
4. Si invertimos la secuencia de fases, se intercambian las lecturas de los dos vatímetros.

Estas observaciones se ilustran en el siguiente ejemplo y en los Problemas 11.35-11.43.

### EJEMPLO 11.6 Cálculo de la lectura de los vatímetros en circuitos trifásicos

Calcule la lectura de cada vatímetro en el circuito de la Figura 11.20 si la tensión de fase en la carga es de 120 V y

- (a)  $Z_\phi = 8 + j6 \, \Omega$ ;
- (b)  $Z_\phi = 8 - j6 \, \Omega$ ;
- (c)  $Z_\phi = 5 + j5\sqrt{3} \, \Omega$  y
- (d)  $Z_\phi = 10 \angle -75^\circ \, \Omega$ .

(e) Verifique, para los apartados (a)-(d), que la suma de las lecturas de los vatímetros es igual a la potencia total suministrada a la carga.

#### SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad Z_\phi &= 10 \angle 36,87^\circ \, \Omega, V_L = 120\sqrt{3} \, \text{V} \text{ e} \\
 I_L &= 120/10 = 12 \, \text{A}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_1 &= (120\sqrt{3})(12) \cos (36,87^\circ + 30^\circ) \\
 &= 979,75 \, \text{W},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_2 &= (120\sqrt{3})(12) \cos (36,87^\circ - 30^\circ) \\
 &= 2476,25 \, \text{W}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b)} \quad Z_\phi &= 10 \angle -36,87^\circ \, \Omega, V_L = 120\sqrt{3} \, \text{V} \\
 \text{e } I_L &= 120/10 = 12 \, \text{A}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_1 &= (120\sqrt{3})(12) \cos (-36,87^\circ + 30^\circ) \\
 &= 2476,25 \, \text{W},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_2 &= (120\sqrt{3})(12) \cos (-36,87^\circ - 30^\circ) \\
 &= 979,75 \, \text{W}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c)} \quad Z_\phi &= 5(1 + j\sqrt{3}) = 10 \angle 60^\circ \, \Omega, V_L = 120\sqrt{3} \\
 \text{e } I_L &= 120/10 = 12 \, \text{A}.
 \end{aligned}$$

$$W_1 = (120\sqrt{3})(12) \cos (60^\circ + 30^\circ) = 0,$$

$$W_2 = (120\sqrt{3})(12) \cos (60^\circ - 30^\circ) = 2160 \, \text{W}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{d)} \quad Z_\phi &= 10 \angle -75^\circ \, \Omega, V_L = 120\sqrt{3} \, \text{V} \\
 I_L &= 12 \, \text{A}.
 \end{aligned}$$

$$W_1 = (120\sqrt{3})(12) \cos (-75^\circ + 30^\circ) = 1763,63 \, \text{W},$$

$$W_2 = (120\sqrt{3})(12) \cos (-75^\circ - 30^\circ) = -645,53 \, \text{W}.$$

$$\begin{aligned} \text{e) } P_T(\text{a}) &= 3(12)^2(8) = 3456 \text{ W,} \\ W_1 + W_2 &= 979,75 + 2476,25 \\ &= 3456 \text{ W,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_T(\text{b}) &= P_T(\text{a}) = 3456 \text{ W,} \\ W_1 + W_2 &= 2476,25 + 979,75 \\ &= 3456 \text{ W,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_T(\text{c}) &= 3(12)^2(5) = 2160 \text{ W,} \\ W_1 + W_2 &= 0 + 2160 \\ &= 2160 \text{ W,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_T(\text{d}) &= 3(12)^2(2,5882) = 1118,10 \text{ W,} \\ W_1 + W_2 &= 1763,63 - 645,53 \\ &= 1118,10 \text{ W.} \end{aligned}$$

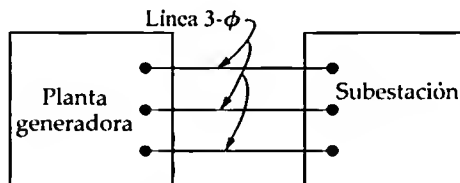
**NOTA** Evalúe su comprensión del método de los dos vatímetros tratando de resolver los Problemas 11.33 y 11.34 del capítulo.

## Perspectiva práctica

### Transmisión y distribución de energía eléctrica

Al principio de este capítulo hemos señalado la obligación que tienen las compañías eléctricas de mantener el nivel de tensión rms existente en las instalaciones de sus clientes. Aunque la desviación aceptable con respecto al valor nominal puede variar de una compañía a otra, vamos a suponer, sólo a efectos de nuestro análisis, que una tolerancia aceptable sea del  $\pm 5,8\%$ . Así, una tensión rms nominal de 120 V podría variar entre 113 y 127 V. También hemos señalado anteriormente que puede usarse una serie de condensadores estratégicamente situados dentro del sistema para mantener los niveles de tensión.

El circuito mostrado en la Figura 11.21 representa una subestación de un municipio. Vamos a suponer que el sistema está equilibrado, que la tensión línea-línea en la subestación es de 13,8 kV, que la impedancia de fase de la línea de distribución es de  $0,6 + j4,8 \Omega$  y que la carga en la subestación a las tres de la tarde en un cálido y húmedo día de julio es de 3,6 MW y 3,6 MVAR magnetizantes.



**Figura 11.21.** Una subestación conectada a una planta generadora a través de una línea trifásica.

Utilizando la tensión línea-neutro en la subestación como referencia, el circuito equivalente **monofásico** para el sistema de la Figura 11.21 es el que se muestra en la Figura 11.22. La corriente de línea puede calcularse a partir de la expresión correspondiente a la potencia compleja en la subestación:

$$\frac{13.800}{\sqrt{3}} I_{aA}^* = (1,2 + j1,2) 10^6.$$

De aquí se sigue que

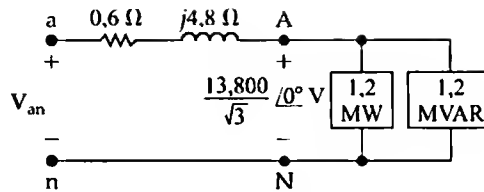


Figura 11.22. Circuito equivalente monofásico para el circuito de la Figura 11.21.

$$I_{aA}^* = 150,61 + j150,61 \text{ A}$$

o bien

$$I_{aA} = 150,61 - j150,61 \text{ A.}$$

La tensión línea-neutro en la planta generadora es

$$\begin{aligned} V_{an} &= \frac{13.800}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ + (0,6 + j4,8)(150,61 - j150,61) \\ &= 8780,74 + j632,58 \\ &= 8803,50 \angle 4,12^\circ \text{ V.} \end{aligned}$$

Por tanto, la magnitud de la tensión de línea en la planta generadora será

$$|V_{ab}| = \sqrt{3}(8803,50) = 15.248,11 \text{ V.}$$

Estamos suponiendo que la compañía eléctrica debe mantener el nivel de tensión con una tolerancia del  $\pm 5,8\%$  con respecto al valor nominal. Esto quiere decir que la magnitud de la tensión línea-línea en la planta generadora no debe exceder de 14,6 kV ni ser inferior a 13 kV. Por tanto, la magnitud de la tensión de línea en la planta generadora puede causar problemas a los clientes.

Si suministramos los vars magnetizantes mediante un banco de condensadores conectado al bus de la subestación, la corriente de línea  $I_{aA}$  queda

$$I_{aA} = 150,61 + j0 \text{ A.}$$

Por tanto, la tensión necesaria en la planta generadora para mantener una tensión línea-línea de 13.800 V en la subestación es

$$\begin{aligned} V_{an} &= \frac{13.800}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ + (0,6 + j4,8)(150,61 + j0) \\ &= 8057,80 + j722,94 \\ &= 8090,17 \angle 5,13^\circ \text{ V.} \end{aligned}$$

De aquí,

$$|V_{ab}| = \sqrt{3}(8090,17) = 14.012,58 \text{ V.}$$

Este nivel de tensión cae dentro del intervalo aceptable de 13 kV a 14,6 kV.

**NOTA** Evalúe su comprensión de esta Perspectiva práctica tratando de resolver los Problemas 11.44(a)-(b) y 11.45-11.47 del capítulo.

## RESUMEN

- A la hora de analizar circuitos trifásicos equilibrados, el primer paso consiste en transformar las conexiones en  $\Delta$  en conexiones en Y, para que el circuito global tenga una configuración Y-Y.  
(Véase la página 525).
- Utilizamos un **circuito equivalente monofásico** para calcular la corriente de línea y la tensión de fase en una de las fases de la estructura Y-Y. Normalmente se elige la fase a para este propósito (véase la página 527).
- Una vez conocida la corriente de línea y la tensión de fase en el circuito equivalente de la fase a, podemos emplear una serie de atajos analíticos para calcular cualquiera de las corrientes o tensiones en un circuito trifásico equilibrado, basándonos en los siguientes hechos:
  - Las corrientes y tensiones de las fases b y c son idénticas a la corriente y a la tensión de la fase a, exceptuando un desplazamiento de fase de  $120^\circ$ . En un circuito con secuencia de fases positiva, la fase b está retardada  $120^\circ$  con respecto a la fase a, mientras que la fase c está adelantada  $120^\circ$  con respecto a la fase a. Para un circuito con secuencia de fases negativa, las fases b y c se intercambian en lo que respecta a la fase a.
  - El conjunto de las tensiones de línea está desfasado  $\pm 30^\circ$  con respecto al conjunto de las tensiones de fase. El signo positivo o negativo corresponde a una secuencia de fases positiva o negativa, respectivamente.
  - En un circuito Y-Y, la magnitud de una tensión de línea es igual a la magnitud de la tensión de fase multiplicada por  $\sqrt{3}$ .
  - El conjunto de las corrientes de línea está desfasado  $\mp 30^\circ$  con respecto al conjunto de las corrientes de fase en las fuentes y cargas conectadas en  $\Delta$ . El signo menos o más corresponde a una secuencia de fases positiva o negativa, respectivamente.
  - La magnitud de la corriente de línea en una fuente o una carga conectadas en  $\Delta$  es igual a la magnitud de la corriente de fase multiplicada por  $\sqrt{3}$ .  
(Véanse las páginas 529 y 533).
  - Las técnicas para calcular la potencia, la potencia reactiva y la potencia compleja por fase son idénticas a las presentadas en el Capítulo 10 (véase la página 536).
  - Las potencias real, reactiva y compleja totales pueden determinarse multiplicando por 3 el correspondiente valor por fase o utilizando las expresiones basadas en la corriente de línea y la tensión de línea, dadas por las Ecuaciones 11.36, 11.38 y 11.41 (véanse las páginas 537 y 538).
  - La potencia instantánea total en un circuito trifásico equilibrado es constante e igual a 1,5 veces la potencia media por fase (véase la página 539).
  - Un vatímetro mide la potencia media suministrada a una carga utilizando una bobina de corriente conectada en **serie** con la carga y una bobina de potencial conectada en paralelo con la carga (véase la página 543).
  - La potencia media total en un circuito trifásico equilibrado puede medirse sumando las lecturas de dos vatímetros conectados a dos diferentes fases del circuito (véase la página 544).

## PROBLEMAS

Todos los fasores de tensión en los siguientes problemas están expresados en términos de su valor rms.

11.1. ¿Cuál es la secuencia de fases de cada uno de los siguientes conjuntos de tensiones?

a)  $v_a = 208 \cos(\omega t + 27^\circ) \text{ V}$ ,  
 $v_b = 208 \cos(\omega t + 147^\circ) \text{ V}$ ,  
 $v_c = 208 \cos(\omega t - 93^\circ) \text{ V}$ .

b)  $v_a = 4160 \cos(\omega t - 18^\circ) \text{ V}$ ,  
 $v_b = 4160 \cos(\omega t - 138^\circ) \text{ V}$ ,  
 $v_c = 4160 \cos(\omega t + 102^\circ) \text{ V}$ .

11.2. Para cada conjunto de tensiones, indique si las tensiones forman un conjunto trifásico equilibrado. Si el conjunto es equilibrado, indique si la secuencia de fases es positiva o negativa. Si el conjunto no está equilibrado, explique por qué.

a)  $v_a = 180 \cos 377t \text{ V}$ ,  
 $v_b = 180 \cos(377t - 120^\circ) \text{ V}$ ,  
 $v_c = 180 \cos(377t - 240^\circ) \text{ V}$ .

b)  $v_a = 180 \sin 377t \text{ V}$ ,  
 $v_b = 180 \sin(377t + 120^\circ) \text{ V}$ ,  
 $v_c = 180 \sin(377t - 120^\circ) \text{ V}$ .

c)  $v_a = -400 \sin 377t \text{ V}$ ,  
 $v_b = 400 \sin(377t + 210^\circ) \text{ V}$ ,  
 $v_c = 400 \cos(377t - 30^\circ) \text{ V}$ .

d)  $v_a = 200 \cos(\omega t + 30^\circ) \text{ V}$ ,  
 $v_b = 201 \cos(\omega t + 150^\circ) \text{ V}$ ,  
 $v_c = 200 \cos(\omega t + 270^\circ) \text{ V}$ ,

e)  $v_a = 208 \cos(\omega t + 42^\circ) \text{ V}$ ,  
 $v_b = 208 \cos(\omega t - 78^\circ) \text{ V}$ ,  
 $v_c = 208 \cos(\omega t - 201^\circ) \text{ V}$ ,

f)  $v_a = 240 \cos(377t) \text{ V}$ ,  
 $v_b = 240 \cos(377t - 120^\circ) \text{ V}$ ,  
 $v_c = 240 \cos(397t + 120^\circ) \text{ V}$ ,

11.3. Verifique que la Ecuación 11.3 es aplicable a la Ecuación 11.1 o a la Ecuación 11.2.

11.4. Tomemos el circuito de la Figura 11.5(b). Suponga que no hay conexiones externas con los terminales a, b, c. Suponga también que los tres devanados corresponden a un generador trifásico equilibrado. ¿Cuánta corriente circulará en el generador con conexión  $\Delta$ ?

- 11.5.** a) ¿Es equilibrado o no equilibrado el sistema trifásico del circuito mostrado en la Figura P11.5? Explique su respuesta.  
 b) Determine el valor de  $I_o$ .

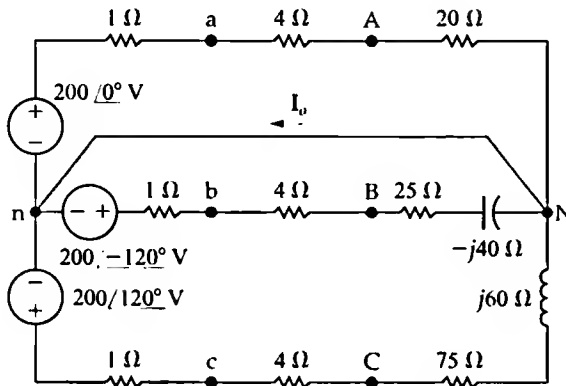


Figura P11.5

- 11.6.** a) Calcule  $I_o$  en el circuito de la Figura P11.6.  
 b) Calcule  $V_{AN}$ .  
 c) Calcule  $V_{AB}$ .  
 d) ¿Es este circuito un sistema trifásico equilibrado o no equilibrado?

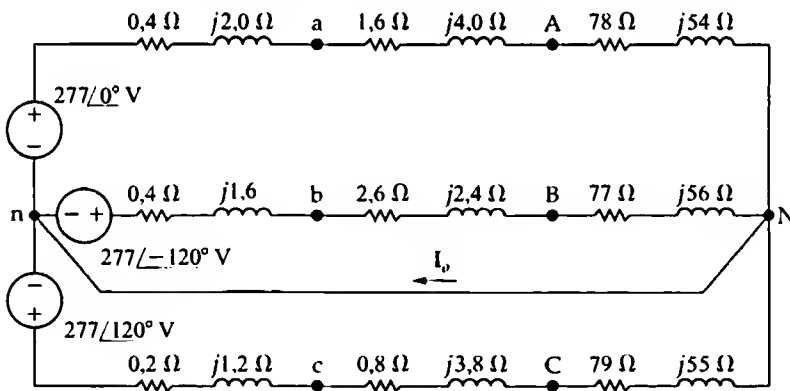


Figura P11.6

- 11.7.** Calcule el valor rms de  $I_o$  en el circuito trifásico no equilibrado que se muestra en la Figura P11.7.
- 11.8.** Las ecuaciones en el dominio del tiempo para las tres tensiones línea-neutro en los terminales de una carga conectada en Y son

$$v_{AN} = 169,71 \cos(\omega t + 26^\circ) \text{ V},$$

$$v_{BN} = 169,71 \cos(\omega t - 94^\circ) \text{ V},$$

$$v_{CN} = 169,71 \cos(\omega t + 146^\circ) \text{ V}.$$

¿Cuáles son las ecuaciones en el dominio del tiempo para las tres tensiones línea-línea  $v_{AB}$ ,  $v_{BC}$  y  $v_{CA}$ ?

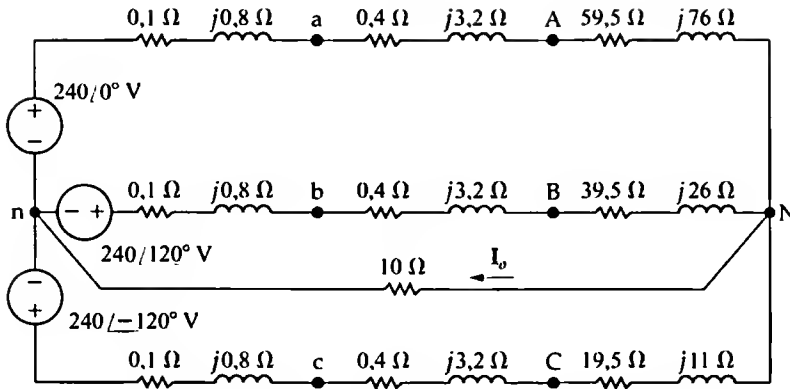


Figura P11.7

- 11.9. La magnitud de la tensión de línea en los terminales de una carga equilibrada conectada en Y es de 660 V. La impedancia de carga es  $30,48 + j22,86 \Omega/\phi$ . La carga está alimentada mediante una línea con una impedancia de  $0,25 + j2 \Omega/\phi$ .
- ¿Cuál es la magnitud de la corriente de línea?
  - ¿Cuál es la magnitud de la tensión de línea en la fuente?
- 11.10. La magnitud de la tensión de fase de una fuente trifásica equilibrada ideal con conexión en Y es de 125 V. La fuente está conectada a una carga equilibrada con conexión en Y mediante una línea de distribución que tiene una impedancia de  $0,1 + j0,8 \Omega/\phi$ . La impedancia de carga es  $19,9 + j14,2 \Omega/\phi$ . La secuencia de fases de la fuente es acb. Utilizando como referencia la tensión de la fase a de la fuente, especifique la magnitud y el ángulo de fase de los siguientes valores: (a) las tres corrientes de línea, (b) las tres tensiones de línea en la fuente, (c) las tres tensiones de fase en la carga y (d) las tres tensiones de línea en la carga.
- 11.11. Una carga equilibrada con conexión en  $\Delta$  tiene una impedancia de  $60 + j45 \Omega/\phi$ . La carga se alimenta a través de una línea cuya impedancia es igual a  $0,8 + j0,6 \Omega/\phi$ . La tensión de fase en los terminales de la carga es de 480 V. La secuencia de fases es positiva. Utilizando  $V_{AB}$  como referencia, calcule
- las tres corrientes de fase de la carga;
  - las tres corrientes de línea;
  - las tres tensiones de línea en el extremo de la línea correspondiente al generador.
- 11.12. Una carga equilibrada con conexión en Y y cuya impedancia es igual a  $72 + j21 \Omega/\phi$  se conecta en paralelo con una carga equilibrada con conexión en  $\Delta$  que tiene una impedancia de  $150 \angle 0^\circ / \phi$ . Las dos cargas en paralelo se alimentan mediante una línea cuya impedancia es  $j1 \Omega/\phi$ . La magnitud de la tensión línea-neutro de la carga en Y es de 7650 V.
- Calcule la magnitud de la corriente en la línea que alimenta a las cargas.
  - Calcule la magnitud de la corriente de fase en la carga conectada en  $\Delta$ .
  - Calcule la magnitud de la corriente de fase en la carga conectada en Y.
  - Calcule la magnitud de la tensión de línea en el extremo de la línea correspondiente al generador.
- 11.13. La Figura P11.13 muestra una fuente trifásica equilibrada con conexión en  $\Delta$ .
- Determine el circuito equivalente con conexión en Y.



- b) Demuestre que el circuito equivalente con conexión en Y proporciona la misma tensión en circuito abierto que la fuente original con conexión en  $\Delta$ .
- c) Aplique un cortocircuito externo a los terminales A, B y C. Utilice la fuente con conexión en  $\Delta$  para hallar las tres corrientes de línea  $I_{aA}$ ,  $I_{bB}$  e  $I_{cC}$ .
- d) Repita el apartado (c), pero utilice la fuente equivalente con conexión en Y para hallar las tres corrientes de línea.

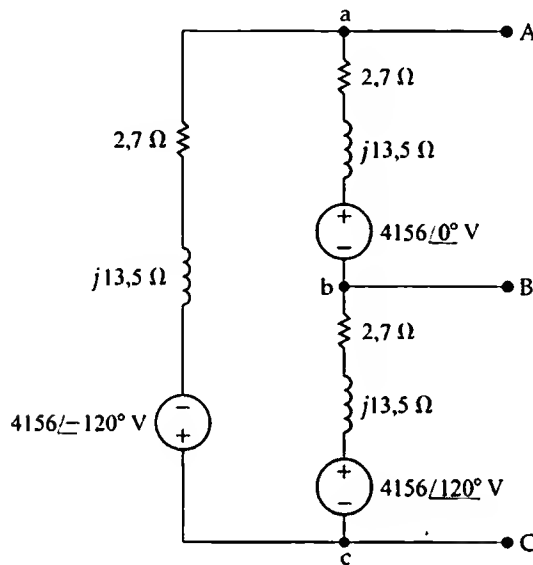


Figura P11.13

- 11.14. La fuente con conexión en  $\Delta$  del Problema 11.13 se conecta a una carga con conexión en Y por medio de una línea de distribución trifásica equilibrada. La impedancia de carga es  $1910 - j636 \Omega/\phi$  y la impedancia de línea  $9,1 + j71,5 \Omega/\phi$ .
  - a) Construya un circuito equivalente monofásico del sistema.
  - b) Determine la magnitud de la tensión de línea en los terminales de la carga.
  - c) Determine la magnitud de la corriente de fase en la fuente con conexión en  $\Delta$ .
  - d) Determine la magnitud de la tensión de línea en los terminales de la fuente.
- 11.15. Un generador trifásico con conexión en  $\Delta$  tiene una impedancia interna de  $0,009 + j0,09 \Omega/\phi$ . Cuando se desconecta la carga del generador, la magnitud de la tensión en los terminales es de 13.800 V. El generador alimenta a una carga conectada en  $\Delta$  a través de una línea de transmisión cuya impedancia es igual a  $0,02 + j0,18 \Omega/\phi$ . La impedancia por fase de la carga es de  $7,056 + j3,417 \Omega$ .
  - a) Construya un circuito equivalente monofásico.
  - b) Calcule la magnitud de la corriente de línea.
  - c) Calcule la magnitud de la tensión de línea en los terminales de la carga.
  - d) Calcule la magnitud de la tensión de línea en los terminales de la fuente.
  - e) Calcule la magnitud de la corriente de fase en la carga.
  - f) Calcule la magnitud de la corriente de fase en la fuente.

11.16. La impedancia  $Z$  en el circuito trifásico equilibrado de la Figura P11.16 es  $160 + j120 \Omega$ . Determine

- $I_{AB}$ ,  $I_{BC}$  e  $I_{CA}$ .
- $I_{aA}$ ,  $I_{bB}$  e  $I_{cC}$ .
- $I_{ba}$ ,  $I_{cb}$  e  $I_{ac}$ .

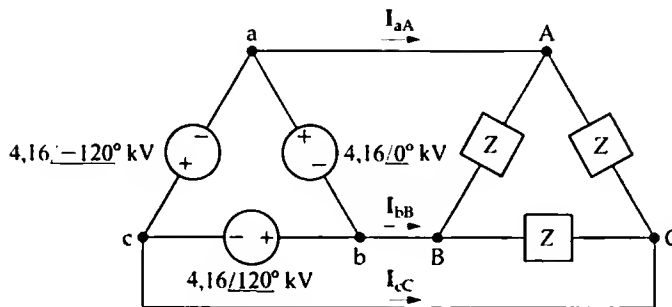


Figura P11.16

11.17. Para el circuito mostrado en la Figura P11.17, calcule

- las corrientes de fase  $I_{AB}$ ,  $I_{BC}$  e  $I_{CA}$
- las corrientes de línea  $I_{aA}$ ,  $I_{bB}$  e  $I_{cC}$

cuando  $Z_1 = 2,4 - j0,7 \Omega$ ,  $Z_2 = 8 + j6 \Omega$  y  $Z_3 = 20 + j0 \Omega$ .

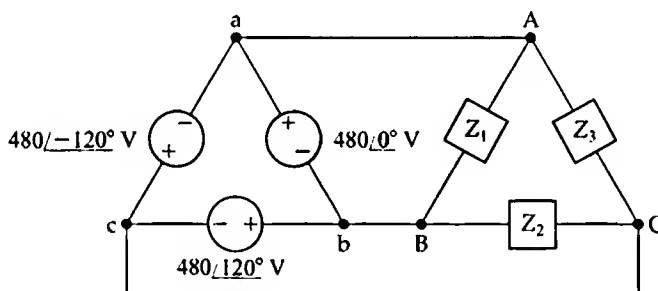


Figura P11.17

11.18. Calcule la potencia compleja en cada fase de la carga no equilibrada del Problema 11.17.

11.19. Tres cargas trifásicas equilibradas se conectan en paralelo. La carga 1 tiene una conexión en Y y una impedancia de  $400 + j300 \Omega/\phi$ ; la carga 2 tiene una conexión en  $\Delta$  con una impedancia de  $2400 - j1800 \Omega/\phi$ ; y la carga 3 es de  $172,8 + j2203,2 \text{ kVA}$ . Las tres cargas se alimentan mediante una línea de distribución con una impedancia de  $2 + j16 \Omega/\phi$ . La magnitud de la tensión línea-neutro en el extremo de la línea correspondiente a la carga es de  $24\sqrt{3} \text{ kV}$ .

- Calcule la potencia compleja total en el extremo de la línea correspondiente al generador.
- ¿Qué porcentaje de la potencia media en el extremo de la línea correspondiente al generador se está entregando a las cargas?

11.20. a) Calcule la magnitud rms y el ángulo de fase de  $I_{CA}$  en el circuito mostrado en la Figura P11.20.

- ¿Qué porcentaje de la potencia media suministrada por la fuente trifásica se disipa en la carga trifásica?

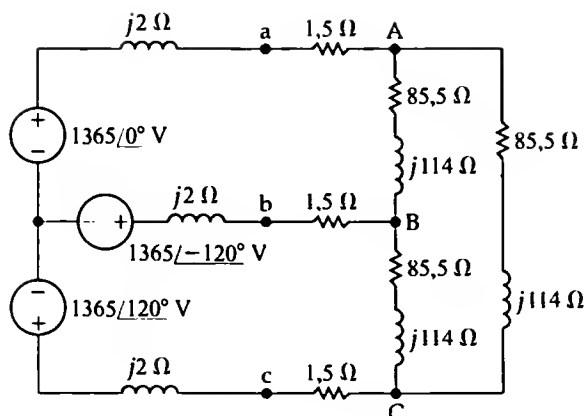


Figura P11.20

- 11.21. Demuestre que la potencia instantánea total en un circuito trifásico equilibrado es constante e igual a  $1,5V_m I_m \cos \theta_\phi$ , donde  $V_m$  e  $I_m$  representan las amplitudes máximas de la tensión de fase y de la corriente de fase, respectivamente.
- 11.22. Una línea de distribución trifásica equilibrada tiene una impedancia de  $1 + j8 \Omega/\phi$ . Esta línea se utiliza para alimentar a tres cargas trifásicas equilibradas conectadas en paralelo. Las tres cargas son  $L_1 = 120 \text{ kVA}$  con un fp de 0,96 en adelante,  $L_2 = 180 \text{ kVA}$  con fp de 0,80 en retardo y  $L_3 = 100,8 \text{ kW}$  y  $15,6 \text{ kVAR}$  (magnetizantes). La magnitud de la tensión de línea en los terminales de las cargas es  $2400\sqrt{3} \text{ V}$ .
- ¿Cuál es la magnitud de la tensión de línea en el extremo de la línea correspondiente al generador?
  - ¿Cuál es la eficiencia porcentual de la línea de distribución con respecto a la potencia media?
- 11.23. Instalamos los tres elementos informáticos que a continuación se describen como parte de un centro de cálculo. Cada dispositivo es una carga trifásica equilibrada con un valor nominal de 208 V. Calcule (a) la magnitud de la corriente de línea que alimenta a estos tres dispositivos y (b) el factor de potencia de la carga combinada:
- Disco: 4,864 kW con fp de 0,79 en retardo.
  - Unidad zip: 17,636 kVA con fp de 0,96 en retardo.
  - UCP: corriente de línea 73,8 A, 13,853 kVAR.
- 11.24. Una línea trifásica tiene una impedancia de  $0,1 + j0,8 \Omega/\phi$ . La línea alimenta dos cargas trifásicas equilibradas conectadas en paralelo. La primera carga está absorbiendo un total de 630 kW y 840 kVAR magnetizantes. La segunda carga está conectada en Y y tiene una impedancia de  $15,36 - j4,48 \Omega/\phi$ . La tensión línea-neutro en el extremo de la línea correspondiente a la carga es de 4000 V. ¿Cuál es la magnitud de la tensión de línea en el extremo de la línea correspondiente al generador?
- 11.25. A plena carga, un motor trifásico comercial de inducción de 100 hp opera con una eficiencia del 97% y un factor de potencia de 0,88 en retardo. El motor está alimentado mediante una toma trifásica cuya tensión de línea nominal es de 208 V.
- ¿Cuál es la magnitud de la corriente de línea que circula por la toma de 208 V? (1 hp = 746 W).

b) Calcule la potencia reactiva suministrada al motor.

**11.26.** La tensión línea-neutro de los terminales de la carga trifásica equilibrada del circuito mostrado en la Figura P11.26 es de 1200 V. A esta tensión, la carga está absorbiendo 500 kVA con un  $\text{fp}$  de 0,96 en retardo.

a) Utilice  $V_{AN}$  como referencia y exprese  $I_{na}$  en forma polar.

b) Calcule la potencia compleja asociada con la fuente trifásica ideal.

c) Compruebe que la potencia media total generada es igual a la potencia media total absorbida.

d) Compruebe que la potencia reactiva magnetizante total generada es igual a la potencia reactiva magnetizante total absorbida.

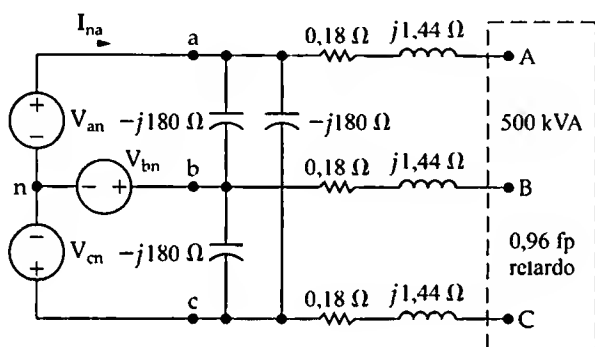


Figura P11.26

**11.27.** Una fuente trifásica equilibrada está suministrando 60 kVA con un  $\text{fp}$  de 0,96 en retardo a dos cargas equilibradas con conexión en  $\Delta$  conectadas en paralelo. La línea de distribución que conecta la fuente con la carga tiene una impedancia despreciable. La carga 1 es puramente resistiva y absorbe 45 kW.

a) Determine la impedancia por fase de la carga 2 si la tensión de línea es de 630 V y si los componentes de la impedancia están en serie.

b) Repita el apartado (a) considerando que los componentes de la impedancia estén en paralelo.

**11.28.** Una carga trifásica equilibrada absorbe 96 kVA con un factor de potencia de 0,8 en retardo cuando la tensión de línea en los terminales de la carga es de 480 V. Determine cuatro circuitos equivalentes que puedan usarse para modelar esta carga.

**11.29.** La salida de la fuente trifásica equilibrada con secuencia de fases positiva de la Figura P11.29 es de 41,6 kVA con un factor de potencia de 0,707 en retardo. La tensión de línea en la fuente es de 240 V.

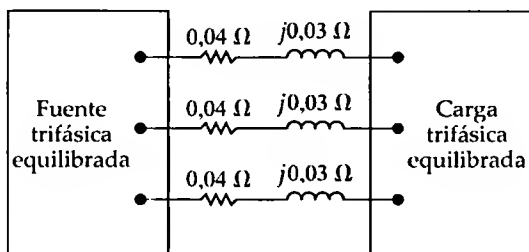


Figura P11.29

- a) Calcule la magnitud de la tensión de línea en la carga.
- b) Calcule la potencia compleja total en los terminales de la carga.
- 11.30.** La potencia total suministrada a una carga trifásica equilibrada cuando está operando a una tensión de línea de  $2400\sqrt{3}$  V es de 720 kW con un factor de potencia de 0,8 en retardo. La impedancia de la línea de distribución que alimenta a la carga es de  $0,8 + j6,4 \Omega/\phi$ . En estas condiciones de operación, la caída en la magnitud de la tensión de línea entre el extremo correspondiente al generador y el extremo correspondiente a la carga es excesiva. Para resolver este problema, se conecta una batería de condensadores en  $\Delta$  en paralelo con la carga. La batería de condensadores está diseñada para proporcionar 576 kVAR de potencia reactiva magnetizante cuando operan con una tensión de línea de  $2400\sqrt{3}$  V.
- a) ¿Cuál es la magnitud de la tensión en el extremo de la línea correspondiente al generador cuando la carga está operando con una tensión de línea de  $2400\sqrt{3}$  V y la batería de condensadores está desconectada?
- b) Repita el apartado (a) con la batería de condensadores conectada.
- c) ¿Cuál es la eficiencia de suministro de potencia media para la línea del apartado (a)?
- d) ¿Cuál es la eficiencia de suministro de potencia media en el apartado (b)?
- e) Si el sistema está operando a una frecuencia de 60 Hz, ¿cuál es el tamaño de cada condensador en microfaradios?
- 11.31.** Una batería equilibrada de condensadores conectados en triángulo se conecta en paralelo con la carga descrita en el Problema de evaluación 11.9. El efecto es el de situar un condensador en paralelo con la carga de cada fase. La tensión de línea en los terminales de la carga permanece fija a 2450 V. El circuito está operando con una frecuencia de 60 Hz. Ajustamos los condensadores para que la magnitud de la corriente de línea que alimenta a la combinación en paralelo de la carga y de la batería de condensadores sea mínima.
- a) ¿Cuál es el tamaño de cada condensador en microfaradios?
- b) Repita el apartado (a) para condensadores conectados en estrella.
- c) ¿Cuál es la magnitud de la corriente de línea?
- 11.32.** Demuestre las Ecuaciones 11.56 y 11.57.
- 11.33.** Utilizamos el método de los dos vatímetros para medir la potencia en el extremo correspondiente a la carga de la línea del Ejemplo 11.1. Calcule la lectura de cada vatímetro.
- 11.34.** Podemos usar los dos vatímetros de la Figura 11.20 para calcular la potencia reactiva total de la carga.
- a) Demuestre esta afirmación probando que  $\sqrt{3}(W_2 - W_1) = \sqrt{3}V_L I_L \sin \theta_\phi$ .
- b) Calcule la potencia reactiva total a partir de las lecturas de los vatímetros para cada una de las cargas del Ejemplo 11.6. Verifique los cálculos determinando la potencia reactiva total directamente a partir de la impedancia y la tensión dadas.
- 11.35.** En el circuito trifásico equilibrado que se muestra en la Figura P11.35, la bobina de corriente del vatímetro está conectada a la línea aA y la bobina de potencia del vatímetro está conectada entre las líneas b y c. Demuestre que la lectura del vatímetro multiplicada por  $\sqrt{3}$  es igual a la potencia reactiva total asociada con la carga. La secuencia de fases es positiva.

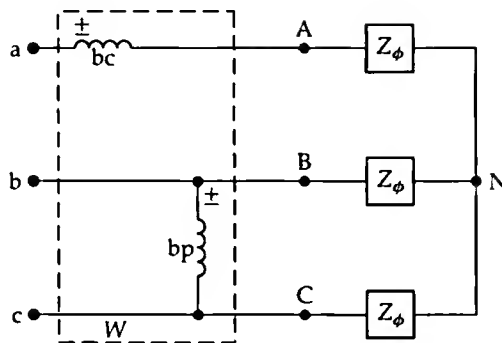


Figura P11.35

- 11.36.** La tensión línea-neutro del circuito de la Figura P11.35 es de 680 V, la secuencia de fases es positiva y la impedancia de carga es igual a  $16 - j12 \Omega/\phi$ .
- Calcule la lectura del vatímetro.
  - Calcule la potencia reactiva total asociada con la carga.
- 11.37.**
- Calcule la potencia compleja asociada con cada fase de la carga equilibrada del Problema 11.16.
  - Si utilizamos el método de los dos vatímetros para medir la potencia media suministrada a la carga, especifique la lectura de cada medidor.
- 11.38.** Alimentamos la carga trifásica equilibrada de la Figura P11.38 a partir de una fuente trifásica equilibrada de secuencia de fases positiva y con conexión en Y. La impedancia de la línea que conecta la fuente a la carga es despreciable. La tensión línea-neutro de la fuente es de 7200 V.
- Determine la lectura del vatímetro en vatios.
  - Explique cómo podría conectarse un segundo vatímetro al circuito de modo que los dos vatímetros permitieran medir la potencia total.
  - Calcule la lectura del segundo vatímetro.
  - Verifique que la suma de la lectura de los dos vatímetros es igual a la potencia media total entregada a la carga.

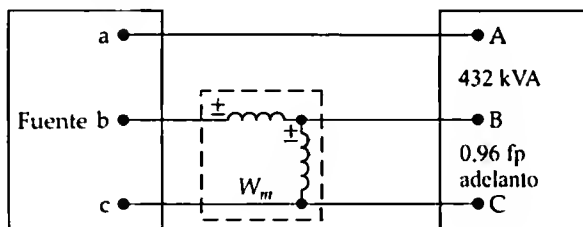


Figura P11.38

- 11.39.**
- Calcule la lectura de cada vatímetro en el circuito mostrado en la Figura P11.39. El valor de  $Z_\phi$  es  $40 \angle -30^\circ \Omega$ .
  - Verifique que la suma de las lecturas de los vatímetros es igual a la potencia media total suministrada a la carga conectada en  $\Delta$ .
- 11.40**
- Determine la lectura de cada vatímetro en el circuito mostrado en la Figura P11.40 si  $Z_A = 20 \angle 30^\circ \Omega$ ,  $Z_B = 60 \angle 0^\circ \Omega$  y  $Z_C = 40 \angle -30^\circ \Omega$ .

- b) Demuestre que la suma de las lecturas de los vatímetros es igual a la potencia media total suministrada a la carga trifásica no equilibrada.

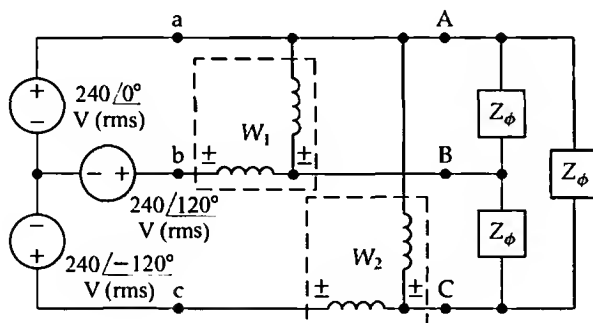


Figura 11.39

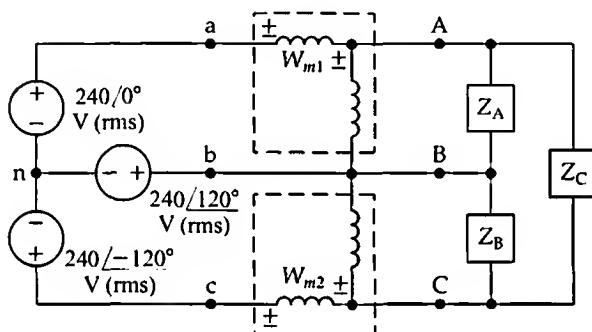


Figura P11.40

- 11.41. Los vatímetros del circuito de la Figura 11.20 proporcionan las siguientes lecturas:  $W_1 = 40.823,09 \text{ W}$  y  $W_2 = 103.176,91 \text{ W}$ . La magnitud de la tensión de línea es de 2400 V. La secuencia de fases es positiva. Calcule  $Z_\phi$ .
- 11.42. a) Determine la lectura de cada vatímetro en el circuito mostrado en la Figura P11.42 cuando  $Z = 13,44 + j46,08 \Omega$ .
- b) Verifique que la suma de las lecturas de los dos vatímetros es igual a la potencia total suministrada a la carga.
- c) Verifique que  $\sqrt{3}(W_1 - W_2)$  es igual al número total de vars magnetizantes suministrados a la carga.

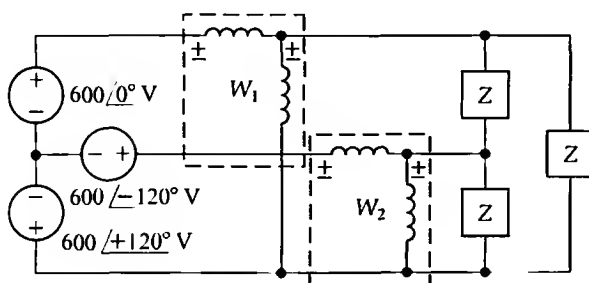


Figura P11.42

- 11.43.** Utilizamos el método de los dos vatímetros para medir la potencia entregada a la carga no equilibrada del Problema 11.17. Colocamos la bobina de corriente del vatímetro 1 en la línea aA y la del vatímetro 2 en la línea bB.
- Determine la lectura del vatímetro 1.
  - Determine la lectura del vatímetro 2.
  - Demuestre que la suma de las lecturas de los dos vatímetros es igual a la potencia total suministrada a la carga no equilibrada.
- 11.44.** En referencia al ejemplo de la Perspectiva práctica:
- ◆ a) Dibuje un triángulo de potencia para la carga de la subestación, antes de conectar los condensadores al bus.
  - b) Repita el apartado (a) después de conectar los condensadores al bus.
  - c) Utilizando la tensión línea-neutro en la subestación como referencia, dibuje un diagrama de fasores que muestre la relación entre  $V_{AN}$  y  $V_{an}$  antes de añadir los condensadores.
  - d) Suponga que la secuencia de fases es positiva y dibuje un diagrama de fasores que muestre la relación entre  $V_{AB}$  y  $V_{ab}$ .
- 11.45.** En referencia al ejemplo de la Perspectiva práctica, suponga que la frecuencia utilizada por la compañía eléctrica es de 60 Hz.
- ◆ a) ¿Cuál es el valor nominal en microfaradios de cada condensador si los condensadores están conectados en triángulo?
  - b) ¿Cuál es el valor nominal en microfaradios de cada condensador si los condensadores están conectados en estrella?
- 11.46.** En el ejemplo de la Perspectiva práctica, ¿qué sucede con el nivel de tensión en la planta generadora si la subestación se mantiene a 13,8 kV, se reduce la carga de la subestación a cero y dejamos conectada la batería de condensadores que habíamos añadido?
- ◆
- 11.47.** En el ejemplo de la Perspectiva práctica, calcule las pérdidas totales en la línea, en kilovatios, antes y después de conectar los condensadores al bus de la subestación.
- ◆
- 11.48.** Suponga que la carga en el bus de la subestación del ejemplo de la Perspectiva práctica se reduce a 240 kW y 600 kVAR magnetizantes. Suponga también que dejamos conectados los condensadores a la subestación.
- ◆
- ¿Cuál es la magnitud de la tensión línea-línea en la planta generadora que se requiere para mantener una tensión línea-línea de 13,8 kV en la subestación?
  - ¿Puede causar problemas a otros clientes este nivel de tensión en la planta generadora?
- 11.49.** Suponga, en el Problema 11.48, que al reducirse la carga a 240 kW y 600 kVAR magnetizantes, desconectamos la batería de condensadores en la subestación. Suponga también que la tensión línea-línea en la subestación permanece fija en 13,8 kV.
- ◆
- ¿Cuál es la magnitud de la tensión línea-línea en la planta generadora?
  - ¿Está dentro del rango aceptable de variación el nivel de tensión calculada en el apartado (a)?
  - ¿Cuáles son las pérdidas totales en la línea, en kilovatios, cuando dejamos los condensadores conectados después de reducirse la carga a  $240 + j600$  kVA?



- d) ¿Cuáles son las pérdidas totales en la línea, en kilovatios, cuando eliminamos los condensadores después de reducirse la carga a  $240 + j600$  kVA?
- e) Teniendo en cuenta los cálculos realizados, ¿recomendaría desconectar los condensadores después de que la carga se reduzca a  $240 + j600$  kVA? Explique su respuesta.

# CAPÍTULO

# 12

# Introducción a la transformada de Laplace

## Contenido del capítulo

- 12.1. Definición de la transformada de Laplace
- 12.2. La función escalón
- 12.3. La función impulsiva
- 12.4. Transformadas funcionales
- 12.5. Transformadas operacionales
- 12.6. Aplicación de la transformada de Laplace
- 12.7. Transformadas inversas
- 12.8. Polos y ceros de  $F(s)$
- 12.9. Teoremas del valor inicial y del valor final

Vamos a introducir ahora una potente técnica analítica que se utiliza ampliamente para estudiar el comportamiento de circuitos lineales de parámetros agrupados. El método está basado en la transformada de Laplace, que definiremos matemáticamente en la Sección 12.1. Pero antes de hacerlo así, necesitamos explicar por qué es necesaria otra técnica analítica más. En primer lugar, nos interesa estudiar el comportamiento transitorio de aquellos circuitos cuyas ecuaciones descriptivas constan de más de una ecuación diferencial de tensión de nodo o de corriente de malla. En otras palabras, queremos considerar los circuitos de múltiples nodos y múltiples mallas que se describen mediante sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.

En segundo lugar, queremos determinar la respuesta transitoria de aquellos circuitos cuyas fuentes de señal varían en formas más complicadas que los simples saltos de nivel de continua que hemos considerado en los Capítulos 7 y 8. En tercer lugar, podemos utilizar la transformada de Laplace para introducir el concepto de función de transferencia como herramienta para analizar la respuesta sinusoidal en régimen permanente de un circuito cuando se varía la frecuencia de la fuente sinusoidal. Analizaremos las funciones de transferencia en el Capítulo 13. Finalmente, queremos poner en relación, de forma sistemática, el comportamiento de un circuito en el dominio del tiempo, con su comportamiento en el dominio de la frecuencia. La utilización de la transformada de Laplace nos permitirá comprender más en profundidad las funciones de los circuitos.

En este capítulo, vamos a presentar la transformada de Laplace, a analizar sus características más sobresalientes y a desarrollar un método sistemático para la transformación del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia.

### Objetivos del capítulo

1. Ser capaz de calcular la transformada de Laplace de una función utilizando la definición de transformada de Laplace, la tabla de transformadas de Laplace y/o una tabla de transformadas operacionales.
2. Ser capaz de calcular la transformada inversa de Laplace utilizando la expansión en funciones parciales y la tabla de transformadas de Laplace.
3. Entender y saber cómo utilizar el teorema del valor inicial y el teorema del valor final.

## 12.1. Definición de la transformada de Laplace

La transformada de Laplace de una función está dada por la expresión

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt, \quad (12.1)$$

donde el símbolo  $\mathcal{L}\{f(t)\}$  se lee «la transformada de Laplace de  $f(t)$ ».

La transformada de Laplace de  $f(t)$  también se denomina  $F(s)$ ; es decir,

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}. \quad (12.2)$$

Esta notación permite resaltar que, una vez evaluada la integral de la Ecuación 12.1, la expresión resultante es una función de  $s$ . En nuestras aplicaciones,  $t$  representa el dominio del tiempo y, puesto que el exponente de  $e$  en la integral de la Ecuación 12.1 debe ser adimensional,  $s$  debe tener como dimensión el recíproco del tiempo, es decir, la frecuencia. La transformada de Laplace transforma el problema del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia. Después de obtener la expresión en el dominio de la frecuencia para la incógnita, podemos efectuar la transformación inversa para volver al dominio del tiempo.

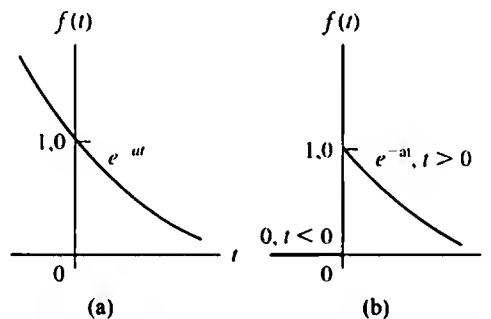
Si le parece extraña la idea subyacente a la transformada de Laplace, considere otro tipo de transformada matemática bastante familiar. Los logaritmos se emplean para cambiar un problema de multiplicación o división, como por ejemplo  $A = BC$ , en un problema más simple de suma o resta:  $\log A = \log BC = \log B + \log C$ . Para llevar a cabo el proceso inverso se utilizan los antilogaritmos. El fasor es también otra transformada; como hemos visto en el Capítulo 9, convierte una señal sinusoidal en un número complejo para poder calcular más fácilmente de manera algebraica los valores de las magnitudes de un circuito. Después de determinar el fasor correspondiente a una señal, podemos transformarlo de nuevo para hallar la expresión correspondiente en el dominio del tiempo. Ambos ejemplos permiten resaltar la característica esencial de las transformadas matemáticas: están diseñadas para crear un nuevo dominio que haga que los cálculos matemáticos sean más simples. Después de calcular la incógnita en el nuevo dominio, usamos la transformada inversa para volver al dominio original. En análisis de circuitos, empleamos la transformada de Laplace para transformar un conjunto de ecuaciones integrodiferenciales en el dominio del tiempo, y obtener así un conjunto de ecuaciones algebraicas en el dominio de la frecuencia. De este modo, simplificamos el proceso de cálculo de una magnitud desconocida, convirtiéndolo en una simple manipulación de un conjunto de ecuaciones algebraicas.

Antes de ilustrar algunas de las propiedades más importantes de la transformada de Laplace, conviene hacer algunos comentarios de carácter general. En primer lugar, observe que la integral de la Ecuación 12.1 es impropia, porque el límite superior es infinito. Así, la cuestión que surge de manera inmediata es si la integral converge o no. En otras palabras, dada una determinada función  $f(t)$ , ¿tiene esa función transformada de Laplace? Obviamente, las funciones que nos interesan principalmente en el análisis propio del campo de la ingeniería tienen transformadas de Laplace; si no fuera así, esta transformada no nos interesaría. En el análisis de circuitos lineales, excitamos los circuitos con fuentes que tienen transformadas de Laplace. Otras funciones de excitación, como  $t'$  o  $e^{t^2}$ , las cuales no tienen transformada de Laplace, no nos interesan en este sentido.

En segundo lugar, puesto que el límite inferior de la integral es cero, la transformada de Laplace no tiene en cuenta los valores de  $f(t)$  para valores negativos de  $t$ . Dicho de otro modo,  $F(s)$  está determinada por el comportamiento de  $f(t)$  únicamente para valores positivos de  $t$ . Para hacer hincapié en el hecho de que el límite inferior es cero, a menudo denominamos a la Ecuación 12.1 **transformada de Laplace de un solo lado o unilateral**. En la transformada de dos lados o bilateral, el límite inferior es

$-\infty$ . Aquí no vamos a utilizar la transformada bilateral; por tanto,  $F(s)$  hará siempre referencia a la transformada unilateral.

Otro punto de interés concerniente al límite inferior es el relativo a aquellos casos en que  $f(t)$  tiene una discontinuidad en el origen. Si  $f(t)$  es continua en el origen, como por ejemplo en la Figura 12.1(a),  $f(0)$  no es ambigua. Sin embargo, si  $f(t)$  tiene una discontinuidad finita en el origen, como por ejemplo en la Figura 12.1(b), surge inmediatamente la pregunta de si la integral de la transformada de Laplace debe o no incluir a la discontinuidad. En otras palabras, ¿debemos hacer que el límite inferior sea  $0^-$  e incluir la discontinuidad, o debemos excluir la discontinuidad haciendo que el límite inferior sea  $0^+$ ? (Utilizaremos la notación  $0^-$  y  $0^+$  para referirnos a los valores de  $t$  situados justo a la izquierda y a la derecha del origen, respectivamente). En la práctica, podemos elegir cualquiera de las dos opciones, siempre y cuando elijamos siempre la misma. Por razones que explicaremos más adelante, vamos a seleccionar  $0^-$  como límite inferior.



**Figura 12.1.** Una función continua y otra discontinua en el origen. (a)  $f(t)$  es continua en el origen. (b)  $f(t)$  es discontinua en el origen.

Puesto que estamos utilizando  $0^-$  como límite inferior, podemos observar inmediatamente que la integración entre  $0^-$  y  $0^+$  es cero. La única excepción es cuando la discontinuidad en el origen es una función impulsiva, una situación que consideraremos en la Sección 12.3. El punto que conviene recordar es que las dos funciones mostradas en la Figura 12.1 tienen la misma transformada de Laplace unilateral, porque no hay ninguna función impulsiva en el origen.

La transformada de Laplace unilateral prescinde de  $f(t)$  para  $t < 0^-$ . Lo que suceda antes de  $0^-$  quedará implícito en las condiciones iniciales. Por tanto, utilizamos la transformada de Laplace para predecir la respuesta a una perturbación que tiene lugar después de haberse establecido las condiciones iniciales. En las explicaciones siguientes, vamos a dividir las transformadas de Laplace en dos tipos: transformadas funcionales y transformadas operacionales. Una **transformada funcional** es la transformada de Laplace de una función específica, como, por ejemplo,  $\sin \omega t$ ,  $t$ ,  $e^{-at}$ , etc. Una **transformada operacional** define una propiedad matemática general de la transformada de Laplace, como por ejemplo la relativa al cálculo de la transformada de la derivada de  $f(t)$ . Sin embargo, antes de entrar a considerar las transformadas funcionales y operacionales, necesitamos presentar los conceptos de función escalón y función impulsiva.

## 12.2. La función escalón

No resulta raro encontrar funciones que tienen una discontinuidad, o salto, en el origen. Por ejemplo, sabemos, de nuestras anteriores explicaciones acerca del comportamiento transitorio, que las operacio-

nes de conmutación crean cambios abruptos en las corrientes y tensiones. Para tratar cómodamente estas discontinuidades en el terreno matemático, introducimos las funciones escalón e impulsiva.

La Figura 12.2 ilustra la función escalón. Se trata de una función que es cero para  $t < 0$ . El símbolo para la función escalón es  $Ku(t)$ . Por tanto, la definición matemática de la **función escalón** es

$$\begin{aligned} Ku(t) &= 0, & t < 0, \\ Ku(t) &= K, & t > 0. \end{aligned} \quad (12.3)$$

Si  $K$  es 1, la función definida por la Ecuación 12.3 es el **escalón unidad**.

La función escalón no está definida en  $t = 0$ . En aquellas situaciones en que necesitemos definir la transición entre  $0^-$  y  $0^+$ , supondremos que es lineal y que

$$Ku(0) = 0,5K. \quad (12.4)$$

Como antes,  $0^-$  y  $0^+$  representan puntos simétricos arbitrariamente próximos al origen y situados a la izquierda y a la derecha del mismo, respectivamente. La Figura 12.3 ilustra la transición lineal entre  $0^-$  y  $0^+$ .

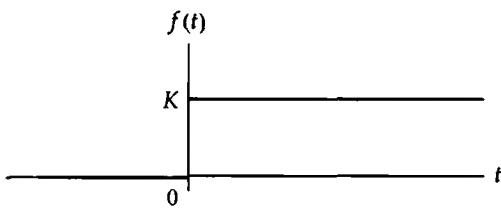


Figura 12.2. La función escalón.

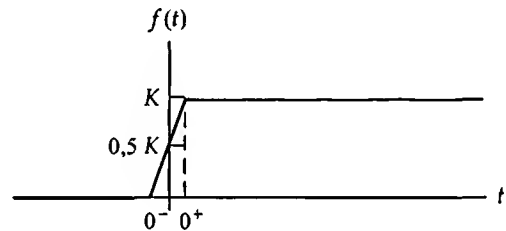


Figura 12.3. Aproximación lineal a la función escalón.

Pueden existir discontinuidades en algún instante distinto de  $t = 0$ ; por ejemplo, en los casos de sucesos de conmutación secuenciales. Un escalón que se produzca en  $t = a$  se expresa como  $Ku(t - a)$ . Así,

$$\begin{aligned} Ku(t - a) &= 0, & t < a, \\ Ku(t - a) &= K, & t > a. \end{aligned} \quad (12.5)$$

Si  $a > 0$ , el escalón tiene lugar a la derecha del origen, mientras que si  $a < 0$ , el escalón se produce a la izquierda del mismo. La Figura 12.4 ilustra la Ecuación 12.5. Observe que la función escalón es 0 cuando el argumento  $t - a$  es negativo, mientras que asume el valor  $K$  cuando el argumento es positivo.

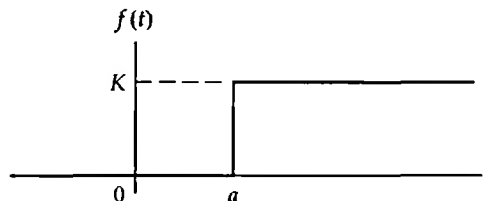


Figura 12.4. Función escalón en el instante  $t = a$ , con  $a > 0$ .

Una función escalón que tenga valor  $K$  para  $t < a$  se escribe  $Ku(a - t)$ . Así,

$$Ku(a - t) = K, \quad t < a,$$

$$Ku(a - t) = 0, \quad t > a. \quad (12.6)$$

La discontinuidad se encontrará a la izquierda del origen cuando  $a < 0$ . La Ecuación 12.6 se muestra en la Figura 12.5.

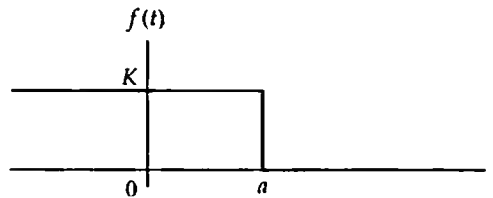


Figura 12.5. Una función escalón  $Ku(a - t)$  para  $a > 0$ .

Una aplicación de la función escalón consiste en utilizarla para escribir la expresión matemática de una función que sea distinta de cero durante un intervalo de tiempo finito, pero que esté definida para todos los instantes de tiempo positivos. Un ejemplo muy útil en el análisis de circuitos es un pulso de anchura finita, que podemos crear sumando dos funciones escalón. La función  $K[u(t - 1) - u(t - 3)]$  tiene el valor  $K$  para  $1 < t < 3$  y el valor 0 en todos los demás instantes, así que se trata de un pulso de anchura finita y altura  $K$  que se inicia en  $t = 1$  y termina en  $t = 3$ . Al definir este pulso usando funciones escalón, resulta útil pensar en la función escalón  $u(t - 1)$  como en la que «activa» el valor constante  $K$  en  $t = 1$ , mientras que la función escalón  $-u(t - 3)$  es la que «desactiva» el valor constante  $K$  en  $t = 3$ . Vamos a utilizar funciones escalón para activar y desactivar funciones lineales en instantes de tiempo deseados en el Ejemplo 12.1.

### EJEMPLO 12.1 Utilización de funciones escalón para representar una función de duración finita

Utilice funciones escalón para escribir una expresión para la función ilustrada en la Figura 12.6.

#### SOLUCIÓN

La función mostrada en la Figura 12.6 está compuesta de segmentos lineales con vértices en los instantes 0, 1, 3 y 4 s. Para construir esta función, tenemos que sumar y restar funciones lineales con las pendientes apropiadas. Utilizaremos la función escalón para iniciar y terminar estos segmentos lineales en los instantes adecuados. En otras palabras, usamos la función escalón para activar y desactivar una línea recta con las siguientes ecuaciones:  $+2t$ , que se activa en  $t = 0$  y se desactiva en  $t = 1$ ;  $-2t + 4$ , que se activa

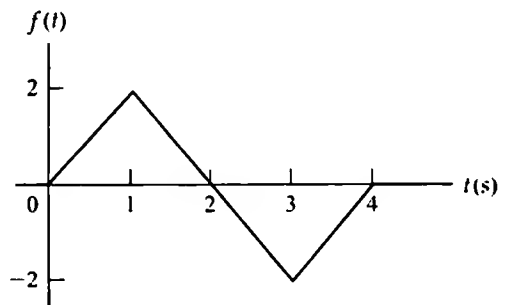
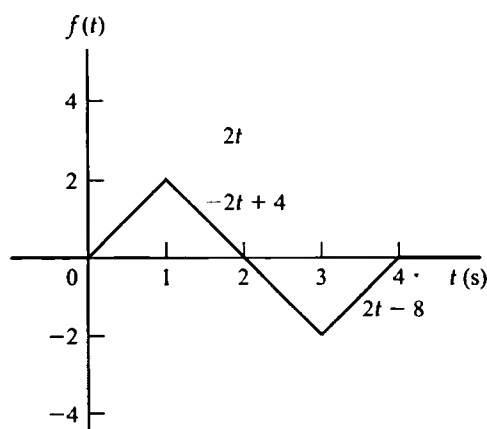


Figura 12.6. Función para el Ejemplo 12.1.

en  $t = 1$  y se desactiva en  $t = 3$ ; y  $+2t - 8$ , que se activa en  $t = 3$  y se desactiva en  $t = 4$ . Estos segmentos de línea recta y sus ecuaciones se muestran en la Figura 12.7. La ecuación correspondiente a  $f(t)$  es

$$\begin{aligned}
 f(t) &= 2t[u(t) - u(t-1)] \\
 &+ (-2t+4)[u(t-1) - u(t-3)] \\
 &+ (2t-8)[u(t-3) - u(t-4)].
 \end{aligned}$$

**Figura 12.7.** Definición de los tres segmentos de línea que activamos y desactivamos con funciones escalón para formar la función mostrada en la Figura 12.6.



**NOTA** Evalúe su comprensión de las funciones escalón tratando de resolver los Problemas 12.1 y 12.2 del capítulo.

## 12.3. La función impulsiva

Cuando tenemos una discontinuidad finita en una función, como la que se ilustra en la Figura 12.1(b), la derivada de la función no está definida en el punto de discontinuidad. El concepto de función impulsiva<sup>1</sup> nos permite definir la derivada en una discontinuidad y, por tanto, definir la transformada de Laplace de dicha derivada. Un **impulso** es una señal de amplitud infinita y duración cero. Tales señales no existen en la Naturaleza, pero algunas señales en los circuitos se aproximan bastante a esta definición, por lo que resulta útil disponer de un modelo matemático de un impulso. Las tensiones y corrientes impulsivas aparecen en el análisis de circuitos debido a una operación de conmutación o debido a que se excite el circuito mediante una fuente impulsiva. Analizaremos estas situaciones en el Capítulo 13, pero aquí vamos a centrarnos en la definición general de función impulsiva.

Para definir la derivada de una función en una discontinuidad, vamos a suponer primero que la función varía linealmente en torno a la discontinuidad, como se muestra en la Figura 12.8, donde observamos que, a medida que  $\varepsilon \rightarrow 0$ , se produce una discontinuidad abrupta en el origen. Al diferenciar una función, la derivada entre  $-\varepsilon$  y  $+\varepsilon$  es constante y tiene un valor igual a  $1/2\varepsilon$ . Para  $t > \varepsilon$ , la derivada es  $-ae^{-a(t-\varepsilon)}$ . La Figura 12.9 muestra gráficamente estas observaciones. A medida que  $\varepsilon$  se aproxima a cero, el valor de  $f'(t)$  entre  $\pm\varepsilon$  se acerca a infinito. Al mismo tiempo, la duración de este pulso se aproxima a cero. Además, el área situada bajo  $f'(t)$  entre  $\pm\varepsilon$  permanece constante a medida que  $\varepsilon \rightarrow 0$ . En este ejemplo, el área es igual a la unidad. A medida que  $\varepsilon$  se aproxima a cero, decimos que la función entre  $\pm\varepsilon$  se aproxima a una **función impulsiva unitaria**, que denotamos mediante  $\delta(t)$ . Por tanto, la derivada de  $f(t)$  en el origen se aproxima a una función impulsiva unidad a medida que  $\varepsilon$  tiende a cero, es decir,

$$f'(0) \rightarrow \delta(t) \text{ a medida que } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Si el área bajo la curva de la función impulsiva es distinta de la unidad, la función impulsiva se denota mediante  $K\delta(t)$ , donde  $K$  es el área.  $K$  se denomina a veces **intensidad** de la función impulsiva.

<sup>1</sup> La función impulsiva también se conoce con el nombre de función delta de Dirac.

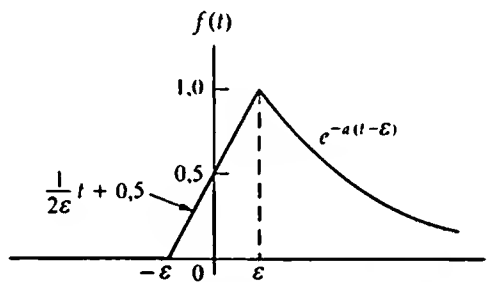


En suma, una función impulsiva se crea a partir de una función con un parámetro variable cuyo parámetro tiende a cero. La función de parámetro variable debe presentar las tres características siguientes a medida que el parámetro tiende a cero:

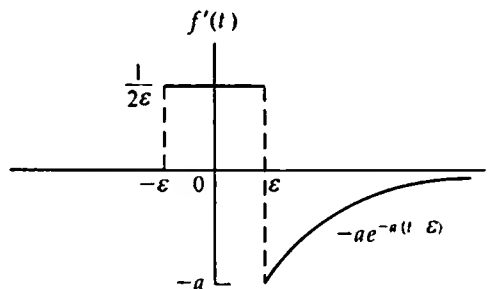
1. La amplitud tiende a infinito.
2. La duración de la función tiende a cero.
3. El área comprendida bajo la función con parámetro variable es constante a medida que cambia el parámetro.

Son muchas las diferentes funciones con parámetro variable que presentan las características mencionadas. En la Figura 12.8, hemos usado la función lineal  $f(t) = 0,5t/\varepsilon + 0,5$ , pero otro ejemplo de función con parámetro variable sería la función exponencial:

$$f(t) = \frac{K}{2\varepsilon} e^{-t/\varepsilon}. \quad (12.7)$$



**Figura 12.8.** Vista ampliada de la discontinuidad de la Figura 12.1(b), suponiendo una transición lineal entre  $-\varepsilon$  y  $+\varepsilon$ .

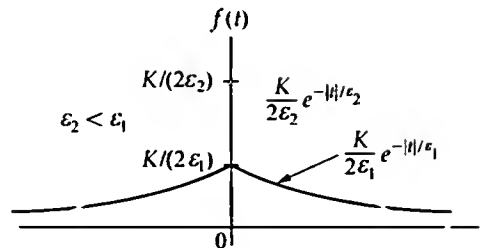


**Figura 12.9.** La derivada de la función mostrada en la Figura 12.8.

A medida que  $\varepsilon$  tiende a cero, la función se hace infinita en el origen y al mismo tiempo vuelve a cero en un tiempo infinitesimal. La Figura 12.10 ilustra las características de  $f(t)$  a medida que  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Para mostrar que se crea una función impulsiva cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , también debemos demostrar que el área comprendida bajo la función es independiente de  $\varepsilon$ . Así,

$$\text{Área} = \int_{-\infty}^0 \frac{K}{2\varepsilon} e^{t/\varepsilon} dt + \int_0^{\infty} \frac{K}{2\varepsilon} e^{-t/\varepsilon} dt = \frac{K}{2\varepsilon} \cdot \frac{e^{t/\varepsilon}}{1/\varepsilon} \Big|_{-\infty}^0 + \frac{K}{2\varepsilon} \cdot \frac{e^{-t/\varepsilon}}{-1/\varepsilon} \Big|_0^{\infty} = \frac{K}{2} + \frac{K}{2} = K, \quad (12.8)$$

que nos dice que el área comprendida bajo la curva es constante e igual a  $K$  unidades. Por tanto, a medida que  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $f(t) \rightarrow K\delta(t)$ .



**Figura 12.10.** Una función con parámetro variable utilizada para generar una función impulsiva.

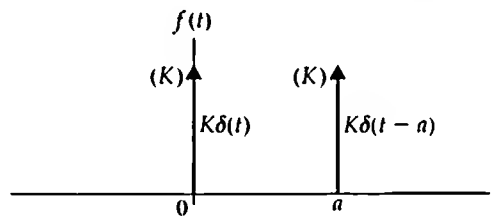
Matemáticamente, la **función impulsiva** se define como

$$\int_{-\infty}^{\infty} K\delta(t) dt = K; \quad (12.9)$$

$$\delta(t) = 0, \quad t \neq 0. \quad (12.10)$$

La Ecuación 12.9 afirma que el área bajo la función impulsiva es constante. Esta área representa la intensidad del impulso. La Ecuación 12.10 indica que el impulso es cero en todos sus puntos, salvo en  $t = 0$ . Un impulso que tenga lugar en  $t = a$  se denotará mediante  $K\delta(t - a)$ .

El símbolo gráfico para la función impulsiva es una flecha. La intensidad del impulso se indica entre paréntesis al lado de la cabeza de la flecha. La Figura 12.11 muestra los impulsos  $K\delta(t)$  y  $K\delta(t - a)$ .



**Figura 12.11.** Una representación gráfica de los impulsos  $K\delta(t)$  y  $K\delta(t - a)$ .

Una propiedad importante de la función impulsiva es la **propiedad de filtrado** o **enmascaramiento**, que se expresa como

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-a)dt = f(a), \quad (12.11)$$

donde suponemos que la función  $f(t)$  es continua en  $t = a$ , es decir, en la ubicación del impulso. La Ecuación 12.11 muestra que la función impulsiva filtra todo salvo el valor de  $f(t)$  en  $t = a$ . La validez de esta ecuación puede demostrarse observando que  $\delta(t - a)$  es cero en todos los puntos salvo en  $t = a$  y que, por tanto, la integral puede escribirse

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-a)dt = \int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} f(t)\delta(t-a)dt. \quad (12.12)$$

Pero, como  $f(t)$  es continua en  $a$ , toma el valor  $f(a)$  a medida que  $t \rightarrow a$ , por lo que

$$I = \int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} f(a)\delta(t-a)dt = f(a) \int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} \delta(t-a)dt = f(a). \quad (12.13)$$

Podemos usar la propiedad de filtrado de la función impulsiva para hallar su transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} \delta(t)e^{-st} dt = \int_{0^-}^{\infty} \delta(t) dt = 1, \quad (12.14)$$

que es una importante pareja de transformadas de Laplace que se aprovecharán debidamente en el análisis de circuitos.

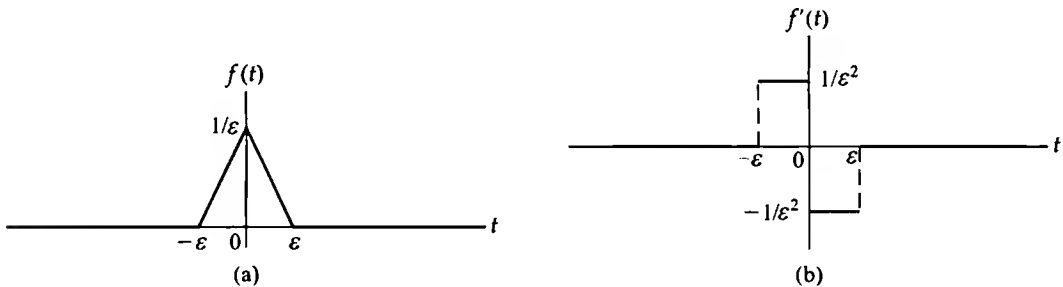
También podemos definir las derivadas de la función impulsiva y las transformadas de Laplace de dichas derivadas. Vamos a analizar la primera derivada y su transformada y enunciaremos luego el resultado para las derivadas de mayor orden.

La función ilustrada en la Figura 12.12(a) genera una función impulsiva a medida que  $\varepsilon \rightarrow 0$ . La Figura 12.12(b) muestra la derivada de esta función generadora del impulso, derivada que se define como la derivada del impulso  $[\delta'(t)]$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . La derivada de la función impulsiva se denomina en ocasiones función de momento o doblete unitario.

Para hallar la transformada de Laplace de  $\delta'(t)$ , simplemente aplicamos la integral de la definición a la función mostrada en la Figura 12.12(b) y, después de integrar, hacemos que  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\delta'(t)\} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{-\varepsilon}^{-0} \frac{1}{\varepsilon^2} e^{-st} dt + \int_{0^+}^{\varepsilon} \left(-\frac{1}{\varepsilon^2}\right) e^{-st} dt \right] \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{e^{s\varepsilon} + e^{-s\varepsilon} - 2}{s\varepsilon^2} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{s e^{s\varepsilon} - s e^{-s\varepsilon}}{2s\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{s^2 e^{s\varepsilon} + s^2 e^{-s\varepsilon}}{2s} \\ &= s. \end{aligned} \quad (12.15)$$

Al deducir la Ecuación 12.15, hemos tenido que aplicar dos veces la regla de l'Hôpital para evaluar la forma indeterminada 0/0.



**Figura 12.12.** Primera derivada de la función impulsiva. (a) Función generadora del impulso utilizada para definir la primera derivada del impulso. (b) La primera derivada de la función generadora del impulso, que se aproxima a  $\delta'(t)$  a medida que  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Las derivadas de mayor orden pueden generarse de forma similar a la que hemos empleado para generar la primera derivada (véase el Problema 12.11) y a continuación puede usarse la integral de la definición para hallar su transformada de Laplace. Para la  $n$ -ésima derivada de la función impulsiva, se puede demostrar que su transformada de Laplace es simplemente  $s^n$ , es decir,

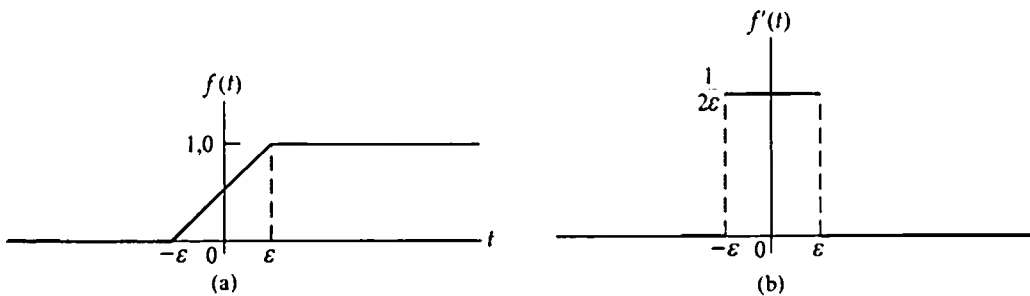
$$\mathcal{L}\{\delta^n(t)\} = s^n. \quad (12.16)$$

Finalmente, podemos considerar la función impulsiva como la derivada de una función escalón, es decir,

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}. \quad (12.17)$$

La Figura 12.13 presenta la interpretación gráfica de la Ecuación 12.17. La función mostrada en la Figura 12.13(a) se aproxima a un escalón unitario a medida que  $\varepsilon \rightarrow 0$ . La función mostrada en la Figura 12.13(b), que es la derivada de la función de la Figura 12.13(a), se aproxima a un impulso unitario a medida que  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

La función impulsiva es un concepto muy útil en el análisis de circuitos, y hablaremos más sobre ella en los capítulos siguientes. Hemos introducido el concepto aquí para poder incluir las discontinuidades en el origen en nuestra definición de la transformada de Laplace.



**Figura 12.13.** La función impulsiva como derivada de la función escalón: (a)  $f(t) \rightarrow u(t)$  a medida que  $\varepsilon \rightarrow 0$ ; y (b)  $f'(t) \rightarrow \delta(t)$  a medida que  $\varepsilon \rightarrow 0$

**NOTA** Evalúe su comprensión de la función impulsiva tratando de resolver los Problemas 12.5-12.7 del capítulo.

## 12.4. Transformadas funcionales

Una transformada funcional es simplemente la transformada de Laplace de una función específica de  $t$ . Puesto que estamos limitando nuestro estudio a la transformada de Laplace unilateral, definiremos todas las funciones como cero para  $t < 0^-$ .

En la Sección 12.3 hemos hallado una pareja de transformadas funcionales, al demostrar que la transformada de Laplace de la función impulsiva unitaria es igual a 1 (véase la Ecuación 12.14). Un segundo ejemplo sería la función escalón unitaria de la Figura 12.13(a), donde

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st} dt = \int_{0^-}^{\infty} 1e^{-st} dt = \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_{0^-}^{\infty} = \frac{1}{s}. \quad (12.18)$$

La Ecuación 12.18 muestra que la transformada de Laplace de la función escalón unitaria es  $1/s$ .

La transformada de Laplace de la función exponencial decreciente mostrada en la Figura 12.14 es

$$\mathcal{L}\{e^{-at}\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-at} e^{-st} dt = \int_{0^-}^{\infty} e^{-(a+s)t} dt = \frac{1}{s+a}. \quad (12.19)$$

Al deducir las Ecuaciones 12.18 y 12.19, hemos usado el hecho de que la integración a lo largo de la discontinuidad existente en el origen da como resultado cero.

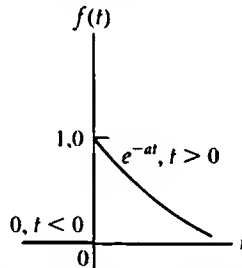


Figura 12.14. Una función exponencial decreciente.

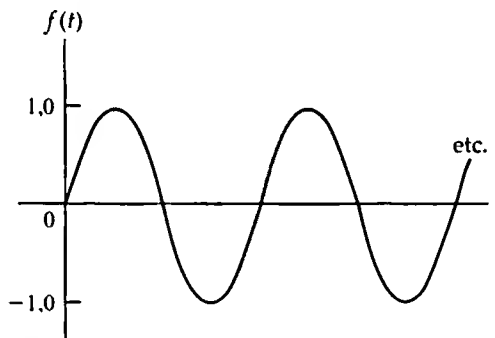


Figura 12.15. Una función sinusoidal para  $t > 0$ .

Un tercer ejemplo de cálculo de una transformada funcional sería el correspondiente a la función sinusoidal mostrada en la Figura 12.15. La ecuación correspondiente a  $f(t)$  para  $t > 0^-$  es  $\text{sen } \omega t$ , por lo que la transformada de Laplace es

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\text{sen } \omega t\} &= \int_{0^-}^{\infty} (\text{sen } \omega t) e^{-st} dt \\ &= \int_{0^-}^{\infty} \left( \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \right) e^{-st} dt = \int_{0^-}^{\infty} \frac{e^{-(s-j\omega)t} - e^{-(s+j\omega)t}}{2j} dt \\ &= \frac{1}{2j} \left( \frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s+j\omega} \right) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}. \end{aligned} \quad (12.20)$$

La Tabla 12.1 proporciona una lista abreviada de parejas de transformadas de Laplace. Dicha lista incluye las funciones que más interés tienen dentro de un curso introductorio de circuitos eléctricos.

**Tabla 12.1.** Lista abreviada de parejas de transformadas de Laplace.

TIPO	$f(t) (t > 0^-)$	$F(s)$
(impulso)	$\delta(t)$	1
(escalón)	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
(rampa)	$t$	$\frac{1}{s^2}$
(exponencial)	$e^{-at}$	$\frac{1}{s+a}$
(seno)	$\text{sen } \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
(coseno)	$\text{cos } \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
(rampa amortiguada)	$te^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
(seno amortiguado)	$e^{-at} \text{sen } \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
(coseno amortiguado)	$e^{-at} \text{cos } \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$

### Evaluación del objetivo 1

- Ser capaz de calcular la transformada de Laplace de una función utilizando la definición de transformada de Laplace.

**12.1.** Utilice la integral que define la transformada de Laplace para

- calcular la transformada de Laplace de  $\cosh \beta t$ ;
- calcular la transformada de Laplace de  $\sinh \beta t$ .

#### RESPUESTA

- $s/(s^2 - \beta^2)$ ;
- $\beta/(s^2 - \beta^2)$ .

**NOTA** Trate también de resolver el Problema 12.13 del capítulo.

## 12.5. Transformadas operacionales

Las transformadas operacionales indican cómo se convierten al dominio opuesto las operaciones matemáticas realizadas sobre  $f(t)$  o  $F(s)$ . Las operaciones que más nos interesan son (1) la multiplicación

por una constante; (2) la suma (resta); (3) la diferenciación; (4) la integración; (5) la traslación en el dominio del tiempo; (6) la traslación en el dominio de la frecuencia y (7) el cambio de escala.

## Multiplicación por una constante

A partir de la integral de definición de la transformada, si

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s),$$

entonces

$$\mathcal{L}\{Kf(t)\} = KF(s). \quad (12.21)$$

Por tanto, la multiplicación de  $f(t)$  por una constante es equivalente a multiplicar  $F(s)$  por la misma constante.

## Suma (resta)

La suma (resta) en el dominio del tiempo se traduce en una suma (resta) en el dominio de la frecuencia. Por tanto, si

$$\mathcal{L}\{f_1(t)\} = F_1(s),$$

$$\mathcal{L}\{f_2(t)\} = F_2(s),$$

$$\mathcal{L}\{f_3(t)\} = F_3(s),$$

entonces

$$\mathcal{L}\{f_1(t) + f_2(t) - f_3(t)\} = F_1(s) + F_2(s) - F_3(s), \quad (12.22)$$

lo que se puede demostrar sustituyendo simplemente la suma algebraica de las funciones del dominio del tiempo en la integral que define la transformada.

## Diferenciación

La diferenciación en el dominio del tiempo corresponde a la multiplicación de  $F(s)$  por  $s$  y luego la resta del valor inicial de  $f(t)$ , es decir,  $f(0^-)$ , de dicho producto:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = sF(s) - f(0^-), \quad (12.23)$$

lo que se demuestra directamente a partir de la definición de transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = \int_0^\infty \left[\frac{df(t)}{dt}\right] e^{-st} dt. \quad (12.24)$$

Podemos evaluar la integral de la Ecuación 12.24 integrando por partes. Sea  $u = e^{-st}$  y  $dv = [df(t)/dt]dt$ ; en este caso,

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = e^{-st} f(t) \Big|_{0^-}^\infty - \int_0^\infty f(t)(-se^{-st} dt). \quad (12.25)$$

Puesto que estamos suponiendo que  $f(t)$  tiene transformada de Laplace, el valor de  $e^{-st}f(t)$  en  $t = \infty$  es cero. Por tanto, el lado derecho de la Ecuación 12.25 se reduce a

$$-f(0^-) + s \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st} dt = sF(s) - f(0^-).$$

Esta observación completa la demostración de la Ecuación 12.23. Se trata de un importante resultado, porque indica que la diferenciación en el dominio del tiempo se reduce a una operación algebraica en el dominio de  $s$ .

Podemos determinar la transformada de Laplace de las derivadas de mayor orden utilizando la Ecuación 12.23 como punto de partida. Por ejemplo, para hallar la transformada de Laplace de la segunda derivada de  $f(t)$ , hacemos

$$g(t) = \frac{df(t)}{dt}. \quad (12.26)$$

Ahora, podemos usar la Ecuación 12.23 para escribir

$$G(s) = sF(s) - f(0^-). \quad (12.27)$$

Pero como

$$\frac{dg(t)}{dt} = \frac{d^2 f(t)}{dt^2},$$

nos queda

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dg(t)}{dt}\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right\} = sG(s) - g(0^-). \quad (12.28)$$

Combinando las Ecuaciones 12.26, 12.27 y 12.28, se obtiene

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right\} = s^2 F(s) - sf(0^-) - \frac{df(0^-)}{dt}. \quad (12.29)$$

Podemos hallar la transformada de Laplace de la  $n$ -ésima derivada aplicando sucesivamente el proceso anterior, lo que nos da el resultado general

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right\} &= s^n F(s) - s^{n-1} f(0^-) - s^{n-2} \frac{df(0^-)}{dt} \\ &\quad - s^{n-3} \frac{d^2 f(0^-)}{dt^2} - \dots - \frac{d^{n-1} f(0^-)}{dt^{n-1}}. \end{aligned} \quad (12.30)$$

## Integración

La integración en el dominio del tiempo corresponde dividir por  $s$  en el dominio de  $s$ . Como antes, establecemos la relación aplicando la definición de transformada:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(x) dx\right\} = \int_0^\infty \left[\int_0^t f(x) dx\right] e^{-st} dt. \quad (12.31)$$



Evaluemos la integral del lado derecho de la Ecuación 12.31 integrando por partes, haciendo

$$u = \int_0^t f(x) dx,$$

$$dv = e^{-st} dt.$$

Entonces

$$du = f(t) dt$$

$$v = -\frac{e^{-st}}{s}.$$

La fórmula de integración por partes nos da

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(x) dx\right\} = -\frac{e^{-st}}{s} \int_0^t f(x) dx \Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{e^{-st}}{s} f(t) dt. \quad (12.32)$$

El primer término del lado derecho de la Ecuación 12.32 es cero tanto en el límite superior como en el inferior. El valor en el límite inferior es obviamente cero, mientras que el valor en el límite superior es cero porque estamos suponiendo que  $f(t)$  tiene transformada de Laplace. El segundo término del lado derecho de la Ecuación 12.32 es  $F(s)/s$ ; por tanto,

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(x) dx\right\} = \frac{F(s)}{s}, \quad (12.33)$$

Lo que revela que la operación de integración en el dominio del tiempo se transforma en la operación algebraica de multiplicar por  $1/s$  en el dominio de  $s$ . La Ecuación 12.33 y la Ecuación 12.30 forman la base de nuestra anterior afirmación de que la transformada de Laplace traduce un conjunto de ecuaciones integrodiferenciales en un conjunto de ecuaciones algebraicas.

## Traslación en el dominio del tiempo

Si partimos de una función cualquiera  $f(t)u(t)$ , podemos representar la misma función trasladada en el tiempo un intervalo a  $a$  mediante  $f(t-a)u(t-a)$ . La traslación en el dominio del tiempo corresponde a la multiplicación por una exponencial en el dominio de la frecuencia. Por tanto,

$$\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = e^{-as}F(s), \quad a > 0. \quad (12.34)$$

Por ejemplo, si tenemos que

$$\mathcal{L}\{tu(t)\} = \frac{1}{s^2},$$

**Observe** que en el texto estamos multiplicando cualquier función arbitraria  $f(t)$  por la función escalón unitaria  $u(t)$  para asegurar que la función resultante esté definida para todos los instantes de tiempo positivos.

la Ecuación 12.34 nos permite escribir directamente la transformada de Laplace de  $(t - a)u(t - a)$ :

$$\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = \frac{e^{-as}}{s^2}.$$

La demostración de la Ecuación 12.34 se sigue directamente de la definición de transformada:

$$\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = \int_{0^-}^{\infty} u(t-a)f(t-a)e^{-st} dt = \int_a^{\infty} f(t-a)e^{-st} dt. \quad (12.35)$$

Al escribir la Ecuación 12.35, hemos aprovechado el hecho de que  $u(t-a) = 1$  para  $t > a$ . Ahora cambiamos la variable de integración, haciendo  $x = t - a$ . Entonces,  $x = 0$  cuando  $t = a$ ,  $x = \infty$  cuando  $t = \infty$  y  $dx = dt$ . Por tanto, podemos escribir la integral de la Ecuación 12.35 como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} &= \int_0^{\infty} f(x)e^{-s(x+a)} dx \\ &= e^{-sa} \int_0^{\infty} f(x)e^{-sx} dx \\ &= e^{-sa} F(s), \end{aligned}$$

como queríamos demostrar.

## Traslación en el dominio de la frecuencia

La traslación en el dominio de la frecuencia corresponde a una multiplicación por una exponencial en el dominio del tiempo:

$$\mathcal{L}\{e^{-at} f(t)\} = F(s+a), \quad (12.36)$$

como puede demostrarse a partir de la definición de la transformada. Dejamos como ejercicio al lector, en el Problema 12.16, la demostración de la Ecuación 12.36.

Podemos utilizar la relación establecida en la Ecuación 12.36 para hallar nuevas parejas de transformadas. Así, si

$$\mathcal{L}\{\cos \omega t\} = \frac{s}{s^2 + \omega^2},$$

aplicando la Ecuación 12.36 se deduce que

$$\mathcal{L}\{e^{-at} \cos \omega t\} = \frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}.$$

## Cambio de escala

La propiedad de cambio de escala nos proporciona la relación entre  $f(t)$  y  $F(s)$  cuando se multiplica la variable temporal por una constante positiva:

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right), \quad a > 0. \quad (12.37)$$

Dejamos como ejercicio para el lector, en el Problema 12.22, la demostración de esta ecuación. La propiedad de cambio de escala resulta particularmente útil en el trabajo experimental, especialmente cuando se hacen cambios de la escala temporal para facilitar la definición del modelo de un sistema.

Podemos emplear la Ecuación 12.37 para hallar nuevas parejas de transformadas. Así, sabiendo que

$$\mathcal{L}\{\cos t\} = \frac{s}{s^2 + 1},$$

deducimos de la Ecuación 12.37 que

$$\mathcal{L}\{\cos \omega t\} = \frac{1}{\omega} \frac{s/\omega}{(s/\omega)^2 + 1} = \frac{s}{s^2 + \omega^2}.$$

La Tabla 12.2 nos da una lista abreviada de transformadas operacionales.

**Tabla 12.2.** Lista abreviada de transformadas operacionales.

OPERACIÓN	$f(t)$	$F(s)$
<b>Multipliación por una constante</b>	$Kf(t)$	$KF(s)$
<b>Suma/resta</b>	$f_1(t) + f_2(t) - f_3(t) + \dots$	$F_1(s) + F_2(s) - F_3(s) + \dots$
<b>Primera derivada (tiempo)</b>	$\frac{df(t)}{dt}$	$sF(s) - f(0^-)$
<b>Segunda derivada (tiempo)</b>	$\frac{d^2 f(t)}{dt^2}$	$s^2 F(s) - sf(0^-) - \frac{df(0^-)}{dt}$
<b><math>n</math>-ésima derivada (tiempo)</b>	$\frac{d^n f(t)}{dt^n}$	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0^-) - s^{n-2} \frac{df(0^-)}{dt} - s^{n-3} \frac{d^2 f(0^-)}{dt^2} - \dots - \frac{d^{n-1} f(0^-)}{dt^{n-1}}$
<b>Integral en el tiempo</b>	$\int_0^t f(x) dx$	$\frac{F(s)}{s}$
<b>Traslación en el tiempo</b>	$f(t-a)u(t-a), a > 0$	$e^{-as} F(s)$
<b>Traslación en frecuencia</b>	$e^{-at} f(t)$	$F(s+a)$
<b>Cambio de escala</b>	$f(at), a > 0$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$
<b>Primera derivada (s)</b>	$t f(t)$	$-\frac{dF(s)}{ds}$
<b><math>n</math>-ésima derivada (s)</b>	$t^n f(t)$	$(-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$
<b>Integral en s</b>	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(u) du$

**NOTA** Evalúe su comprensión de estas transformadas operacionales tratando de resolver los Problemas 12.24 y 12.25 del capítulo.

### Evaluación del objetivo 1

- Ser capaz de calcular la transformada de Laplace de una función utilizando la tabla de transformadas de Laplace o una tabla de transformadas operacionales.

**12.2.** Utilice la transformada operacional apropiada de la Tabla 12.2 para hallar la transformada de Laplace de cada una de estas funciones:

(a)  $t^2 e^{-at}$ ;

(b)  $\frac{d}{dt}(e^{-at} \sinh \beta t)$ ;

(c)  $t \cos \omega t$ .

### RESPUESTA

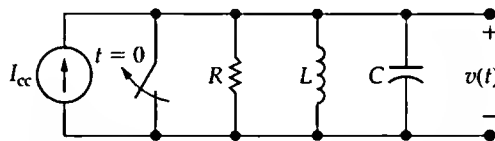
(a)  $\frac{2}{(s+a)^3}$ ;

(b)  $\frac{\beta s}{(s+a)^2 - \beta^2}$ ;

(c)  $\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$ .

## 12.6. Aplicación de la transformada de Laplace

Ahora vamos a ver cómo usar la transformada de Laplace para resolver las ecuaciones integrodiferenciales ordinarias que describen el comportamiento de los circuitos con parámetros agrupados. Considere el circuito mostrado en la Figura 12.16. Vamos a suponer que no hay energía inicialmente almacenada en el circuito en el momento en que se abre el conmutador, que está cortocircuitando la fuente de corriente continua. El problema consiste en hallar la ecuación en el dominio del tiempo para  $v(t)$  cuando  $t \geq 0$ .



**Figura 12.16.** Un circuito  $RLC$  paralelo.

Comenzamos escribiendo la ecuación integrodiferencial que debe satisfacer  $v(t)$ . Sólo necesitamos una única ecuación de tensión de nodo para describir el circuito. Si sumamos las corrientes que salen del nodo superior en el circuito, obtenemos la ecuación:

$$\frac{v(t)}{R} + \frac{1}{L} \int_0^t v(x) dx + C \frac{dv(t)}{dt} = I_{cc} u(t). \quad (12.38)$$

Observe que, al escribir la Ecuación 12.38, hemos indicado la apertura del conmutador mediante el escalón de salto de la corriente de la fuente, desde cero a  $I_{cc}$ .

Después de derivar las ecuaciones integrodiferenciales (en este ejemplo, sólo una) transformamos las ecuaciones al dominio de  $s$ . No vamos a ver en detalle los pasos de la transformación, ya que en el Capítulo 13 analizaremos cómo evitarse esos pasos y generar directamente las ecuaciones en el dominio de  $s$ . De todos modos, brevemente, utilizamos tres transformaciones operacionales y una transformación funcional de la Ecuación 12.38 para obtener

$$\frac{V(s)}{R} + \frac{1}{L} \frac{V(s)}{s} + C[sV(s) - v(0^-)] = I_{cc} \left( \frac{1}{s} \right), \quad (12.39)$$

que es una ecuación algebraica en la que  $V(s)$  es la variable desconocida. Estamos suponiendo que se conocen tanto los parámetros del circuito,  $R$ ,  $L$  y  $C$ , como la corriente de la fuente  $I_{cc}$ ; la tensión inicial en el condensador  $v(0^-)$  es cero porque la energía inicial almacenada en el circuito es cero. Así, hemos reducido el problema a la resolución de una ecuación algebraica.

A continuación, resolvemos las ecuaciones algebraicas (de nuevo, sólo una en este caso) para hallar las incógnitas. Despejando  $V(s)$  en la Ecuación 12.39, se obtiene

$$V(s) \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{sL} + sC \right) = \frac{I_{cc}}{s},$$

$$V(s) = \frac{I_{cc}/C}{s^2 + (1/RC)s + (1/LC)}. \quad (12.40)$$

Para hallar  $v(t)$ , debemos calcular la transformada inversa de  $V(s)$ . Denotamos esta transformada inversa mediante

$$v(t) = \mathcal{L}^{-1}\{V(s)\}. \quad (12.41)$$

El siguiente paso en el análisis consiste en hallar la transformada inversa de la ecuación en el dominio de  $s$ ; éste será el tema de la Sección 12.7. En dicha sección presentaremos también un último paso crítico: la comprobación de la validez de la ecuación resultante en el dominio del tiempo. La necesidad de dicha comprobación no resulta exclusiva de la transformada de Laplace; los ingenieros prudentes comprueban siempre las soluciones obtenidas, para asegurarse de que tienen sentido en lo que se refiere al comportamiento conocido del sistema.

En este punto, conviene simplificar la notación. Lo haremos eliminando la  $t$  entre paréntesis en las ecuaciones en el dominio del tiempo y la  $s$  entre paréntesis en las ecuaciones en el dominio de la frecuencia. Usaremos letras minúsculas para todas las variables en el dominio del tiempo y representaremos las variables correspondientes en el dominio de  $s$  mediante letras mayúsculas. Así,

$$\mathcal{L}\{v\} = V \quad \text{o} \quad v = \mathcal{L}^{-1}\{V\},$$

$$\mathcal{L}\{i\} = I \quad \text{o} \quad i = \mathcal{L}^{-1}\{I\},$$

$$\mathcal{L}\{f\} = F \quad \text{o} \quad f = \mathcal{L}^{-1}\{F\},$$

y así sucesivamente.

**NOTA** Evalúe su comprensión de este material intentando resolver el Problema 12.26 del capítulo.

## 12.7. Transformadas inversas

La expresión correspondiente a  $V(s)$  en la Ecuación 12.40 es una función racional de  $s$ , es decir, una función que puede expresarse en forma de cociente de dos polinomios de  $s$ , de modo que no aparezca ninguna potencia no entera de  $s$  en los polinomios. De hecho, para circuitos lineales con parámetros agrupados cuyos valores de componentes sean constantes, las expresiones en el dominio de  $s$  para las tensiones y corrientes desconocidas son siempre funciones racionales de  $s$  (puede verificar esta observación resolviendo los Problemas 12.27, 12.29, 12.31 y 12.33). Si somos capaces de calcular la transformada inversa de cualquier función racional de  $s$ , podremos hallar las expresiones en el dominio del tiempo correspondientes a las tensiones y corrientes. El objetivo de esta sección es presentar una técnica directa y sistemática para hallar la transformada inversa de una función racional.

En general, lo que necesitamos es hallar la transformada inversa de una función que tiene la forma

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}. \quad (12.42)$$

Los coeficientes  $a$  y  $b$  son constantes reales y los exponentes  $m$  y  $n$  son enteros positivos. El cociente  $N(s)/D(s)$  se denomina **función racional propia** si  $m > n$  y **función racional impropia** si  $m \leq n$ . Sólo las funciones racionales propias pueden expandirse en forma de suma de fracciones parciales. De todos modos, esta restricción no plantea ningún problema, como veremos al final de la sección.

### Expansión en fracciones parciales: funciones racionales propias

Una función racional propia se expande en una suma de fracciones parciales escribiendo un término o una serie de términos para cada raíz de  $D(s)$ . Así,  $D(s)$  debe factorizarse antes de poder realizar la expansión en fracciones parciales. Para cada raíz distinta de  $D(s)$ , aparecerá un único término en la suma de fracciones parciales. Para cada raíz múltiple de  $D(s)$  con multiplicidad  $r$ , la expansión contendrá  $r$  términos. Por ejemplo, en la función racional

$$\frac{s+6}{s(s+3)(s+1)^2},$$

el denominador tiene cuatro raíces. Dos de estas raíces son simples ( $s = 0$  y  $s = -3$ ). También hay una raíz múltiple con multiplicidad 2 en  $s = -1$ . Por tanto, la expansión en fracciones parciales de esta función tiene la forma

$$\frac{s+6}{s(s+3)(s+1)^2} \equiv \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+3} + \frac{K_3}{(s+1)^2} + \frac{K_4}{s+1}. \quad (12.43)$$

La clave de la técnica de fracciones parciales para la determinación de las transformadas inversas radica en reconocer la función  $f(t)$  correspondiente a cada término de la suma de fracciones parciales. A partir de la Tabla 12.1, el lector puede verificar que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s+6}{s(s+3)(s+1)^2} \right\} \\ = (K_1 + K_2 e^{-3t} + K_3 t e^{-t} + K_4 e^{-t}) u(t). \end{aligned} \quad (12.44)$$

Lo único que nos queda es establecer una técnica para determinar los coeficientes ( $K_1, K_2, K_3, \dots$ ) generados al hacer la expansión en fracciones parciales. Hay cuatro casos generales. Específicamente, las raíces de  $D(s)$  pueden ser (1) reales y distintas; (2) complejas y distintas; (3) reales y repetidas o (4) complejas y repetidas. Antes de considerar cada uno de los casos sucesivamente, conviene hacer algunos comentarios generales.

Hemos usado el signo de identidad  $\equiv$  en la Ecuación 12.43 para hacer hincapié en que la expansión de una función racional en una suma de fracciones parciales lo que hace es obtener otra ecuación que es idéntica a la ecuación de partida. Por tanto, ambos lados de la ecuación deben ser iguales para todos los valores de la variable  $s$ . Asimismo, seguirá habiendo una relación de identidad cuando ambos lados sean sometidos a la misma operación matemática. Estas características resultan importantes a la hora de determinar los coeficientes, como vamos a ver.

Asegúrese de comprobar que se trate de una función racional propia. Esta comprobación es importante, porque no hay nada en el procedimiento de determinación de los valores  $K$  que nos permita detectar que estamos obteniendo resultados sin sentido, en caso de que la función racional sea impropia. Presentaremos un procedimiento para comprobar los valores  $K$ , pero podemos evitarnos malgastar esfuerzos acostumbrándonos a formular de antemano la siguiente pregunta: «¿Es  $F(s)$  una función racional propia?».

## Expansión en fracciones parciales: raíces reales y distintas de $D(s)$

Vamos a considerar primero la determinación de los coeficientes en una expansión en fracciones parciales cuando todas las raíces de  $D(s)$  son reales y distintas. Para hallar el valor de  $K$  asociado con un término debido a una raíz simple de  $D(s)$ , multiplicamos ambos lados de la identidad por un factor igual al denominador existente debajo del valor  $K$  deseado. Entonces, cuando evaluemos ambos lados de la identidad para la raíz correspondiente al factor multiplicador, el lado derecho será siempre la incógnita  $K$  deseada y el lado izquierdo será siempre su valor numérico. Por ejemplo,

$$F(s) = \frac{96(s+5)(s+12)}{s(s+8)(s+6)} \equiv \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+8} + \frac{K_3}{s+6}. \quad (12.45)$$

Para hallar el valor de  $K_1$ , multiplicamos ambos lados por  $s$  y luego los evaluamos para  $s = 0$ :

$$\left. \frac{96(s+5)(s+12)}{(s+8)(s+6)} \right|_{s=0} \equiv K_1 + \left. \frac{K_2 s}{s+8} \right|_{s=0} + \left. \frac{K_3 s}{s+6} \right|_{s=0},$$

o bien

$$\frac{96(5)(12)}{8(6)} \equiv K_1 = 120. \quad (12.46)$$

Para hallar el valor de  $K_2$ , multiplicamos ambos lados por  $s + 8$  y luego los evaluamos en  $s = -8$ :

$$\begin{aligned} \left. \frac{96(s+5)(s+12)}{s(s+6)} \right|_{s=-8} &\equiv \left. \frac{K_1(s+8)}{s} \right|_{s=-8} + K_2 + \left. \frac{K_3(s+8)}{(s+6)} \right|_{s=-8}. \end{aligned}$$

lo que nos da

$$\frac{96(-3)(4)}{(-8)(-2)} = K_2 = -72. \quad (12.47)$$

Asimismo,  $K_3$  será

$$\left. \frac{96(s+5)(s+12)}{s(s+8)} \right|_{s=-6} = K_3 = 48. \quad (12.48)$$

A partir de la Ecuación 12.45 y de los valores de  $K$  obtenidos, nos queda

$$\frac{96(s+5)(s+12)}{s(s+8)(s+6)} \equiv \frac{120}{s} + \frac{48}{s+6} - \frac{72}{s+8}. \quad (12.49)$$

En este punto, resulta conveniente realizar una verificación, para detectar cualquier posible error de cálculo. Como ya hemos indicado, una expansión en fracciones parciales crea una identidad entre dos expresiones; por tanto, ambos lados de la Ecuación 12.49 deben ser iguales para todos los valores de  $s$ . La elección de valores de prueba es completamente arbitraria; por tanto, seleccionaremos valores que resulten fáciles de comprobar. Por ejemplo, en la Ecuación 12.49, resulta cómodo probar con  $-5$  o  $-12$ , porque en ambos casos el lado izquierdo de la ecuación se reduce a cero. Para el valor  $-5$  se obtiene

$$\frac{120}{-5} + \frac{48}{1} - \frac{72}{3} = -24 + 48 - 24 = 0,$$

mientras que para  $-12$  queda

$$\frac{120}{-12} + \frac{48}{-6} - \frac{72}{-4} = -10 - 8 + 18 = 0.$$

Habiendo comprobado que los valores numéricos de  $K$  son correctos, podemos calcular la transformación inversa:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{96(s+5)(s+12)}{s(s+8)(s+6)} \right\} = (120 + 48e^{-6t} - 72e^{-8t})u(t). \quad (12.50)$$

## Evaluación del objetivo 2

- Ser capaz de calcular la transformada inversa de Laplace utilizando la expansión en fracciones parciales y la tabla de transformadas de Laplace.

12.3. Calcule  $f(t)$  si

$$F(s) = \frac{6s^2 + 26s + 26}{(s+1)(s+2)(s+3)}.$$

**RESPUESTA**

$$f(t) = (3e^{-t} + 2e^{-2t} + e^{-3t})u(t).$$

12.4. Calcule  $f(t)$  si

$$F(s) = \frac{7s^2 + 63s + 134}{(s+3)(s+4)(s+5)}.$$

**RESPUESTA**

$$f(t) = (4e^{-3t} + 6e^{-4t} - 3e^{-5t})u(t).$$

**NOTA** Trate también de resolver los Problemas 12.37(a) y (b) del capítulo.



## Expansión en fracciones parciales: raíces complejas y distintas de $D(s)$

La única diferencia a la hora de hallar los coeficientes asociados con raíces complejas distintas es que **hace falta** emplear números complejos en las operaciones algebraicas. Vamos a ilustrar el **procedimiento** expandiendo la función racional:

$$F(s) = \frac{100(s+3)}{(s+6)(s^2+6s+25)}. \quad (12.51)$$

Comenzamos verificando que  $F(s)$  es una función racional propia. A continuación, necesitamos **hallar** las raíces del término cuadrático  $s^2 + 6s + 25$ :

$$s^2 + 6s + 25 = (s + 3 - j4)(s + 3 + j4). \quad (12.52)$$

Habiendo factorizado el denominador, seguimos los mismos pasos que antes:

$$\frac{100(s+3)}{(s+6)(s^2+6s+25)} = \frac{K_1}{s+6} + \frac{K_2}{s+3-j4} + \frac{K_3}{s+3+j4}. \quad (12.53)$$

Para hallar  $K_1$ ,  $K_2$  y  $K_3$ , usamos el mismo proceso que en el caso interior:

$$K_1 = \left. \frac{100(s+3)}{s^2+6s+25} \right|_{s=-6} = \frac{100(-3)}{25} = -12, \quad (12.54)$$

$$K_2 = \left. \frac{100(s+3)}{(s+6)(s+3+j4)} \right|_{s=-3-j4} = \frac{100(j4)}{(3+j4)(j8)} = 6 - j8 = 10e^{-j53.13^\circ}, \quad (12.55)$$

$$K_3 = \left. \frac{100(s+3)}{(s+6)(s+3-j4)} \right|_{s=-3+j4} = \frac{100(-j4)}{(3-j4)(-j8)} = 6 + j8 = 10e^{j53.13^\circ}. \quad (12.56)$$

Entonces,

$$\frac{100(s+3)}{(s+6)(s^2+6s+25)} = \frac{-12}{s+6} + \frac{10 \angle -53.13^\circ}{s+3-j4} + \frac{10 \angle 53.13^\circ}{s+3+j4}. \quad (12.57)$$

De nuevo, conviene hacer algunas observaciones. En primer lugar, en los circuitos físicamente **implementables**, las raíces complejas siempre aparecen en pares conjugados. En segundo lugar, los **coeficientes** asociados con estos pares conjugados están también conjugados entre sí. Observe, por ejemplo, que  $K_3$  (Ecuación 12.56) es el conjugado de  $K_2$  (Ecuación 12.55). Así, para las raíces complejas conjugadas, sólo hace falta en realidad calcular la mitad de los coeficientes.

Antes de hallar la transformada inversa de la Ecuación 12.57, vamos a comprobar la expansión en fracciones parciales numéricamente. Una posibilidad sencilla consiste en probar con el valor  $-3$ , ya que en este caso el lado izquierdo de la ecuación se reduce a cero:

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{-12}{3} + \frac{10 \angle -53.13^\circ}{-j4} + \frac{10 \angle 53.13^\circ}{j4} \\ &= -4 + 2.5 \angle 36.87^\circ + 2.5 \angle -36.87^\circ = -4 + 2.0 + j1.5 + 2.0 - j1.5 = 0. \end{aligned}$$

Hallemos ahora la transformada inversa de la Ecuación 12.57:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{100(s+3)}{(s+6)(s^2+6s+25)} \right\} = (-12e^{-6t} + 10e^{-j53,13^\circ} e^{-(3-j4)t} + 10e^{j53,13^\circ} e^{-(3+j4)t})u(t). \quad (12.58)$$

En general, no resulta deseable que la función en el dominio del tiempo contenga componentes imaginarias. Afortunadamente, como los términos que contienen componentes imaginarias siempre aparecen en pares conjugados, podemos eliminar las componentes imaginarias sumando simplemente dichos pares conjugados:

$$10e^{-j53,13^\circ} e^{-(3-j4)t} + 10e^{j53,13^\circ} e^{-(3+j4)t} = 10e^{-3t} (e^{j(4t-53,13^\circ)} + e^{-j(4t-53,13^\circ)}) = 20e^{-3t} \cos(4t - 53,13^\circ). \quad (12.59)$$

lo que nos permite simplificar la Ecuación 12.58:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{100(s+3)}{(s+6)(s^2+6s+25)} \right\} = [-12e^{-6t} + 20e^{-3t} \cos(4t - 53,13^\circ)]u(t). \quad (12.60)$$

Puesto que las raíces complejas y distintas aparecen frecuentemente en el análisis de circuitos lineales con parámetros agrupados, conviene resumir estos resultados definiendo una nueva pareja de transformadas. Cuando  $D(s)$  contenga raíces complejas distintas, es decir, factores de la forma  $(s + \alpha - j\beta)(s + \alpha + j\beta)$ , aparecerá una pareja de términos del estilo de

$$\frac{K}{s + \alpha - j\beta} + \frac{K^*}{s + \alpha + j\beta} \quad (12.61)$$

en la expansión en fracciones parciales, donde el coeficiente de la fracción parcial es, en general, un número complejo. En forma polar,

$$K = |K|e^{j\theta} = |K| \angle \theta^\circ, \quad (12.62)$$

donde  $|K|$  denota la magnitud del coeficiente complejo. Entonces,

$$K^* = |K|e^{-j\theta} = |K| \angle -\theta^\circ. \quad (12.63)$$

El par de complejos conjugados de la Ecuación 12.61 siempre tiene como transformada inversa

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{K}{s + \alpha - j\beta} + \frac{K^*}{s + \alpha + j\beta} \right\} = 2|K|e^{-\alpha t} \cos(\beta t + \theta). \quad (12.64)$$

Al aplicar la Ecuación 12.64, es importante tener en cuenta que  $K$  está definida como el coeficiente asociado con el término  $s + \alpha - j\beta$  del denominador, mientras que  $K^*$  está definida como el coeficiente asociado con el término  $s + \alpha + j\beta$  del denominador.

## Evaluación del objetivo 2

- Ser capaz de calcular la transformada inversa de Laplace utilizando la expansión en fracciones parciales y la tabla de transformadas de Laplace.

12.5. Calcule  $f(t)$  si  $F(s) = \frac{10(s^2 + 119)}{(s+5)(s^2 + 10s + 169)}$ .

**RESPUESTA**

$$f(t) = (10e^{-5t} - 8,33e^{-5t} \sin 12t)u(t).$$

**NOTA** Trate también de resolver los Problemas 12.37(c) y (d) del capítulo.

## Expansión en fracciones parciales: raíces reales repetidas de $D(s)$

Para hallar los coeficientes asociados con los términos generados por una raíz múltiple de multiplicidad  $r$ , multiplicamos ambos lados de la identidad por dicha raíz múltiple elevada a la potencia  $r$ . Podemos hallar el valor  $K$  que aparece como numerador de dicho factor elevado a la potencia  $r$  evaluando ambos lados de la identidad para dicha raíz múltiple. Para hallar los restantes  $(r - 1)$  coeficientes, diferenciamos ambos lados de la igualdad  $(r - 1)$  veces. Después de cada operación de diferenciación, evaluamos ambos lados de la identidad para dicha raíz múltiple. El lado derecho será siempre la incógnita  $K$  deseada y el lado izquierdo nos dará su correspondiente valor numérico. Por ejemplo,

$$\frac{100(s+25)}{s(s+5)^3} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{(s+5)^3} + \frac{K_3}{(s+5)^2} + \frac{K_4}{s+5}. \quad (12.65)$$

Hallamos el valor de  $K_1$  como antes hemos descrito; es decir,

$$K_1 = \frac{100(s+25)}{(s+5)^3} \Big|_{s=0} = \frac{100(25)}{125} = 20. \quad (12.66)$$

Para hallar  $K_2$ , multiplicamos ambos lados por  $(s+5)^3$  y luego los evaluamos en  $-5$ :

$$\frac{100(s+25)}{s} \Big|_{s=-5} = \frac{K_1(s+5)^3}{s} \Big|_{s=-5} + K_2 + K_3(s+5) \Big|_{s=-5} + K_4(s+5)^2 \Big|_{s=-5}, \quad (12.67)$$

$$\frac{100(20)}{(-5)} = K_1 \times 0 + K_2 + K_3 \times 0 + K_4 \times 0 = K_2 = -400. \quad (12.68)$$

Para hallar  $K_3$ , primero multiplicamos ambos lados de la Ecuación 12.65 por  $(s+5)^3$ . A continuación diferenciamos ambos lados una vez con respecto a  $s$  y luego evaluamos en  $s = -5$

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left[ \frac{100(s+25)}{s} \right] \Big|_{s=-5} &= \frac{d}{ds} \left[ \frac{K_1(s+5)^3}{s} \right] \Big|_{s=-5} \\ &+ \frac{d}{ds} [K_2]_{s=-5} \\ &+ \frac{d}{ds} [K_3(s+5)]_{s=-5} \\ &+ \frac{d}{ds} [K_4(s+5)^2]_{s=-5} \end{aligned} \quad (12.69)$$

$$100 \left[ \frac{s-(s+25)}{s^2} \right] \Big|_{s=-5} = K_3 = -100. \quad (12.70)$$

Para hallar  $K_4$ , primero multiplicamos ambos lados de la Ecuación 12.65 por  $(s+5)^3$  y a continuación diferenciamos ambos lados dos veces con respecto a  $s$ , para finalmente evaluarlos en  $s = -5$ . Después de simplificar la primera derivada, la segunda derivada nos queda

$$100 \frac{d}{ds} \left[ -\frac{25}{s^2} \right] \Big|_{s=-5} = K_1 \frac{d}{ds} \left[ \frac{(s+5)^2(2s-5)}{s^2} \right] \Big|_{s=-5} + 0 + \frac{d}{ds} [K_3]_{s=-5} + \frac{d}{ds} [2K_4(s+5)]_{s=-5},$$

o bien

$$-40 = 2K_4. \quad (12.71)$$

Despejando  $K_4$  en la Ecuación 12.71, se obtiene

$$K_4 = -20. \quad (12.72)$$

Entonces,

$$\frac{100(s+25)}{s(s+5)^3} = \frac{20}{s} - \frac{400}{(s+5)^3} - \frac{100}{(s+5)^2} - \frac{20}{s+5}. \quad (12.73)$$

En este punto, podemos verificar la expansión evaluando ambos lados de la Ecuación 12.73 para  $s = -25$ . Como ambos lados de la Ecuación 12.73 son iguales a cero cuando  $s = -25$ , podemos considerar como correcta la expansión en fracciones parciales. La transformada inversa de la Ecuación 12.73 es

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{100(s+25)}{s(s+5)^3} \right\} = [20 - 200t^2e^{-5t} - 100te^{-5t} - 20e^{-5t}]u(t). \quad (12.74)$$

## Evaluación del objetivo 2

- Ser capaz de calcular la transformada inversa de Laplace utilizando la expansión en fracciones parciales y la tabla de transformadas de Laplace.

12.6. Calcule  $f(t)$  si

$$F(s) = \frac{(4s^2 + 7s + 1)}{s(s+1)^2}.$$

**RESPUESTA**

$$f(t) = (1 + 2te^{-t} + 3e^{-t})u(t).$$

**NOTA** Trate también de resolver los Problemas 12.38(a), (b) y (d) del capítulo.

## Expansión en fracciones parciales: raíces complejas repetidas de $D(s)$

Podemos tratar las raíces complejas múltiples de la misma forma que las raíces reales múltiples; la única diferencia es que las operaciones algebraicas implicarán la manipulación de números complejos. Recuerde que las raíces complejas aparecen siempre en pares conjugados y que los coeficientes asociados con un par conjugado están también conjugados entre sí, por lo que sólo será necesario evaluar la mitad de las  $K$ . Por ejemplo,

$$F(s) = \frac{768}{(s^2 + 6s + 25)^2}. \quad (12.75)$$

Después de factorizar el polinomio del denominador, escribimos

$$F(s) = \frac{768}{(s+3-j4)^2(s+3+j4)^2} = \frac{K_1}{(s+3-j4)^2} + \frac{K_2}{s+3-j4} + \frac{K_1^*}{(s+3+j4)^2} + \frac{K_2^*}{s+3+j4}. \quad (12.76)$$

Ahora, sólo hace falta evaluar  $K_1$  y  $K_2$ , porque  $K_1^*$  y  $K_2^*$  serán los correspondientes valores **conjugados**. El valor de  $K_1$  es

$$K_1 = \frac{768}{(s+3+j4)^2} \Big|_{s=-3+j4} = \frac{768}{(j8)^2} = -12. \quad (12.77)$$

El valor de  $K_2$  es

$$\begin{aligned} K_2 &= \frac{d}{ds} \left[ \frac{768}{(s+3+j4)^2} \right]_{s=-3+j4} \\ &= -\frac{2(768)}{(s+3+j4)^3} \Big|_{s=-3+j4} \\ &= -\frac{2(768)}{(j8)^3} \\ &= -j3 = 3 \angle -90^\circ. \end{aligned} \quad (12.78)$$

A partir de las Ecuaciones 12.77 y 12.78,

$$K_1^* = -12 \quad (12.79)$$

$$K_2^* = j3 = 3 \angle 90^\circ. \quad (12.80)$$

Ahora agrupamos la expansión en fracciones parciales según sus pares conjugados para obtener

$$F(s) = \left[ \frac{-12}{(s+3-j4)^2} + \frac{-12}{(s+3+j4)^2} \right] + \left( \frac{3 \angle -90^\circ}{s+3-j4} + \frac{3 \angle 90^\circ}{s+3+j4} \right) \quad (12.81)$$

Por fin, escribimos la transformada inversa de  $F(s)$ :

$$f(t) = [(-24te^{-3t} \cos 4t + 6e^{-3t} \cos(4t - 90^\circ))u(t)]. \quad (12.82)$$

Observe que, si  $F(s)$  tiene una raíz real  $a$  de multiplicidad  $r$  en el denominador, el término correspondiente en la expansión en fracciones parciales adoptará la forma

$$\frac{K}{(s+a)^r}.$$

La forma inversa de este término será

$$L^{-1} \left\{ \frac{K}{(s+a)^r} \right\} = \frac{Kt^{r-1}e^{-at}}{(r-1)!} u(t). \quad (12.83)$$

Si  $F(s)$  tiene una raíz compleja  $\alpha + j\beta$  de multiplicidad  $r$  en el denominador, el término correspondiente en la expansión en fracciones parciales será el par conjugado

$$\frac{K}{(s+\alpha-j\beta)^r} + \frac{K^*}{(s+\alpha+j\beta)^r}.$$

La transformada inversa de este par es

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{K}{(s+\alpha-j\beta)^r} + \frac{K^*}{(s+\alpha+j\beta)^r} \right\} = \left[ \frac{2|K|t^{r-1}}{(r-1)!} e^{-\alpha t} \cos(\beta t + \theta) \right] u(t). \quad (12.84)$$

Las Ecuaciones 12.83 y 12.84 son la clave para poder hallar la transformada inversa de cualquier expansión en fracciones parciales por simple inspección. Una nota adicional relativa a estas dos ecuaciones: en la mayoría de los problemas de análisis de circuitos,  $r$  raramente es superior a 2. Por tanto, la transformada inversa de una función racional puede hallarse mediante cuatro pares de transformadas. La Tabla 12.3 enumera estos pares.

**Tabla 12.3.** Cuatro parejas útiles de transformadas.

NÚMERO DE PAREJA	NATURALEZA DE LAS RAÍCES	$F(s)$	$f(t)$
1	Real simple	$\frac{K}{s+a}$	$Ke^{-at}u(t)$
2	Real múltiple	$\frac{K}{(s+a)^2}$	$Kte^{-at}u(t)$
3	Compleja simple	$\frac{K}{s+\alpha-j\beta} + \frac{K^*}{s+\alpha+j\beta}$	$2 K e^{-\alpha t} \cos(\beta t + \theta)u(t)$
4	Compleja múltiple	$\frac{K}{(s+\alpha-j\beta)^2} + \frac{K^*}{(s+\alpha+j\beta)^2}$	$2t K e^{-\alpha t} \cos(\beta t + \theta)u(t)$

*Nota* En las parejas 1 y 2,  $K$  es un valor real, mientras que en la parejas 3 y 4,  $K$  es el valor complejo  $|K| \angle \theta$ .

## Evaluación del objetivo 2

- Ser capaz de calcular la transformada inversa de Laplace utilizando la expansión en fracciones parciales y la tabla de transformadas de Laplace.

12.7. Calcule  $f(t)$  si

$$F(s) = \frac{40}{(s^2 + 4s + 5)^2}.$$

**RESPUESTA**

$$f(t) = (-20te^{-2t} \cos t + 20e^{-2t} \sin t)u(t).$$

**NOTA** Trate también de resolver el Problema 12.38(e) del capítulo.

## Expansión en fracciones parciales: funciones racionales impropias

Concluimos el análisis de la expansión en fracciones parciales volviendo a la observación que hicimos al principio de la sección, cuando dijimos que las funciones racionales impropias no constituyen nin-

gún problema a la hora de hallar transformadas inversas. Una función racional impropia siempre puede expandirse en un polinomio más una función racional propia. A continuación, se puede hallar la transformada inversa del polinomio en forma de funciones impulsivas y derivadas de funciones impulsivas. La transformada inversa de la función racional propia, por su parte, se halla mediante las técnicas presentadas en esta sección. Para ilustrar el procedimiento, emplearemos la función

$$F(s) = \frac{s^4 + 13s^3 + 66s^2 + 200s + 300}{s^2 + 9s + 20}. \quad (12.85)$$

Dividiendo el numerador por el denominador hasta obtener un resto que sea una función racional propia, nos queda

$$F(s) = s^2 + 4s + 10 + \frac{30s + 100}{s^2 + 9s + 20}, \quad (12.86)$$

donde el término  $(30s + 100)/(s^2 + 9s + 20)$  es el resto.

A continuación expandimos la función racional propia en una suma de fracciones parciales;

$$\frac{30s + 100}{s^2 + 9s + 20} = \frac{30s + 100}{(s + 4)(s + 5)} = \frac{-20}{s + 4} + \frac{50}{s + 5}. \quad (12.87)$$

Sustituyendo la Ecuación 12.87 en la Ecuación 12.86, se obtiene

$$F(s) = s^2 + 4s + 10 - \frac{20}{s + 4} + \frac{50}{s + 5}. \quad (12.88)$$

Ahora podemos hallar la transformada inversa de la Ecuación 12.88 por simple inspección. De aquí,

$$f(t) = \frac{d^2 \delta(t)}{dt^2} + 4 \frac{d\delta(t)}{dt} + 10\delta(t) - (20e^{-4t} - 50e^{-5t})u(t). \quad (12.89)$$

## Evaluación del objetivo 2

- Ser capaz de calcular la transformada inversa de Laplace utilizando la expansión en fracciones parciales y la tabla de transformadas de Laplace.

12.8. Calcule  $f(t)$  si

$$F(s) = \frac{(5s^2 + 29s + 32)}{(s + 2)(s + 4)}.$$

**RESPUESTA**

$$f(t) = 5\delta(t) - (3e^{-2t} - 2e^{-4t})u(t).$$

12.9. Calcule  $f(t)$  si

$$F(s) = \frac{(2s^3 + 8s^2 + 2s - 4)}{(s^2 + 5s + 4)}.$$

**RESPUESTA**

$$f(t) = 2 \frac{d\delta(t)}{dt} - 2\delta(t) + 4e^{-4t}u(t).$$

**NOTA** Trate también de resolver el Problema 12.39(c) del capítulo.

## 12.8. Polos y ceros de $F(s)$

La función racional de la Ecuación 12.42 también puede expresarse como cociente de dos polinomios factorizados. En otras palabras, podemos escribir  $F(s)$  como

$$F(s) = \frac{K(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_n)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_m)}, \quad (12.90)$$

donde  $K$  es la constante  $a_n/b_m$ . Por ejemplo, podemos escribir la función

$$F(s) = \frac{8s^2 + 120s + 400}{2s^4 + 20s^3 + 70s^2 + 100s + 48}$$

como

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{8(s^2 + 15s + 50)}{2(s^4 + 10s^3 + 35s^2 + 50s + 24)} \\ &= \frac{4(s+5)(s+10)}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)}. \end{aligned} \quad (12.91)$$

Las raíces del polinomio del denominador, es decir,  $-p_1, -p_2, -p_3, \dots, -p_m$ , se denominan **polos** de  $F(s)$ ; son los valores de  $s$  para los que  $F(s)$  toma un valor infinitamente grande. En la función descrita por la Ecuación 12.91, los polos de  $F(s)$  son  $-1, -2, -3$  y  $-4$ .

Las raíces del polinomio del numerador, es decir,  $-z_1, -z_2, -z_3, \dots, -z_n$ , se denominan **ceros** de  $F(s)$ ; son los valores de  $s$  para los que  $F(s)$  se hace cero. En la función descrita por la Ecuación 12.91, los ceros de  $F(s)$  son  $-5$  y  $-10$ .

En lo que sigue, podremos ver que resulta útil ser capaz de visualizar los polos y los ceros de  $F(s)$  como puntos del plano complejo  $s$ . Es necesario el plano complejo porque las raíces de los polinomios pueden ser complejas. En el plano complejo, utilizamos el eje horizontal para mostrar los valores reales de  $s$  y el eje vertical para los valores imaginarios de  $s$ .

Como ejemplo de determinación de los polos y ceros de  $F(s)$ , considere la función

$$F(s) = \frac{10(s+5)(s+3-j4)(s+3+j4)}{s(s+10)(s+6-j8)(s+6+j8)}. \quad (12.92)$$

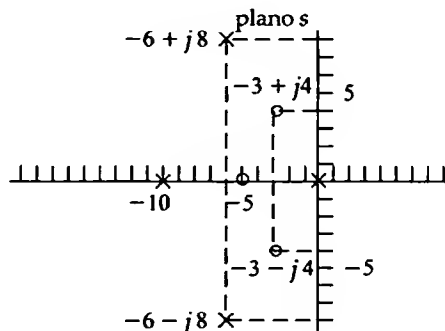


Figura 12.17. Ubicación de los polos y ceros en el plano  $s$ .



Los polos de  $F(s)$  se encuentran en  $0$ ,  $-10$ ,  $-6 + j8$  y  $-6 - j8$ . Los ceros se encuentran en  $-5$ ,  $-3 + j4$  y  $-3 - j4$ . La Figura 12.17 muestra los polos y ceros en el plano  $s$ , donde las  $X$  representan polos y las  $O$  representan ceros. Observe que los polos y ceros de la Ecuación 12.90 se ubican en el plano  $s$  finito.  $F(s)$  también puede tener un polo de orden  $r$  o un cero de orden  $r$  en el infinito. Por ejemplo, la función descrita por la Ecuación 12.91 tiene un cero de segundo orden en el infinito, porque para grandes valores de  $s$  la función se reduce a  $4/s^2$  y  $F(s) = 0$  cuando  $s = \infty$ . En este texto, lo que nos interesa son los polos y ceros ubicados en el plano  $s$  finito. Por tanto, cuando nos refiramos a los polos y ceros de una función racional de  $s$ , estaremos haciendo referencia a los polos y ceros finitos.

## 12.9. Teoremas del valor inicial y del valor final

Los teoremas del valor inicial y del valor final son útiles porque nos permiten determinar a partir de  $F(s)$  el comportamiento de  $f(t)$  en cero e  $\infty$ . De este modo, podemos comprobar los valores inicial y final de  $f(t)$  para ver si concuerdan con el comportamiento conocido del circuito, antes de hallar la transformada inversa de  $F(s)$ .

El teorema del valor inicial afirma que

$$\text{☛ TEOREMA DEL VALOR INICIAL} \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s F(s), \quad (12.93)$$

y el teorema del valor final afirma que

$$\text{☛ TEOREMA DEL VALOR FINAL} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s F(s). \quad (12.94)$$

El teorema del valor inicial se basa en la suposición de que  $f(t)$  no contiene funciones impulsivas. En la Ecuación 12.94, se aplica la restricción de que el teorema es válido sólo si los polos de  $F(s)$  (salvo por un polo de primer orden en el origen) están situados en el lado izquierdo del plano  $s$ .

Para demostrar la Ecuación 12.93, comenzamos con la transformada operacional de la primera derivada:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df}{dt}\right\} = s F(s) - f(0^-) = \int_{0^-}^{\infty} \frac{df}{dt} e^{-st} dt. \quad (12.95)$$

Ahora tomamos el límite cuando  $s \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{s \rightarrow \infty} [s F(s) - f(0^-)] = \lim_{s \rightarrow \infty} \int_{0^-}^{\infty} \frac{df}{dt} e^{-st} dt. \quad (12.96)$$

Observe que el lado derecho de la Ecuación 12.96 puede escribirse como

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \left( \int_{0^-}^{0^+} \frac{df}{dt} e^0 dt + \int_{0^+}^{\infty} \frac{df}{dt} e^{-st} dt \right).$$

A medida que  $s \rightarrow \infty$ ,  $(df/dt)e^{-st} \rightarrow 0$ ; por tanto, la segunda integral puede despreciarse en el límite. La primera integral se reduce a  $f(0^+) - f(0^-)$ , que es independiente de  $s$ . Por tanto, el lado derecho de la Ecuación 12.96 queda

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_{0^-}^{\infty} \frac{df}{dt} e^{-st} dt = f(0^+) - f(0^-). \quad (12.97)$$

Puesto que  $f(0^-)$  es independiente de  $s$ , el lado izquierdo de la Ecuación 12.96 puede escribirse

$$\lim_{s \rightarrow \infty} [s F(s) - f(0^-)] = \lim_{s \rightarrow \infty} [s F(s)] - f(0^-). \quad (12.98)$$

A partir de las Ecuaciones 12.97 y 12.98,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s F(s) = f(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t),$$

lo que completa la demostración del teorema del valor inicial.

La prueba del teorema del valor final también parte de la Ecuación 12.95. En este caso, tomamos el límite cuando  $s \rightarrow 0$ :

$$\lim_{s \rightarrow 0} [s F(s) - f(0^-)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left( \int_0^\infty \frac{df}{dt} e^{-st} dt \right). \quad (12.99)$$

La integración es con respecto a  $t$  y la operación de límite con respecto a  $s$ , por lo que el lado derecho de la Ecuación 12.99 se reduce a

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left( \int_0^\infty \frac{df}{dt} e^{-st} dt \right) = \int_0^\infty \frac{df}{dt} dt. \quad (12.100)$$

Puesto que el límite superior de la integral es infinito, esta integral también puede escribirse mediante el siguiente límite:

$$\int_0^\infty \frac{df}{dt} dt = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{df}{dy} dy, \quad (12.101)$$

donde usamos  $y$  como símbolo de integración para evitar la confusión con el límite superior de la integral. Al realizar la integración, nos queda

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [f(t) - f(0^-)] = \lim_{t \rightarrow \infty} [f(t)] - f(0^-). \quad (12.102)$$

Sustituyendo la Ecuación 12.102 en la Ecuación 12.99 se obtiene

$$\lim_{s \rightarrow 0} [s F(s)] - f(0^-) = \lim_{t \rightarrow \infty} [f(t)] - f(0^-). \quad (12.103)$$

Puesto que  $f(0^-)$  se elimina, la Ecuación 12.103 se reduce al teorema del valor final, es decir,

$$\lim_{s \rightarrow 0} s F(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t).$$

El teorema del valor final resulta útil sólo si existe  $f(\infty)$ . Esta condición será cierta sólo si todos los polos de  $F(s)$ , salvo por un polo simple en el origen, caen en la mitad izquierda del plano  $s$ .

## Aplicación de los teoremas del valor inicial y del valor final

Para ilustrar la utilización de los teoremas del valor inicial y del valor final, vamos a aplicarlos a una función que ya hemos empleado al analizar la expansión en fracciones parciales. Considere la pareja de transformadas dada por la Ecuación 12.60. El teorema del valor inicial nos da

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s F(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{100s^2[1 + (3/s)]}{s^3[1 + (6/s)][1 + (6/s) + (25/s^2)]} = 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = [-12 + 20 \cos(-53.13^\circ)](1) = -12 + 12 = 0.$$

El teorema del valor final implica que

$$\lim_{s \rightarrow 0} s F(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{100s(s+3)}{(s+6)(s^2+6s+25)} = 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [-12e^{-6t} + 20e^{-3t} \cos(4t - 53.13^\circ)]u(t) = 0.$$

Al aplicar los teoremas a la Ecuación 12.60, ya disponíamos de la expresión en el dominio del tiempo y lo único que estábamos haciendo era verificar nuestra comprensión de dichos teoremas. Pero la verdadera utilidad de los teoremas del valor inicial y del valor final radica en poder comprobar las expresiones en el dominio de  $s$  antes de hallar la transformada inversa. Por ejemplo, considere la expresión correspondiente a  $V(s)$  dada por la Ecuación 12.40. Aunque no podemos calcular  $v(t)$  hasta que se especifiquen los parámetros del circuito, podremos ver si  $V(s)$  predice los valores correctos de  $v(0^+)$  y  $v(\infty)$ . Sabemos, a partir del enunciado del problema que nos permitió obtener  $V(s)$ , que  $v(0^+)$  es cero. También sabemos que  $v(\infty)$  debe ser cero, porque la bobina ideal es un cortocircuito perfecto en bornes de la fuente de corriente continua. Finalmente, sabemos que los polos de  $V(s)$  deben caer en la mitad izquierda del plano  $s$ , porque  $R$ ,  $L$  y  $C$  son constantes positivas. Por tanto, los polos de  $sV(s)$  también caen en la mitad izquierda del plano  $s$ .

Aplicando el teorema del valor inicial obtenemos

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s V(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s(I_{cc}/C)}{s^2[1 + 1/(RCs) + 1/(LCs^2)]} = 0.$$

Aplicando el teorema del valor final, nos queda

$$\lim_{s \rightarrow 0} s V(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s(I_{cc}/C)}{s^2 + (s/RC) + (1/LC)} = 0.$$

La expresión obtenida para  $V(s)$  predice correctamente los valores inicial y final de  $v(t)$ .

### Evaluación del objetivo 3

- Comprender y ser capaz de utilizar el teorema del valor inicial y el teorema del valor final

**12.10.** Utilice los teoremas del valor inicial y del valor final para hallar los valores inicial y final de  $f(t)$  en los Problemas de evaluación 12.4, 12.6 y 12.7.

#### RESPUESTA

7, 0; 4, 1; y 0, 0.

**NOTA** Trate también de resolver el Problema 12.44 del capítulo.

## RESUMEN

- La **transformada de Laplace** es una herramienta para convertir ecuaciones en el dominio del tiempo en ecuaciones en el dominio de la frecuencia, de acuerdo con la siguiente definición general:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = F(s),$$

donde  $f(t)$  es la expresión en el dominio del tiempo y  $F(s)$  es la expresión en el dominio de la frecuencia (véase la página 564).

- La **función escalón**  $Ku(t)$  describe una función que experimenta una discontinuidad desde un nivel constante a otro en algún punto del tiempo.  $K$  es la magnitud del salto; si  $K = 1$ ,  $Ku(t)$  es la **función escalón unitaria** (véase la página 566).
- La **función impulsiva**  $K\delta(t)$  se define como

$$\int_{-\infty}^{\infty} K \delta(t) dt = K,$$

$$\delta(t) = 0, \quad t \neq 0.$$

$K$  es la intensidad del impulso; si  $K = 1$ ,  $K\delta(t)$  es la **función impulsiva unitaria** (véase la página 568).

- Una **transformada funcional** es la transformada de Laplace de una función específica. La Tabla 12.1 indica una serie de parejas de transformadas funcionales de gran importancia en el análisis de circuitos (véase la página 572).
- Las **transformadas operacionales** definen las propiedades matemáticas generales de la transformada de Laplace. La Tabla 12.2 resume una serie de importantes parejas de transformadas operacionales (véase la página 574).

- En los circuitos lineales con parámetros agrupados,  $F(s)$  es una función racional de  $s$  (véase la página 582).
- Si  $F(s)$  es una función racional propia, la transformada inversa puede calcularse mediante una expansión en fracciones parciales (véase la página 582).
- Si  $F(s)$  es una función racional impropia, puede hallarse la transformada inversa expandiéndola primero en una suma de un polinomio y una función racional propia (véase la página 590).
- $F(s)$  puede expresarse como el cociente de dos polinomios descompuestos en factores. Las raíces del denominador se denominan **polos** y se dibujan mediante símbolos  $\times$  en el plano  $s$  complejo. Las raíces del numerador se denominan **ceros** y se dibujan como símbolos  $\circ$  en el plano  $s$  complejo (véase la página 592).
- El teorema del valor inicial afirma que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s F(s).$$

El teorema presupone que  $f(t)$  no contiene funciones impulsivas (véase la página 593).

- El teorema del valor final afirma que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0^+} s F(s).$$

El teorema es válido sólo si los polos de  $F(s)$ , a excepción de un polo de primer orden en el origen, están en la mitad izquierda del plano  $s$  (véase la página 593).

- Los teoremas del valor inicial y del valor final nos permiten predecir los valores inicial y final de  $f(t)$  a partir de una expresión en el dominio de  $s$  (véase la página 594).

## PROBLEMAS

- 12.1.** Utilice funciones escalón para escribir la expresión correspondiente a cada una de las funciones mostradas.

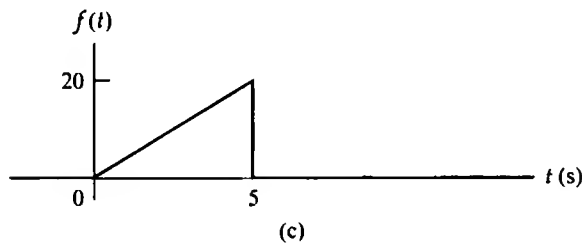
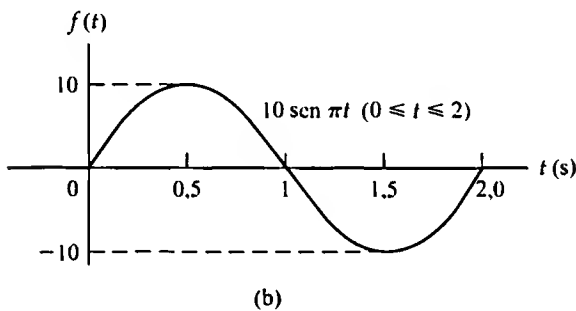
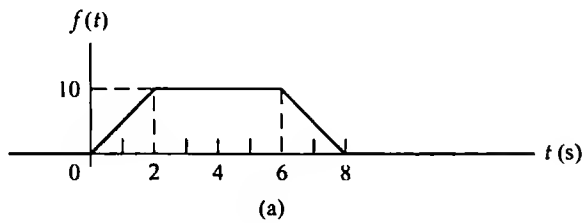


Figura P12.1

- 12.2.** Utilice funciones escalón para escribir la expresión correspondiente a cada una de las funciones mostradas en la Figura P12.2.

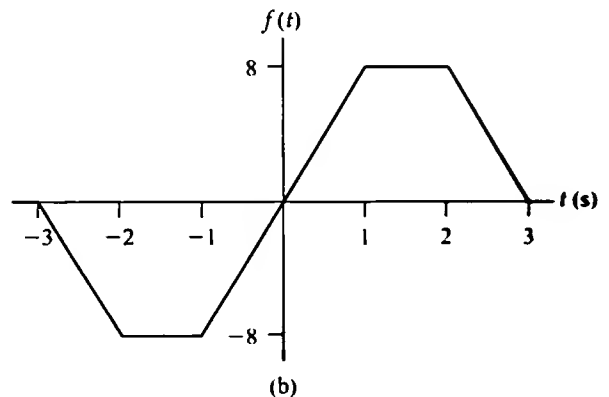
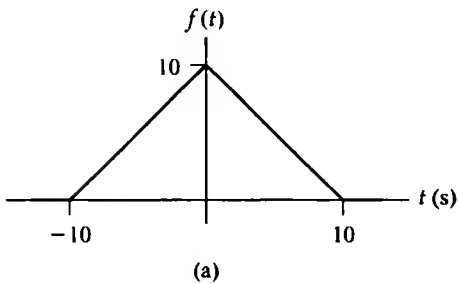


Figura P12.2

- 12.3. Dibuje  $f(t)$  en el intervalo  $-15 \text{ s} \leq t \leq 35 \text{ s}$  si  $f(t)$  está dada por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} f(t) = & (100 + 10t)u(t + 10) - (50 + 10t)u(t + 5) \\ & + (50 - 10t)u(t - 5) - (150 - 10t)u(t - 15) \\ & + (10t - 250)u(t - 25) - (10t - 300)u(t - 30). \end{aligned}$$

- 12.4. Las funciones escalón pueden usarse para definir una función de *ventana*. Así,  $u(t - 1) - u(t - 4)$  define una ventana de una unidad de altura y tres unidades de anchura, que se ubica en el eje temporal entre los instantes 1 y 4.

Suponga una función  $f(t)$  definida como sigue:

$$\begin{aligned} f(t) = & 0, & t \leq 0 \\ & -20t, & 0 \leq t \leq 1 \text{ s} \\ & -20, & 1 \text{ s} \leq t \leq 2 \text{ s} \\ & = 20 \cos \frac{\pi}{2}t, & 2 \text{ s} \leq t \leq 4 \text{ s}; \\ & = 100 - 20t, & 4 \text{ s} \leq t \leq 5 \text{ s} \\ & = 0, & 5 \text{ s} \leq t \leq \infty. \end{aligned}$$

- a) Dibuje  $f(t)$  en el intervalo  $-1 \text{ s} \leq t \leq 6 \text{ s}$ .  
 b) Utilice el concepto de función de ventana para escribir una expresión para  $f(t)$ .
- 12.5. a) Halle el área situada bajo la función mostrada en la Figura 12.12(a).  
 b) ¿Cuál es la duración de la función cuando  $\varepsilon = 0$ ?  
 c) ¿Cuál es la magnitud de  $f(0)$  cuando  $\varepsilon = 0$ ?
- 12.6. Evalúe las siguientes integrales:  
 a)  $I = \int_{-1}^3 (t^3 + 2)[\delta(t) + 8\delta(t - 1)]dt$ .  
 b)  $I = \int_{-2}^2 t^2 [\delta(t) + \delta(t + 1.5) + \delta(t - 3)]dt$ .
- 12.7. Calcule  $f(t)$  si

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega,$$

$$F(\omega) = \frac{4 + j\omega}{9 + j\omega} \pi \delta(\omega).$$

- 12.8. Explique por qué la siguiente función genera una función impulsiva a medida que  $t \rightarrow 0$ :

$$f(t) = \frac{\varepsilon/\pi}{\varepsilon^2 + t^2}, \quad -\infty \leq t \leq \infty.$$

- 12.9. En la Sección 12.3, hemos utilizado la propiedad de filtro de la función impulsiva para demostrar que  $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$ . Demuestre que podemos obtener el mismo resultado hallando la transformada de Laplace del pulso rectangular existente entre  $\pm \varepsilon$  en la Figura 12.9 y luego hallando el límite de esta transformada cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

12.10. a) Demuestre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta'(t-a)dt = -f'(a).$$

(Sugerencia: realice una integración por partes).

b) Utilice la fórmula del apartado (a) para demostrar que

$$\mathcal{L}\{\delta'(t)\} = s.$$

12.11. Los pulsos triangulares mostrados en la Figura P12.11 son equivalentes a los pulsos rectangulares de la Figura 12.12(b), porque ambos encierran la misma área ( $1/\varepsilon$ ) y ambos se aproximan a infinito de forma proporcional a  $(1/\varepsilon^2)$  a medida que  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Utilice esta representación mediante pulsos triangulares para  $\delta'(t)$  con el fin de hallar la transformada de Laplace de  $\delta''(t)$ .

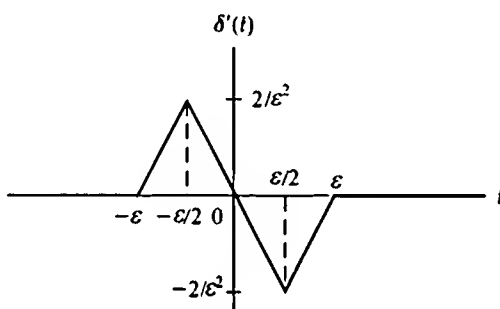


Figura P12.11

12.12. Demuestre que

$$\mathcal{L}\{\delta^{(n)}(t)\} = s^n.$$

12.13. Halle la transformada de Laplace de cada una de las siguientes funciones:

- $f(t) = te^{-at}$ ;
- $f(t) = \sin \omega t$ ;
- $f(t) = \sin(\omega t + \theta)$ ;
- $f(t) = t$ ;
- $f(t) = \cosh(t + \theta)$ .

(Sugerencia: véase el Problema de evaluación 12.1).

12.14. a) Calcule la transformada de Laplace de  $te^{-at}$ .

b) Utilice la transformada operacional dada por la Ecuación 12.23 para hallar la transformada de Laplace de  $\frac{d}{dt}(te^{-at})$ .

c) Compruebe el resultado del apartado (b) primero diferenciando y luego transformando la expresión resultante.

12.15. Halle la transformada de Laplace (cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ ) de la derivada de la función exponencial ilustrada en la Figura 12.8, utilizando cada uno de los dos métodos siguientes:

- Primero diferencie la función y luego halle la transformada de la función resultante.
- Utilice la transformada operacional dada por la Ecuación 12.23.

12.16. Demuestre que

$$\mathcal{L}\{e^{-at}f(t)\} = F(s + a).$$

12.17. a) Calcule  $\mathcal{L}\left\{\int_{0^-}^t e^{-ax} dx\right\}$ .

b) Calcule  $\mathcal{L}\left\{\int_{0^-}^t y dy\right\}$ .

c) Compruebe los resultados de los apartados (a) y (b) primero integrando y luego hallando la transformada.

12.18. a) Calcule  $\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt} \sin \omega t\right\}$ .

b) Calcule  $\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt} \cos \omega t\right\}$ .

c) Calcule  $\mathcal{L}\left\{\frac{d^3}{dt^3} t^2\right\}$ .

d) Compruebe los resultados de los apartados (a), (b) y (c) primero diferenciando y luego hallando la transformada.

12.19. a) Halle la transformada de Laplace de la función ilustrada en la Figura P12.19.

b) Halle la transformada de Laplace de la primera derivada de la función ilustrada en la Figura P12.19.

c) Halle la transformada de Laplace de la segunda derivada de la función ilustrada en la Figura P12.19.

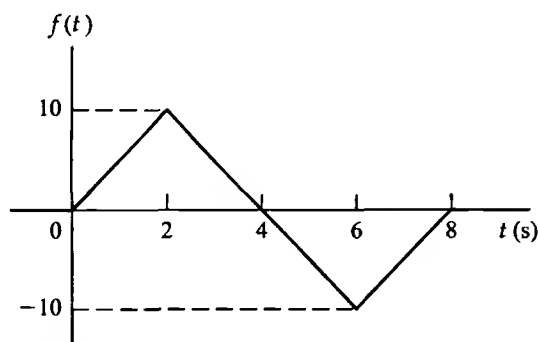


Figura P12.19

12.20. a) Halle la transformada de Laplace de

$$\int_{0^-}^t x dx$$

primero integrando y luego calculando la transformada.

b) Compruebe el resultado obtenido en el apartado (a) utilizando la transformada operacional dada por la Ecuación 12.33.



**12.21.** Halle la transformada de Laplace de cada una de las siguientes funciones:

a)  $f(t) = 40e^{-8(t-3)}u(t-3)$ .

b)  $f(t) = (5t - 10)[u(t-2) - u(t-4)] + (30 - 5t)[u(t-4) - u(t-8)] + (5t - 50)[u(t-8) - u(t-10)]$ .

**12.22.** Demuestre que

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right).$$

**12.23.** Halle la transformada de Laplace de las funciones dadas en los apartados (a) y (b).

a)  $f(t) = \frac{d}{dt}(e^{-at} \sin \omega t)$ .

b)  $f(t) = \int_{0^-}^t e^{-ax} \cos \omega x \, dx$ .

c) Verifique los resultados obtenidos en los apartados (a) y (b) realizando primero la operación matemática indicada y luego hallando la transformada de Laplace.

**12.24.** a) Dado que  $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ , demuestre que

$$-\frac{dF(s)}{ds} = \mathcal{L}\{t f(t)\}.$$

b) Demuestre que

$$(-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n} = \mathcal{L}\{t^n f(t)\}.$$

c) Utilice el resultado del apartado (b) para hallar  $\mathcal{L}\{t^5\}$ ,  $\mathcal{L}\{t \sin \beta t\}$  y  $\mathcal{L}\{te^{-t} \cosh t\}$ .

**12.25.** a) Demuestre que si  $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$  y  $\{f(t)/t\}$  tiene transformada de Laplace, entonces

$$\int_s^\infty F(u) du = \mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}.$$

(Sugerencia: utilice la integral que define la transformada para escribir

$$\int_s^\infty F(u) du = \int_s^\infty \left( \int_{0^-}^\infty f(t) e^{-ut} dt \right) du$$

y luego invierta el orden de integración).

b) A partir del resultado obtenido en el Problema 12.24(c) para  $\mathcal{L}\{t \sin \beta t\}$ , utilice la transformada operacional dada en el apartado (a) de este problema para hallar  $\mathcal{L}\{\sin \beta t\}$ .

**12.26.** En el circuito mostrado en la Figura 12.16, sustituimos la fuente de corriente continua por una fuente sinusoidal que proporciona una corriente igual a  $1,2 \cos t$  A. Los componentes del circuito son  $R = 1 \, \Omega$ ,  $C = 625 \, \text{mF}$  y  $L = 1,6 \, \text{H}$ . Calcule la expresión numérica correspondiente a  $V(s)$ .

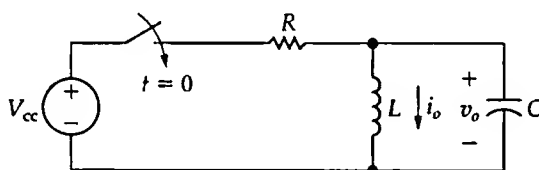
**12.27.** El conmutador del circuito de la Figura P12.27 ha estado abierto durante un largo tiempo. En  $t = 0$ , se cierra el conmutador.

- Halle la ecuación integrodiferencial que gobierna el comportamiento de la tensión  $v_o$  para  $t \geq 0$ .
- Demuestre que

$$V_o(s) = \frac{V_{cc}/RC}{s^2 + (1/RC)s + (1/LC)}.$$

- Demuestre que

$$I_o(s) = \frac{V_{cc}(1/RLC)}{s[s^2 + (1/RC)s + (1/LC)]}.$$



**Figura P12.27**

**12.28.** Los parámetros del circuito de la Figura P12.27 son  $R = 5 \text{ k}\Omega$ ,  $L = 200 \text{ mH}$  y  $C = 100 \text{ nF}$ . Si  $V_{cc}$  es 35 V, calcule

- $v_o(t)$  para  $t \geq 0$ ;
- $i_o(t)$  para  $t \geq 0$ .

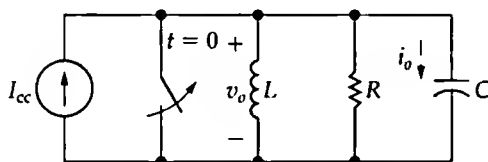
**12.29.** No hay energía almacenada en el circuito mostrado en la Figura P12.29 en el momento de abrir el conmutador:

- Determine la ecuación integrodiferencial que gobierna el comportamiento de la tensión  $v_o$ .
- Demuestre que

$$V_o(s) = \frac{I_{cc}/C}{s^2 + (1/RC)s + (1/LC)}.$$

- Demuestre que

$$I_o(s) = \frac{sI_{cc}}{s^2 + (1/RC)s + (1/LC)}.$$



**Figura P12.29**

**12.30.** Los parámetros del circuito de la Figura P12.29 tienen los siguientes valores:  $R = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $L = 12,5 \text{ H}$ ,  $C = 2 \text{ }\mu\text{F}$  e  $I_{cc} = 30 \text{ mA}$ .

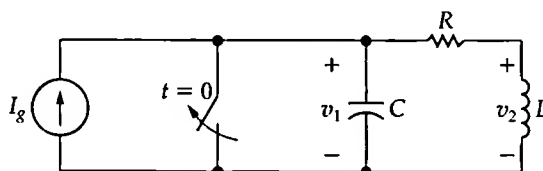
- Calcule  $v_o(t)$  para  $t \geq 0$
- Calcule  $i_o(t)$  para  $t \geq 0$ .
- ¿Tiene sentido la solución correspondiente a  $i_o(t)$  cuando  $t = 0$ ? Explique su respuesta.

**12.31.** No hay energía almacenada en el circuito mostrado en la Figura P12.31 en el momento de abrir el conmutador.

a) Determine las ecuaciones integrodiferenciales que gobiernan el comportamiento de las tensiones de nodo  $v_1$  y  $v_2$ .

b) Demuestre que

$$V_2(s) = \frac{sI_g(s)}{C[s^2 + (R/L)s + (1/LC)]}.$$



**Figura P12.31**

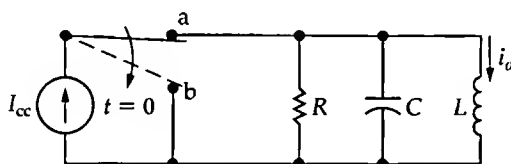
**12.32.** Los parámetros del circuito de la Figura P12.31 son  $R = 1600 \, \Omega$ ,  $L = 200 \, \text{mH}$  y  $C = 0,2 \, \mu\text{F}$ . Si  $I_g(t) = 6 \, \text{mA}$ , determine  $v_2(t)$ .

**12.33.** El conmutador del circuito de la Figura P12.33 ha estado en la posición a durante un largo período de tiempo. En  $t = 0$ , el conmutador pasa instantáneamente a la posición b.

a) Determine la ecuación integrodiferencial que gobierna el comportamiento de la corriente  $i_o$  para  $t \geq 0^+$ .

b) Demuestre que

$$I_o(s) = \frac{I_{cc}[s + (1/RC)]}{[s^2 + (1/RC)s + (1/LC)]}.$$



**Figura P12.33**

**12.34.** Los parámetros del circuito de la Figura P12.33 son  $R = 500 \, \Omega$ ,  $L = 250 \, \text{mH}$  y  $C = 0,25 \, \mu\text{F}$ . Si  $I_{cc} = 5 \, \text{mA}$ , determine  $i_o(t)$  para  $t \geq 0$ .

**12.35.** a) Escriba el sistema de dos ecuaciones diferenciales que describe el circuito mostrado en la Figura P12.35, en términos de las corrientes de malla  $i_1$  e  $i_2$ .

b) Halle la transformada de Laplace de las ecuaciones determinadas en el apartado (a). Suponga que la energía inicialmente almacenada en el circuito es cero.

c) Resuelva las ecuaciones del apartado (b) para hallar  $I_1(s)$  e  $I_2(s)$ .

d) Calcule  $i_1(t)$  e  $i_2(t)$ .

e) Calcule  $i_1(\infty)$  e  $i_2(\infty)$ .

f) ¿Tienen sentido las soluciones correspondientes a  $i_1$  e  $i_2$ ? Explique su respuesta.

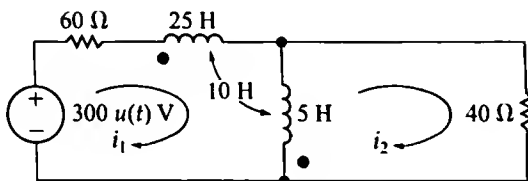


Figura P12.35

12.36. Calcule  $v(t)$  en el Problema 12.26.

12.37. Calcule  $f(t)$  para cada una de las siguientes funciones:

a)  $F(s) = \frac{8s^2 + 37s + 32}{(s+1)(s+2)(s+4)}.$

b)  $F(s) = \frac{8s^3 + 89s^2 + 311s + 300}{s(s+2)(s^2 + 8s + 15)}.$

c)  $F(s) = \frac{22s^2 + 60s + 58}{(s+1)(s^2 + 4s + 5)}.$

d)  $F(s) = \frac{250(s+7)(s+14)}{s(s^2 + 14s + 50)}.$

12.38. Calcule  $f(t)$  para cada una de las siguientes funciones:

a)  $F(s) = \frac{100}{s^2(s+5)}.$

b)  $F(s) = \frac{50(s+5)}{s(s+1)^2}.$

c)  $F(s) = \frac{100(s+3)}{s^2(s^2 + 6s + 10)}.$

d)  $F(s) = \frac{5(s+2)^2}{s(s+1)^3}.$

e)  $F(s) = \frac{400}{s(s^2 + 4s + 5)^2}.$

12.39. Calcule  $f(t)$  para cada una de las siguientes funciones:

a)  $F(s) = \frac{5s^2 + 38s + 80}{s^2 + 6s + 8}.$

b)  $F(s) = \frac{10s^2 + 512s + 7186}{s^2 + 48s + 625}.$

c) 
$$F(s) = \frac{s^3 + 5s^2 - 50s - 100}{s^2 + 15s + 50}.$$

**12.40.** Calcule  $f(t)$  para cada una de las siguientes funciones:

a) 
$$F(s) = \frac{100(s+1)}{s^2(s^2 + 2s + 5)}.$$

b) 
$$F(s) = \frac{500}{s(s+5)^3}.$$

c) 
$$F(s) = \frac{40(s+2)}{s(s+1)^3}.$$

d) 
$$F(s) = \frac{(s+5)^2}{s(s+1)^4}.$$

**12.41.** Demuestre la validez de la pareja de transformadas dada por la Ecuación 12.64.

**12.42.** a) Demuestre la validez de la pareja de transformadas dada por la Ecuación 12.83.

b) Demuestre la validez de la pareja de transformadas dada por la Ecuación 12.84.

**12.43.** a) Utilice el teorema del valor inicial para hallar el valor inicial de  $v$  en el Problema 12.26.

b) ¿Puede usarse el teorema del valor final para hallar el valor de régimen permanente de  $v$ ?  
¿Por qué?

**12.44.** Aplique los teoremas del valor inicial y del valor final a cada una de las parejas de transformadas del Problema 12.37.

**12.45.** Aplique los teoremas del valor inicial y del valor final a cada una de las parejas de transformadas del Problema 12.38.

**12.46.** Aplique los teoremas del valor inicial y del valor final a cada una de las parejas de transformadas del Problema 12.39.

**12.47.** Utilice los teoremas del valor inicial y del valor final para comprobar los valores inicial y final de la corriente y la tensión en el Problema 12.27.

**12.48.** Utilice los teoremas del valor inicial y del valor final para comprobar los valores inicial y final de la corriente y la tensión en el Problema 12.29.

**12.49.** Aplique los teoremas del valor inicial y del valor final a cada una de las parejas de transformadas del Problema 12.40.

**12.50.** Utilice los teoremas del valor inicial y del valor final para comprobar los valores inicial y final de la corriente en el Problema 12.33.

# CAPÍTULO

# 13

# La transformada de Laplace en el análisis de circuitos

## Contenido del capítulo

- 13.1. Elementos de circuito en el dominio de  $s$
- 13.2. Análisis de circuitos en el dominio de  $s$
- 13.3. Aplicaciones
- 13.4. La función de transferencia
- 13.5. La función de transferencia en la expansión en fracciones parciales
- 13.6. La función de transferencia y la integral de convolución
- 13.7. La función de transferencia y la respuesta en régimen permanente sinusoidal
- 13.8. La función impulsiva en el análisis de circuitos

La transformada de Laplace tiene dos características que la convierten en una atractiva herramienta para el análisis de circuitos. En primer lugar, transforma el conjunto de ecuaciones diferenciales de coeficientes constantes en un conjunto de ecuaciones polinómicas lineales, que son más fáciles de manipular. En segundo lugar, introduce automáticamente en las ecuaciones polinómicas los valores iniciales de las variables de corriente y de tensión. Por tanto, las condiciones iniciales son una parte inherente del proceso de transformación (esto contrasta con el método clásico de resolución de ecuaciones diferenciales, en el que se consideran las condiciones iniciales cuando se evalúan los coeficientes desconocidos).

Comenzaremos este capítulo demostrando cómo podemos omitir el paso de escritura de las ecuaciones integrodiferenciales en el dominio del tiempo y de transformación de las mismas al dominio de  $s$ . En la Sección 13.1, desarrollaremos los modelos de circuito en el dominio de  $s$  para resistencias, bobinas y condensadores, de modo que podamos escribir directamente ecuaciones en el dominio de  $s$  para todos los circuitos. La Sección 13.2 repasa las leyes de Ohm y de Kirchhoff en el contexto del dominio de  $s$ . Después de establecer estas bases fundamentales, aplicaremos el método de la transformada de Laplace a diversos problemas de circuitos en la Sección 13.3.

Las técnicas analíticas y de simplificación que presentaremos primero para los circuitos resistivos (como por ejemplo los métodos de las corrientes de malla y de las tensiones de

nodo y la técnica de transformación de fuentes) también pueden usarse en el dominio de  $s$ . Después de hallar la respuesta del circuito en el dominio de  $s$ , podemos aplicar la transformada inversa para volver al dominio del tiempo, utilizando la expansión en fracciones parciales (como hemos visto en el capítulo precedente). Como antes, la comprobación de las ecuaciones finales en el dominio del tiempo en función de las condiciones iniciales y de los valores finales constituye un paso importante dentro del proceso de resolución.

Las descripciones en el dominio de  $s$  de la entrada y salida del circuito nos llevarán, en la Sección 13.4, al concepto de función de transferencia. La función de transferencia para un circuito concreto es el cociente entre la transformada de Laplace de su salida y la transformada de Laplace de su entrada. En los Capítulos 14 y 15, examinaremos las aplicaciones que la función de transferencia tiene dentro del campo del diseño, pero aquí vamos a centrarnos en su utilidad como herramienta analítica. Continuaremos el capítulo con un examen de la expansión en fracciones parciales (Sección 13.5) y de la integral de convolución (Sección 13.6) a la hora de emplear la función de transferencia en el análisis de circuitos. Concluiremos con un vistazo al papel de la función impulsiva en el análisis de circuitos.

## Perspectiva práctica

### Supresores de sobretensiones

Con el advenimiento de las computadoras personales domésticas, de los módems, de las máquinas de fax y de otros equipos electrónicos sensibles, resulta necesario proporcionar protección frente a posibles sobretensiones que puedan tener lugar en un circuito de distribución doméstico debido a sucesos de conmutación. En la figura adjunta se muestra un supresor de sobretensiones comercialmente disponible.

¿Por qué puede causar una sobretensión la actuación de un conmutador para encender una bombilla o apagar un secador de pelo? Al final de este capítulo, responderemos a esa cuestión utilizando técnicas basadas en la transformada de Laplace para analizar un circuito. Ilustraremos el modo en que puede producirse una sobretensión al activar un conmutador para desconectar una carga resistiva en un circuito que esté operando en régimen permanente sinusoidal.

### Objetivos del capítulo

1. Ser capaz de transformar un circuito al dominio de  $s$  utilizando transformadas de Laplace; comprender cómo representar las condiciones iniciales de los elementos de almacenamiento de energía en el dominio de  $s$ .
2. Saber cómo analizar un circuito en el dominio de  $s$  y ser capaz de transformar una solución en el dominio de  $s$  al dominio del tiempo.
3. Comprender la definición e importancia de la función de transferencia y ser capaz de calcular la función de transferencia de un circuito utilizando técnicas del dominio de  $s$ .
4. Saber cómo utilizar la función de transferencia de un circuito para calcular la respuesta del circuito al impulso unitario, su respuesta al escalón unitario y su respuesta en régimen permanente a una entrada sinusoidal.



## 13.1. Elementos de circuito en el dominio de $s$

El procedimiento para desarrollar un circuito equivalente en el dominio de  $s$  para cada elemento de circuito es sencillo. En primer lugar, escribimos la ecuación en el dominio del tiempo que relaciona la tensión en los terminales con la corriente que pasa a través de los mismos. A continuación, hallamos la transformada de Laplace de la ecuación en el dominio del tiempo. Este paso nos permite obtener una relación algebraica entre la corriente y la tensión en el dominio de  $s$ . Observe que las dimensiones de una tensión transformada son voltios-segundo, mientras que las dimensiones de una corriente transformada son amperios-segundo. Un cociente tensión-corriente en el dominio de  $s$  tiene como dimensiones los voltios por amperio. Una impedancia en el dominio de  $s$  se mide en ohmios y una admitancia se mide en siemens. Finalmente, construimos un modelo de circuito que satisfaga la relación entre la corriente y la tensión en el dominio de  $s$ . Vamos a usar el convenio de signos pasivo a lo largo de todo nuestro análisis.

### Una resistencia en el dominio de $s$

Comenzamos con el elemento de resistencia. Aplicando la ley de Ohm,

$$v = Ri. \quad (13.1)$$

Puesto que  $R$  es una constante, la transformada de Laplace de la Ecuación 13.1 es

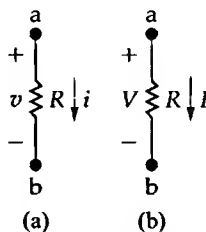
$$V = RI. \quad (13.2)$$

donde

$$V = \mathcal{L}\{v\} \quad \text{e} \quad I = \mathcal{L}\{i\}.$$

La Ecuación 13.2 indica que el circuito equivalente de una resistencia en el dominio de  $s$  es simplemente una resistencia de  $R$  ohmios a la que atraviesa una corriente de  $I$  amperios-segundo y en la que cae una tensión de  $V$  voltios-segundo.

La Figura 13.1 muestra los circuitos en el dominio del tiempo y de la frecuencia para una resistencia. Observe que el paso del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia no modifica el elemento de resistencia.

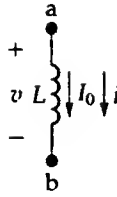


**Figura 13.1.** Elemento de resistencia. (a) Dominio del tiempo. (b) Dominio de la frecuencia.

### Una bobina en el dominio de $s$

La Figura 13.2 muestra una bobina atravesada por una corriente inicial de  $I_0$  amperios. La ecuación en el dominio del tiempo que relaciona la tensión en los terminales con la corriente que atraviesa los mismos es





**Figura 13.2.** Una bobina de  $L$  henrios atravesada por una corriente inicial de  $I_0$  amperios.

$$v = L \frac{di}{dt}. \quad (13.3)$$

La transformada de Laplace de la Ecuación 13.3 nos da

$$V = L[sI - i(0^-)] = sLI - LI_0. \quad (13.4)$$

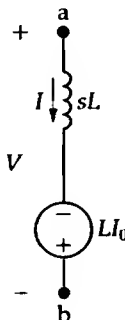
Hay dos diferentes configuraciones de circuito que satisfacen la Ecuación 13.4. La primera está compuesta por una impedancia de  $sL$  ohmios en serie con una fuente de tensión independiente de  $LI_0$  voltios-segundos, como se muestra en la Figura 13.3. Observe que las marcas de polaridad en la fuente de tensión  $LI_0$  concuerdan con el signo menos de la Ecuación 13.4. Observe también que  $LI_0$  tiene su propio signo algebraico; es decir, si el valor inicial de  $i$  es opuesto a la dirección de referencia de  $i$ , entonces  $I_0$  tiene un valor negativo.

El segundo circuito equivalente en el dominio de  $s$  que satisface la Ecuación 13.4 está compuesto por una impedancia de  $sL$  ohmios en paralelo con una fuente de corriente independiente de  $I_0/s$  amperios-segundos, como se muestra en la Figura 13.4. Podemos deducir este circuito equivalente alternativo mostrado en la Figura 13.4 de varias formas distintas. Una de ellas consiste simplemente en despejar la corriente  $I$  en la Ecuación 13.4 y luego construir el circuito que satisface la ecuación resultante. Así,

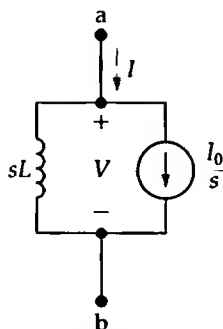
$$I = \frac{V + LI_0}{sL} = \frac{V}{sL} + \frac{I_0}{s}. \quad (13.5)$$

Las otras dos formas son: (1) hallar el equivalente de Norton del circuito mostrado en la Figura 13.3 y (2) partir de la corriente de la bobina como función de la tensión de la bobina y luego hallar la transformada de Laplace de la ecuación integral resultante. Dejamos estas dos técnicas para que las resuelva el lector en los Problemas 13.1 y 13.2.

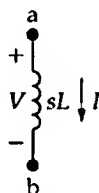
Si la energía inicial almacenada en la bobina es cero, es decir, si  $I_0 = 0$ , el circuito equivalente de la bobina en el dominio de  $s$  se reduce a una bobina con una impedancia de  $sL$  ohmios. La Figura 13.5 muestra este circuito.



**Figura 13.3.** Circuito equivalente en serie para una bobina de  $L$  henrios atravesada por una corriente inicial de  $I_0$  amperios.



**Figura 13.4.** Circuito equivalente paralelo para una bobina de  $L$  henrios atravesada por una corriente inicial de  $I_0$  amperios.



**Figura 13.5.** Circuito en el dominio de  $s$  para una bobina cuando la corriente inicial es cero.

## Un condensador en el dominio de $s$

Un condensador inicialmente cargado tiene también dos circuitos equivalentes en el dominio de  $s$ . La Figura 13.6 muestra un condensador inicialmente cargado a  $V_0$  voltios. La corriente que pasa por los terminales es

$$i = C \frac{dv}{dt}. \quad (13.6)$$

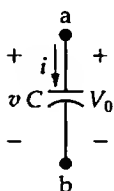
Transformando la Ecuación 13.6, se obtiene

$$I = C[sV - v(0^-)]$$

es decir,

$$I = sCV - CV_0, \quad (13.7)$$

que indica que la corriente  $I$  en el dominio de  $s$  es la suma de dos corrientes de rama. Una rama estará compuesta por una admitancia de  $sC$  siemens y la segunda rama constará de una fuente de corriente independiente de  $CV_0$  amperios-segundo. La Figura 13.7 muestra este circuito equivalente paralelo.



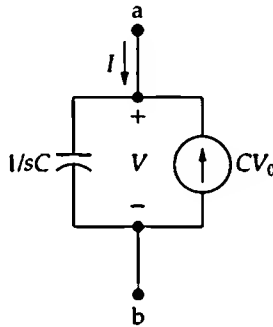
**Figura 13.6.** Un condensador de  $C$  faradios inicialmente cargado a  $V_0$  voltios.

Podemos determinar el circuito equivalente serie para el condensador cargado despejando  $V$  en la Ecuación 13.7:

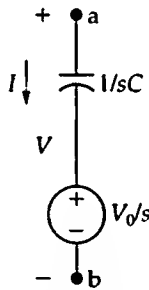
$$V = \left(\frac{1}{sC}\right)I + \frac{V_0}{s}. \quad (13.8)$$

La Figura 13.8 muestra el circuito que satisface la Ecuación 13.8.

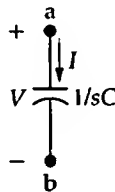
En los circuitos equivalentes mostrados en las Figuras 13.7 y 13.8,  $V_0$  incorpora su propio signo algebraico. En otras palabras, si la polaridad de  $V_0$  es opuesta a la polaridad de referencia de  $v$ ,  $V_0$  tendrá un valor negativo. Si la tensión inicial en el condensador es cero, ambos circuitos equivalentes se reducen a una impedancia de  $1/sC$  ohmios, como se muestra en la Figura 13.9.



**Figura 13.7.** Circuito equivalente paralelo para un condensador inicialmente cargado a  $V_0$  voltios.



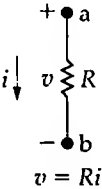
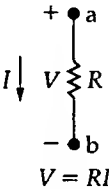
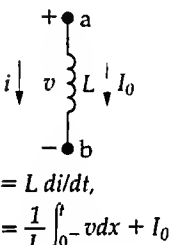
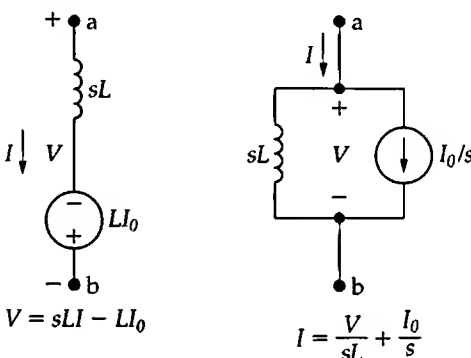
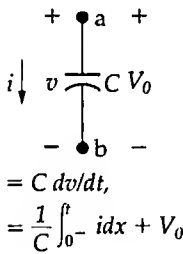
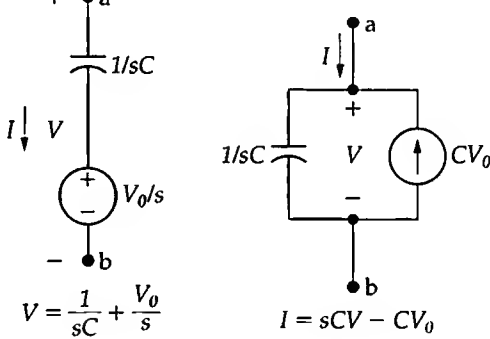
**Figura 13.8.** Circuito equivalente serie para un condensador inicialmente cargado a  $V_0$  voltios.



**Figura 13.9.** Circuito en el dominio de  $s$  para un condensador cuando la tensión inicial es cero.

En este capítulo, un primer paso importante a la hora de resolver cualquier problema será el de elegir entre los equivalentes serie o paralelo cuando estén presentes bobinas o condensadores. Con algo de reflexión y un poco de experiencia, la elección correcta será casi siempre evidente. Los circuitos equivalentes se resumen en la Tabla 13.1.

**Tabla 13.1.** Resumen de los circuitos equivalentes en el dominio de  $s$ .

DOMINIO DEL TIEMPO	DOMINIO DE LA FRECUENCIA
 $v = Ri$	 $V = RI$
 $v = L \frac{di}{dt},$ $i = \frac{1}{L} \int_0^t v dx + I_0$	 $V = sLI - LI_0$ $I = \frac{V}{sL} + \frac{I_0}{s}$
 $i = C \frac{dv}{dt},$ $v = \frac{1}{C} \int_0^t i dx + V_0$	 $V = \frac{1}{sC} + \frac{V_0}{s}$ $I = sCV - CV_0$

## 13.2. Análisis de circuitos en el dominio de $s$

Antes de ilustrar cómo se utilizan los circuitos equivalentes en el dominio de  $s$  para el análisis, necesitamos primero explicar algunos conceptos básicos. En primer lugar, sabemos que si no hay energía almacenada en la bobina o condensador, la relación entre la tensión y la corriente en los terminales de cada elemento pasivo tiene la forma:

$$\text{⚡ LEY DE OHM EN EL DOMINIO DE } s \quad V = ZI, \quad (13.9)$$

donde  $Z$  hace referencia a la impedancia del elemento en el dominio de  $s$ . Así, una resistencia tiene una impedancia de  $R$  ohmios, una bobina tiene una impedancia de  $sL$  ohmios y un condensador tiene

una impedancia de  $1/sC$  ohmios. La relación expresada en la Ecuación 13.9 también se ilustra en las Figuras 13.1(b), 13.5 y 13.9. La Ecuación 13.9 se denomina en ocasiones ley de Ohm para el dominio de  $s$ .

El recíproco de la impedancia es la admitancia. Por tanto, la admitancia de una resistencia en el dominio de  $s$  es igual a  $1/R$  siemens, mientras que una bobina tiene una admitancia de  $1/sL$  siemens y un condensador tiene una admitancia de  $sC$  siemens.

Las reglas para combinar impedancias y admitancias en el dominio de  $s$  son iguales a las utilizadas con los circuitos en el dominio de la frecuencia. Así, las simplificaciones serie-paralelo y las conversiones  $\Delta$ -Y también son aplicables al análisis en el dominio de  $s$ .

Además, las leyes de Kirchhoff también se aplican a las corrientes y tensiones en el dominio de  $s$ . Su aplicabilidad surge de la transformada operacional que indica que la transformada de Laplace de una suma de funciones en el dominio del tiempo es la suma de las transformadas de las funciones individuales (véase la Tabla 12.2). Puesto que la suma algebraica de las corrientes en un nodo es cero en el dominio del tiempo, la suma algebraica de las corrientes transformadas será también cero. Lo mismo cabe decir para la suma algebraica de las tensiones transformadas alrededor de un lazo cerrado. La versión en el dominio de  $s$  de las leyes de Kirchhoff es (el símbolo de sumatorio denota la suma algebraica)

$$\sum I = 0, \quad (13.10)$$

$$\sum V = 0. \quad (13.11)$$

Puesto que la tensión y la corriente en los terminales de un elemento pasivo están relacionadas por una ecuación algebraica y puesto que las leyes de Kirchhoff continúan siendo aplicables, podemos usar para el análisis en el dominio de  $s$  todas las técnicas de análisis de circuitos desarrolladas para redes puramente resistivas. Así, las técnicas de tensiones de nodo, de corrientes de malla, las transformaciones de fuente y los equivalentes de Thévenin-Norton pueden aplicarse perfectamente, aun cuando haya energía inicialmente almacenada en las bobinas y condensadores. La energía inicialmente almacenada requiere que modifiquemos la Ecuación 13.9, añadiendo simplemente fuentes independientes en serie o en paralelo con las impedancias de los elementos. La adición de estas fuentes está gobernada por las leyes de Kirchhoff.

### Evaluación del objetivo 1

- Ser capaz de transformar un circuito al dominio de  $s$  utilizando transformadas de Laplace.

**13.1.** Conectamos en paralelo una resistencia de  $500 \, \Omega$ , una bobina de  $16 \, \text{mH}$  y un condensador de  $25 \, \text{nF}$ .

- a) Exprese la admitancia de esta combinación en paralelo de elementos como una función racional de  $s$ .
- b) Calcule los valores numéricos de los ceros y polos.

#### RESPUESTA

(a)  $25 \times 10^{-9}(s^2 + 80.000s + 25 \times 10^6)/s$ ;

(b)  $-z_1 = -40.000 - j30.000$ ;  $-z_2 = -40.000 + j30.000$ ;  $p_1 = 0$ .

**13.2.** Colocamos el circuito paralelo del Problema de evaluación 13.1 en serie con una resistencia de  $2000 \, \Omega$ .

- a) Exprese la impedancia de esta combinación en serie de elementos como una función racional de  $s$ .
- b) Calcule los valores numéricos de los ceros y polos.

**RESPUESTA**

$$(a) 2000(s + 50.000)^2 / (s^2 + 80.000s + 25 \times 10^8);$$

$$(b) -z_1 = -z_2 = -50.000;$$

$$-p_1 = -40.000 - j30.000;$$

$$-p_2 = -40.000 + j30.000.$$

**NOTA** Trate también de resolver los Problemas 13.4 y 13.5 del capítulo.

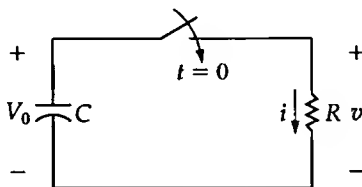
### 13.3. Aplicaciones

Vamos a ilustrar ahora cómo utilizar la transformada de Laplace para determinar el comportamiento transitorio de diversos circuitos lineales con parámetros agrupados. Comenzaremos analizando circuitos familiares de los Capítulos 7 y 8, dado que representan un punto de partida sencillo y también porque muestran que la técnica de la transformada de Laplace proporciona los mismos resultados. En todos los ejemplos, quedará clara la ventaja que tiene manipular ecuaciones algebraicas en lugar de ecuaciones diferenciales.

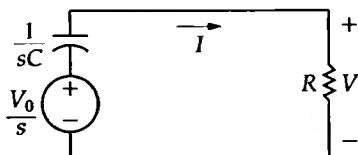
#### Respuesta natural de un circuito $RC$

Vamos primero a analizar de nuevo la respuesta de un circuito  $RC$  (Figura 13.10) mediante técnicas basadas en la transformada de Laplace (si quiere, puede repasar el análisis clásico de este mismo circuito en la Sección 7.2).

El condensador está inicialmente cargado a  $V_0$  y estamos interesados en hallar las expresiones en el dominio del tiempo correspondientes a  $i$  y  $v$ . Comenzaremos determinando  $i$ . Al transferir el circuito de la Figura 13.10 al dominio de  $s$ , podemos elegir entre dos circuitos equivalentes para el condensador cargado. Puesto que lo que nos interesa es la corriente, resulta más atractivo el circuito equivalente en serie, ya que da como resultado un circuito de una única malla en el dominio de la frecuencia. Por tanto, construimos el circuito en el dominio de  $s$  que se muestra en la Figura 13.11.



**Figura 13.10.** Circuito de descarga de un condensador.



**Figura 13.11.** Circuito equivalente en el dominio de  $s$  para el circuito mostrado en la Figura 13.10.

Sumando las tensiones alrededor de la malla se obtiene la expresión

$$\frac{V_0}{s} = \frac{1}{sC} I + RI. \quad (13.12)$$

Despejando  $I$  en la Ecuación 13.12, nos queda

$$I = \frac{CV_0}{RCs + 1} = \frac{V_0/R}{s + (1/RC)}. \quad (13.13)$$

Observe que la expresión correspondiente a  $I$  es una función racional propia de  $s$  y que podemos hallar la transformada inversa por simple inspección:

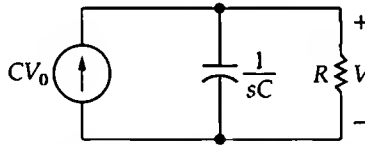
$$i = \frac{V_0}{R} e^{-t/RC} u(t), \quad (13.14)$$

que es equivalente a la expresión de la corriente obtenida mediante los métodos clásicos expuestos en el Capítulo 7. En dicho capítulo, la corriente estaba dada por la Ecuación 7.26, donde se utiliza  $\tau$  en lugar de  $RC$ .

Después de determinada  $i$ , la forma más fácil de determinar  $v$  consiste simplemente en aplicar la ley de Ohm; es decir, a partir del circuito,

$$v = Ri = V_0 e^{-t/RC} u(t). \quad (13.15)$$

Vamos a ilustrar ahora un método para hallar  $v$  a partir del circuito sin primero calcular  $i$ . En este método alternativo, volvemos al circuito original de la Figura 13.10 y lo transferimos al dominio de  $s$  utilizando el circuito equivalente paralelo para el condensador cargado. Ahora sí resulta conveniente emplear el circuito equivalente paralelo porque podemos describir el circuito resultante en términos de una única tensión de nodo. La Figura 13.12 muestra el nuevo circuito equivalente en el dominio de  $s$ .



**Figura 13.12.** Un circuito equivalente en el dominio de  $s$  para el circuito mostrado en la Figura 13.10.

La ecuación de tensión de nodo que describe el nuevo circuito es

$$\frac{V}{R} + sCV = CV_0. \quad (13.16)$$

Despejando  $V$  en la Ecuación 13.16, se obtiene

$$V = \frac{V_0}{s + (1/RC)}. \quad (13.17)$$

Si hallamos la transformada inversa de la Ecuación 13.17, obtenemos la misma expresión para  $v$  que ya habíamos visto en la Ecuación 13.15, es decir,

$$v = V_0 e^{-t/RC} = V_0 e^{-t/\tau} u(t). \quad (13.18)$$

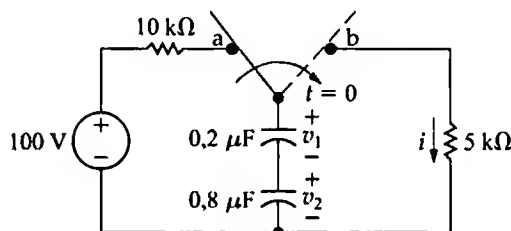
Nuestro propósito al determinar  $v$  empleando directamente el método de la transformada ha sido mostrar que la decisión de cuál circuito equivalente en el dominio de  $s$  se utilice está influida por cuál sea la señal de respuesta que nos interesa.

## Evaluación del objetivo 2

- Saber cómo analizar un circuito en el dominio de  $s$  y ser capaz de transformar una solución en el dominio de  $s$  al dominio del tiempo.

13.3. El conmutador del circuito mostrado ha estado en la posición *a* durante un largo período de tiempo. En  $t = 0$ , el conmutador pasa a la posición *b*.

- Determine  $I$ ,  $V_1$  y  $V_2$  como funciones racionales de  $s$ .
- Determine las expresiones en el dominio del tiempo correspondientes a  $i$ ,  $v_1$  y  $v_2$ .



### RESPUESTA

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad I &= 0,02/(s + 1250), \\ V_1 &= 80/(s + 1250), \\ V_2 &= 20/(s + 1250); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad i &= 20e^{-1250t} u(t) \text{ mA}, \\ v_1 &= 80e^{-1250t} u(t) \text{ V}, \\ v_2 &= 20e^{-1250t} u(t) \text{ V}. \end{aligned}$$

**NOTA** Trate también de resolver los Problemas 13.9 y 13.10 del capítulo.

## Respuesta al escalón de un circuito paralelo

A continuación vamos a analizar el circuito  $RLC$  paralelo, mostrado en la Figura 13.13, que analizamos por primera vez en el Ejemplo 8.7. El problema consiste en determinar la expresión correspondiente a  $i_L$  después de aplicar la fuente de corriente constante a los elementos conectados en paralelo. La energía inicialmente almacenada en el circuito es cero.

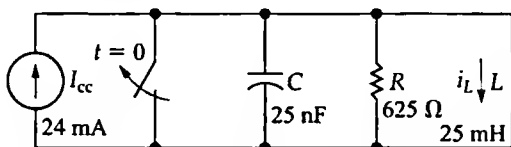
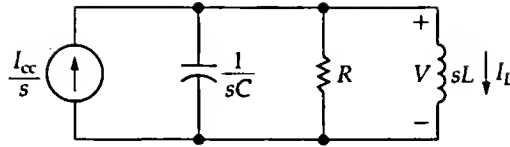


Figura 13.13. Respuesta al escalón de un circuito  $RLC$  paralelo.

Como antes, comenzamos construyendo el circuito equivalente en el dominio de  $s$  mostrado en la Figura 13.14. Observe la facilidad con que puede transformarse una fuente independiente desde el dominio del tiempo al dominio de la frecuencia. Transformamos la fuente al dominio de  $s$  simplemente determinando la transformada de Laplace de su función en el dominio del tiempo. Aquí, la apertura del conmutador provoca un cambio en escalón en la corriente aplicada al circuito. Por tanto, la fuen-





**Figura 13.14.** Circuito equivalente en el dominio de  $s$  para el circuito mostrado en la Figura 13.13.

te de corriente en el dominio de  $s$  es  $\mathcal{L}\{I_{cc}u(t)\}$ , es decir,  $I_{cc}/s$ . Para hallar  $I_L$ , primero determinamos  $V$  y luego utilizamos

$$I_L = \frac{V}{sL} \quad (13.19)$$

para establecer la expresión de  $I_L$  en el dominio de  $s$ . Sumando las corrientes que salen del nodo superior, obtenemos la expresión

$$sCV + \frac{V}{R} + \frac{V}{sL} = \frac{I_{cc}}{s}. \quad (13.20)$$

Despejando  $V$  en la Ecuación 13.20, se obtiene

$$V = \frac{I_{cc}/C}{s^2 + (1/RC)s + (1/LC)}. \quad (13.21)$$

Sustituyendo la Ecuación 13.21 en la Ecuación 13.19 nos queda

$$I_L = \frac{I_{cc}/LC}{s[s^2 + (1/RC)s + (1/LC)]}. \quad (13.22)$$

Sustituyendo los valores numéricos de  $R$ ,  $L$ ,  $C$  e  $I_{cc}$  en la Ecuación 13.22, resulta

$$I_L = \frac{384 \times 10^5}{s(s^2 + 64.000s + 16 \times 10^8)}. \quad (13.23)$$

Antes de expandir la Ecuación 13.23 en una suma de fracciones parciales, factorizamos el término cuadrático del denominador:

$$I_L = \frac{384 \times 10^5}{s(s + 32.000 - j24.000)(s + 32.000 + j24.000)}. \quad (13.24)$$

Ahora, podemos verificar la expresión de  $I_L$  en el dominio de  $s$  comprobando si el teorema del valor final predice el valor correcto de  $i_L$  en  $t = \infty$ . Todos los polos de  $I_L$ , salvo el polo de primer orden en el origen, caen en la mitad izquierda del plano  $s$ , por lo que podemos aplicar el teorema. Sabemos, del comportamiento del circuito, que después de que el conmutador haya estado abierto durante un largo período de tiempo la bobina cortocircuitará la fuente de corriente. Por tanto, el valor final de  $i_L$  debe ser 24 mA. El límite de  $sI_L$  a medida que  $s \rightarrow 0$  es

$$\lim_{s \rightarrow 0} s I_L = \frac{384 \times 10^5}{16 \times 10^8} = 24 \text{ mA}. \quad (13.25)$$

(Las corrientes en el dominio de  $s$  tienen como dimensión amperio-segundos, por lo que la dimensión de  $sI_L$  será amperios). Por tanto, nuestra expresión en el dominio de  $s$  es correcta.

Procedemos ahora con la expansión en fracciones parciales de la Ecuación 13.24:

$$I_L = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s + 32.000 - j24.000} + \frac{K_2^*}{s + 32.000 + j24.000}. \quad (13.26)$$

Los coeficientes de las fracciones parciales son

$$K_1 = \frac{384 \times 10^5}{16 \times 10^8} = 24 \times 10^{-3}, \quad (13.27)$$

$$K_2 = \frac{384 \times 10^5}{(-32.000 + j24.000)(j48.000)} = 20 \times 10^{-3} \angle 126,87^\circ. \quad (13.28)$$

Sustituyendo los valores numéricos de  $K_1$  y  $K_2$  en la Ecuación 13.26 y hallando la transformada inversa, se tiene

$$i_L = [24 + 40e^{-32.000t} \cos(24.000t + 126,87^\circ)]u(t) \text{ mA}. \quad (13.29)$$

La respuesta dada por la Ecuación 13.29 es equivalente a la del Ejemplo 8.7, porque

$$40 \cos(24.000t + 126,87^\circ) = -24 \cos 24.000t - 32 \sin 24.000t. \quad (13.30)$$

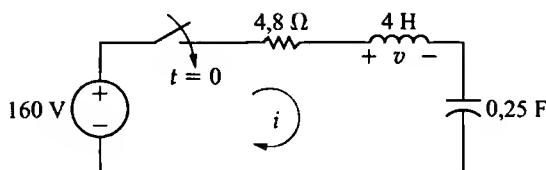
Si no estuviéramos utilizando una solución anterior como comprobación, verificaríamos la Ecuación 13.29 para asegurarnos de que  $i_L(0)$  satisface las condiciones iniciales dadas e  $i_L(\infty)$  satisface el comportamiento conocido del circuito.

## Evaluación del objetivo 2

- Saber cómo analizar un circuito en el dominio de  $s$  y ser capaz de transformar una solución en el dominio de  $s$  al dominio del tiempo

**13.4.** La energía almacenada en el circuito mostrado es cero en el instante de cerrar el conmutador.

- a) Determine la expresión de  $I$  en el dominio de  $s$ .
- b) Determine la expresión en el dominio del tiempo correspondiente a  $i$  cuando  $t > 0$ .
- c) Determine la expresión de  $V$  en el dominio de  $s$ .
- d) Determine la expresión en el dominio del tiempo correspondiente a  $v$  cuando  $t > 0$ .



### RESPUESTA

- (a)  $I = 40/(s^2 + 1,2s + 1)$ ;
- (b)  $i = 50e^{-0,6t} \sin 0,8t u(t) \text{ A}$ ;
- (c)  $V = 160s/(s^2 + 1,2s + 1)$ ;
- (d)  $v = [200e^{-0,6t} \cos(0,8t + 36,87^\circ)]u(t) \text{ V}$ .

**NOTA** Trate también de resolver los Problemas 13.15 y 13.16 del capítulo.

## Respuesta transitoria de un circuito *RLC* paralelo

Otro ejemplo de utilización de la transformada de Laplace para determinar el comportamiento transitorio de un circuito es el que se plantea al sustituir la fuente de corriente cc del circuito mostrado en la Figura 13.13 por una fuente de corriente sinusoidal. La nueva fuente de corriente será

$$i_g = I_m \cos \omega t \text{ A}, \quad (13.30)$$

donde  $I_m = 24 \text{ mA}$  y  $\omega = 40.000 \text{ rad/s}$ . Como antes, suponemos que la energía inicialmente almacenada en el circuito es cero.

La expresión en el dominio de  $s$  para la fuente de corriente es

$$I_g = \frac{s I_m}{s^2 + \omega^2}. \quad (13.31)$$

La tensión existente en bornes de los elementos conectados en paralelo es

$$V = \frac{(I_g / C)s}{s^2 + (1/RC)s + (1/LC)}. \quad (13.32)$$

Sustituyendo la Ecuación 13.31 en la Ecuación 13.32, resulta

$$V = \frac{(I_m / C)s^2}{(s^2 + \omega^2)[s^2 + (1/RC)s + (1/LC)]}. \quad (13.33)$$

de donde

$$I_L = \frac{V}{sL} = \frac{(I_m / LC)s}{(s^2 + \omega^2)[s^2 + (1/RC)s + (1/LC)]}. \quad (13.34)$$

Sustituyendo los valores numéricos de  $I_m$ ,  $\omega$ ,  $R$ ,  $L$  y  $C$  en la Ecuación 13.34, se obtiene

$$I_L = \frac{384 \times 10^5 s}{(s^2 + 16 \times 10^8)(s^2 + 64.000s + 16 \times 10^8)}. \quad (13.35)$$

Ahora escribimos el denominador en forma factorizada:

$$I_L = \frac{384 \times 10^5 s}{(s - j\omega)(s + j\omega)(s + \alpha - j\beta)(s + \alpha + j\beta)}, \quad (13.36)$$

donde  $\omega = 40.000$ ,  $\alpha = 32.000$  y  $\beta = 24.000$ .

No podemos comprobar el valor final de  $i_L$  usando el teorema del valor final porque  $i_L$  tiene un par de polos en el eje imaginario, que son los polos en  $\pm j4 \times 10^4$ . Por tanto, debemos primero hallar  $i_L$  y luego comprobar la validez de la expresión a partir del comportamiento conocido del circuito.

Cuando expandimos la Ecuación 13.36 en una suma de fracciones parciales, se genera la ecuación

$$I_L = \frac{K_1}{s - j40.000} + \frac{K_1^*}{s + j40.000} + \frac{K_2}{s + 32.000 - j24.000} + \frac{K_2^*}{s + 32.000 + j24.000}. \quad (13.37)$$

Los valores numéricos de los coeficientes  $K_1$  y  $K_2$  son

$$K_1 = \frac{384 \times 10^5 (j40.000)}{(j80.000)(32.000 + j16.000)(32.000 + j64.000)} = 7,5 \times 10^{-3} \angle -90^\circ, \quad (13.38)$$

$$K_2 = \frac{384 \times 10^5 (-32.000 + j24.000)}{(-32.000 - j16.000)(-32.000 + j64.000)(j48.000)} = 12,5 \times 10^{-3} \angle 90^\circ. \quad (13.39)$$

Sustituyendo los valores numéricos de las Ecuaciones 13.38 y 13.39 en la Ecuación 13.37 y hallando la transformada inversa de la expresión resultante, se obtiene

$$i_L = [15 \cos (40.000t - 90^\circ) + 25e^{-32.000t} \cos (24.000t + 90^\circ)] \text{ mA},$$

$$= (15 \text{ sen } 40.000t - 25e^{-32.000t} \text{ sen } 24.000t) u(t) \text{ mA}. \quad (13.40)$$

Comprobamos ahora la Ecuación 13.40 para ver si tiene sentido según las condiciones iniciales dadas y el comportamiento conocido del circuito después de que el conmutador haya estado abierto durante un largo periodo de tiempo. Para  $t = 0$ , la Ecuación 13.40 predice una corriente inicial igual a cero, lo que concuerda con la energía inicial igual a cero almacenada en el circuito. La Ecuación 13.40 también predice una corriente de régimen permanente igual a

$$i_{L_{\text{regimen}}} = 15 \text{ sen } 40.000t \text{ mA}, \quad (13.41)$$

que puede verificarse mediante el método de fasores (Capítulo 9).

## Respuesta al escalón de un circuito con múltiples mallas

Hasta ahora, hemos evitado los circuitos que requerían dos o más ecuaciones de tensión de nodo o de corriente de malla, porque las técnicas necesarias para resolver un sistema de ecuaciones diferenciales caen fuera del alcance de este texto. Sin embargo, utilizando las técnicas de Laplace, es posible resolver un problema como el planteado por el circuito de múltiples mallas de la Figura 13.15.

Aquí, queremos calcular las corrientes de rama  $i_1$  e  $i_2$  que se producen cuando se aplica súbitamente al circuito la fuente de tensión continua de 336 V. La energía inicialmente almacenada en el circuito es cero. La Figura 13.16 muestra el circuito equivalente en el dominio de  $s$  para la Figura 13.15. Las dos ecuaciones de corriente de malla son

$$\frac{336}{s} = (42 + 8,4s)I_1 - 42I_2, \quad (13.42)$$

$$0 = -42I_1 + (90 + 10s)I_2. \quad (13.43)$$

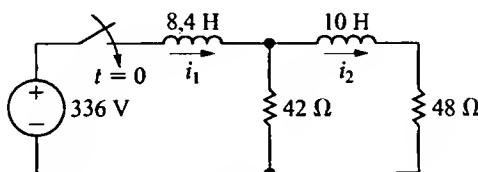
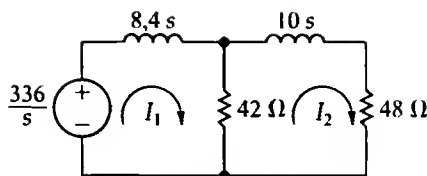


Figura 13.15: Un circuito  $RL$  con múltiples mallas.



**Figura 13.16.** Circuito equivalente en el dominio de  $s$  para el circuito mostrado en la Figura 13.15.

Utilizando el método de Cramer para hallar  $I_1$  e  $I_2$ , obtenemos

$$\Delta = \begin{vmatrix} 42 + 8,4s & -42 \\ -42 & 90 + 10s \end{vmatrix} = 84(s^2 + 14s + 24) = 84(s+2)(s+12), \quad (13.44)$$

$$N_1 = \begin{vmatrix} 336/s & -42 \\ 0 & 90 + 10s \end{vmatrix} = \frac{3360(s+9)}{s}, \quad (13.45)$$

$$N_2 = \begin{vmatrix} 42 + 8,4s & 336/s \\ -42 & 0 \end{vmatrix} = \frac{14,112}{s}. \quad (13.46)$$

Empleando las Ecuaciones 13.44-13.46,

$$I_1 = \frac{N_1}{\Delta} = \frac{40(s+9)}{s(s+2)(s+12)}, \quad (13.47)$$

$$I_2 = \frac{N_2}{\Delta} = \frac{168}{s(s+2)(s+12)}. \quad (13.48)$$

Si expandimos  $I_1$  e  $I_2$  en una suma de fracciones parciales, obtenemos

$$I_1 = \frac{15}{s} - \frac{14}{s+2} - \frac{1}{s+12}, \quad (13.49)$$

$$I_2 = \frac{7}{s} - \frac{8,4}{s+2} + \frac{1,4}{s+12}. \quad (13.50)$$

Podemos hallar las expresiones correspondientes a  $i_1$  e  $i_2$  hallando la transformada inversa de las Ecuaciones 13.49 y 13.50, respectivamente:

$$i_1 = (15 - 14e^{-2t} - e^{-12t})u(t) \text{ A}, \quad (13.51)$$

$$i_2 = (7 - 8,4e^{-2t} + 1,4e^{-12t})u(t) \text{ A}. \quad (13.52)$$

A continuación, comprobamos las soluciones para ver si tienen sentido de acuerdo con el comportamiento conocido del circuito. Puesto que no hay energía inicialmente almacenada en el circuito en el momento de cerrar el conmutador, tanto  $i_1(0^-)$  como  $i_2(0^-)$  deberán ser cero. Las soluciones concuerdan con estos valores iniciales. Después de que el conmutador haya estado cerrado durante un largo período de tiempo, las dos bobinas aparecen como cortocircuitos. Por tanto, los valores finales de  $i_1$  e  $i_2$  son

$$i_1(\infty) = \frac{336(90)}{42(48)} = 15 \text{ A}, \quad (13.53)$$

$$i_2(\infty) = \frac{15(42)}{90} = 7 \text{ A}. \quad (13.54)$$

Una comprobación final es la relativa a los valores numéricos de los exponentes y el cálculo de la caída de tensión en bornes de la resistencia de  $42 \Omega$  por tres métodos distintos. A partir del circuito, la tensión que cae en la resistencia de  $42 \Omega$  (positiva en la parte superior) es

$$v = 42(i_1 - i_2) = 336 - 8,4 \frac{di_1}{dt} = 48i_2 + 10 \frac{di_2}{dt}. \quad (13.55)$$

Puede verificar que, independientemente de cuál forma se utilice de la Ecuación 13.55, la tensión es

$$v = (336 - 235,2e^{-2t} - 100,80e^{-12t})u(t) \text{ V}.$$

Por tanto, podemos confiar en que las soluciones correspondientes a  $i_1$  e  $i_2$  son correctas.

## Evaluación del objetivo 2

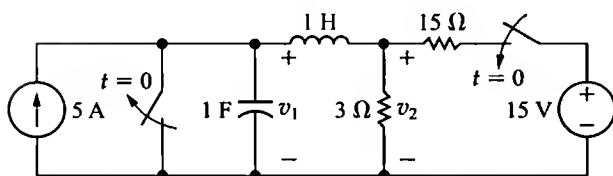
- Saber cómo analizar un circuito en el dominio de  $s$  y ser capaz de transformar al dominio del tiempo dicha solución en el dominio de  $s$ .

13.5. Aplicamos simultáneamente las fuentes de corriente y de tensión cc al circuito mostrado en la figura. En el momento de aplicar las fuentes, no hay energía almacenada en el circuito.

- Determine las expresiones en el dominio de  $s$  correspondientes a  $V_1$  y  $V_2$ .
- Para  $t > 0$ , determine las expresiones en el dominio del tiempo para  $v_1$  y  $v_2$ .
- Calcule  $v_1(0^+)$  y  $v_2(0^+)$ .
- Calcule los valores de régimen permanente de  $v_1$  y  $v_2$ .

## RESPUESTA

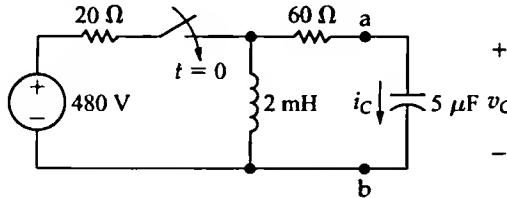
- $V_1 = [5(s + 3)]/[s(s + 0,5)(s + 2)]$ ,  
 $V_2 = [2,5(s^2 + 6)]/[s(s + 0,5)(s + 2)]$ ;
- $v_1 = (15 - \frac{50}{3}e^{-0,5t} + \frac{5}{3}e^{-2t})u(t) \text{ V}$ ,  
 $v_2 = (15 - \frac{125}{6}e^{-0,5t} + \frac{25}{3}e^{-2t})u(t) \text{ V}$ ;
- $v_1(0^+) = 0$ ,  $v_2(0^+) = 2,5 \text{ V}$ ;
- $v_1 = v_2 = 15 \text{ V}$ .



**NOTA** Trate también de resolver los Problemas 13.26 y 13.27 del capítulo.

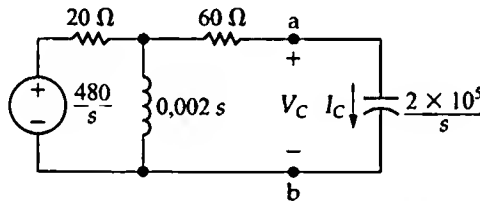
## Utilización del equivalente de Thévenin

En esta sección, vamos a mostrar cómo utilizar el equivalente de Thévenin en el dominio de  $s$ . La Figura 13.17 muestra el circuito que queremos analizar. El problema consiste en hallar la corriente que atraviesa el condensador como resultado del cierre del conmutador. La energía almacenada en el circuito antes de cerrar el conmutador es cero.



**Figura 13.17.** Circuito que analizaremos utilizando el equivalente de Thévenin en el dominio de  $s$ .

Para hallar  $i_C$ , construimos primero el circuito equivalente en el dominio de  $s$  y luego hallamos el equivalente de Thévenin de este circuito con respecto a los terminales del condensador. La Figura 13.18 muestra este circuito en el dominio de  $s$ .



**Figura 13.18.** Modelo en el dominio de  $s$  del circuito mostrado en la Figura 13.17.

La tensión de Thévenin es la tensión de circuito abierto entre los terminales  $a$  y  $b$ . En condiciones de circuito abierto, no cae ninguna tensión en la resistencia de  $60 \Omega$ . Por tanto,

$$V_{th} = \frac{(480/s)(0,002s)}{20 + 0,002s} = \frac{480}{s + 10^4}. \quad (13.56)$$

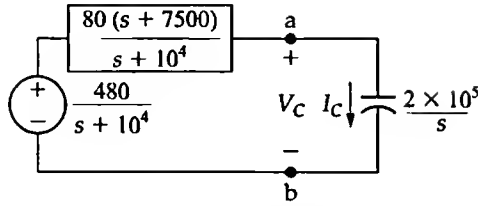
La impedancia de Thévenin vista entre los terminales  $a$  y  $b$  es igual a la resistencia de  $60 \Omega$  en serie con la combinación en paralelo de la resistencia de  $20 \Omega$  y de la bobina de  $2 \text{ mH}$ . Por tanto,

$$Z_{th} = 60 + \frac{0,002s(20)}{20 + 0,002s} = \frac{80(s + 7500)}{s + 10^4}. \quad (13.57)$$

Utilizando el equivalente de Thévenin, reducimos el circuito mostrado en la Figura 13.18 al que se muestra en la Figura 13.19. Este circuito indica que la corriente del condensador  $I_C$  es igual a la tensión de Thévenin dividida por la impedancia serie total. Así,

$$I_C = \frac{480/(s + 10^4)}{[80(s + 7500)/(s + 10^4)] + [(2 \times 10^5)/s]}. \quad (13.58)$$

Podemos simplificar la Ecuación 13.58 para obtener



**Figura 13.19.** Versión simplificada del circuito mostrado en la Figura 13.18, utilizando un equivalente de Thévenin.

$$I_C = \frac{6s}{s^2 + 10.000s + 25 \times 10^6} = \frac{6s}{(s + 5000)^2}. \quad (13.59)$$

Una expansión en fracciones parciales de la Ecuación 13.59 genera

$$I_C = \frac{-30.000}{(s + 5000)^2} + \frac{6}{s + 5000}, \quad (13.60)$$

cuya transformada inversa es

$$i_C = (-30.000te^{-5000t} + 6e^{-5000t})u(t) \text{ A}. \quad (13.61)$$

Ahora comprobamos la Ecuación 13.61 para ver si tiene sentido en términos del comportamiento conocido del circuito. De la Ecuación 13.61,

$$i_C(0) = 6 \text{ A}. \quad (13.62)$$

Este resultado concuerda con la corriente inicial del condensador, calculada a partir del circuito de la Figura 13.17. La corriente inicial en la bobina es cero y la tensión inicial en el condensador también es cero, por lo que la corriente inicial en el condensador es  $480/80$ , es decir, 6 A. El valor final de la corriente es cero, lo que también concuerda con la Ecuación 13.61. Observe también, en esta ecuación, que la corriente invierte su signo cuando  $t$  supera el valor  $6/30.000$ , es decir,  $200 \mu\text{s}$ . El hecho de que  $i_C$  invierta su signo tiene sentido, porque, cuando el conmutador se cierra por vez primera, el condensador comienza a cargarse. Llega un momento en que esta carga se reduce a cero, porque la bobina es un cortocircuito en  $t = \infty$ . La inversión de signo de  $i_C$  refleja el proceso de carga y descarga del condensador.

Supongamos que queremos también calcular la caída de tensión en el condensador,  $v_C$ . Una vez conocida  $i_C$ , calculamos  $v_C$  por integración en el dominio del tiempo, es decir,

$$v_C = 2 \times 10^5 \int_{0^-}^t (6 - 30.000x)e^{-5000x} dx. \quad (13.63)$$

Aunque la operación de integración requerida en la Ecuación 13.63 no es complicada, podemos evitárnosla hallando primero la expresión de  $V_C$  en el dominio de  $s$  y luego calculando  $v_C$  mediante una transformación inversa. Así,

$$V_C = \frac{1}{sC} I_C = \frac{2 \times 10^5}{s} \frac{6s}{(s + 5000)^2} = \frac{12 \times 10^5}{(s + 5000)^2}, \quad (13.64)$$

de donde



$$v_C = 12 \times 10^5 t e^{-5000t} u(t). \quad (13.65)$$

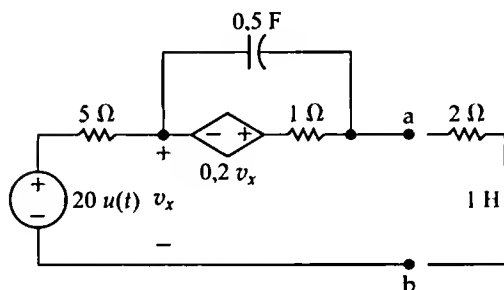
Puede verificar que la Ecuación 13.65 es coherente con la Ecuación 13.63 y que también apoya las observaciones realizadas en lo que respecta al comportamiento de  $i_C$  (véase el Problema 13.33).

## Evaluación del objetivo 2

- Saber cómo analizar un circuito en el dominio de  $s$  y ser capaz de transformar una solución en el dominio de  $s$  al dominio del tiempo.

**13.6.** La carga inicial en el condensador en el circuito mostrado es cero.

- Determine el circuito equivalente de Thévenin en el dominio de  $s$  con respecto a los terminales  $a$  y  $b$ .
- Determine la expresión en el dominio de  $s$  correspondiente a la corriente que el circuito entrega a una carga compuesta por una bobina de  $1\text{ H}$  en serie con una resistencia de  $2\ \Omega$ .



### RESPUESTA

$$(a) V_{Th} = V_{ab} = [20(s + 2,4)/[s(s + 2)]],$$

$$Z_{Th} = 5(s + 2,8)/(s + 2);$$

$$(b) I_{ab} = [20(s + 2,4)]/[s(s + 3)(s + 6)].$$

**NOTA** Trate también de resolver el Problema 13.35 del capítulo.

## Un circuito con inductancia mutua

El siguiente ejemplo ilustra cómo utilizar la transformada de Laplace para analizar la respuesta transitoria de un circuito que contiene inductancia mutua. La Figura 13.20 muestra el circuito de ejemplo. El contacto de tipo «hacer antes de romper» ha estado en la posición  $a$  durante un largo período de tiempo. En  $t = 0$ , el conmutador se mueve instantáneamente a la posición  $b$ . El problema consiste en determinar la expresión en el dominio del tiempo correspondiente a  $i_2$ .

Comenzamos redibujando el circuito de la Figura 13.20, con el conmutador en la posición  $b$  y las bobinas magnéticamente acopladas sustituidas por un circuito equivalente en  $T^1$ . La Figura 13.21 muestra el nuevo circuito.

Transformamos ahora el circuito al dominio de  $s$ . Al hacerlo, utilizamos el hecho de que

$$i_1(0^-) = \frac{60}{12} = 5\text{ A}, \quad (13.66)$$

$$i_2(0^-) = 0. \quad (13.67)$$

<sup>1</sup> Véase el Apéndice C.

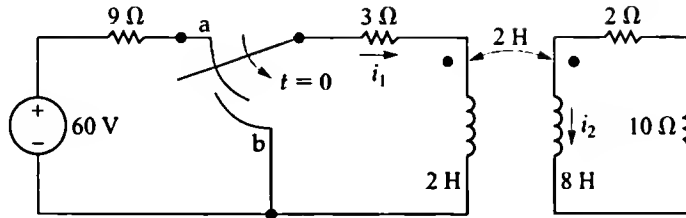


Figura 13.20. Un circuito con bobinas magnéticamente acopladas.

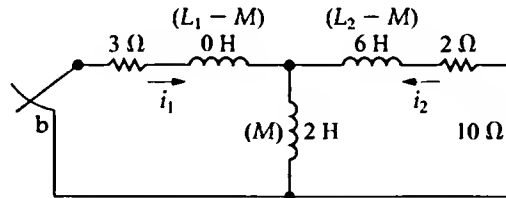


Figura 13.21. El circuito mostrado en la Figura 13.20, sustituyendo las bobinas magnéticamente acopladas por un circuito equivalente en T.

Puesto que pretendemos utilizar análisis de mallas en el dominio de  $s$ , empleamos el circuito equivalente en serie para una bobina atravesada por una corriente inicial. La Figura 13.22 muestra el circuito en el dominio de  $s$ . Observe que sólo hay una fuente de tensión independiente. Esta fuente aparece en la rama vertical de la  $T$  para representar el valor inicial de la corriente que atraviesa la bobina de 2 H, que es igual a  $i_1(0^-) + i_2(0^-)$ , es decir, 5 A. La rama por la que circula la corriente  $i_1$  no tienen ninguna fuente de tensión porque  $L_1 - M = 0$ .

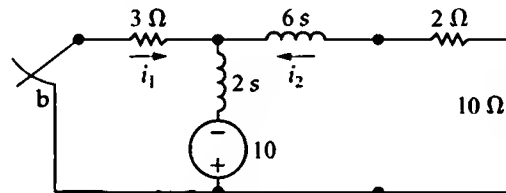


Figura 13.22. Circuito equivalente en el dominio de  $s$  para el circuito mostrado en la Figura 13.21.

Las dos ecuaciones de malla en el dominio de  $s$  que describen el circuito de la Figura 13.22 son

$$(3 + 2s)I_1 + 2sI_2 = 10 \quad (13.68)$$

$$2sI_1 + (12 + 8s)I_2 = 10. \quad (13.69)$$

Resolviendo el sistema para hallar  $I_2$ , tenemos

$$I_2 = \frac{2,5}{(s+1)(s+3)}. \quad (13.70)$$

Expandiendo la Ecuación 13.70 en una suma de fracciones parciales se genera

$$I_2 = \frac{1,25}{s+1} - \frac{1,25}{s+3}. \quad (13.71)$$

Entonces,

$$i_2 = (1,25e^{-t} - 1,25e^{-3t})u(t) \text{ A.} \quad (13.72)$$

La Ecuación 13.72 revela que  $i_2$  pasa de cero a un valor de pico de 481,13 mA en 549,31 ms después de que el conmutador se mueva a la posición b. Después,  $i_2$  decrece exponencialmente hacia cero. La Figura 13.23 muestra una gráfica de  $i_2$  en función de  $t$ . Esta respuesta tiene sentido según el comportamiento físico conocido de las bobinas magnéticamente acopladas. Sólo puede haber una corriente en la bobina  $L_2$  si hay una corriente variable en el tiempo en la bobina  $L_1$ . A medida que  $i_1$  decrece a partir de su valor inicial de 5 A,  $i_2$  se incrementa desde cero y luego tiende a cero a medida que  $i_1$  también lo hace.



Figura 13.23. Gráfica de  $i_2$  en función de  $t$  para el circuito mostrado en la Figura 13.20.

## Evaluación del objetivo 2

- Saber cómo analizar un circuito en el dominio de  $s$  y ser capaz de transformar una solución en el dominio de  $s$  al dominio del tiempo.

- 13.7. a) Verifique, a partir de la Ecuación 13.72, que  $i_2$  alcanza un valor de pico de 481,13 mA en  $t = 549,31$  ms.
- b) Determine  $i_1$ , para  $t > 0$ , para el circuito mostrado en la Figura 13.20.
- c) Calcule  $di_1/dt$  cuando  $i_2$  alcanza su valor de pico.
- d) Exprese  $i_2$  en función de  $di_1/dt$  cuando  $i_2$  alcanza su valor de pico.
- e) Utilice los resultados obtenidos en los apartados (c) y (d) para calcular el valor de pico de  $i_2$ .

### RESPUESTA

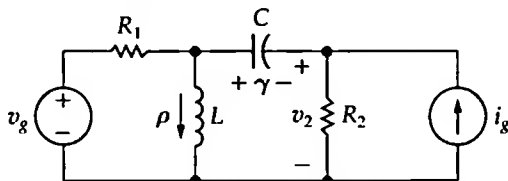
- (a)  $di_2/dt = 0$  cuando  $t = \frac{1}{2} \ln 3$  (s);
- (b)  $i_1 = 2,5(e^{-t} + e^{-3t})u(t)$  A;
- (c)  $-2,89$  A/s;
- (d)  $i_2 = -(M di_1/dt)/12$ ;
- (e) 481,13 mA.

**NOTA** Trate también de resolver los Problemas 13.36 y 13.37 del capítulo.

## El principio de superposición

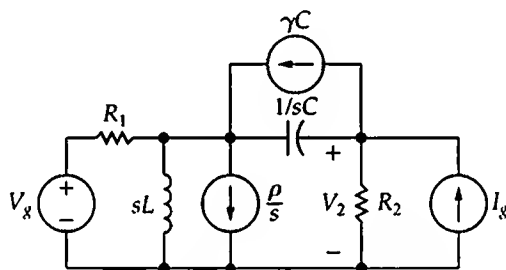
Puesto que estamos analizando circuitos lineales con parámetros agrupados, podemos utilizar el principio de superposición para dividir la respuesta en componentes que pueden identificarse con condiciones iniciales y fuentes concretas. Distinguir estas componentes resulta crítico para poder utilizar la función de transferencia, que presentaremos en la sección siguiente.

La Figura 13.24 muestra nuestro circuito de ejemplo. Vamos a suponer que, en el instante en que se aplican las dos fuentes al circuito, la bobina está atravesada por una corriente inicial de  $\rho$  amperios y que la tensión inicial en bornes del condensador es igual a  $\gamma$  voltios. Queremos calcular la tensión que cae en la resistencia  $R_2$ , la cual hemos etiquetado como  $v_2$ .



**Figura 13.24.** Circuito utilizado como ejemplo de aplicación del principio de superposición en el análisis en el dominio de  $s$ .

La Figura 13.25 muestra un circuito equivalente en el dominio de  $s$ . Hemos optado por los equivalentes en paralelo de  $L$  y  $C$  porque vamos a tratar de calcular  $V_2$  utilizando el método de las tensiones de nodo.

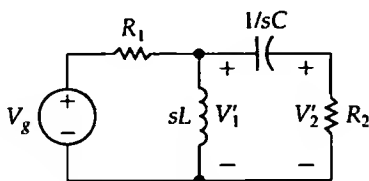


**Figura 13.25.** Equivalente en el dominio de  $s$  para el circuito de la Figura 13.24.

Para hallar  $V_2$  por superposición, calculamos la componente de  $V_2$  que resulta de la actuación por separado de cada fuente y luego sumamos las distintas componentes. Comenzamos analizando lo que sucede cuando  $V_g$  actúa sola. Abrimos, por tanto, las tres fuentes de corriente para desactivarlas. La Figura 13.6 muestra el circuito resultante. Hemos añadido la tensión de nodo  $V'_1$  para facilitar el análisis. Las primas en  $V_1$  y  $V_2$  indican que son las componentes de  $V_1$  y  $V_2$  atribuibles a la actuación exclusiva de  $V_g$ . Las dos ecuaciones que describen el circuito de la Figura 13.26 son

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{sL} + sC\right)V'_1 - sCV'_2 = \frac{V_g}{R_1}, \quad (13.73)$$

$$-sCV'_1 + \left(\frac{1}{R_2} + sC\right)V'_2 = 0. \quad (13.74)$$



**Figura 13.26.** El circuito mostrado en la Figura 13.25 cuando sólo actúa  $V_g$ .

Para mayor comodidad, vamos a introducir la notación

$$Y_{11} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{sL} + sC, \quad (13.75)$$

$$Y_{12} = -sC; \quad (13.76)$$

$$Y_{22} = \frac{1}{R_2} + sC. \quad (13.77)$$

Sustituyendo las Ecuaciones 13.75–13.77 en las Ecuaciones 13.73 y 13.74, se obtiene

$$Y_{11}V'_1 + Y_{12}V'_2 = V_g / R_1, \quad (13.78)$$

$$Y_{12}V'_1 + Y_{22}V'_2 = 0. \quad (13.79)$$

Resolviendo el sistema formado por las Ecuaciones 13.78 y 13.79, se obtiene un valor de  $V'_2$  igual a

$$V'_2 = \frac{-Y_{12}/R_1}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}^2} V_g. \quad (13.80)$$

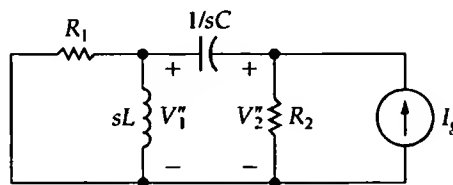
Si sólo actúa la fuente de corriente  $I_g$ , el circuito mostrado en la Figura 13.25 se reduce al que se ilustra en la Figura 13.27. Aquí,  $V''_1$  y  $V''_2$  son las componentes de  $V_1$  y  $V_2$  atribuibles a  $I_g$ . Si utilizamos la notación introducida en las Ecuaciones 13.75–13.77, las dos ecuaciones de tensión de nodo que describen el circuito de la Figura 13.27 son

$$Y_{11}V''_1 + Y_{12}V''_2 = 0 \quad (13.81)$$

$$Y_{12}V''_1 + Y_{22}V''_2 = I_g. \quad (13.82)$$

Resolviendo el sistema formado por las Ecuaciones 13.81 y 13.82 para hallar  $V''_2$ , nos queda

$$V''_2 = \frac{Y_{11}}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}^2} I_g. \quad (13.83)$$

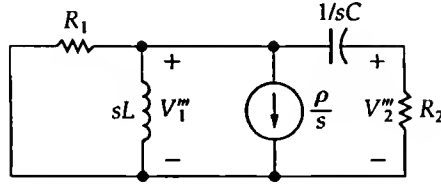


**Figura 13.27.** El circuito mostrado en la Figura 13.25 cuando sólo actúa  $I_g$ .

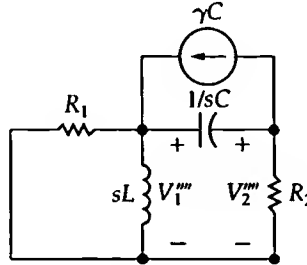
Para hallar la componente de  $V_2$  resultante de la energía inicialmente almacenada en la bobina ( $V''_2$ ), debemos resolver el circuito mostrado en la Figura 13.28, donde

$$Y_{11}V'''_1 + Y_{12}V'''_2 = -\rho/s, \quad (13.84)$$

$$Y_{12}V'''_1 + Y_{22}V'''_2 = 0. \quad (13.85)$$



**Figura 13.28.** El circuito mostrado en la Figura 13.25 cuando sólo actúa la bobina con energía inicial.



**Figura 13.29.** El circuito mostrado en la Figura 13.25 cuando sólo actúa el condensador con energía inicial.

Por tanto,

$$V_2''' = \frac{Y_{12}/s}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}^2} \rho. \quad (13.86)$$

A partir del circuito mostrado en la Figura 13.29, hallamos la componente de  $V_2$  ( $V_2''''$ ) resultante de la energía inicialmente almacenada en el condensador. Las ecuaciones de tensión de nodo que describen este circuito son

$$Y_{11}V_1'''' + Y_{12}V_2'''' = \gamma C, \quad (13.87)$$

$$Y_{12}V_1'''' + Y_{22}V_2'''' = -\gamma C. \quad (13.88)$$

Resolviendo el sistema para calcular  $V_2''''$ , se obtiene

$$V_2'''' = \frac{-(Y_{11} + Y_{12})C}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}^2} \gamma. \quad (13.89)$$

La expresión correspondiente a  $V_2$  será

$$\begin{aligned} V_2 &= V_2' + V_2'' + V_2''' + V_2'''' \\ &= \frac{-(Y_{12}/R_1)}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}^2} V_g + \frac{Y_{11}}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}^2} I_g \\ &\quad + \frac{Y_{12}/s}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}^2} \rho + \frac{-C(Y_{11} + Y_{12})}{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}^2} \gamma. \end{aligned} \quad (13.90)$$

Podemos hallar  $V_2$  sin utilizar superposición resolviendo las dos ecuaciones de tensión de nodo que describen el circuito mostrado en la Figura 13.25. Así,

$$Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2 = \frac{V_g}{R_1} + \gamma C - \frac{\rho}{s}, \quad (13.91)$$

$$Y_{12}V_1 + Y_{22}V_2 = I_g - \gamma C. \quad (13.92)$$

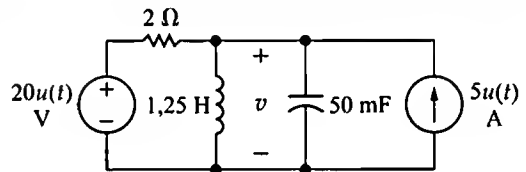
Puede verificar en el Problema 13.43 que la solución de las Ecuaciones 13.91 y 13.92 correspondiente a  $V_2$  proporciona el mismo resultado que la Ecuación 13.90.

## Evaluación del objetivo 2

- Saber cómo analizar un circuito en el dominio de  $s$  y ser capaz de transformar una solución en el dominio de  $s$  al dominio del tiempo.

13.8. La energía inicialmente almacenada en el circuito mostrado es cero en el instante en que se activan las dos fuentes.

- Calcule la componente de  $v$  para  $t > 0$  atribuible a la fuente de tensión.
- Calcule la componente de  $v$  para  $t > 0$  atribuible a la fuente de corriente.
- Calcule la expresión correspondiente a  $v$  para  $t > 0$ .



### RESPUESTA

- $[(100/3)e^{-2t} - (100/3)e^{-8t}]u(t)$  V;
- $[(50/3)e^{-2t} - (50/3)e^{-8t}]u(t)$  V;
- $[50e^{-2t} - 50e^{-8t}]u(t)$  V.

**NOTA** Trate también de resolver el Problema 13.42 del capítulo.

## 13.4. La función de transferencia

La **función de transferencia** se define como el cociente en el dominio de  $s$  entre la transformada de Laplace de la salida (respuesta) y la transformada de Laplace de la entrada (fuente). Al calcular la función de transferencia, vamos a restringir nuestro estudio a los circuitos en los que todas las condiciones iniciales son cero. Si un circuito tiene múltiples fuentes independientes, podemos calcular la función de transferencia correspondiente a cada fuente y utilizar el principio de superposición para hallar la respuesta correspondiente a la acción combinada de todas las fuentes.

La función de transferencia es

✦ **DEFINICIÓN DE UNA FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA**

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}, \quad (13.93)$$

donde  $Y(s)$  es la transformada de Laplace de la señal de salida y  $X(s)$  es la transformada de Laplace de la señal de entrada. Observe que la función de transferencia depende de lo que se defina como señal de salida. Considere, por ejemplo, el circuito serie mostrado en la Figura 13.30. Si la respuesta del circuito que queremos calcular es la corriente,

$$H(s) = \frac{I}{V_g} = \frac{1}{R + sL + 1/sC} = \frac{sC}{s^2LC + RCs + 1}. \quad (13.94)$$

Al deducir la Ecuación 13.94, hemos aplicado el hecho de que  $I$  se corresponde con la salida  $Y(s)$  y  $V_g$  se corresponde con la entrada  $X(s)$ .

Si definimos como señal de salida del circuito mostrado en la Figura 13.30 la tensión en bornes del condensador, la función de transferencia será

$$H(s) = \frac{V}{V_g} = \frac{1/sC}{R + sL + 1/sC} = \frac{1}{s^2LC + RCs + 1}. \quad (13.95)$$

Así, dado que los circuitos pueden tener múltiples fuentes y dado que la definición de la señal de salida de interés puede variar, un mismo circuito puede tener muchas funciones de transferencia. Recuerde que, cuando existen múltiples fuentes, una única función de transferencia no puede representar la salida total; es necesario combinar mediante superposición las funciones de transferencia asociadas con cada fuente para obtener la respuesta total. El Ejemplo 13.1 ilustra el cálculo de una función de transferencia para valores numéricos conocidos de  $R$ ,  $L$  y  $C$ .

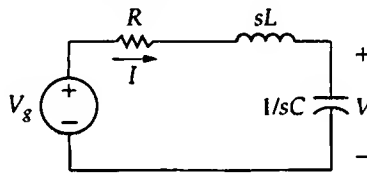


Figura 13.30. Un circuito  $RLC$  serie.

### EJEMPLO 13.1 Determinación de la función de transferencia de un circuito

La fuente de tensión  $v_g$  excita el circuito mostrado en la Figura 13.31. La señal de respuesta que queremos conocer es la tensión en bornes del condensador,  $v_o$ .

- Calcule la expresión numérica de la función de transferencia.
- Calcule los valores numéricos de los polos y ceros de la función de transferencia.

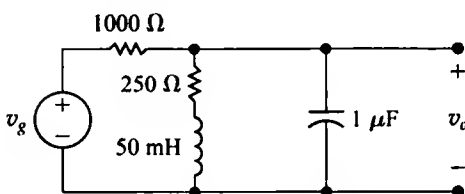


Figura 13.31. Circuito del Ejemplo 13.1.

### SOLUCIÓN

- El primer paso para hallar la función de transferencia consiste en construir el circuito equivalente en el dominio de  $s$ , el cual se muestra en la Figura 13.32. Por definición, la función de transferencia es el cociente  $V_o/V_g$ , que puede calcularse mediante una única ecuación de tensión de nodo. Sumando las corrientes que salen del nodo superior, se obtiene

$$\frac{V_o - V_g}{1000} + \frac{V_o}{250 + 0,05s} + \frac{V_o s}{10^6} = 0.$$

Despejando  $V_o$  queda

$$V_o = \frac{1000(s + 5000)V_g}{s^2 + 6000s + 25 \times 10^6}.$$



Por tanto, la función de transferencia es

$$H(s) = \frac{V_o}{V_g} = \frac{100(s+500)}{s^2 + 6000s + 25 \times 10^6}.$$

- b) Los polos de  $H(s)$  son las raíces del polinomio del denominador. Por tanto,

$$-p_1 = -3000 - j4000,$$

$$-p_2 = -3000 + j4000.$$

Los ceros de  $H(s)$  son las raíces del polinomio del numerador; por tanto,  $H(s)$  tiene un cero en

$$-z_1 = -5000.$$

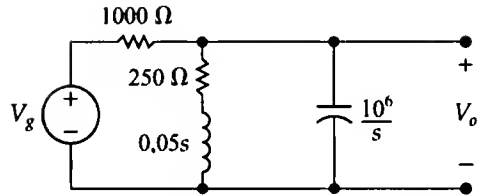
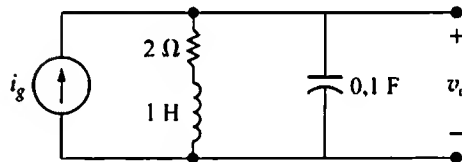


Figura 13.32. Circuito equivalente en el dominio de  $s$  para el circuito mostrado en la Figura 13.31.

### Evaluación del objetivo 3

- Comprender la definición y la importancia de la función de transferencia; ser capaz de determinar una función de transferencia.

- 13.9. a) Determine la expresión numérica correspondiente a la función de transferencia  $V_o/I_g$  para el circuito mostrado.
- b) Proporcione el valor numérico de cada polo y cada cero de  $H(s)$ .



### RESPUESTA

(a)  $H(s) = 10(s + 2)/(s^2 + 2s + 10)$ ;

(b)  $-p_1 = -1 + j3$ ,  $-p_2 = -1 - j3$ ,  $-z = -2$ .

**NOTA** Trate también de resolver el Problema 13.49 del capítulo.

### Ubicación de los polos y ceros de $H(s)$

Para circuitos lineales con parámetros agrupados,  $H(s)$  es siempre una función racional de  $s$ . Los polos y ceros complejos aparecen siempre en pares conjugados. Los polos de  $H(s)$  deben estar situados en la mitad izquierda del plano  $s$  para que la respuesta a una fuente acotada (una cuyos valores caigan dentro de ciertos límites finitos) esté acotada. Los ceros de  $H(s)$  pueden estar situados en la mitad derecha o en la mitad izquierda del plano  $s$ .

Teniendo presentes estas características generales, vamos a hablar a continuación del papel que  $H(s)$  desempeña a la hora de determinar la función de respuesta. Comenzaremos con la técnica de expansión en fracciones parciales para la determinación de  $y(t)$ .

## 13.5. La función de transferencia en la expansión en fracciones parciales

A partir de la Ecuación 13.93, podemos escribir la salida del circuito como el producto de la función de transferencia y de la función excitadora:

$$Y(s) = H(s)X(s). \quad (13.96)$$

Ya hemos indicado que  $H(s)$  es una función racional de  $s$ . Un examen de la Tabla 13.1 nos muestra que  $X(s)$  también es una función racional de  $s$  para las funciones de excitación que más nos interesan en el análisis de circuitos.

Expandiendo el lado derecho de la Ecuación 13.96 en una suma de fracciones parciales, obtenemos un término para cada polo de  $H(s)$  y  $X(s)$ . Recuerde, del Capítulo 12, que los polos son las raíces del polinomio del denominador, mientras que los ceros son las raíces del polinomio del numerador. Los términos generados por los polos de  $H(s)$  proporcionan la componente transitoria de la respuesta total, mientras que los términos generados por los polos de  $X(s)$  proporcionan la componente de régimen permanente de la respuesta. Por respuesta de régimen permanente queremos decir la respuesta que existe después de que las componentes transitorias pasen a ser despreciables. El Ejemplo 13.2 ilustra estas observaciones generales.

### EJEMPLO 13.2 Análisis de la función de transferencia de un circuito

El circuito del Ejemplo 13.1 (Figura 13.31) está excitado por una fuente de tensión cuya tensión se incrementa linealmente con el tiempo, según la fórmula  $v_g = 50tu(t)$ .

- Utilice la función de transferencia para hallar  $v_o$ .
- Identifique la componente transitoria de la respuesta.
- Identifique la componente de régimen permanente de la respuesta.
- Dibuje  $v_o$  en función de  $t$  para  $0 \leq t \leq 1,5$  ms.

#### SOLUCIÓN

- A partir del Ejemplo 13.1,

$$H(s) = \frac{1000(s + 5000)}{s^2 + 6000s + 25 \times 10^6}.$$

La transformada de la tensión de excitación es  $50/s^2$ ; por tanto, la expresión de la tensión de salida en el dominio de  $s$  es

$$V_o = \frac{1000(s + 5000)}{(s^2 + 6000s + 25 \times 10^6)} \frac{50}{s^2}.$$

Expandiendo  $V_o$  en fracciones parciales:

$$V_o = \frac{K_1}{s + 3000 - j4000} + \frac{K_1^*}{s + 3000 + j4000} + \frac{K_2}{s^2} + \frac{K_3}{s}.$$

Evaluamos los coeficientes  $K_1$ ,  $K_2$  y  $K_3$  utilizando las técnicas descritas en la Sección 12.7:

$$K_1 = 5\sqrt{5} \times 10^{-4} \angle 79,70^\circ;$$

$$K_1^* = 5\sqrt{5} \times 10^{-4} \angle -79,70^\circ;$$

$$K_2 = 10,$$

$$K_3 = -4 \times 10^{-4}.$$

La expresión correspondiente a  $v_o$  en el dominio del tiempo es

$$v_o = [10\sqrt{5} \times 10^{-4} e^{-3000t} \cos(4000t + 79,70^\circ) + 10t - 4 \times 10^{-4}] u(t) \text{ V.}$$

- b) La componente transitoria de  $v_o$  es

$$10\sqrt{5} \times 10^{-4} e^{-3000t} \cos(4000t + 79,70^\circ).$$

Observe que este término está generado por los polos  $(-3000 + j4000)$  y  $(-3000 - j4000)$  de la función de transferencia.

- c) La componente de régimen permanente de la respuesta es

$$(10t - 4 \times 10^{-4}) u(t).$$

Estos dos términos están generados por el polo de segundo orden  $(K/s^2)$  de la tensión de excitación.

- d) La Figura 13.33 muestra una gráfica de  $v_o$  en función de  $t$ . Observe que la desviación con respecto a la solución de régimen per-

manente  $10.000t - 0,4 \text{ mV}$  es imperceptible después de aproximadamente 1 ms.

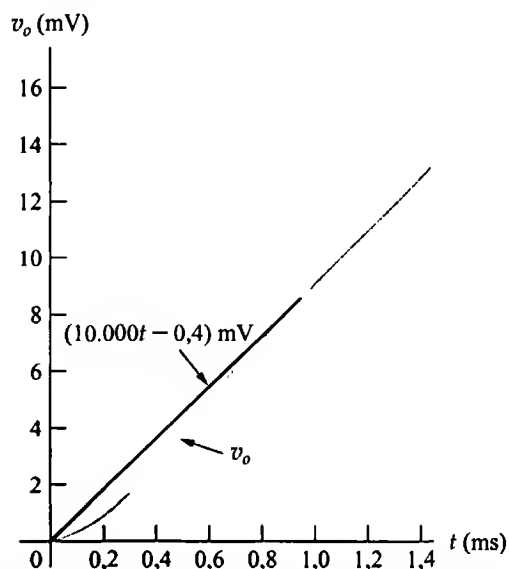


Figura 13.33. Gráfica de  $v_o$  en función de  $t$  para el Ejemplo 13.2.

#### Evaluación del objetivo 4

- Saber cómo utilizar la función de transferencia de un circuito para calcular la respuesta al impulso del circuito, la respuesta al escalón unitario y la respuesta de régimen permanente a una entrada sinusoidal.

- 13.10. Determine (a) la respuesta al escalón unitario y (b) la respuesta al impulso unitario del circuito mostrado en el Problema de evaluación 13.9.

#### RESPUESTA

- (a)  $[2 + (10/3)e^{-t} \cos(3t + 126,87^\circ)] u(t) \text{ V};$   
 (b)  $10,54e^{-t} \cos(3t - 18,43^\circ) u(t) \text{ V.}$

- 13.11. La respuesta al impulso unitario de un circuito es

$$v_o(t) = 10.000e^{-70t} \cos(240t + \theta) \text{ V.}$$

donde  $\tan \theta = \frac{7}{24}$ .

- a) Determine la función de transferencia del circuito.  
 b) Determine la respuesta al escalón unitario del circuito.

#### RESPUESTA

- (a)  $9600s/(s^2 + 140s + 62.500);$   
 (b)  $40e^{-70t} \sin 240t \text{ V.}$

## Observaciones sobre el uso de $H(s)$ en el análisis de circuitos

El Ejemplo 13.2 muestra claramente cómo se relaciona la función de transferencia  $H(s)$  con la respuesta de un circuito mediante la expansión en fracciones parciales. Sin embargo, el ejemplo plantea algunas preguntas sobre hasta qué punto resulta práctico excitar un circuito con una rampa de tensión creciente que genera una rampa de respuesta también creciente. Al final, los componentes en el circuito terminarán por fallar debido al exceso de tensión y en el momento en que eso suceda nuestro modelo lineal dejará de ser válido. La respuesta en rampa tiene interés en aquellas aplicaciones prácticas en las que la función de rampa se incrementa hasta un valor máximo en un intervalo de tiempo finito. Si el tiempo necesario para alcanzar este valor máximo es largo comparado con las constantes de relajación del circuito, la solución que presupone una rampa no acotada resulta válida para este intervalo de tiempo finito.

Hagamos dos observaciones adicionales con respecto a la Ecuación 13.96. En primer lugar, examinemos la respuesta del circuito a una entrada retardada. Si retardamos la entrada  $a$  segundos,

$$\mathcal{L}\{x(t-a)u(t-a)\} = e^{-as}X(s),$$

y, por la Ecuación 13.96, la respuesta será

$$Y(s) = H(s)X(s)e^{-as}. \quad (13.97)$$

Si  $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)X(s)\}$ , entonces, por la Ecuación 13.97,

$$y(t-a)u(t-a) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)X(s)e^{-as}\}. \quad (13.98)$$

Por tanto, si retardamos la entrada  $a$  segundos, la función de respuesta simplemente se retarda  $a$  segundos. Un circuito que exhibe esta característica se denomina **invariante con respecto al tiempo**.

En segundo lugar, si excitamos el circuito con una fuente que genere un impulso unitario, la respuesta del circuito es igual a la transformada inversa de la función de transferencia. Así, si

$$x(t) = \delta(t), \quad \text{entonces } X(s) = 1$$

y también

$$Y(s) = H(s). \quad (13.99)$$

Por tanto, por la Ecuación 13.99,

$$y(t) = h(t), \quad (13.100)$$

donde la transformada inversa de la función de transferencia es igual a la respuesta del circuito al impulso unitario. Observe que ésta es también la respuesta natural del circuito, porque la aplicación de una fuente impulsiva es equivalente a almacenar energía de manera instantánea en el circuito (véase la Sección 13.8). La subsiguiente liberación de esta energía almacenada da lugar a la respuesta natural (véase el Problema 13.86).

En realidad, la respuesta de un circuito al impulso unitario,  $h(t)$ , contiene suficiente información para calcular la respuesta a cualquier fuente con la que excitemos el circuito. Se utiliza la integral de convolución para extraer la respuesta de un circuito a una fuente arbitraria, como se ilustra en la sección siguiente.

## 13.6. La función de transferencia y la integral de convolución

La integral de convolución relaciona la salida  $y(t)$  de un circuito lineal invariante en el tiempo con la entrada  $x(t)$  del circuito y la respuesta del circuito al impulso,  $h(t)$ . Esta relación integral puede expresarse de dos formas:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)x(t-\lambda)d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\lambda)x(\lambda)d\lambda. \quad (13.101)$$

La integral de convolución nos interesa por varias razones. En primer lugar, nos permite trabajar completamente en el dominio del tiempo. Esto puede resultar conveniente en aquellas situaciones en que  $x(t)$  y  $h(t)$  sólo se conocen a través de datos experimentales. En tales casos, el método de la transformada puede ser engorroso o incluso imposible, ya que nos exigiría calcular la transformada de Laplace de esos datos experimentales. En segundo lugar, la integral de convolución introduce en el análisis los conceptos de memoria y de función de ponderación. Más adelante veremos cómo el concepto de memoria nos permite examinar la respuesta al impulso (o la función de ponderación)  $h(t)$  y predecir, hasta cierto punto, el grado con el que la forma de onda de salida se asemejará a la forma de onda de entrada. Finalmente, la integral de convolución proporciona un procedimiento formal para hallar la transformada inversa de productos de transformadas de Laplace.

Hemos basado la deducción de la Ecuación 13.101 en la suposición de que el circuito es lineal e invariante con respecto al tiempo. Puesto que el circuito es lineal, el principio de superposición resulta perfectamente válido y, por ser el circuito invariante con respecto al tiempo, el retardo de la respuesta será exactamente igual al retardo de la entrada. Considere ahora la Figura 13.34, en la que el bloque que contiene  $h(t)$  representa cualquier circuito lineal invariante en el tiempo cuya respuesta al impulso se conoce, mientras que  $x(t)$  representa la señal de excitación e  $y(t)$  representa la señal de salida deseada.

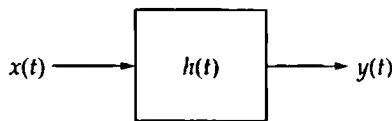


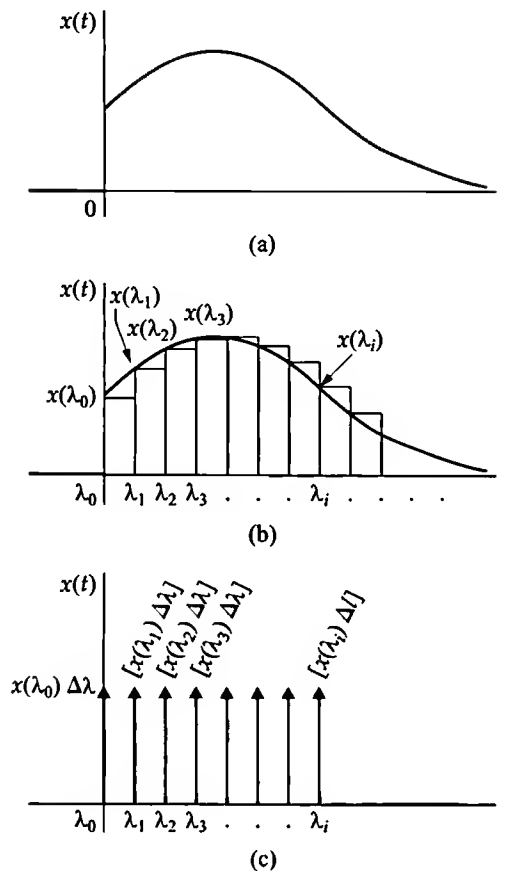
Figura 13.34. Diagrama de bloques de un circuito genérico.

Vamos a suponer que  $x(t)$  es la señal genérica de excitación mostrada en la Figura 13.35(a). Por comodidad, también vamos a suponer que  $x(t) = 0$  para  $t < 0^-$ . Una vez que veamos cómo deducir la integral de convolución bajo la suposición de que  $x(t) = 0$  para  $t < 0^-$ , la extensión de la integral para incluir funciones de excitación que existan en cualquier instante de tiempo resultará sencilla. Observe también que permitimos que exista una discontinuidad en  $x(t)$  en el origen, es decir, un salto entre  $0^-$  y  $0^+$ .

Ahora, vamos a aproximar  $x(t)$  mediante una serie de pulsos rectangulares de anchura uniforme  $\Delta\lambda$ , como se muestra en la Figura 13.35(b). Haciendo esto,

$$x(t) = x_0(t) + x_1(t) + \cdots + x_i(t) + \cdots, \quad (13.102)$$

donde  $x_i(t)$  es un pulso rectangular que es igual a  $x(t)$  entre  $\lambda_i$  y  $\lambda_{i+1}$  e igual a cero en todos los demás instantes. Observe que el pulso  $i$ -ésimo puede expresarse en términos de funciones escalón, es decir,



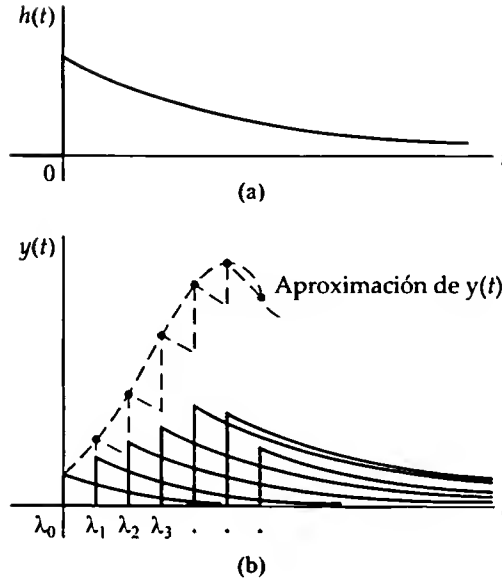
**Figura 13.35.** La señal de excitación  $x(t)$ . (a) Una señal de excitación genérica. (b) Aproximación de  $x(t)$  mediante una serie de pulsos. (c) Aproximación de  $x(t)$  mediante una serie de impulsos.

$$x_i(t) = x(\lambda_i) \{u(t - \lambda_i) - u[t - (\lambda_i + \Delta\lambda)]\}.$$

El siguiente paso en la aproximación de  $x(t)$  consiste en hacer  $\Delta\lambda$  lo suficientemente pequeño como para poder aproximar la componente  $i$ -ésima mediante una función impulsiva de intensidad  $x(\lambda_i)\Delta\lambda$ . La Figura 13.35(c) muestra la representación mediante impulsos, indicando la intensidad de cada impulso entre corchetes al lado de cada flecha. La representación de  $x(t)$  mediante impulsos es

$$\begin{aligned} x(t) = & x(\lambda_0)\Delta\lambda\delta(t - \lambda_0) + x(\lambda_1)\Delta\lambda\delta(t - \lambda_1) + \cdots \\ & + x(\lambda_i)\Delta\lambda\delta(t - \lambda_i) + \cdots \end{aligned} \quad (13.103)$$

Ahora, cuando representamos  $x(t)$  mediante una serie de funciones impulsivas (que se producen a intervalos equiespaciados de tiempo, es decir, en  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots$ ), la función de respuesta  $y(t)$  consiste en la suma de una serie de respuestas al impulso uniformemente retardadas. La intensidad de cada respuesta dependerá de la intensidad del impulso con el que se excite al circuito. Por ejemplo, vamos a suponer que la respuesta del circuito contenido en la caja de la Figura 13.34 al impulso unitario es la función de decrecimiento exponencial mostrada en la Figura 13.36(a). Entonces, la aproximación de  $y(t)$  es la suma de las respuestas al impulso que se muestra en la Figura 13.36(b).



**Figura 13.36.** Aproximación de  $y(t)$ . (a) Respuesta al impulso de la caja negra mostrada en la Figura 13.34. (b) Suma de las respuestas al impulso.

Analíticamente, la expresión correspondiente a  $y(t)$  es

$$\begin{aligned}
 y(t) = & x(\lambda_0)\Delta\lambda h(t - \lambda_0) + x(\lambda_1)\Delta\lambda h(t - \lambda_1) \\
 & + x(\lambda_2)\Delta\lambda h(t - \lambda_2) + \dots \\
 & + x(\lambda_i)\Delta\lambda h(t - \lambda_i) + \dots
 \end{aligned} \tag{13.104}$$

A medida que  $\Delta\lambda \rightarrow 0$ , la suma de la Ecuación 13.104 se aproxima a una integración continua, es decir,

$$\sum_{i=0}^{\infty} x(\lambda_i)h(t - \lambda_i)\Delta\lambda \rightarrow \int_0^{\infty} x(\lambda)h(t - \lambda) d\lambda. \tag{13.105}$$

Por tanto,

$$y(t) = \int_0^{\infty} x(\lambda)h(t - \lambda) d\lambda. \tag{13.106}$$

Si  $x(t)$  existe en todo instante de tiempo, entonces el límite inferior de la Ecuación 13.106 será  $-\infty$ ; por tanto, en general,

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)h(t - \lambda) d\lambda, \tag{13.107}$$

que es la segunda forma de la integral de convolución dada en la Ecuación 13.101. Podemos deducir la primera forma de la integral a partir de la Ecuación 13.107 haciendo un cambio en la variable de inte-

gración. Si hacemos  $u = t - \lambda$  y luego observamos que  $du = t - d\lambda$ , que  $u = -\infty$  cuando  $\lambda = \infty$ , y que  $u = +\infty$  cuando  $\lambda = -\infty$ , podemos reescribir la Ecuación 13.107 como

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-u)h(u)(-du),$$

es decir,

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-u)h(u)(du). \quad (13.108)$$

Pero, puesto que  $u$  es simplemente un símbolo de integración, la Ecuación 13.108 es equivalente a la primera forma de la integral de convolución mostrada en la Ecuación 13.101.

La relación integral entre  $y(t)$ ,  $h(t)$  y  $x(t)$  expresada en la Ecuación 13.101 se escribe a menudo con la siguiente notación abreviada:

$$y(t) = h(t) * x(t) = x(t) * h(t), \quad (13.109)$$

donde el asterisco representa la relación integral entre  $h(t)$  y  $x(t)$ . Por tanto,  $h(t) * x(t)$  se lee como « $h(t)$  convolucionada con  $x(t)$ » e implica que

$$h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)x(t-\lambda)d\lambda,$$

mientras que  $x(t) * h(t)$  se lee como « $x(t)$  convolucionada con  $h(t)$ » e implica que

$$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)h(t-\lambda)d\lambda.$$

Las integrales de la Ecuación 13.101 proporcionan la relación más general para la convolución de dos funciones. Sin embargo, en nuestras aplicaciones de la integral de convolución, podemos cambiar el límite inferior por cero y el límite superior por  $t$ . Entonces, podemos escribir la Ecuación 13.101 como

$$y(t) = \int_0^t h(\lambda)x(t-\lambda)d\lambda = \int_0^t x(\lambda)h(t-\lambda)d\lambda. \quad (13.110)$$

Hemos cambiado los límites por dos razones. En primer lugar, para circuitos físicamente implementables,  $h(t)$  es cero para  $t < 0$ . En otras palabras, no puede haber respuesta al impulso antes de aplicar el propio impulso. En segundo lugar, comenzamos a medir el tiempo en el momento en que se activa la señal de excitación  $x(t)$ ; por tanto,  $x(t) = 0$  para  $t < 0^-$ .

Resulta conveniente, para usar la integral como herramienta de cálculo, realizar una interpretación gráfica de las integrales de convolución contenidas en la Ecuación 13.110. Comencemos por la primera integral. Para clarificar las explicaciones, vamos a suponer que la respuesta al impulso de nuestro circuito es la función de decrecimiento exponencial mostrada en la Figura 13.37(a) y que la función de excitación tiene la forma de onda que se muestra en la Figura 13.37(b). En cada una de estas gráficas, hemos sustituido  $t$  por  $\lambda$ , el símbolo de integración. La sustitución de  $\lambda$  por  $-\lambda$  simplemente hace que la función de excitación se refleje con respecto al eje vertical, mientras que si sustituimos  $-\lambda$  por  $t - \lambda$  la función reflejada se desplaza hacia la derecha. Vea las Figuras 13.37(c) y (d). Esta operación



de inversión con respecto al eje vertical es la que da pie a que se utilice el término *convolución*. Para cualquier valor de  $t$  especificado, la función de respuesta  $y(t)$  es el área comprendida bajo la función producto  $h(\lambda)x(t - \lambda)$ , como se muestra en la Figura 13.37(e). Viendo esta gráfica se entiende por qué el límite inferior de la integral de convención es cero y el límite superior es  $t$ . Para  $\lambda < 0$ , el producto  $h(\lambda)x(t - \lambda)$  es cero porque  $h(\lambda)$  es cero. Para  $\lambda > t$ , el producto  $h(\lambda)x(t - \lambda)$  es cero porque  $x(t - \lambda)$  es cero.

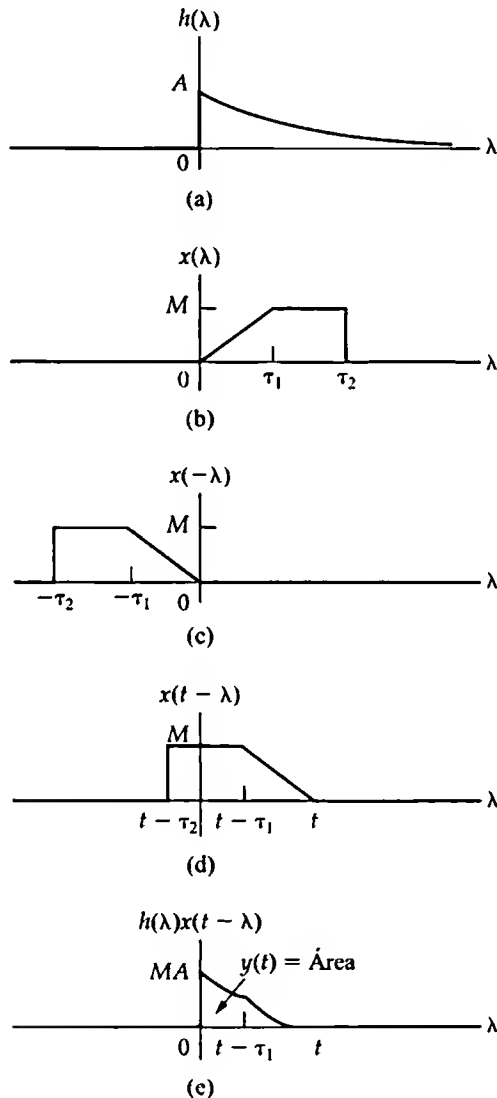
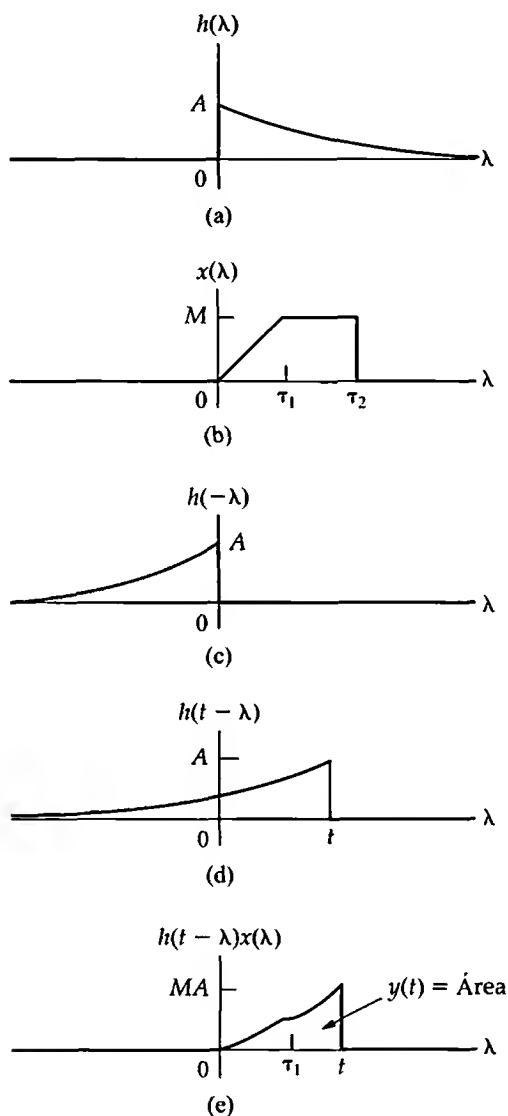


Figura 13.37. Interpretación gráfica de la integral de convolución  $\int_0^t h(\lambda)x(t - \lambda)d\lambda$ .

- (a) La respuesta al impulso.
- (b) La función de excitación.
- (c) La función de excitación reflejada.
- (d) La función de excitación reflejada y desplazada  $t$  unidades.
- (e) El producto  $h(\lambda)x(t - \lambda)$ .

La Figura 13.38 muestra la segunda forma de la integral de convolución. Observe que la función producto de la Figura 13.38(e) confirma que podemos utilizar cero como límite inferior y  $t$  como límite superior.



**Figura 13.38.** Interpretación gráfica de la integral de convolución  $\int_0^t h(t-\lambda)x(\lambda)d\lambda$ .

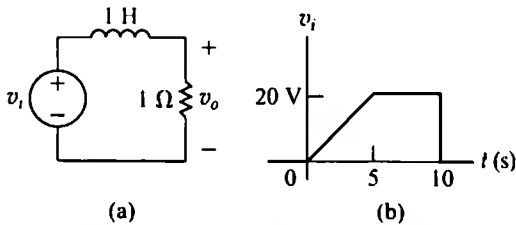
- (a) La respuesta al impulso.
- (b) La función de excitación.
- (c) Respuesta al impulso reflejada.
- (d) Respuesta al impulso reflejada y desplazada  $t$  unidades.
- (e) El producto  $h(t-\lambda)x(\lambda)$ .

El Ejemplo 13.3 ilustra cómo utilizar la integral de convolución, conjuntamente con la respuesta al impulso unitario, para hallar la respuesta de un circuito.

### EJEMPLO 13.3 Utilización de la integral de convolución para hallar una señal de salida

La tensión de excitación  $v_i$  para el circuito mostrado en la Figura 13.39(a) se indica en la Figura 13.39(b).

- Utilice la integral de convolución para hallar  $v_o$ .
- Dibuje  $v_o$  en el rango  $0 \leq t \leq 15$  s.



**Figura 13.39.** El circuito y la función de excitación para el Ejemplo 13.3. (a) El circuito. (b) La función de excitación.

### SOLUCIÓN

- El primer paso para usar la integral de convolución consiste en hallar la respuesta del circuito al impulso unitario. Podemos obtener la expresión correspondiente a  $V_o$  a partir del equivalente en el dominio de  $s$  del circuito mostrado en la Figura 13.39(a):

$$V_o = \frac{V_i}{s+1}(1).$$

Cuando  $v_i$  es una función impulsiva unitaria  $\delta(t)$ ,

$$v_o = h(t) = e^{-t}u(t),$$

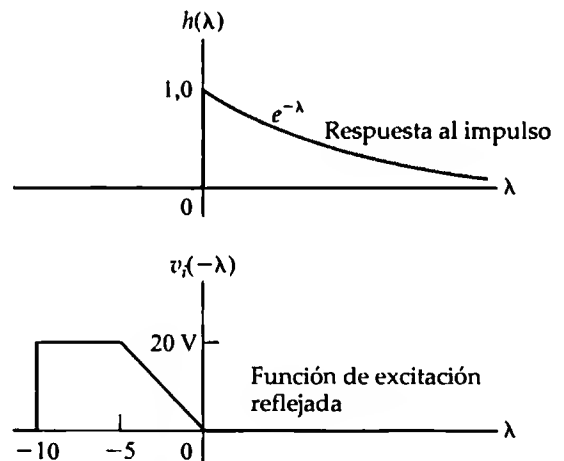
de donde

$$h(\lambda) = e^{-\lambda}u(\lambda).$$

Utilizando la primera forma de la integral de convolución de la Ecuación 13.110, podemos construir la respuesta al impulso y la función de excitación reflejada que se muestran en la Figura 13.40, lo cual nos sirve de ayuda a la hora de seleccionar los

límites de la integral de convolución. Para desplazar la función de excitación reflejada hacia la derecha, necesitamos descomponer la integral en tres intervalos:  $0 \leq t \leq 5$ ,  $5 \leq t \leq 10$  y  $10 \leq t \leq \infty$ . Los cambios que la función de excitación experimenta en 0, 5 y 10 s son los que dictan la selección de estos intervalos. La Figura 13.41 muestra el posicionamiento de la función de excitación reflejada para cada uno de estos intervalos. La expresión analítica correspondiente a  $v_i$  en el intervalo de tiempo  $0 \leq t \leq 5$  será

$$v_i = 4t, \quad 0 \leq t \leq 5 \text{ s.}$$



**Figura 13.40.** La respuesta al impulso y la función de excitación reflejada para el Ejemplo 13.3.

Por tanto, la expresión analítica para la función de excitación reflejada en el intervalo  $t - 5 \leq \lambda \leq t$  es

$$v_i(t - \lambda) = 4(t - \lambda), \quad t - 5 \leq \lambda \leq t.$$

Ahora podemos escribir las tres expresiones integrales para  $v_o$ . Para  $0 \leq t \leq 5$  s:

$$v_o = \int_0^t 4(t - \lambda)e^{-\lambda} d\lambda = 4(e^{-t} + t - 1) \text{ V.}$$

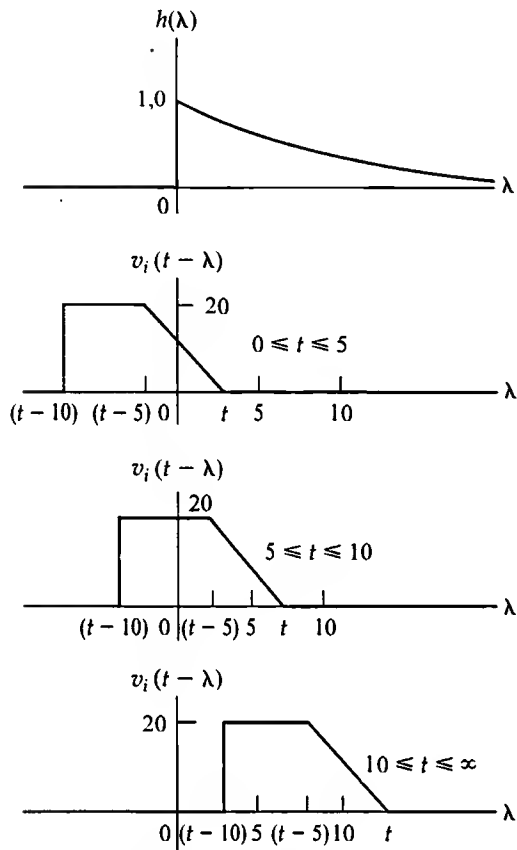


Figura 13.41. Desplazamiento de  $v_i(t - \lambda)$  para tres intervalos de tiempo diferentes.

Para  $5 \leq t \leq 10$  s,

$$v_o = \int_0^{t-5} 20e^{-\lambda} d\lambda + \int_{t-5}^t 4(t-\lambda)e^{-\lambda} d\lambda = 4(5 + e^{-t} - e^{-(t-5)}) \text{ V.}$$

Y para  $10 \leq t \leq \infty$  s,

- b) Si calculamos  $v_o$  para intervalos de tiempo de 1 s, utilizando la ecuación apropiada, los resultados que se obtienen son los que se muestran en la Tabla 13.2 y que se ilustran gráficamente en la Figura 13.42.

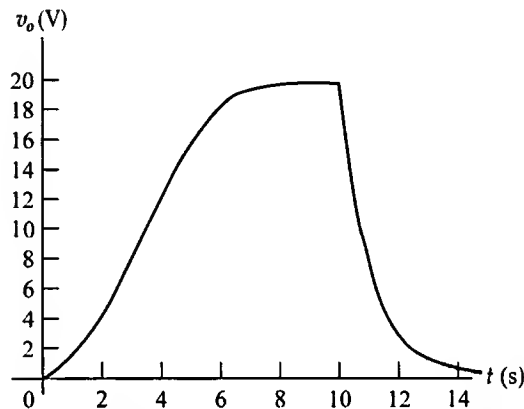


Figura 13.42. Respuesta en tensión en función del tiempo para el Ejemplo 13.3.

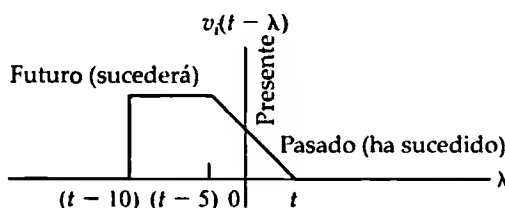
Tabla 13.2. Valores numéricos de $v_o(t)$ .					
$t$	$v_o$	$t$	$v_o$	$t$	$v_o$
1	1,47	6	18,54	11	7,35
2	4,54	7	19,56	12	2,70
3	8,20	8	19,80	13	0,99
4	12,07	9	19,93	14	0,37
5	16,03	10	19,97	15	0,13

**NOTA** Evalúe su comprensión del concepto de convolución tratando de resolver los Problemas 13.57 y 13.58 del capítulo.

### Los conceptos de memoria y de función de ponderación

Ya hemos señalado al comienzo de esta sección que la integral de convolución introduce en el análisis de circuitos los conceptos de memoria y de función de ponderación. Para explicar estos conceptos, lo mejor es partir de la interpretación gráfica de la integral de convolución. Podemos considerar las

tareas de reflejar y deslizar la función de excitación a lo largo de una escala de tiempos que se caracteriza como pasado, presente y futuro. El eje vertical, con respecto al cual se refleja la función de excitación  $x(t)$ , representa el valor actual; los valores pasados de  $x(t)$  están a la derecha del eje vertical, mientras que los valores futuros quedan a la izquierda. La Figura 13.43 muestra esta descripción de  $x(t)$ . A efectos de ilustración, hemos utilizado la función de excitación del Ejemplo 13.3.



**Figura 13.43.** Valores pasados, presentes y futuros de la función de excitación.

Cuando combinamos las vistas pasada, presente y futura de  $x(t - \tau)$  con la respuesta del circuito al impulso, vemos que la respuesta al impulso pondera  $x(t)$  de acuerdo con los valores pasados y presentes. Por ejemplo, la Figura 13.41 muestra que la respuesta al impulso del Ejemplo 13.3 proporciona menos peso a los valores pasados de  $x(t)$  que al valor presente de  $x(t)$ . En otras palabras, el circuito retiene cada vez menos información acerca de los valores de entrada anteriores. Por tanto, en la Figura 13.42,  $v_o$  se aproxima rápidamente a cero cuando el valor presente de la entrada es cero (es decir, cuando  $t > 10$  s). En otras palabras, como al valor presente de la entrada se le asigna un peso mayor que a los valores pasados, la salida se aproxima rápidamente al valor presente.

La multiplicación de  $x(t - \lambda)$  por  $h(\lambda)$  motiva que nos refiramos a la respuesta al impulso como la **función de ponderación** del circuito. La función de ponderación, a su vez, determina la cantidad de memoria que tiene el circuito. La **memoria** es el grado con el que la respuesta del circuito se ajusta a la entrada. Por ejemplo, si la respuesta al impulso, o función de ponderación, es plana, como se muestra en la Figura 13.44(a), proporcionará un peso igual a todos los valores de  $x(t)$ , tanto pasados como presentes. Dicho circuito tendría una memoria perfecta. Sin embargo, si la respuesta al impulso es una función impulsiva como la mostrada en la Figura 13.44(b), no proporcionará ningún peso a los valores pasados de  $x(t)$ . Dicho circuito no tendría memoria alguna. Por tanto, cuanta más memoria tenga un circuito, más diferencia habrá entre la forma de onda de la función de excitación y la forma de onda de la función de respuesta. Podemos ver esta relación suponiendo que el circuito no tiene memoria, es decir, que  $h(t) = A\delta(t)$ , y luego observando en la integral de convolución que

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t h(\lambda)x(t-\lambda)d\lambda \\ &= \int_0^t A\delta(\lambda)x(t-\lambda)d\lambda \\ &= Ax(t). \end{aligned} \tag{13.111}$$

La Ecuación 13.111 muestra que, si el circuito no tiene memoria, la salida es una réplica de la entrada, cambiada de escala.

El circuito mostrado en el Ejemplo 13.3 ilustra la diferencia entre la entrada y la salida para un circuito que tiene algo de memoria. Esta distorsión resulta aparente cuando dibujamos las formas de onda de entrada y de salida en la misma gráfica, como hemos hecho en la Figura 13.45.

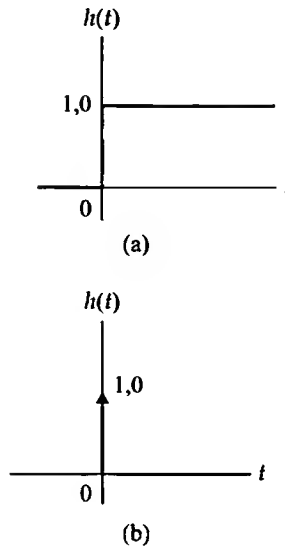


Figura 13.44. Funciones de ponderación. (a) Memoria perfecta. (b) Sin memoria.

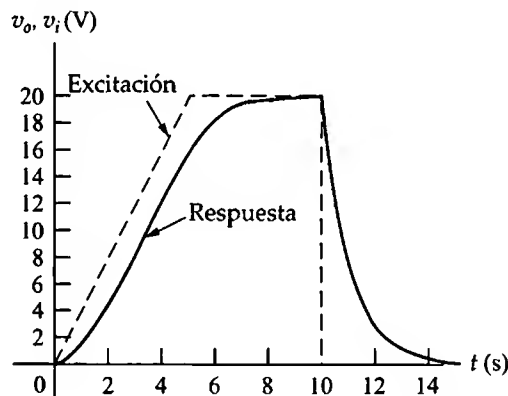


Figura 13.45. Formas de onda de entrada y de salida para el Ejemplo 13.3.

## 13.7. La función de transferencia y la respuesta en régimen permanente sinusoidal

Una vez calculada la función de transferencia de un circuito, ya no necesitamos realizar un análisis del circuito mediante fasores para determinar su respuesta en régimen permanente. En lugar de ello, podemos emplear la función de transferencia para poner en relación la respuesta en régimen permanente con la fuente de excitación. Primero, vamos a suponer que

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi), \quad (13.112)$$

y vamos a emplear la Ecuación 13.96 para hallar la solución de régimen permanente para  $y(t)$ . Para hallar la transformada de Laplace de  $x(t)$ , describimos primero  $x(t)$  como

$$x(t) = A \cos \omega t \cos \phi - A \sin \omega t \sin \phi, \quad (13.113)$$

de donde

$$X(s) = \frac{(A \cos \phi)s}{s^2 + \omega^2} - \frac{(A \sin \phi)\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{A(s \cos \phi - \omega \sin \phi)}{s^2 + \omega^2}. \quad (13.114)$$

Sustituyendo la Ecuación 13.114 en la Ecuación 13.96, obtenemos la expresión en el dominio de  $s$  correspondiente a la respuesta:

$$Y(s) = H(s) \frac{A(s \cos \phi - \omega \sin \phi)}{s^2 + \omega^2}. \quad (13.115)$$

Veamos ahora la expansión en fracciones parciales de la Ecuación 13.115. El número de términos de la expansión dependerá del número de polos de  $H(s)$ . Puesto que  $H(s)$  no está especificada y lo único que sabemos de ella es que es la función de transferencia de un circuito físicamente implementable, la expansión de la Ecuación 13.115 será

$$Y(s) = \frac{K_1}{s - j\omega} + \frac{K_1^*}{s + j\omega} + \sum \text{términos generados por los polos de } H(s). \quad (13.116)$$

En la Ecuación 13.116, los dos primeros términos son el resultado de los polos complejos conjugados de la fuente de excitación, es decir,  $s^2 + \omega^2 = (s - j\omega)(s + j\omega)$ . Sin embargo, los términos generados por los polos de  $H(s)$  no contribuyen a la respuesta en régimen permanente de  $y(t)$ , porque todos estos polos están en la mitad izquierda del plano  $s$ ; por tanto, los términos correspondientes en el dominio del tiempo se aproximarán a cero a medida que  $t$  se incrementa. Así, son los dos primeros términos del lado derecho de la Ecuación 13.116 los que determinan la respuesta en régimen permanente. El problema se reduce, por tanto, a hallar el coeficiente  $K_1$  de la fracción parcial:

$$\begin{aligned} K_1 &= \left. \frac{H(s) A(s \cos \phi - \omega \sin \phi)}{s + j\omega} \right|_{s=j\omega} \\ &= \frac{H(j\omega) A(j\omega \cos \phi - \omega \sin \phi)}{2j\omega} \\ &= \frac{H(j\omega) A(\cos \phi + j \sin \phi)}{2} = \frac{1}{2} H(j\omega) A e^{j\phi}. \end{aligned} \quad (13.117)$$

En general,  $H(j\omega)$  es una magnitud compleja, lo cual podemos tener en cuenta escribiéndola en forma polar:

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\theta(\omega)}. \quad (13.118)$$

Observe, en la Ecuación 13.118, que tanto la magnitud,  $|H(j\omega)|$ , como el ángulo de fase,  $\theta(\omega)$ , de la función de transferencia varían con la frecuencia  $\omega$ . Cuando sustituimos la Ecuación 13.118 en la Ecuación 13.117, la expresión correspondiente a  $K_1$  nos queda

$$K_1 = \frac{A}{2} |H(j\omega)| e^{j[\theta(\omega) + \phi]}. \quad (13.119)$$

Podemos obtener la solución de régimen permanente para  $y(t)$  realizando la transformación inversa de la Ecuación 13.116 y, en el proceso, omitiendo los términos generados por los polos de  $H(s)$ . Así,

➤ **RESPUESTA EN RÉGIMEN PERMANENTE SINUSOIDAL CALCULADA MEDIANTE UNA FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA**

$$y_p(t) = A|H(j\omega)| \cos[\omega t + \phi + \theta(\omega)], \quad (13.120)$$

que nos indica cómo utilizar la función de transferencia para hallar la respuesta de un circuito en régimen permanente sinusoidal. La amplitud de la respuesta es igual a la amplitud de la fuente,  $A$ , multiplicada por el módulo de la función de transferencia,  $|H(j\omega)|$ . El ángulo de fase de la respuesta,  $\phi + \theta(\omega)$ , es igual al ángulo de fase de la fuente,  $\phi$ , más el ángulo de fase de la función de transferencia,  $\theta(\omega)$ . Ambos valores,  $|H(j\omega)|$  y  $\theta(\omega)$ , se evalúan a la frecuencia de la fuente,  $\omega$ .

El Ejemplo 13.4 ilustra cómo utilizar la función de transferencia para hallar la respuesta en régimen permanente sinusoidal de un circuito.

**EJEMPLO 13.4** Utilización de la función de transferencia para hallar la respuesta en régimen permanente sinusoidal

El circuito del Ejemplo 13.1 se muestra en la Figura 13.46. La tensión de la fuente sinusoidal es  $120 \cos(5000t + 30^\circ)$  V. Calcule la expresión de régimen permanente correspondiente a  $v_o$ .

Entonces, por la Ecuación 13.120,

$$\begin{aligned} v_o &= \frac{(120)\sqrt{2}}{6} \cos(5000t + 30^\circ - 45^\circ) \\ &= 20\sqrt{2} \cos(5000t - 15^\circ) \text{ V.} \end{aligned}$$

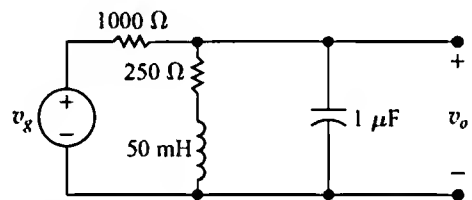
**SOLUCIÓN**

Del Ejemplo 13.1,

$$H(s) = \frac{1000(s + 5000)}{s^2 + 6000s + 25 \times 10^6}.$$

La frecuencia de la fuente de tensión es 5000 rad/s; por tanto, evaluamos  $H(s)$  en  $H(j5000)$ :

$$\begin{aligned} H(j5000) &= \frac{1000(5000 + j5000)}{-25 \times 10^6 + j5000(6000) + 25 \times 10^6} \\ &= \frac{1 + j1}{j6} = \frac{1 - j1}{6} = \frac{\sqrt{2}}{6} \angle -45^\circ. \end{aligned}$$



**Figura 13.46.** Circuito del Ejemplo 13.4.

La capacidad de utilizar la función de transferencia para calcular la respuesta de un circuito en régimen permanente sinusoidal tiene una gran importancia. Observe que, si conocemos  $H(j\omega)$ , también conocemos  $H(s)$ , al menos en teoría. En otras palabras, podemos invertir el proceso: en lugar de utilizar  $H(s)$  para calcular  $H(j\omega)$ , utilizamos  $H(j\omega)$  para hallar  $H(s)$ . Una vez conocida  $H(s)$ , podemos calcular la respuesta a otras fuentes de excitación. En este tipo de aplicación, determinamos  $H(j\omega)$  experimentalmente y luego construimos  $H(s)$  a partir de los datos. En la práctica, esta técnica experimental no resulta siempre posible; sin embargo, en algunos casos sí proporciona un método útil para hallar  $H(s)$ . En teoría, la relación entre  $H(s)$  y  $H(j\omega)$  proporciona un enlace entre el dominio del tiempo y el dominio de la frecuencia. La función de transferencia es también una herramienta muy útil en los problemas relativos a la respuesta en frecuencia de un circuito, concepto del que hablaremos en el capítulo siguiente.

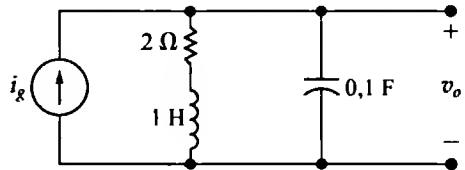


### Evaluación del objetivo 4

- Saber cómo utilizar la función de transferencia de un circuito para calcular la respuesta al impulso del circuito, la respuesta al escalón unitario y la respuesta de régimen permanente a una entrada sinusoidal.

- 13.12. La fuente de corriente del circuito mostrado proporciona una corriente de valor  $10 \cos 4t$  A. Utilice la función de transferencia para calcular la expresión en régimen permanente correspondiente a  $v_o$ .

**RESPUESTA**  $44,7 \cos (4t - 63,43^\circ)$  V.



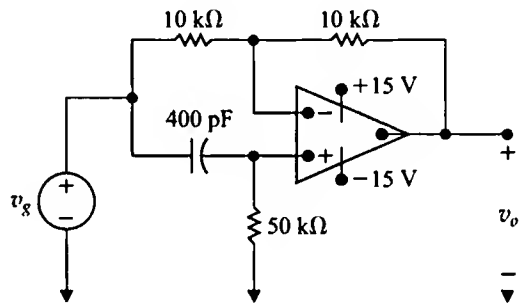
- 13.13. a) Para el circuito mostrado, calcule la expresión en régimen permanente para  $v_o$  cuando  $v_g = 10 \cos 50.000t$  V.

- b) Sustituya la resistencia de  $50 \text{ k}\Omega$  por una resistencia variable y calcule el valor de la resistencia necesario para hacer que  $v_o$  esté adelantada  $120^\circ$  con respecto a  $v_g$ .

**RESPUESTA**

(a)  $10 \cos (50.000t + 90^\circ)$  V;

(b)  $28.867,51 \text{ }\Omega$ .



**NOTA** Trate también de resolver los Problemas 13.76 y 13.77 del capítulo.

## 13.8. La función impulsiva en el análisis de circuitos

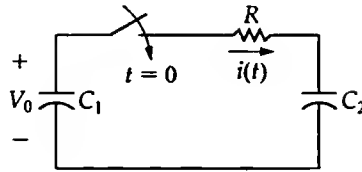
Las funciones impulsivas aparecen en el análisis de circuitos bien debido a una operación de conmutación o bien debido a que se excita el circuito mediante una fuente impulsiva. Puede emplearse la transformada de Laplace para predecir las corrientes y tensiones impulsivas generadas durante la conmutación y la respuesta de un circuito a una fuente impulsiva. Vamos a comenzar nuestras explicaciones mostrando cómo crear una función impulsiva mediante una operación de conmutación.

### Operaciones de conmutación

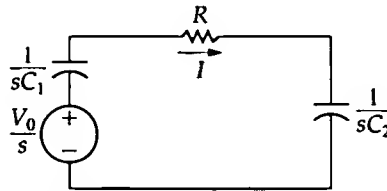
Usaremos dos circuitos distintos para ilustrar cómo puede crearse una función impulsiva mediante una operación de conmutación: un circuito con condensador y un circuito con una bobina en serie.

#### Circuito con condensador

En el circuito mostrado en la Figura 13.47, el condensador  $C_1$  está cargado con una tensión inicial  $V_0$  en el momento de cerrar el conmutador. La carga inicial en  $C_2$  es cero. El problema consiste en calcu-



**Figura 13.47.** Circuito para ilustrar la creación de una corriente impulsiva.



**Figura 13.48.** Circuito equivalente en el dominio de  $s$  para el circuito mostrado en la Figura 13.47.

lar la expresión correspondiente a  $i(t)$  a medida que  $R \rightarrow 0$ . La Figura 13.48 muestra el circuito equivalente en el dominio de  $s$ .

A partir de la Figura 13.48,

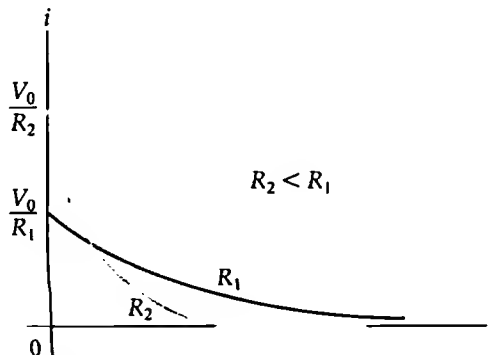
$$I = \frac{V_0/s}{R + (1/sC_1) + (1/sC_2)} = \frac{V_0/R}{s + (1/RC_e)}, \quad (13.121)$$

donde se ha sustituido la capacidad equivalente  $C_1 C_2 / (C_1 + C_2)$  por  $C_e$ .

Podemos hallar la transformada inversa de la Ecuación 13.121 por inspección, para obtener

$$i = \left( \frac{V_0}{R} e^{-t/RC_e} \right) u(t), \quad (13.122)$$

que indica que, a medida que se reduce el valor de  $R$ , la corriente inicial ( $V_0/R$ ) se incrementa y la constante de relajación ( $RC_e$ ) se reduce. Así, a medida que  $R$  se hace más pequeña, la corriente comienza con un valor inicial mayor y luego decrece más rápidamente. La Figura 13.49 muestra estas características de  $i$ .



**Figura 13.49.** Gráfica de  $i(t)$  en función de  $t$  para dos valores diferentes de  $R$ .

Aparentemente,  $i$  se aproxima a una función impulsiva a medida que  $R$  tiende a cero, porque el valor inicial de  $i$  se aproxima a infinito y la duración de  $i$  se aproxima a cero. Todavía nos queda por determinar si el área comprendida bajo la función de corriente es independiente de  $R$ . Físicamente, el área total bajo la curva de  $i$  en función de  $t$  representa la carga total transferida a  $C_2$  después de cerrar el conmutador. Por tanto,

$$\text{Área} = q = \int_{0^-}^{\infty} \frac{V_0}{R} e^{-t/RC} dt = V_0 C_e, \quad (13.123)$$

que nos dice que la carga total transferida a  $C_2$  es independiente de  $R$  y es igual a  $V_0 C_e$  culombios. Por tanto, a medida que  $R$  tiende a cero, la corriente se aproxima a un impulso de intensidad  $V_0 C_e$ ; es decir,

$$i \rightarrow V_0 C_e \delta(t). \quad (13.124)$$

La interpretación física de la Ecuación 13.124 es que, cuando  $R = 0$ , se transfiere instantáneamente a  $C_2$  una cantidad finita de carga. Si hacemos  $R$  igual a cero en el circuito mostrado en la Figura 13.47, vemos por qué se produce esa transferencia instantánea de carga. Con  $R = 0$ , creamos una contradicción al cerrar el conmutador, ya que aplicamos una tensión en bornes de un condensador que tiene una tensión inicial igual a cero. La única forma de tener un cambio instantáneo en la tensión del condensador es si se produce una transferencia instantánea de carga. Al cerrar el conmutador, la tensión en bornes de  $C_2$  no pasa a valer  $V_0$ , sino que adopta su valor final de

$$v_2 = \frac{C_1 V_0}{C_1 + C_2}. \quad (13.125)$$

Dejamos al lector la demostración de la Ecuación 13.125 (véase el Problema 13.80).

Si hacemos  $R$  igual a cero desde el principio, el análisis mediante la transformada de Laplace predice una respuesta en corriente de tipo impulsivo. Así,

$$I = \frac{V_0/s}{(1/sC_1) + (1/sC_2)} = \frac{C_1 C_2 V_0}{C_1 + C_2} = C_e V_0. \quad (13.126)$$

Al escribir la Ecuación 13.126, utilizamos las tensiones de los condensadores en  $t = 0^-$ . La transformada inversa de una constante es la propia constante multiplicada por la función impulsiva; por tanto, aplicando la Ecuación 13.126,

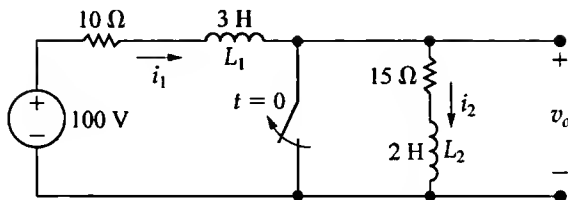
$$i = C_e V_0 \delta(t). \quad (13.127)$$

La capacidad de la transformada de Laplace para predecir correctamente la aparición de una **respuesta** impulsiva es una de las razones por las que se utiliza ampliamente esta transformada para **analizar** el comportamiento transitorio de circuitos lineales con parámetros agrupados e invariantes en el **tiempo**.

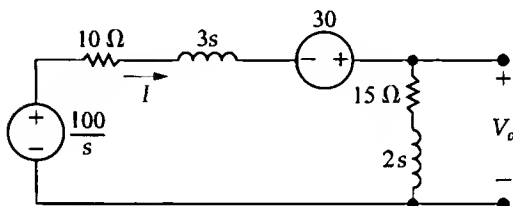
### Circuito con una bobina en serie

El circuito mostrado en la Figura 13.50 ilustra una segunda operación de conmutación que produce una **respuesta** impulsiva. El problema consiste en hallar la expresión en el dominio del tiempo para  $v_o$  después de abrir el conmutador. Observe que la apertura del conmutador provoca un cambio instantáneo en la corriente de  $L_2$ , lo que hace que  $v_o$  contenga una componente impulsiva.

La Figura 13.51 muestra el equivalente en el dominio de  $s$  con el conmutador abierto. Al dibujar **este** circuito, hemos tenido en cuenta que la corriente en la bobina de 3 H para  $t = 0^-$  es 10 A y que la



**Figura 13.50.** Un circuito para ilustrar la creación de una tensión impulsiva.



**Figura 13.51.** Circuito equivalente en el dominio de  $s$  para el circuito mostrado en la Figura 13.50.

corriente en la bobina de 2 H para  $t = 0^-$  es cero. La utilización de las condiciones iniciales en  $t = 0^-$  es una consecuencia directa de la utilización de  $0^-$  como límite inferior en la integral que define la transformada de Laplace.

Podemos hallar la expresión correspondiente a  $V_o$  mediante una única ecuación de tensión de nodo. Sumando las corrientes que salen del nodo situado entre la resistencia de 15 Ω y la fuente de 30 V se obtiene

$$\frac{V_o}{2s+15} + \frac{V_o - [(100/s) + 30]}{3s+10} = 0. \quad (13.128)$$

Si despejamos  $V_o$ , nos queda

$$V_o = \frac{40(s+7,5)}{s(s+5)} + \frac{12(s+7,5)}{s+5}. \quad (13.129)$$

Podemos anticipar que  $v_o$  contendrá un término impulsivo porque el segundo término del lado derecho de la Ecuación 13.129 es una función racional impropia. Podemos expresar esta función impropia como una constante más una función racional, simplemente dividiendo el numerador por el denominador:

$$\frac{12(s+7,5)}{s+5} = 12 + \frac{30}{s+5}. \quad (13.130)$$

Combinando la Ecuación 13.130 con la expansión en fracciones parciales del primer término del lado derecho de la Ecuación 13.129, obtenemos

$$V_o = \frac{60}{s} - \frac{20}{s+5} + 12 + \frac{30}{s+5} = 12 + \frac{60}{s} + \frac{10}{s+5}, \quad (13.131)$$

de donde

$$v_o = 12\delta(t) + (60 + 10e^{-5t})u(t) \text{ V}. \quad (13.132)$$

¿Tiene sentido esta solución? Antes de responder a esta pregunta, veamos primero cuál es la expresión correspondiente a la corriente para  $t > 0^-$ . Después de abrir el conmutador, la corriente en  $L_1$  será

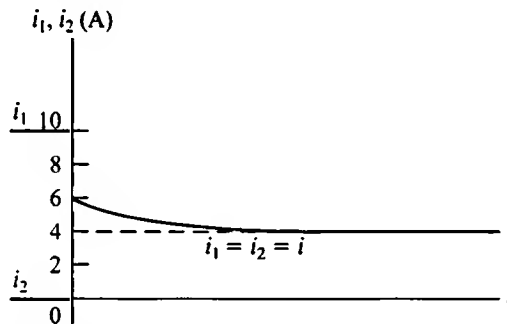
igual a la corriente en  $L_2$ . Si tomamos como referencia para la corriente de la malla el sentido de las agujas del reloj, la expresión en el dominio de  $s$  es

$$\begin{aligned} I &= \frac{(100/s) + 30}{5s + 25} = \frac{20}{s(s+5)} + \frac{6}{(s+5)} \\ &= \frac{4}{s} - \frac{4}{s+5} + \frac{6}{s+5} \\ &= \frac{4}{s} + \frac{2}{s+5}. \end{aligned} \quad (13.133)$$

Calculando la transformada inversa de la Ecuación 13.133, resulta

$$i = (4 + 2e^{-5t})u(t) \text{ A.} \quad (13.134)$$

Antes de abrir el conmutador, la corriente que atraviesa  $L_1$  es 10 A y la corriente de  $L_2$  es 0 A; por la Ecuación 13.134, sabemos que en  $t = 0^+$  la corriente en  $L_1$  y  $L_2$  es 6 A. Por tanto, la corriente de  $L_1$  cambia instantáneamente de 10 a 6 A, mientras que la corriente de  $L_2$  cambia instantáneamente de 0 a 6 A. A partir de este valor de 6 A, la corriente decrece exponencialmente, hasta alcanzar un valor final de 4 A. Este valor final puede verificarse fácilmente a partir del circuito, ya que debe ser igual a  $100/25$ , es decir, 4 A. La Figura 13.52 muestra estas características de  $i_1$  e  $i_2$ .



**Figura 13.52.** Corriente de las bobinas en función de  $t$  para el circuito mostrado en la Figura 13.50.

¿Cómo podemos verificar que estos saltos instantáneos en la corriente de las bobinas tienen sentido según el comportamiento físico del circuito? En primer lugar, observemos que la operación de conmutación coloca las dos bobinas en serie. Cualquier tensión impulsiva que aparezca en bornes de la bobina de 3 H deberá equilibrarse mediante otra tensión impulsiva en bornes de la bobina de 2 H, porque la suma de las tensiones impulsivas alrededor de un lazo cerrado debe ser igual a cero. La ley de Faraday indica que la tensión inducida es proporcional al cambio en el flujo de enlace ( $v = d\lambda/dt$ ). Por tanto, el cambio total en el flujo de enlace debe ser igual a cero. En otras palabras, el flujo de enlace total inmediatamente después de la conmutación es igual al que había antes de que la conmutación se produjera. Para el circuito del ejemplo, el flujo de enlace antes de la conmutación es

$$\lambda = L_1 i_1 + L_2 i_2 = 3(10) + 2(0) = 30 \text{ Wb-vueltas.} \quad (13.135)$$

Inmediatamente después de la conmutación, será

$$\lambda = (L_1 + L_2)i(0^+) = 5i(0^+). \quad (13.136)$$

Combinando las Ecuaciones 13.135 y 13.136, se obtiene

$$i(0^+) = 30/5 = 6 \text{ A.} \quad (13.137)$$

Por tanto, la solución correspondiente a  $i$  (Ecuación 13.134) concuerda con el principio de conservación del flujo de enlace.

Comprobemos ahora la validez de la Ecuación 13.132. Primero, vamos a verificar el término impulsivo  $12\delta(t)$ . El salto instantáneo de  $i_2$  entre 0 y 6 A en  $t = 0$  provoca un impulso de intensidad  $6\delta(t)$  en la derivada de  $i_2$ . Este impulso provoca una tensión igual a  $12\delta(t)$  en bornes de la bobina de 2 H. Para  $t > 0^+$ ,  $di_2/dt$  es  $-10e^{-5t}$  A/s; por tanto, la tensión  $v_o$  será

$$v_o = 15(4 + 2e^{-5t}) + 2(-10e^{-5t}) = (60 + 10e^{-5t})u(t) \text{ V.} \quad (13.138)$$

La Ecuación 13.138 concuerda con los dos últimos términos del lado derecho de la Ecuación 13.132; de este modo hemos confirmado que la Ecuación 13.132 tiene sentido según el comportamiento conocido del circuito.

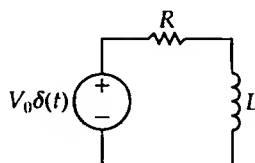
También podemos comprobar la caída instantánea entre 10 y 6 A en la corriente  $i_1$ . Esta caída provoca un impulso igual a  $-4\delta(t)$  en la derivada de  $i_1$ . Por tanto, la tensión en bornes de  $L_1$  contiene un impulso de  $-12\delta(t)$  en el origen. Este impulso compensa exactamente el impulso que aparece en bornes de  $L_2$ ; es decir, la suma de las tensiones impulsivas alrededor del lazo cerrado es igual a cero.

## Fuentes impulsivas

Las funciones impulsivas también pueden aparecer en las fuentes, y no sólo como respuesta de un circuito. Dichas fuentes se denominan **fuentes impulsivas**. Una fuente impulsiva que excite un circuito entrega al sistema una cantidad finita de energía de manera instantánea. Una analogía mecánica sería la de golpear una campana con un badajo que sólo estuviera en contacto con la campana una cantidad de tiempo despreciable. Una vez transferida la energía a la campana, es la respuesta natural de ésta la que determina el tono emitido (es decir, la frecuencia de las ondas sonoras resultantes), así como la duración de dicho tono.

En el circuito mostrado en la Figura 13.53, aplicamos una fuente de tensión impulsiva con una intensidad de  $V_0$  voltios-segundos a una conexión en serie de una resistencia y una bobina. Cuando se aplica la fuente de tensión, la energía inicial en la bobina es igual a cero; por tanto, la corriente inicial es cero. No hay caída de tensión en  $R$ , por lo que la tensión impulsiva aparecerá directamente en bornes de  $L$ . Una tensión impulsiva en los terminales de una bobina establece una corriente instantánea, cuyo valor será

$$i = \frac{1}{L} \int_0^t V_0 \delta(x) dx. \quad (13.139)$$



**Figura 13.53.** Un circuito  $RL$  excitado por una fuente de tensión impulsiva.

Dado que la integral de  $\delta(t)$  a lo largo de cualquier intervalo que incluya cero es 1, la Ecuación 13.139 nos da

$$i(0^+) = \frac{V_0}{L} \text{ A.} \quad (13.140)$$

Por tanto, la fuente de tensión impulsiva habrá almacenado en la bobina una energía

$$W = \frac{1}{2} L \left( \frac{V_0}{L} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{V_0^2}{L} \text{ J} \quad (13.141)$$

en un instante de tiempo infinitesimal.

La corriente  $V_0/L$  caerá después hasta cero de acuerdo con la respuesta natural del circuito, es decir,

$$i = \frac{V_0}{L} e^{-t/\tau} u(t), \quad (13.142)$$

donde  $\tau = L/R$ . Recuerde, del Capítulo 7, que la respuesta natural es atribuible en exclusiva a la liberación o almacenamiento de energía por parte de los elementos pasivos, y no a los efectos de las fuentes. Cuando un circuito sólo está excitado mediante una fuente impulsiva, la respuesta total está completamente definida por la respuesta natural; la duración de la excitación correspondiente a la fuente impulsiva es infinitesimal, por lo que no contribuye a ningún tipo de respuesta forzada.

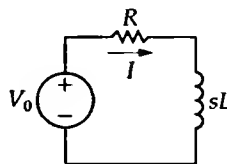
También podemos obtener la Ecuación 13.142 mediante aplicación directa del método de la transformada de Laplace. La Figura 13.54 muestra el equivalente en el dominio de  $s$  para el circuito de la Figura 13.53,

De aquí,

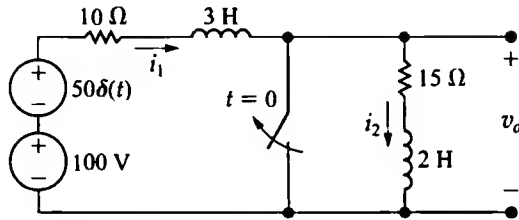
$$I = \frac{V_0}{R + sL} = \frac{V_0/L}{s + (R/L)}, \quad (13.143)$$

$$i = \frac{V_0}{L} e^{-(R/L)t} = \frac{V_0}{L} e^{-t/\tau} u(t). \quad (13.144)$$

Por tanto, el método de la transformada de Laplace proporciona la solución correcta para  $i \geq 0^+$ . Finalmente, vamos a considerar el caso en el que tienen lugar simultáneamente impulsos generados de forma interna e impulsos aplicados externamente. El método de la transformada de Laplace garantiza que obtendremos la solución correcta para  $t > 0^+$  si se utilizan las corrientes de las bobinas y las tensiones de los condensadores en  $t = 0^-$  a la hora de construir el circuito equivalente en el dominio de  $s$  y si se representan los impulsos aplicados externamente mediante sus transformadas. Para ilustrar esta técnica, hemos añadido una fuente de tensión impulsiva de  $50\delta(t)$  en serie con la fuente de 100 V al circuito mostrado en la Figura 13.50. La Figura 13.55 muestra la nueva disposición.

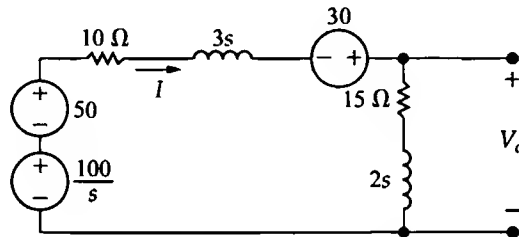


**Figura 13.54.** Circuito equivalente en el dominio de  $s$  para el circuito mostrado en la Figura 13.53.



**Figura 13.55.** El circuito mostrado en la Figura 13.50, con una fuente de tensión impulsiva añadida en serie con la fuente de 100 V.

En  $t = 0^-$ ,  $i_1(0^-) = 10$  A e  $i_2(0^-) = 0$  A. La transformada de Laplace de la fuente impulsiva  $50\delta(t)$  será igual a 50. Si utilizamos estos valores, el circuito equivalente en el dominio de  $s$  es el que se muestra en la Figura 13.56.



**Figura 13.56.** Circuito equivalente en el dominio de  $s$  para el circuito mostrado en la Figura 13.55.

La expresión correspondiente a  $I$  es

$$\begin{aligned} I &= \frac{50 + (100/s) + 30}{25 + 5s} = \frac{16}{s+5} + \frac{20}{s(s+5)} \\ &= \frac{16}{s+5} + \frac{4}{s} - \frac{4}{s+5} = \frac{12}{s+5} + \frac{4}{s}, \end{aligned} \quad (13.145)$$

de donde

$$i(t) = (12e^{-5t} + 4)u(t) \text{ A.} \quad (13.146)$$

La expresión correspondiente a  $V_o$  es

$$\begin{aligned} V_o &= (15 + 2s)I = \frac{32(s+7,5)}{s+5} + \frac{40(s+7,5)}{s(s+5)} \\ &= 32\left(1 + \frac{2,5}{s+5}\right) + \frac{60}{s} - \frac{20}{s+5} \\ &= 32 + \frac{60}{s+5} + \frac{60}{s}, \end{aligned} \quad (13.147)$$

de donde

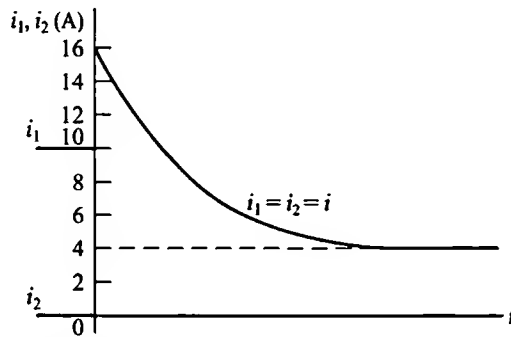
$$v_o = 32\delta(t) + (60e^{-5t} + 60)u(t) \text{ V.} \quad (13.148)$$



Comprobemos ahora los resultados para ver si tienen sentido. A partir de la Ecuación 13.146, vemos que la corriente en  $L_1$  y  $L_2$  es de 16 A en  $t = 0^+$ . Como en el caso anterior, la operación de conmutación hace que  $i_1$  caiga instantáneamente de 10 a 6 A y, al mismo tiempo, hace que  $i_2$  se incremente de 0 a 6 A. A estos cambios se les superpone el establecimiento de 10 A en  $L_1$  y  $L_2$  mediante la fuente de tensión impulsiva, es decir,

$$i = \frac{1}{3+2} \int_{0^-}^t 50\delta(x)dx = 10 \text{ A.} \quad (13.149)$$

Por tanto,  $i_1$  se incrementa súbitamente de 10 a 16 A, mientras que  $i_2$  se incrementa súbitamente de 0 a 6 A. El valor final de  $i$  es 4 A. La Figura 13.57 muestra una gráfica de  $i_1$ ,  $i_2$  e  $i$ .



**Figura 13.57.** Corrientes en las bobinas en función de  $t$  para el circuito ilustrado en la Figura 13.55.

También podemos determinar los cambios abruptos en  $i_1$  e  $i_2$  sin utilizar superposición. La suma de las tensiones impulsivas en bornes de  $L_1$  (3 H) y  $L_2$  (2 H) es igual a  $50\delta(t)$ . Por tanto, el cambio en el flujo de enlace debe sumar 50, es decir,

$$\Delta\lambda_1 + \Delta\lambda_2 = 50. \quad (13.150)$$

Puesto que  $\lambda = Li$ , expresamos la Ecuación 13.150 como

$$3\Delta i_1 + 2\Delta i_2 = 50. \quad (13.151)$$

Pero, como  $i_1$  e  $i_2$  deben ser iguales después de tener lugar la conmutación,

$$i_1(0^-) + \Delta i_1 = i_2(0^-) + \Delta i_2. \quad (13.152)$$

Entonces,

$$10 + \Delta i_1 = 0 + \Delta i_2. \quad (13.153)$$

Resolviendo el sistema formado por las Ecuaciones 13.151 y 13.153 para hallar  $\Delta i_1$  e  $\Delta i_2$ , nos queda

$$\Delta i_1 = 6 \text{ A,} \quad (13.154)$$

$$\Delta i_2 = 16 \text{ A.} \quad (13.155)$$

Estas expresiones concuerdan con nuestra comprobación anterior.

La Figura 13.57 también indican que las derivadas de  $i_1$  e  $i_2$  contendrán un impulso en  $t = 0$ . Específicamente, la derivada de  $i_1$  tendrá un impulso de  $6\delta(t)$  y la derivada de  $i_2$  tendrá un impulso de  $16\delta(t)$ . Las Figuras 13.58(a) y (b), respectivamente, muestran las derivadas de  $i_1$  e  $i_2$ .

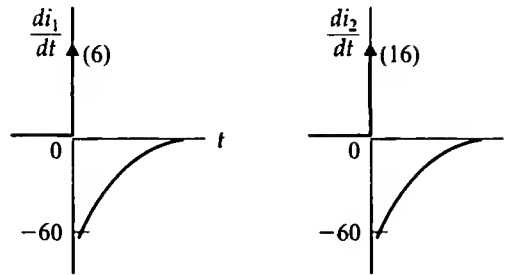


Figura 13.58. La derivada de  $i_1$  e  $i_2$ .

Volvamos ahora a la Ecuación 13.148. La componente impulsiva  $32\delta(t)$  concuerda con el impulso de  $16\delta(t)$  que se produce en  $di_2/dt$  en el origen. Los términos  $60e^{-5t} + 60$  concuerdan con el hecho de que, para  $t > 0^+$ ,

$$v_o = 15i + 2 \frac{di}{dt}.$$

Podemos comprobar la componente impulsiva de  $di_1/dt$  observando que produce una tensión impulsiva de  $(3)6\delta(t)$ , es decir,  $18\delta(t)$ , en bornes de  $L_1$ . Esta tensión, junto con la tensión de  $32\delta(t)$  en bornes de  $L_2$ , da un total de  $50\delta(t)$ . Por tanto, la suma algebraica de las tensiones impulsivas alrededor de la malla da un total de cero. Para resumir, la transformada de Laplace predice correctamente la creación de corrientes y tensiones impulsivas que se produzcan como resultado de operaciones de conmutación. Sin embargo, los circuitos equivalentes en el dominio de  $s$  deben basarse en las condiciones iniciales existentes en  $t = 0^-$ , es decir, en las condiciones iniciales existentes antes de la perturbación provocada por la conmutación. La transformada de Laplace predecirá correctamente la respuesta a las fuentes de excitación impulsivas simplemente representando estas fuentes en el dominio de  $s$  mediante sus transformadas correctas.

**NOTA** Evalúe su comprensión del papel de la función impulsiva en el análisis de circuitos intentando resolver los Problemas 13.83 y 13.84 del capítulo.

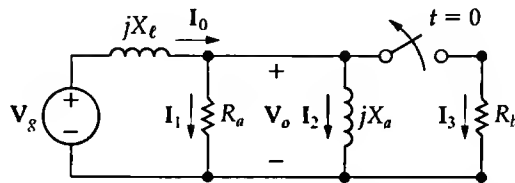
## Perspectiva práctica

### Supresores de sobretensiones

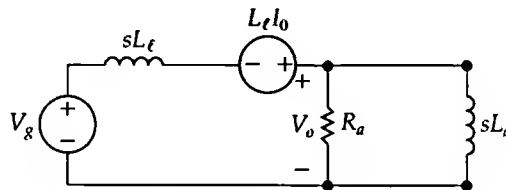
Como hemos indicado al principio del capítulo, en un circuito que esté operando en régimen permanente sinusoidal pueden producirse sobretensiones. Nuestro propósito es mostrar cómo se utiliza la transformada de Laplace para determinar la aparición de sobretensiones entre los conductores de línea y neutro de un circuito de distribución doméstico cuando se desconecta una carga durante la operación en régimen permanente sinusoidal.

Considere el circuito mostrado en la Figura 13.59, que modela un circuito doméstico de distribución eléctrica con tres cargas, una de las cuales se desconecta en el instante  $t = 0$ . Para simplificar el análisis, vamos a suponer que la tensión línea-neutro,  $V_o$ , es  $120 \angle 0^\circ$  V (rms), y que cuando se desconecta la carga en  $t = 0$  el valor de  $V_g$  no cambia. Después de abrir el conmutador, podemos construir el circuito equivalente en el dominio de  $s$ , como se muestra en la Figura 13.60. Observe que, como el ángulo de fase de la tensión en bornes de la carga inductiva es  $0^\circ$ , la corriente inicial a través de la carga inductiva es 0. Por tanto, sólo la inductancia de la línea tiene una condición inicial distinta de cero, la

cual se modela en el equivalente en el dominio de  $s$  como una fuente de tensión con el valor  $L_\ell I_0$ , como se muestra en la Figura 13.60.



**Figura 13.59.** Circuito utilizado para introducir una sobretensión derivada de la conmutación.



**Figura 13.60.** Circuito simbólico en el dominio de  $s$ .

Justo antes de abrir el conmutador en  $t = 0$ , cada una de las cargas tiene una tensión en régimen permanente sinusoidal cuyo módulo de pico es  $120\sqrt{2} = 169,7$  V. Toda la corriente que fluya a través de la línea procedente de la fuente de tensión  $V_g$  se divide entre las tres cargas. Cuando se abre el conmutador en  $t = 0$ , toda la corriente de la línea fluirá a través de la carga resistiva restante. Esto se debe a que la corriente en la carga inductiva es 0 en  $t = 0$  y a que la corriente en una bobina no puede cambiar instantáneamente. Por tanto, la caída de tensión en bornes de las cargas restantes puede experimentar un súbito aumento al ser redirigida la corriente de línea a través de la carga resistiva. Por ejemplo, si la corriente inicial en la línea es 25 A (rms) y la impedancia de la carga resistiva es  $12 \Omega$ , la caída de tensión en la resistencia pasará de 169,7 V a  $(25)(\sqrt{2})(12) = 424,3$  V al abrir el conmutador. Si la carga resistiva no puede soportar esta tensión, será necesario protegerla con un protector de sobretensiones como los que se muestran al principio del capítulo.

**NOTA** Evalúe su comprensión de esta Perspectiva práctica intentando resolver los Problemas 13.89 y 13.90 del capítulo.

## RESUMEN

- Podemos representar cada uno de los elementos de un circuito mediante un circuito equivalente en el dominio de  $s$ , sin más que aplicar la transformada de Laplace a la ecuación tensión-corriente correspondiente a cada elemento:

- Resistencia:  $V = RI$
- Bobina:  $V = sLI - LI_0$
- Condensador:  $V = (1/sC)I + V_0/s$

En estas ecuaciones,  $V = \mathcal{L}\{v\}$ ,  $I = \mathcal{L}\{i\}$ ,  $I_0$  es la corriente inicial a través de la bobina y  $V_0$  es la tensión inicial en bornes del condensador (véanse las páginas 608-611).

- Podemos realizar un análisis de circuitos en el dominio de  $s$  sustituyendo cada elemento del circuito por su circuito equivalente en el dominio de  $s$ . El circuito equivalente resultante se resuelve escribiendo

ecuaciones algebraicas mediante las técnicas de análisis de circuitos que ya hemos visto para los circuitos resistivos. La Tabla 13.1 resume los circuitos equivalentes para resistencias, bobinas y condensadores en el dominio de  $s$  (véase la página 612).

- El análisis de circuitos en el dominio de  $s$  resulta particularmente ventajoso a la hora de resolver problemas de determinación de la respuesta transitoria en circuitos lineales con parámetros agrupados, cuando se conocen las condiciones iniciales. También resulta útil para aquellos problemas donde haya múltiples ecuaciones de corriente de malla o de tensión de nodo, ya que reduce los problemas a una serie de ecuaciones algebraicas, en lugar de ecuaciones diferenciales (véase la página 620).
- La **función de transferencia** es el cociente entre la entrada y la salida de un circuito en el dominio de  $s$ . Se representa como

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)},$$

donde  $Y(s)$  es la transformada de Laplace de la señal de salida y  $X(s)$  es la transformada de Laplace de la señal de entrada (véase la página 631).

- La expansión en fracciones parciales del producto  $H(s)X(s)$  proporciona un término para cada polo de  $H(s)$  y  $X(s)$ . Los términos de  $H(s)$  se corresponden con la componente transitoria de la respuesta total; los términos de  $X(s)$  se corresponden con la componente de régimen permanente (véase la página 634).
- Si un circuito está excitado por un impulso unitario,  $x(t) = \delta(t)$ , la respuesta del circuito será igual a la transformada inversa de Laplace de la función de transferencia,  $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = h(t)$  (véase la página 637).
- Un **circuito invariante con respecto al tiempo** es aquel para el que, si retardamos

la entrada  $a$  segundos, la función de respuesta también se retarda  $a$  segundos (véase la página 637).

La salida de un circuito,  $y(t)$ , puede calcularse realizando la convolución entre la entrada,  $x(t)$ , y la respuesta al impulso del circuito,  $h(t)$ :

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_0^t h(\lambda)x(t-\lambda)d\lambda$$

$$= x(t) * h(t) = \int_0^t x(\lambda)h(t-\lambda)d\lambda.$$

- Una interpretación gráfica de la integral de convolución suele proporcionar un método de cálculo más sencillo para generar  $y(t)$  (véase la página 637).
- Podemos utilizar la función de transferencia de un circuito para calcular su respuesta en régimen permanente a una fuente sinusoidal. Para ello, hacemos la sustitución  $s = j\omega$  en  $H(s)$  y representamos el número complejo resultante en forma de un módulo y un ángulo de fase. Si

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi),$$

$$H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{j\theta(\omega)},$$

entonces

$$y_{rp}(t) = A |H(j\omega)| \cos[\omega t + \phi + \theta(\omega)].$$

(Véase la página 646).

- El análisis mediante la transformada de Laplace predice correctamente las corrientes y tensiones impulsivas provocadas por los sucesos de conmutación y por la presencia de fuentes impulsivas. Es necesario garantizar que los circuitos equivalentes en el dominio de  $s$  estén basados en las condiciones iniciales para  $t = 0^-$ , es decir, antes de la conmutación (véase la página 649).

## PROBLEMAS

- 13.1. Determine el equivalente de Norton del circuito mostrado en la Figura 13.3.
- 13.2. Determine el circuito equivalente en el dominio de  $s$  mostrado en la Figura 13.4 expresando la corriente de la bobina  $i$  en función de la tensión en los terminales  $v$  y luego hallando la transformada de Laplace de esta ecuación integral en el dominio del tiempo.
- 13.3. Determine el equivalente de Thévenin del circuito mostrado en la Figura 13.7.
- 13.4. Conectamos en serie una resistencia de  $400\text{ k}\Omega$ , una bobina de  $2,5\text{ mH}$  y un condensador de  $40\text{ nF}$ .
- Exprese como función racional la impedancia en el dominio de  $s$  de esta combinación en serie.
  - Calcule el valor numérico de los polos y ceros de la impedancia.
- 13.5. Conectamos en paralelo una resistencia de  $2\text{ k}\Omega$ , una bobina de  $6,25\text{ H}$  y un condensador de  $250\text{ nF}$ .
- Exprese como función racional la impedancia en el dominio de  $s$  de esta combinación en paralelo.
  - Calcule los valores numéricos de los polos y ceros de la impedancia.
- 13.6. Conectamos en serie una resistencia de  $250\text{ }\Omega$  con una bobina de  $80\text{ mH}$ . Esta combinación en serie está en paralelo con un condensador de  $0,5\text{ }\mu\text{F}$ .
- Exprese como función racional la impedancia en el dominio de  $s$  de estas ramas en paralelo.
  - Calcule los valores numéricos de los polos y ceros.
- 13.7. Calcule los polos y ceros de la impedancia que se ve al mirar en los terminales  $a$  y  $b$  del circuito mostrado en la Figura P13.7.

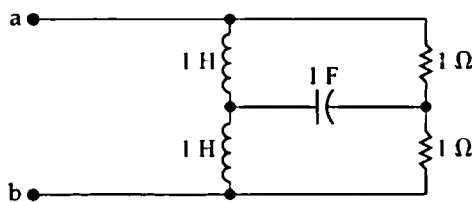


Figura P13.7

- 13.8. Calcule los polos y ceros de la impedancia que se ve al mirar en los terminales  $a$  y  $b$  del circuito mostrado en la Figura P13.8.

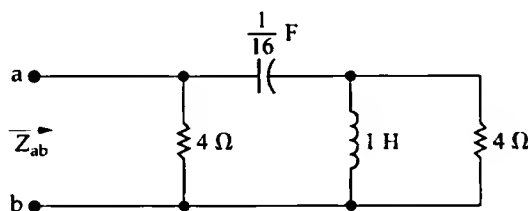


Figura P13.8

- 13.9. El conmutador del circuito mostrado en la Figura P13.9 ha estado en la posición  $x$  durante un largo período de tiempo. En  $t = 0$ , el conmutador se mueve instantáneamente a la posición  $y$ .



- Construya un circuito en el dominio de  $s$  para  $t > 0$ .
- Determine  $V_o$ .
- Determine  $v_o$ .

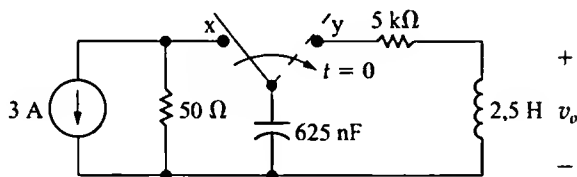


Figura 13.9

- 13.10.** El conmutador del circuito mostrado en la Figura P13.10 ha estado en la posición a durante un largo periodo de tiempo. En  $t = 0$ , el conmutador se mueve instantáneamente a la posición b.

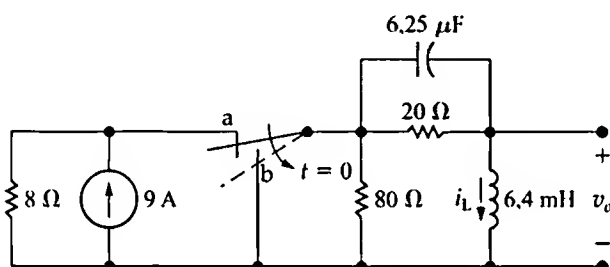


Figura P13.10

- Construya un circuito en el dominio de  $s$  para  $t > 0$ .
- Calcule  $V_o$ .
- Calcule  $I_L$ .
- Calcule  $v_o$  para  $t > 0$ .
- Calcule  $i_L$  para  $t > 0$ .

- 13.11.** El conmutador de tipo «hacer antes de romper» del circuito de la Figura P13.11 ha estado en la posición a durante un largo periodo de tiempo. En  $t = 0$ , se mueve instantáneamente a la posición b. Calcule  $i_o$  para  $t \geq 0$ .

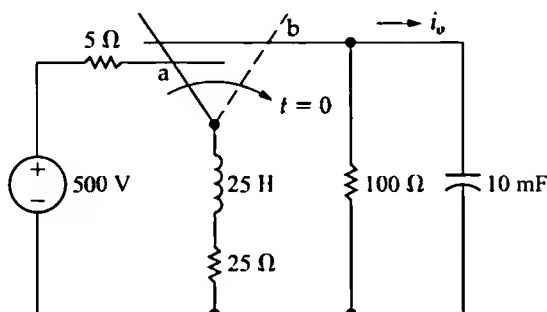


Figura P13.11

- 13.12.** El conmutador de tipo «hacer antes de romper» de la Figura P13.12 ha estado en la posición a durante un largo periodo de tiempo antes de moverse instantáneamente a la posición b en  $t = 0$ .



- a) Construya el circuito equivalente en el dominio de  $s$  para  $t > 0$ .  
 b) Calcule  $V_1$  y  $v_1$ .  
 c) Calcule  $V_2$  y  $v_2$ .

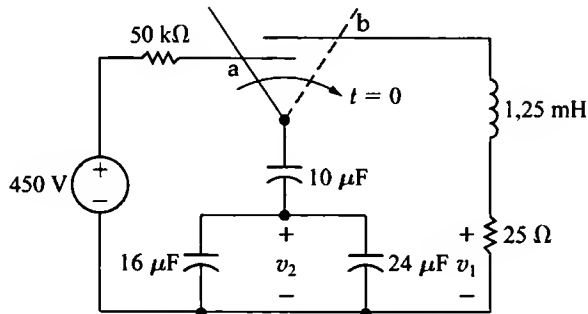


Figura P13.12

- 13.13. El conmutador del circuito de la Figura P13.13 ha estado cerrado durante un largo período de tiempo antes de abrirse en  $t = 0$ .

- a) Construya el circuito equivalente en el dominio de  $s$  para  $t > 0$ .  
 b) Calcule  $V_o$ .  
 c) Calcule  $v_o$  para  $t \geq 0$ .

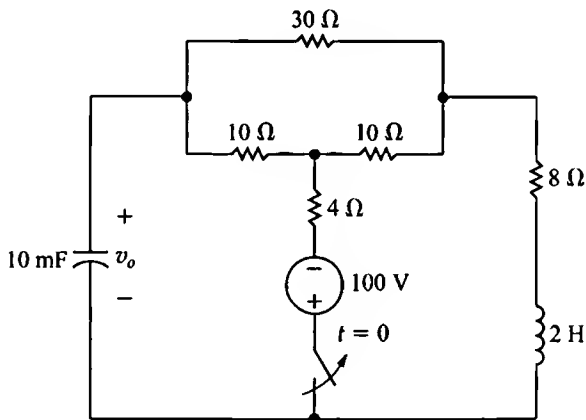


Figura P13.13

- 13.14. El conmutador del circuito mostrado en la Figura P13.14 ha estado en la posición a durante un largo período de tiempo. En  $t = 0$ , se mueve instantáneamente a la posición b.

- a) Calcule  $V_o$ .  
 b) Calcule  $v_o$ .

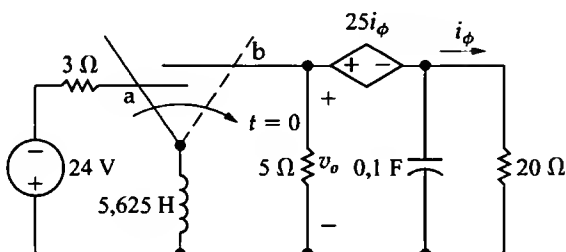


Figura P13.14

**13.15.** No hay ninguna energía almacenada en el circuito de la Figura P13.15 en el momento de cerrar el conmutador.



- Calcule  $v_o$  para  $t \geq 0$ .
- ¿Tiene la solución sentido según el comportamiento conocido del circuito? Explique su respuesta.

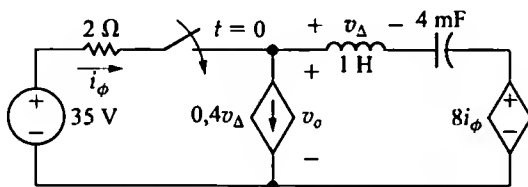


Figura P13.15

**13.16.** El conmutador del circuito mostrado en la Figura P13.16 ha estado en la posición a durante un largo período de tiempo. En  $t = 0$ , se mueve instantáneamente desde la posición a hasta la posición b.



- Construya el circuito en el dominio de  $s$  para  $t > 0$ .
- Calcule  $V_o(s)$ .
- Calcule  $v_o(t)$  para  $t \geq 0$ .

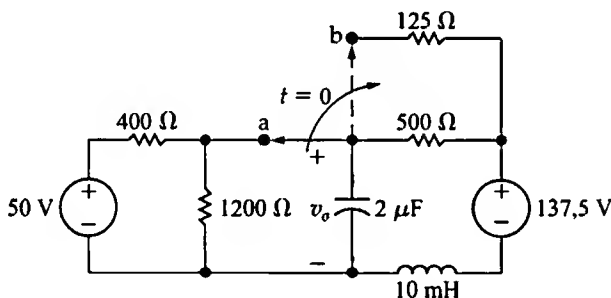


Figura P13.16

**13.17.** Calcule  $v_o$  en el circuito mostrado en la Figura P13.17 si  $i_g = 5u(t)$  mA. No hay energía almacenada en el circuito en  $t = 0$ .

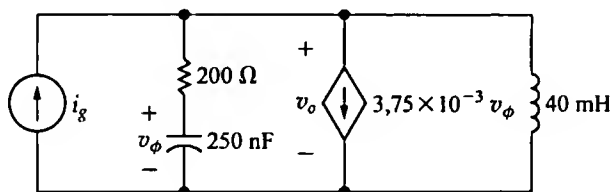


Figura P13.17

**13.18.** El conmutador del circuito de la Figura P13.18 ha estado cerrado durante un largo período de tiempo antes de abrirse en  $t = 0$ . Calcule  $v_o$  para  $t \geq 0$ .

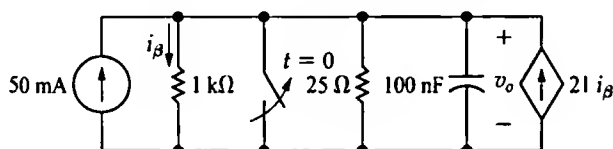


Figura P13.18



☐ 13.19. El conmutador del circuito de la Figura P13.19 ha estado cerrado durante un largo período de tiempo. En  $t = 0$ , se abre el conmutador.

a) Calcule  $v_o(t)$  para  $t \geq 0$ .

b) Calcule  $i_o(t)$  para  $t \geq 0$ .

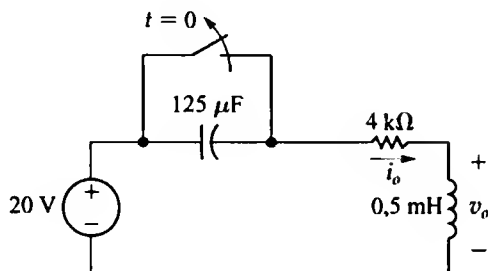


Figura P13.19

☐ 13.20. Calcule  $V_o$  y  $v_o$  en el circuito mostrado en la Figura P13.20 si la energía inicial es cero y el conmutador se cierra en  $t = 0$ .

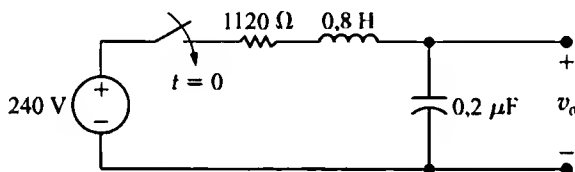


Figura P13.20

☐ 13.21. Repita el Problema 13.20 si la tensión inicial en el condensador es de 72 V, positiva en el terminal inferior.

☐ 13.22. a) Halle la expresión correspondiente a  $V_o$  en el dominio de  $s$  en el circuito de la Figura P13.22.

b) Utilice la expresión en el dominio de  $s$  hallada en el apartado (a) para predecir los valores inicial y final de  $v_o$ .

c) Calcule la expresión correspondiente a  $v_o$  en el dominio del tiempo.

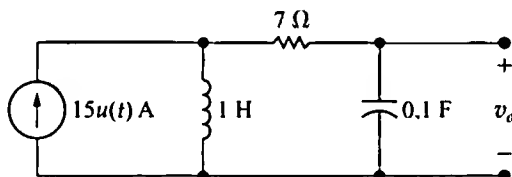


Figura P13.22

☐ 13.23. Calcule la expresión correspondiente a la corriente de la bobina en la Figura P13.22, en el dominio del tiempo. Suponga que la dirección de referencia para  $i_L$  es hacia abajo.

☐ 13.24. No hay ninguna energía almacenada en los condensadores del circuito de la Figura P13.24 en el momento de cerrar el conmutador.

a) Construya el circuito en el dominio de  $s$  para  $t > 0$ .

b) Calcule  $I_1$ ,  $V_1$  y  $V_2$ .

c) Calcule  $i_1$ ,  $v_1$  y  $v_2$ .

d) ¿Tienen sentido las respuestas correspondientes a  $i_1$ ,  $v_1$  y  $v_2$  según el comportamiento conocido del circuito? Explique su respuesta.

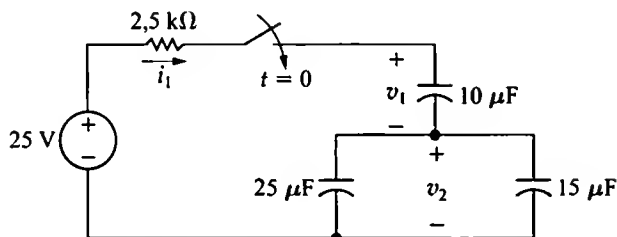


Figura P13.24

13.25. No hay ninguna energía almacenada en los condensadores del circuito de la Figura P13.25 en el momento de aplicar la fuente.



- Calcule  $V_o$ ,  $I_o$  e  $I_L$ .
- Calcule  $v_o$ ,  $i_o$  e  $i_L$  para  $t \geq 0$ .

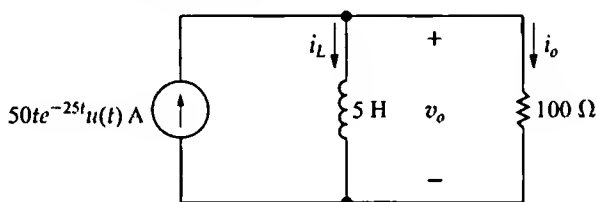


Figura P13.25

13.26. No hay ninguna energía almacenada en el circuito de la Figura P13.26 en  $t = 0^-$ . Utilice el método de las corrientes de malla para calcular  $i_o$ .

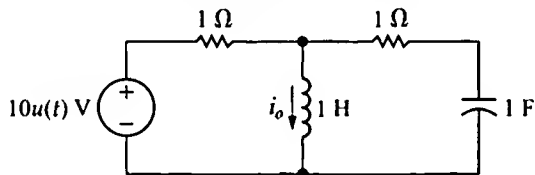


Figura P13.26

13.27. No hay ninguna energía almacenada en el circuito de la Figura P13.27 en el momento de aplicar las fuentes.



- Calcule  $I_1(s)$  e  $I_2(s)$ .
- Utilice los teoremas del valor inicial y final para comprobar los valores inicial y final de  $i_1(t)$  e  $i_2(t)$ .
- Calcule  $i_1(t)$  e  $i_2(t)$  para  $t \geq 0$ .

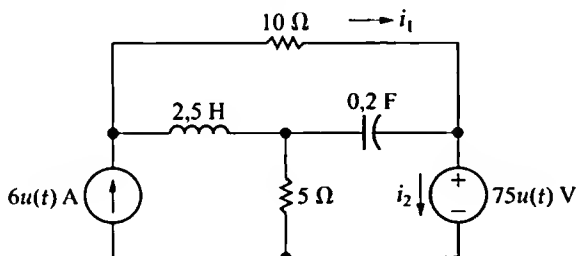


Figura P13.27

13.28. No hay ninguna energía almacenada en el circuito de la Figura P13.28 en el momento de encender la fuente de tensión; además,  $v_g = 54u(t)$  V.



- a) Calcule  $V_o$  e  $I_o$ .  
 b) Calcule  $v_o$  e  $i_o$ .  
 c) ¿Tienen sentido las soluciones correspondientes a  $v_o$  e  $i_o$  en función del comportamiento conocido del circuito? Explique su respuesta.

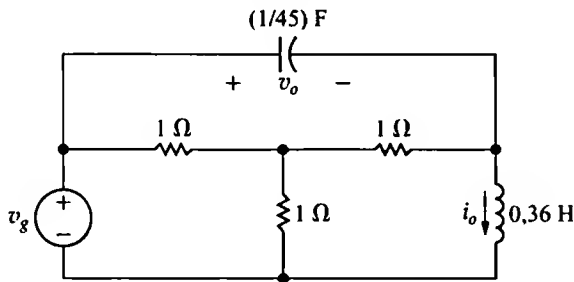


Figura P13.28

**13.29.** La energía inicial en el circuito de la Figura P13.29 es cero. La fuente ideal tiene una tensión de  $120u(t)$  V.



- a) Calcule  $I_o(s)$ .  
 b) Utilice los teoremas del valor inicial y final para hallar  $i_o(0^+)$  e  $i_o(\infty)$ .  
 c) ¿Concuerdan los valores obtenidos en el apartado (b) con el comportamiento conocido del circuito? Explique su respuesta.  
 d) Calcule  $i_o(t)$ .

**13.30.** No hay ninguna energía almacenada en el circuito de la Figura P13.30 en  $t = 0^-$ .



- a) Calcule  $V_o$ .  
 b) Calcule  $v_o$ .  
 c) ¿Tiene sentido la solución hallada para  $v_o$  en función del comportamiento conocido del circuito? Explique su respuesta.

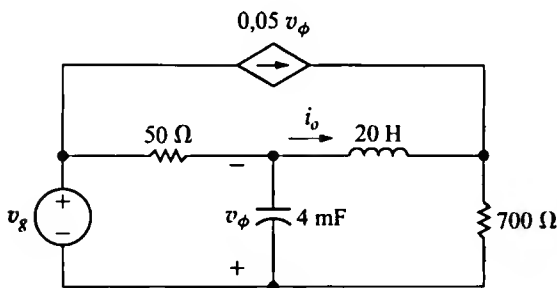


Figura P13.29

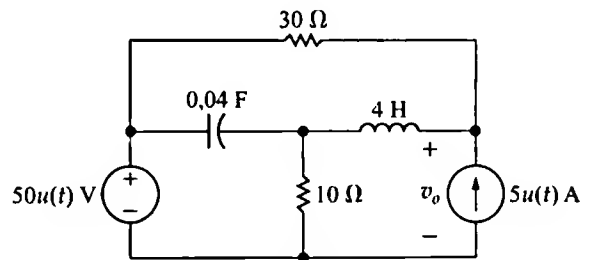


Figura P13.30

**13.31.** No hay ninguna energía almacenada en el circuito de la Figura P13.31 en el momento de aplicar la fuente de corriente.



- a) Calcule  $I_a$  e  $I_b$ .  
 b) Calcule  $i_a$  e  $i_b$ .  
 c) Calcule  $V_a$ ,  $V_b$  y  $V_c$ .  
 d) Calcule  $v_a$ ,  $v_b$  y  $v_c$ .

- e) Suponga que cualquiera de los condensadores entra en disrupción cuando la tensión entre sus terminales es de 1000 V. ¿Cuánto tiempo después de encender la fuente de corriente entrará en disrupción alguno de los condensadores?

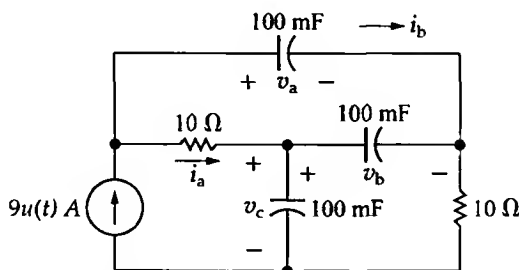


Figura P13.31

- 13.32. No hay ninguna energía almacenada en el circuito de la Figura P13.32 en el momento de encender la fuente de corriente. Supuesto que  $i_g = 100u(t)$  A:

- Calcule  $I_o(s)$ .
- Utilice los teoremas del valor inicial y final para hallar  $i_o(0^+)$  e  $i_o(\infty)$ .
- Determine si los resultados obtenidos en el apartado (b) concuerdan con el comportamiento conocido del circuito.
- Calcule  $i_o(t)$ .

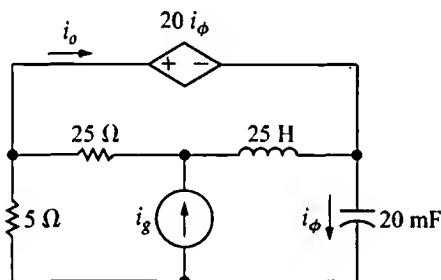


Figura P13.32

- 13.33. Comenzando con la Ecuación 13.65, demuestre que la corriente del condensador en el circuito de la Figura 13.19 es positiva para  $0 < t < 200 \mu\text{s}$  y negativa para  $t > 200 \mu\text{s}$ . Demuestre también que en  $200 \mu\text{s}$  la corriente es cero y que esto se corresponde con el instante en que  $dv_C/dt$  es cero.
- 13.34. El conmutador del circuito mostrado en la Figura P13.34 ha estado abierto durante un largo período de tiempo. La tensión de la fuente sinusoidal es  $v_g = V_m \sin(\omega t + \phi)$ . El conmutador se cierra en  $t = 0$ . Observe que el ángulo  $\phi$  en la ecuación de la tensión determina el valor de la tensión en el momento en que se cierra el conmutador, es decir,  $v_g(0) = V_m \sin \phi$ .
- Utilice el método de la transformada de Laplace para hallar  $i$  para  $t > 0$ .
  - Utilizando la expresión obtenida en el apartado (a), escriba la expresión correspondiente a la corriente que habrá después de que el conmutador haya estado cerrado durante un largo período de tiempo.
  - Utilizando la expresión obtenida en el apartado (a), escriba la expresión correspondiente a la componente transitoria de  $i$ .
  - Determine la ecuación de régimen permanente para  $i$  utilizando el método de los fasores. Verifique que esa ecuación es equivalente a la obtenida en el apartado (b).

- e) Especifique el valor de  $\phi$  necesario para que el circuito pase directamente a operar en régimen permanente al cerrar el conmutador.

- ☐ 13.35. Los dos conmutadores del circuito mostrado en la Figura P13.35 actúan simultáneamente. No hay ninguna energía almacenada en el circuito en el momento de cerrarse los conmutadores. Calcule  $i(t)$  para  $t \geq 0^+$  hallando primero el equivalente de Thévenin en el dominio de  $s$  para el circuito situado a la izquierda de los terminales a y b.

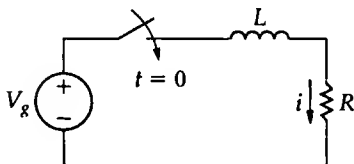


Figura P13.34

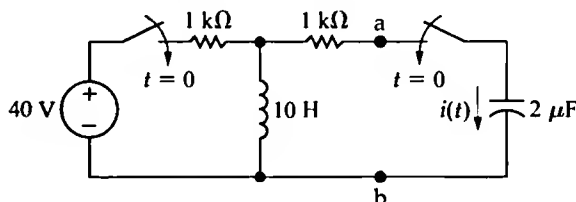


Figura P13.35

- ☐ 13.36. No hay ninguna energía almacenada en el circuito de la Figura P13.36 en el momento de cerrar el conmutador.

- a) Calcule  $V_o$ .  
b) Utilice los teoremas del valor inicial y final para hallar  $v_o(0^+)$  y  $v_o(\infty)$ .  
c) Calcule  $v_o$ .

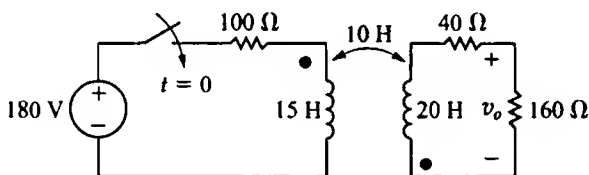


Figura P13.36

- ☐ 13.37. Calcule  $v_o$  en el circuito de la Figura P13.36 si la marca de polaridad de la bobina de 20 H se encuentra en la parte superior.

- ☐ 13.38. Las bobinas magnéticamente acopladas del circuito mostrado en la Figura P13.38 tienen sendas corrientes iniciales de 15 y 10 A, como se muestra.

- a) Calcule la energía inicialmente almacenada en el circuito.  
b) Calcule  $I_1$  e  $I_2$ .  
c) Calcule  $i_1$  e  $i_2$ .  
d) Calcule la energía total disipada en las resistencias de 120 y 270  $\Omega$ .  
e) Repita los apartados (a)-(d) con la marca de polaridad de la bobina de 18 H en el terminal inferior.

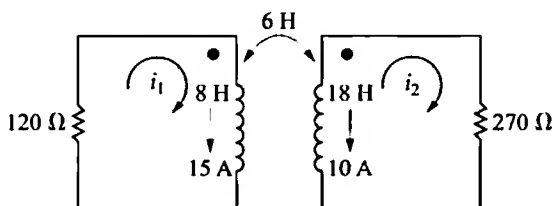


Figura P13.38

**13.39.** En el circuito de la Figura P13.39, el conmutador 1 se cierra en  $t = 0$  y el conmutador de tipo «hacer antes de romper» se mueve instantáneamente desde la posición a hasta la posición b.



- Construya el circuito equivalente en el dominio de  $s$  para  $t > 0$ .
- Calcule  $I_1$ .
- Utilice los teoremas del valor inicial y final para comprobar los valores inicial y final de  $i_1$ .
- Calcule  $i_1$  para  $t \geq 0^+$ .

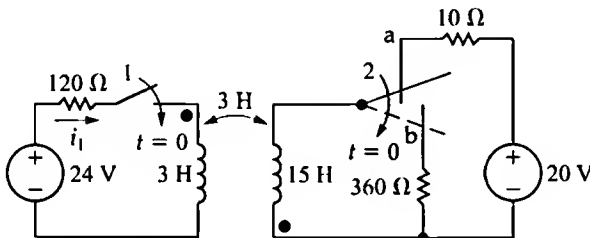


Figura P13.39

**13.40.** El conmutador de tipo «hacer antes de romper» del circuito mostrado en la Figura P13.40 ha estado en la posición a durante un largo período de tiempo. En  $t = 0$ , se mueve instantáneamente a la posición b. Calcule  $i_o$  para  $t \geq 0$ .

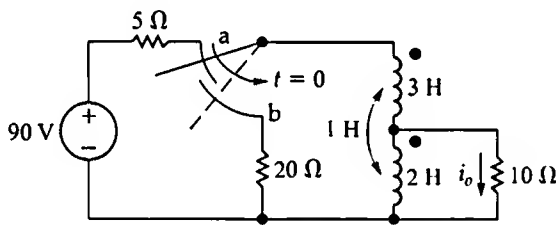


Figura P13.40

**13.41.** El conmutador del circuito mostrado en la Figura P13.41 ha estado cerrado durante un largo período de tiempo antes de abrirse en  $t = 0$ . Utilice el método de análisis basado en la transformada de Laplace para calcular  $v_o$ .

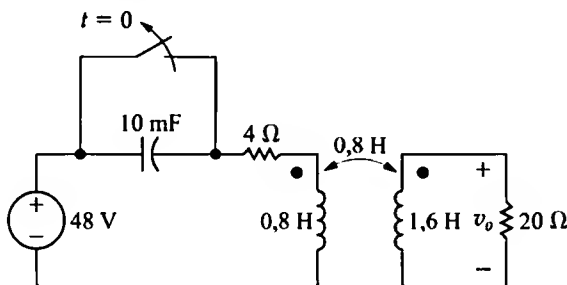


Figura P13.41

**13.42.** No hay ninguna energía almacenada en el circuito mostrado en la Figura P13.42 en el momento de aplicar las dos fuentes al circuito.



- Utilice el principio de superposición para hallar  $V_o$ .
- Calcule  $v_o$  para  $t > 0$ .

**13.43.** Verifique que con la solución proporcionada por las Ecuaciones 13.91 y 13.92 para  $V_2$  se obtiene la misma expresión que a partir de la Ecuación 13.90.

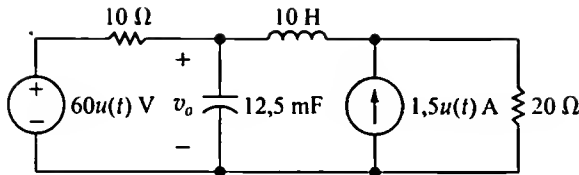


Figura P13.42

- ☐ 13.44. Calcule  $v_o(t)$  en el circuito mostrado en la Figura P13.44 si el amplificador operacional opera dentro de su rango lineal y  $v_g = 4,8u(t)$  V.

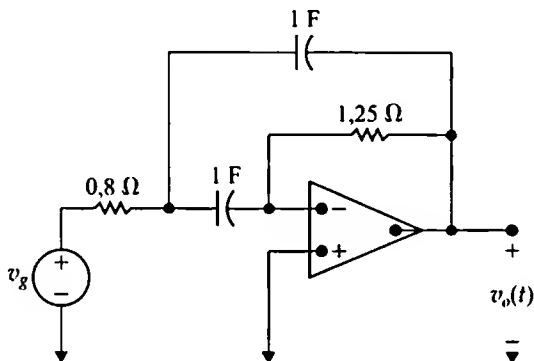


Figura P13.44

- ☐ 13.45. El amplificador operacional del circuito mostrado en la Figura P13.45 es ideal. No hay energía almacenada en el circuito en el momento de aplicar la alimentación. Si  $v_g = 20.000tu(t)$  V, calcule (a)  $V_o$ , (b)  $v_o$ , (c) cuánto tiempo tarda en saturarse el amplificador operacional y (d) cuál es la máxima tasa de incremento de  $v_g$  para impedir la saturación.

- ☐ 13.46. El amplificador operacional del circuito mostrado en la Figura P13.46 es ideal. No hay energía almacenada en los condensadores en el momento de aplicar la alimentación al circuito.

- a) Calcule  $v_o$  si  $v_{g1} = 40u(t)$  V y  $v_{g2} = 16u(t)$  V.  
b) ¿Cuántos milisegundos transcurrirán, después de encender las dos fuentes de tensión, antes de que el amplificador operacional se sature?

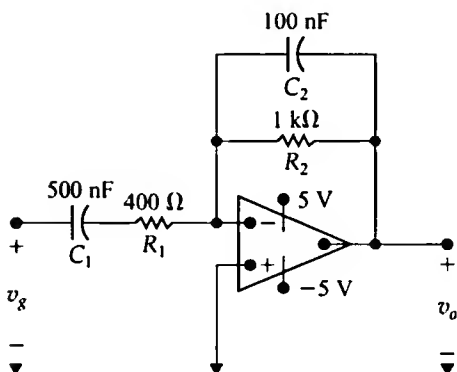


Figura P13.45

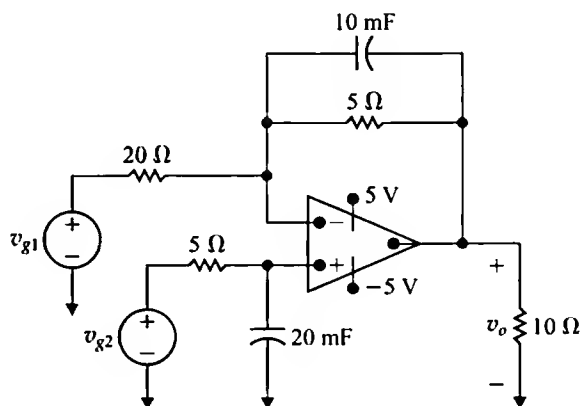


Figura P13.46

- 13.47. Los amplificadores operacionales del circuito mostrado en la Figura P13.47 son ideales. No hay energía almacenada en los condensadores en  $t = 0^-$ . Si  $v_g = 16u(t)$  mV, ¿cuántos milisegundos transcurrirán antes de que se sature alguno de los amplificadores operacionales?

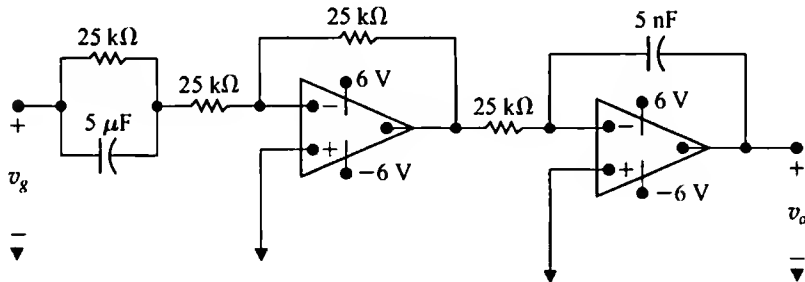


Figura P13.47

- 13.48. El amplificador operacional del circuito mostrado en la Figura P13.48 es ideal. No hay energía almacenada en los condensadores en el momento de aplicar la alimentación al circuito. Determine (a)  $V_o$ , (b)  $v_o$  y (c) cuánto tiempo tardará en saturarse el amplificador operacional.

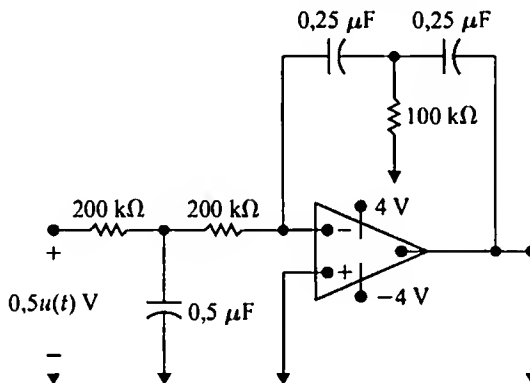


Figura P13.48

- 13.49. Calcule la expresión numérica de la función de transferencia ( $V_o/V_i$ ) de cada uno de los circuitos de la Figura P13.49 y proporcione el valor numérico de los polos y ceros de cada función de transferencia.

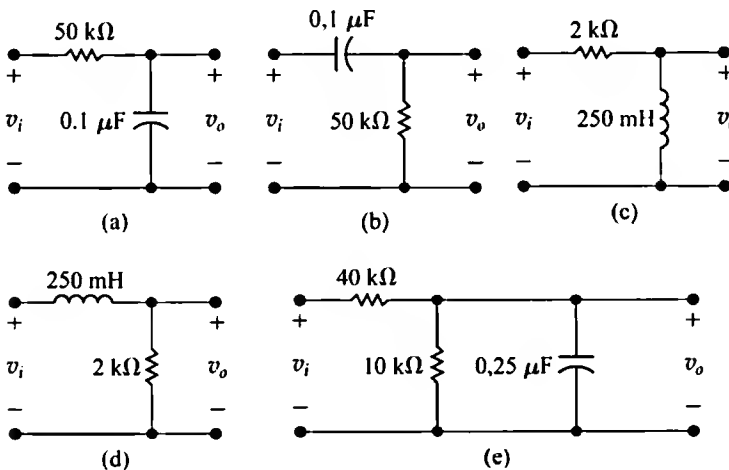
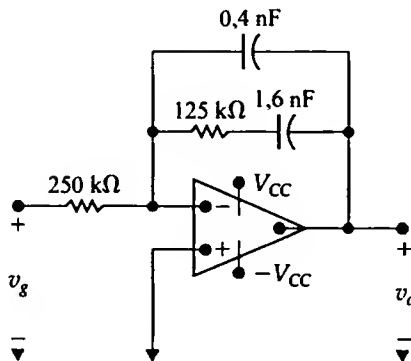


Figura P13.49



**13.50.** El amplificador operacional del circuito mostrado en la Figura P13.50 es ideal.

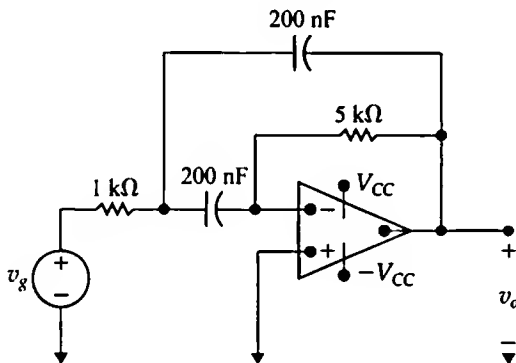


**Figura P13.50**

- Calcule la expresión numérica de la función de transferencia  $H(s) = V_o/V_g$ .
- Proporcione los valores numéricos de cada uno de los ceros y polos de  $H(s)$ .

**13.51.** El amplificador operacional del circuito mostrado en la Figura P13.51 es ideal.

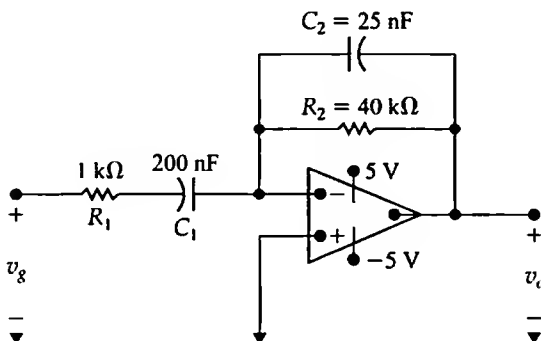
- Calcule la expresión numérica de la función de transferencia  $H(s) = V_o/V_g$  para el circuito de la Figura P13.51.
- Proporcione los valores numéricos de cada uno de los ceros y polos de  $H(s)$ .



**Figura P13.51**

**13.52.** El amplificador operacional del circuito mostrado en la Figura P13.52 es ideal.

- Calcule la expresión numérica de la función de transferencia  $H(s) = V_o/V_g$ .
- Proporcione los valores numéricos de cada uno de los ceros y polos de  $H(s)$ .



**Figura P13.52**

- 13.53. a) Calcule la expresión numérica de la función de transferencia  $H(s) = V_o/V_g$  para el circuito de la Figura P13.53.  
 b) Proporcione los valores numéricos de cada uno de los ceros y polos de  $H(s)$ .
- 13.54. En el circuito de la Figura P13.54,  $v_o$  es la señal de salida y  $v_g$  es la señal de entrada. Calcule los polos y ceros de la función de transferencia.

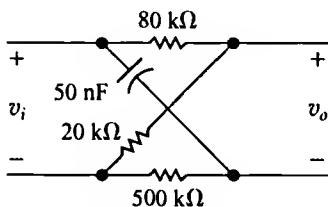


Figura P13.53

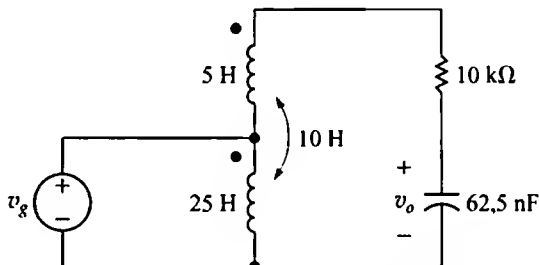


Figura P13.54

- 13.55. No hay ninguna energía almacenada en el circuito de la Figura P13.55 en el momento de abrir el conmutador. La fuente de corriente sinusoidal está generando la señal  $100(\cos 10^4 t)$  mA. La señal de respuesta es la corriente  $i_o$ .
- a) Calcule la función de transferencia  $I_o/I_g$ .  
 b) Calcule  $I_o(s)$ .  
 c) Describa la naturaleza de la componente transitoria de  $i_o(t)$  sin hallar  $i_o(t)$ .  
 d) Describa la naturaleza de la componente de régimen permanente de  $i_o(t)$  sin hallar  $i_o(t)$ .  
 e) Verifique las observaciones realizadas en los apartados (c) y (d) calculando  $i_o(t)$ .

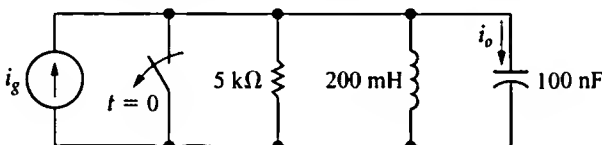


Figura P13.55

- 13.56. a) Calcule la función de transferencia  $I_o/I_g$  en función de  $\mu$  para el circuito mostrado en la Figura P13.56.  
 b) Calcule el máximo valor de  $\mu$  que producirá una señal de salida acotada para una señal de entrada acotada.  
 c) Calcule  $i_o$  para  $\mu = -3, 0, 4, 5$  y  $6$  si  $i_g = 5u(t)$  A.
- 13.57. Aplicamos un pulso de tensión rectangular  $v_i = [u(t) - u(t - 1)]$  V al circuito de la Figura P13.57. Utilice la integral de convolución para hallar  $v_o$ .

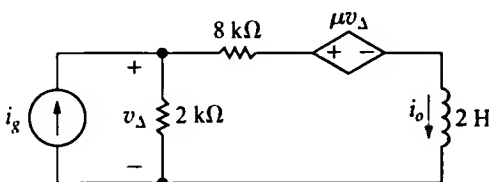


Figura P13.56

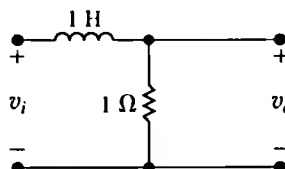


Figura P13.57

- 13.58.** Intercambie la bobina y la resistencia en el Problema 13.57 y vuelva a utilizar la integral de convolución para hallar  $v_o$ .
- 13.59.** a) Calcule  $h(t) * x(t)$  cuando  $h(t)$  y  $x(t)$  son los pulsos rectangulares que se muestran en la Figura P13.59(a).  
 b) Repita el apartado (a) cuando  $x(t)$  cambia al pulso rectangular mostrado en la Figura 13.59(b).  
 c) Repita el apartado (a) cuando  $h(t)$  cambia al pulso rectangular mostrado en la Figura 13.59(c).

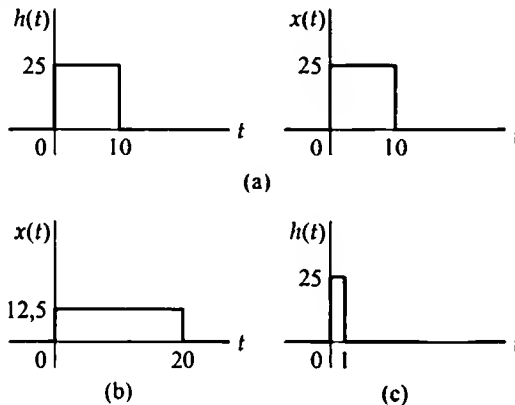


Figura P13.59

- 13.60.** a) Dada  $y(t) = h(t) * x(t)$ , calcule  $y(t)$  cuando  $h(t)$  y  $x(t)$  son los pulsos rectangulares que se muestran en la Figura P13.60(a).  
 b) Repita el apartado (a) cuando  $h(t)$  cambia al pulso rectangular mostrado en la Figura 13.60(b).  
 c) Repita el apartado (a) cuando  $h(t)$  cambia al pulso rectangular mostrado en la Figura 13.60(c).  
 d) Dibuje  $y(t)$  en función de  $t$  para los apartados (a)-(c) en una única gráfica.  
 e) ¿Tienen sentido las gráficas elaboradas en el apartado (d)? Explique su respuesta.

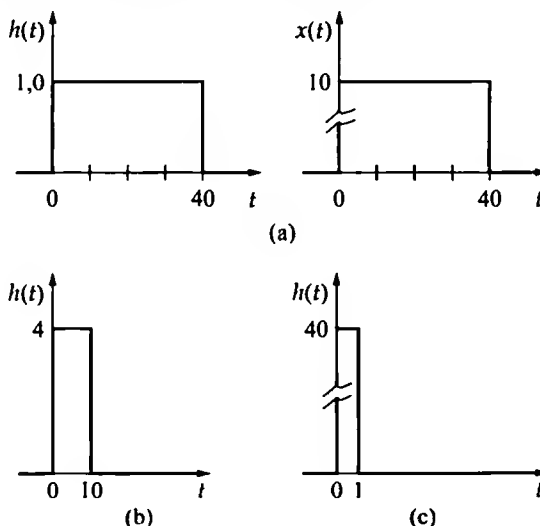


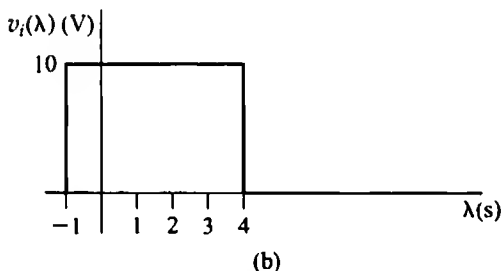
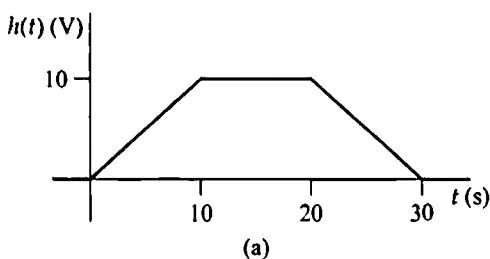
Figura P13.60

**13.61.** La Figura P13.61(a) muestra la respuesta de un circuito a un impulso de tensión. La señal de entrada al circuito es el pulso de tensión rectangular mostrado en la Figura P13.61(b).

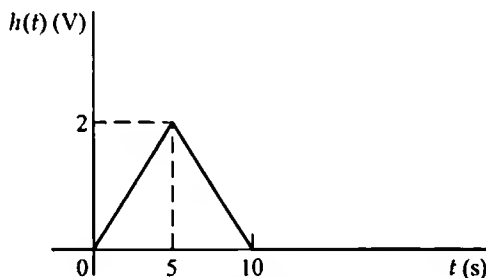
- Determine las ecuaciones correspondientes a la tensión de salida. Tenga en cuenta el rango de tiempo para el que es aplicable cada ecuación.
- Dibuje  $v_o$  para  $-1 \leq t \leq 34$  s.

**13.62.** Suponga que la respuesta de un circuito a un impulso de tensión puede modelarse mediante la forma de onda triangular mostrada en la Figura P13.62. La señal de entrada de tensión a este circuito es la función escalón  $10u(t)$  V.

- Utilice la integral de convolución para hallar las expresiones correspondientes a la tensión de salida.
- Dibuje la tensión de salida para el intervalo que va de 0 a 15 s.
- Repita los apartados (a) y (b) si el área bajo la respuesta al impulso de tensión permanece constante pero la anchura de la respuesta al impulso se estrecha hasta 4 s.
- ¿Cuál de las formas de onda de salida se asemeja más a la forma de onda de entrada: la calculada en el apartado (b) o la calculada en el apartado (c)? Explique su respuesta.



**Figura P13.61**



**Figura P13.62**

**13.63.** a) Suponga que la respuesta de un circuito a un impulso de tensión es

$$h(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 10e^{-4t}, & t \geq 0. \end{cases}$$

Utilice la integral de convolución para hallar la tensión de salida si la señal de entrada es  $10u(t)$  V.

b) Repita el apartado (a) si la respuesta a un impulso de tensión es

$$h(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 10(1-2t), & 0 \leq t \leq 0,5 \text{ s}; \\ 0, & t \geq 0,5 \text{ s}. \end{cases}$$

- c) Dibuje la tensión de salida en función del tiempo para los apartados (a) y (b) para  $0 \leq t \leq 1$  s.

- 13.64.** a) Utilice la integral de convolución para hallar la tensión de salida del circuito de la Figura P13.49(a) si la tensión de entrada es el pulso rectangular que se muestra en la Figura P13.64.  
b) Dibuje  $v_o(t)$  en función de  $t$  para el intervalo de tiempo  $0 \leq t \leq 15$  ms.

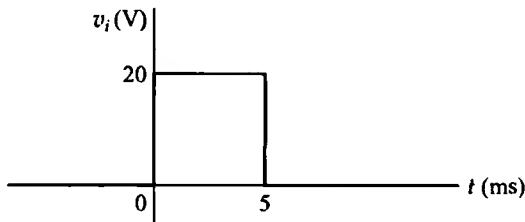


Figura P13.64

- 13.65.** a) Repita el Problema 13.64 suponiendo que la resistencia del circuito de la Figura P13.49(a) se reduce a  $5 \text{ k}\Omega$ .  
b) Al reducir la resistencia, ¿se incrementa o se reduce la memoria del circuito?  
c) ¿Cuál de los circuitos podrá transmitir en mejores condiciones una réplica de la tensión de entrada?
- 13.66.** a) Utilice la integral de convolución para hallar  $v_o$  en el circuito de la Figura P13.66(a) si  $i_g$  es el pulso mostrado en la Figura P13.66(b).  
b) Utilice la integral de convolución para hallar  $i_o$ .  
c) Demuestre que las soluciones obtenidas para  $v_o$  e  $i_o$  son coherentes calculando  $i_o$  en  $100^-$  ms,  $100^+$  ms,  $200^-$  ms y  $200^+$  ms.

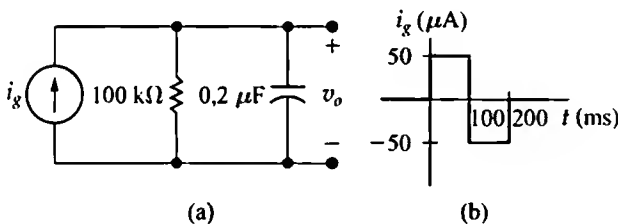


Figura P13.66

- 13.67.** Aplicamos el pulso de tensión sinusoidal mostrado en la Figura P13.67(a) al circuito mostrado en la Figura P13.67(b). Utilice la integral de convolución para hallar el valor de  $v_o$  en  $t = 2,2$  s.

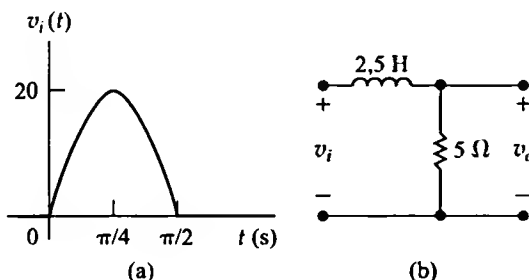


Figura P13.67

- 13.68. a) Calcule la respuesta impulsiva del circuito mostrado en la Figura P13.68(a) si  $v_g$  es la señal de entrada y  $v_o$  es la señal de salida.  
 b) Si  $v_g$  tiene la forma de onda mostrada en la Figura P13.68(b), utilice la integral de convolución para hallar  $v_o$ .  
 c) ¿Tiene  $v_o$  la misma forma de onda que  $v_g$ ? ¿Por qué?
- 13.69. a) Halle la respuesta al impulso del circuito mostrado en la Figura P13.69 si  $v_g$  es la señal de entrada y  $v_o$  es la señal de salida.  
 b) Suponga que la fuente de tensión tiene la forma de onda mostrada en la Figura P13.68(b). Utilice la integral de convolución para hallar  $v_o$ .  
 c) Dibuje  $v_o$  para  $0 \leq t \leq 2$  s.  
 d) ¿Tiene  $v_o$  la misma forma de onda que  $v_g$ ? ¿Por qué?

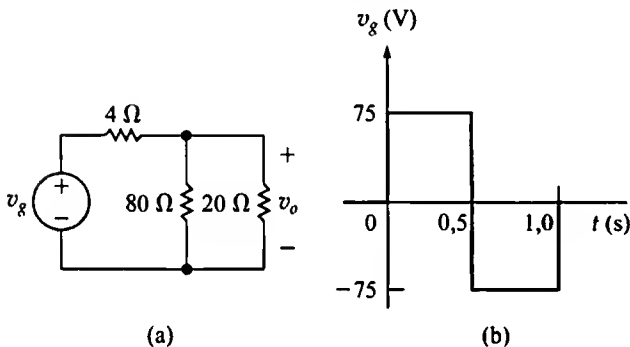


Figura P13.68

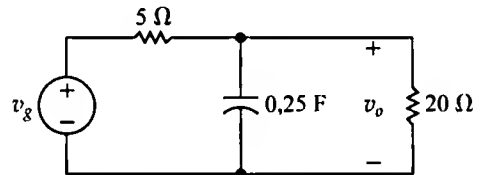


Figura P13.69

- 13.70. La fuente de corriente del circuito mostrado en la Figura P13.70(a) está generando la forma de onda que se indica en la Figura P13.70(b). Utilice la integral de convolución para hallar  $v_o$  en  $t = 5$  ms.

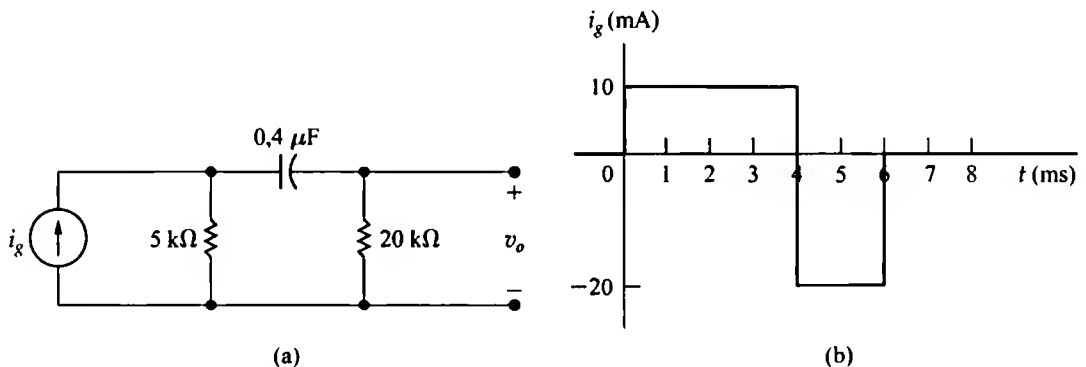


Figura P13.70

- 13.71. La tensión de salida en el circuito mostrado en la Figura P13.71 es

$$v_i = 5[u(t) - u(t - 0.5)]\text{ V.}$$

- a) Utilice la integral de convolución para hallar  $v_o$ .  
 b) Dibuje  $v_o$  para  $0 \leq t \leq 1$  s.

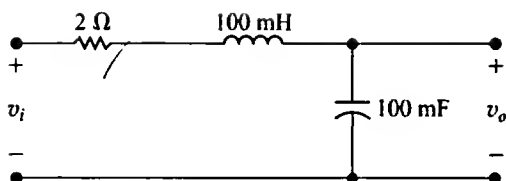


Figura P13.71

- 13.72. Utilice la integral de convolución para hallar  $v_o$  en el circuito mostrado en la Figura P13.72 si  $v_i = 75u(t)$  V.

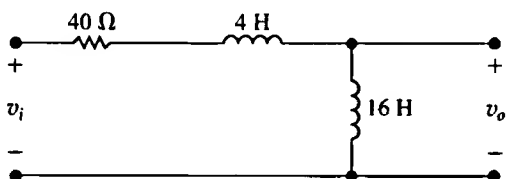


Figura P13.72

- 13.73. a) Demuestre que si  $y(t) = h(t) * x(t)$ , entonces  $Y(s) = H(s)X(s)$ .  
b) Utilice el resultado del apartado (a) para hallar  $f(t)$  si

$$F(s) = \frac{a}{s(s+a)^2}.$$

- 13.74. La bobina  $L_1$  del circuito mostrado en la Figura P13.74 tiene una corriente inicial de  $\rho$  A en el momento de abrirse el conmutador. Calcule (a)  $v(t)$ , (b)  $i_1(t)$ , (c)  $i_2(t)$  y (d)  $\lambda(t)$ , donde  $\lambda(t)$  es el flujo total de enlace en el circuito.

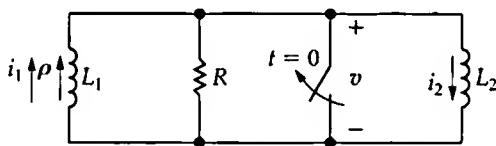


Figura P13.74

- 13.75. a) Suponga que  $R \rightarrow \infty$  en el circuito mostrado en la Figura P13.74 y utilice las soluciones obtenidas en el Problema 13.74 para hallar  $v(t)$ ,  $i_1(t)$  e  $i_2(t)$ .  
b) Suponga que  $R = \infty$  en el circuito mostrado en la Figura P13.74 y utilice el método de la transformada de Laplace para hallar  $v(t)$ ,  $i_1(t)$  e  $i_2(t)$ .

- 13.76. La función de transferencia para un circuito lineal invariante con respecto al tiempo es

$$H(s) = \frac{V_o}{V_g} = \frac{4(s+3)}{s^2 + 8s + 41}.$$

Si  $v_g = 40 \cos 3t$  V, ¿cuál es la expresión en régimen permanente para  $v_o$ ?

- 13.77. El amplificador operacional del circuito mostrado en la Figura P13.77 es ideal y está operando dentro de su región lineal.

- a) Calcule la función de transferencia  $V_o/V_g$ .  
b) Si  $v_g = 2 \cos 400t$  V, ¿cuál es la expresión en régimen permanente para  $v_o$ ?

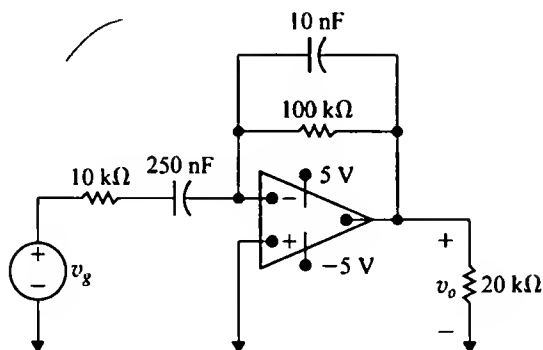


Figura P13.77

13.78. El amplificador operacional del circuito mostrado en la Figura P13.78 es ideal.



- Calcule la función de transferencia  $V_o/V_g$ .
- Calcule  $v_o$  si  $v_g = 600u(t)$  mV.
- Calcule la ecuación en régimen permanente para  $v_o$  si  $v_g = 2 \cos 10.000t$  V.

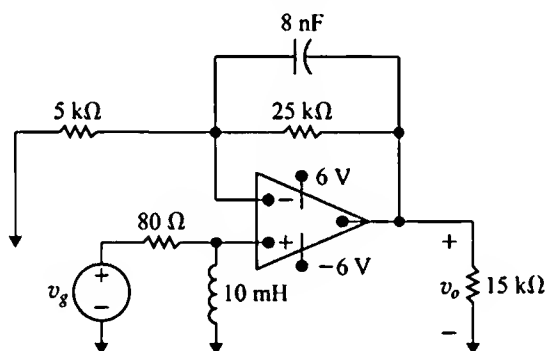


Figura P13.78

13.79. Cuando aplicamos una tensión de entrada de  $30u(t)$  V a un circuito, la respuesta de éste es

$$v_o = (50e^{-8000t} - 20e^{-5000t})u(t) \text{ V.}$$

¿Cuál será la respuesta en régimen permanente si  $v_g = 120 \cos 6000t$  V?

13.80. Demuestre que, después de transferirse  $V_0C_e$  culombios de  $C_1$  a  $C_2$  en el circuito mostrado en la Figura 13.47, la tensión en bornes de cada condensador es  $C_1V_0/(C_1 + C_2)$ . (Sugerencia: utilice el principio de conservación de la carga).

13.81. La combinación en paralelo de  $R_2$  y  $C_2$  en el circuito mostrado en la Figura P13.81 representa el circuito de entrada de un osciloscopio de rayos catódicos. La combinación en paralelo de  $R_1$  y  $C_1$  es un modelo de circuito de una sonda con compensación que se utiliza para conectar el osciloscopio a la fuente. No hay ninguna energía almacenada en  $C_1$  ni en  $C_2$  en el momento de conectar la fuente de 10 V al osciloscopio a través de la sonda. Los valores del circuito son  $C_1 = 4$  pF,  $C_2 = 16$  pF,  $R_1 = 1,25$  MΩ y  $R_2 = 5$  MΩ.

- Calcule  $v_o$ .
- Calcule  $i_o$ .
- Repita los apartados (a) y (b) si cambiamos  $C_1$  a 64 pF.



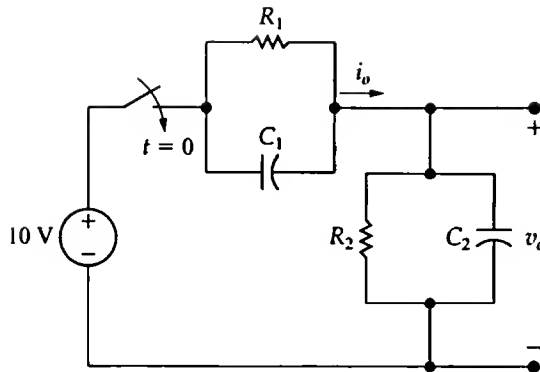


Figura P13.81

- 13.82.** Demuestre que si  $R_1 C_1 = R_2 C_2$  en el circuito mostrado en la Figura P13.81,  $v_o$  será una réplica de la tensión de la fuente cambiada de escala.
- 13.83.** El conmutador del circuito de la Figura P13.83 ha estado en la posición a durante un largo período de tiempo. En  $t = 0$ , el conmutador se mueve a la posición b. Calcule (a)  $v_1(0^-)$ , (b)  $v_2(0^-)$ , (c)  $v_3(0^-)$ , (d)  $i(t)$ , (e)  $v_1(0^+)$ , (f)  $v_2(0^+)$  y (g)  $v_3(0^+)$ .

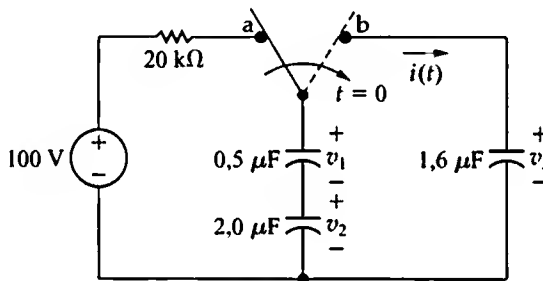


Figura P13.83

- 13.84.** El conmutador del circuito de la Figura P13.84 ha estado cerrado durante un largo período de tiempo. El conmutador se abre en  $t = 0$ . Calcule (a)  $i_1(0^-)$ , (b)  $i_1(0^+)$ , (c)  $i_2(0^-)$ , (d)  $i_2(0^+)$ , (e)  $i_1(t)$ , (f)  $i_2(t)$  y (g)  $v(t)$ .

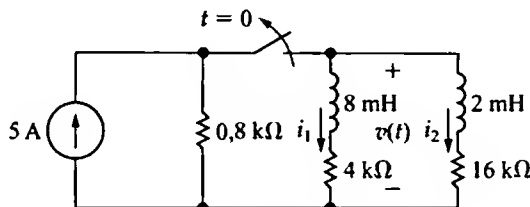


Figura P13.84

- 13.85.** No hay ninguna energía almacenada en el circuito de la Figura P13.85 en el momento de aplicar la tensión impulsiva.
- Calcule  $v_o(t)$  para  $t \geq 0$ .
  - ¿Tiene sentido esa solución en función del comportamiento conocido del circuito? Explique su respuesta.
- 13.86.** Cambiamos la fuente de tensión del circuito del Ejemplo 13.1 por un impulso unitario, es decir,  $v_g = \delta(t)$ .
- ¿Cuánta energía almacenará en el condensador la fuente de tensión impulsiva?

- b) ¿Cuánta energía almacenará en la bobina?
- c) Utilice la función de transferencia para hallar  $v_o(t)$ .
- d) Demuestre que la respuesta del apartado (c) es idéntica a la respuesta que se genera cargando primero el condensador a 1000 V y luego liberando la carga hacia el circuito, como se muestra en la Figura P13.86.

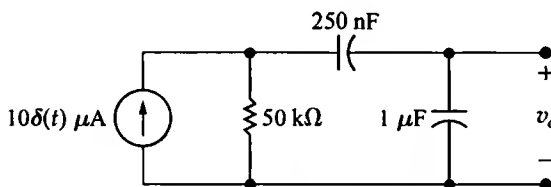


Figura P13.85

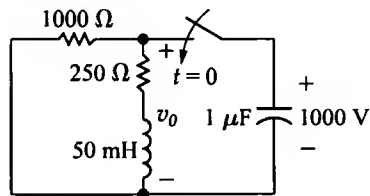


Figura P13.86

- 13.87. No hay ninguna energía almacenada en el circuito de la Figura P13.87 en el momento de aplicar la tensión impulsiva.
- a) Calcule  $i_1$  para  $t \geq 0^+$ .
- b) Calcule  $i_2$  para  $t \geq 0^+$ .
- c) Calcule  $v_o$  para  $t \geq 0^+$ .
- d) ¿Tienen sentido las soluciones obtenidas para  $i_1$ ,  $i_2$  y  $v_o$  en función del comportamiento conocido del circuito? Explique su respuesta.

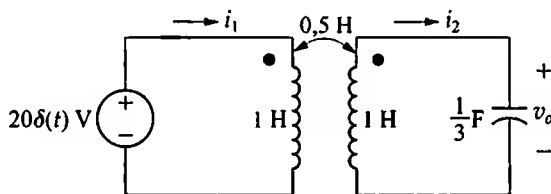


Figura P13.87

- 13.88. No hay ninguna energía almacenada en el circuito de la Figura P13.88 en el momento de aplicar la corriente impulsiva.
- a) Calcule  $v_o$  para  $t \geq 0^+$ .
- b) ¿Tiene sentido esa solución en función del comportamiento conocido del circuito? Explique su respuesta.

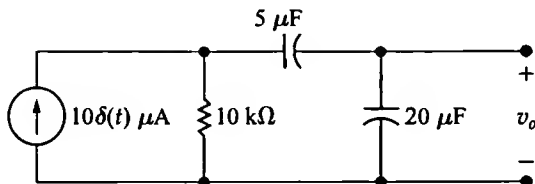


Figura P13.88

- 13.89. Suponga que la tensión línea-neutro  $V_o$  en el circuito a 60 Hz de la Figura 13.59 es  $120 \angle 0^\circ$  V (rms). La carga  $R_a$  está absorbiendo 1200 W; la carga  $R_b$  está absorbiendo 1800 W; y la carga  $X_a$  está absorbiendo 350 VAR. La reactancia inductiva de la línea ( $X_l$ ) es 1 Ω. Suponga que  $V_g$  no cambia después de abrir el conmutador.

- a) Calcule el valor inicial de  $i_2(t)$  e  $i_L(t)$ .
- b) Calcule  $V_o$ ,  $v_o(t)$  y  $v_o(0^+)$  utilizando el circuito en el dominio de  $s$  que se muestra en la Figura 13.60.
- c) Verifique la componente de régimen permanente de  $v_o$  utilizando un análisis en el dominio de los fasores.
- d) Utilice un programa informático para dibujar  $v_o$  en función de  $t$  para  $0 \leq t \leq 20$  ms.

◆ **13.90.** Suponga que el conmutador del circuito de la Figura 13.59 se abre en el momento en que la tensión de régimen permanente sinusoidal  $v_o$  es cero y está creciendo, es decir,  $v_o = 120\sqrt{2} \sin 120\pi t$  V.

- a) Calcule  $v_o(t)$  para  $t \geq 0$ .
- b) Utilice un programa informático para dibujar  $v_o(t)$  en función de  $t$  para  $0 \leq t \leq 20$  ms.
- c) Compare la perturbación de la tensión del apartado (a) con la obtenida en el apartado (c) del Problema 13.89.

◆ **13.91.** El propósito de este problema es demostrar que la tensión línea-neutro del circuito de la Figura 13.59 puede pasar directamente a régimen permanente si se desconecta la carga  $R_b$  del circuito en el momento preciso. Sea  $v_o = V_m \cos(120\pi t - \theta)$  V, donde  $V_m = 120\sqrt{2}$ . Suponga que  $v_o$  no cambia después de desconectar  $R_b$ .

- a) Calcule el valor de  $\theta$  (en grados) que permite que  $v_o$  pase directamente a operación de régimen permanente cuando se desconecta la carga  $R_b$ .
- b) Para el valor de  $\theta$  hallado en el apartado (a), calcule  $v_o(t)$  para  $t \geq 0$ .
- c) Utilice un programa informático para dibujar, en una misma gráfica, para el intervalo temporal  $-10 \text{ ms} \leq t \leq 10 \text{ ms}$ , el valor de  $v_o(t)$  antes y después de desconectar la carga  $R_b$ .

## CAPÍTULO

# 14

# Introducción a los circuitos de frecuencia selectiva

### Contenido del capítulo

- 14.1. Preliminares
- 14.2. Filtros paso bajo
- 14.3. Filtros paso alto
- 14.4. Filtros paso banda
- 14.5. Filtros de banda eliminada



Hasta este momento, en nuestro análisis de los circuitos con fuentes sinusoidales, la frecuencia de la fuente era siempre constante. En este capítulo, vamos a analizar el efecto que tiene sobre las tensiones y corrientes del circuito la variación de la frecuencia de la fuente. El resultado de este análisis es la **respuesta en frecuencia** de un circuito.

Hemos visto en los capítulos anteriores que la respuesta de un circuito depende de los tipos de elementos del circuito, de la forma en que esos elementos están conectados y de la impedancia de los elementos. Aunque variar la frecuencia de una fuente sinusoidal no cambia los tipos de elementos ni sus conexiones, sí altera la impedancia de los condensadores y bobinas, debido a que la impedancia de estos elementos está en función de la frecuencia. Como veremos, una selección cuidadosa de los elementos de circuito, de sus valores y de sus interconexiones con otros elementos nos permitirá construir circuitos que dejen pasar hacia la salida únicamente aquellas señales de entrada que estén comprendidas en un rango de frecuencia deseado. Dichos circuitos se denominan **circuitos de frecuencia selectiva**. Muchos dispositivos que se comunican mediante señales eléctricas, como los teléfonos, radios, televisiones y satélites, emplean circuitos de frecuencia selectiva.

## Perspectiva práctica

### Circuitos telefónicos de marcación por tonos

En este capítulo, vamos a examinar circuitos en los que la frecuencia de la fuente varía. El comportamiento de estos circuitos también varía a medida que lo hace la frecuencia de la

fuelle, porque la impedancia de los componentes reactivos está en función de la frecuencia de la señal. Estos circuitos cuyo comportamiento depende de la frecuencia se denominan **filtros** y se utilizan en muchos dispositivos electrónicos comunes. En las radios, se utilizan filtros para seleccionar la señal de una emisora de radio al mismo tiempo que se rechazan las señales de otras emisoras que puedan estar transmitiendo a diferentes frecuencias. En los equipos de música, se utilizan filtros para ajustar las intensidades relativas de las componentes de baja y alta frecuencia de la señal de audio. Los filtros también se usan en los sistemas telefónicos.

Un teléfono de marcación por tonos produce tonos que son perfectamente audibles cuando pulsamos un botón. Es posible que se haya preguntado alguna vez para qué sirven estos tonos. ¿Cómo se utilizan para decir al sistema telefónico cuál botón ha sido pulsado? ¿Por qué se utilizan tonos? ¿Por qué parecen tonos musicales? ¿Cómo puede distinguir el sistema telefónico entre los tonos que se generan al pulsar los botones y los sonidos normales de las personas que hablan o cantan a través de un teléfono?

El sistema telefónico fue diseñado para transmitir señales de audio, es decir, señales cuya frecuencia está comprendida entre 300 Hz y 3 kHz. Por tanto, todas las señales que el sistema hace llegar al usuario tienen que ser audibles, incluyendo el tono de marcación y la señal de ocupado. De forma similar, todas las señales que el usuario haga llegar al sistema también tienen que ser audibles, incluyendo la señal de que el usuario ha pulsado un botón. Resulta fundamental poder distinguir entre las señales generadas por la pulsación de un botón y las señales de audio normales, por lo que se utiliza un sistema de tonos multifrecuencia (DTMF, *dual-tone-multiple-frequency*). Cuando se pulsa el botón correspondiente al número, se genera una pareja distintiva de tonos sinusoidales con frecuencias muy precisas y esos dos tonos son enviados por el aparato hacia el sistema telefónico. La frecuencia DTMF y las especificaciones de temporización hacen bastante improbable que la voz humana pueda producir exactamente la misma pareja de tonos, incluso si alguien trata de hacerlo a propósito. En la central telefónica, una serie de circuitos eléctricos monitorizan la señal de audio, buscando esas parejas de tonos que codifican cada número. En el ejemplo de Perspectiva práctica al final del capítulo, examinaremos el diseño de los filtros DTMF utilizados para determinar qué botón ha sido pulsado.

## Objetivos del capítulo

1. Conocer las configuraciones de circuito  $RL$  y  $RC$  que actúan como filtros paso bajo y ser capaz de seleccionar los valores de componentes para circuitos  $RL$  y  $RC$  que permitan obtener una frecuencia de corte especificada.
2. Conocer las configuraciones de circuito  $RL$  y  $RC$  que actúan como filtros paso alto y ser capaz de seleccionar los valores de componentes para circuitos  $RL$  y  $RC$  que permitan satisfacer una frecuencia de corte especificada.
3. Conocer las configuraciones de circuito  $RLC$  que actúan como filtros paso banda, comprender la definición y las relaciones entre frecuencia central, frecuencias de corte, ancho de banda y factor de calidad de un filtro paso banda y ser capaz de elegir los valores de componentes de circuitos  $RLC$  que permitan satisfacer las especificaciones de diseño.
4. Conocer las configuraciones de circuito  $RLC$  que actúan como filtros de banda eliminada, comprender la definición y las relaciones entre frecuencia central, frecuencias de corte, ancho de banda y factor de calidad de un filtro de banda eliminada y ser capaz de seleccionar los valores de componentes de circuitos  $RLC$  que permitan satisfacer las especificaciones de diseño.

Los circuitos de frecuencia selectiva también se denominan **filtros** debido a su capacidad para filtrar ciertas señales de entrada, dependiendo de su frecuencia. La Figura 14.1 representa esta capacidad de una forma un tanto simplista. Para ser más precisos, debemos resaltar que no hay ningún circuito práctico de frecuencia selectiva que pueda filtrar de forma perfecta o completa determinadas frecuencias. En realidad, lo que los filtros hacen es **atenuar** (es decir, debilitar o reducir el efecto de) las señales de entrada cuyas frecuencias estén fuera de una banda de frecuencias determinadas. Un equipo de música doméstico puede tener un ecualizador gráfico, que es un ejemplo excelente de una colección de circuitos de filtro. Cada banda del ecualizador gráfico es un filtro que amplifica los sonidos (frecuencias audibles) comprendidos en el rango de frecuencias de la banda y atenúa las frecuencias situadas fuera de dicha banda. De este modo, el ecualizador gráfico nos permite modificar el volumen del sonido en cada banda de frecuencias.

Comenzaremos este capítulo analizando circuitos pertenecientes a cada una de las cuatro principales categorías de filtro: paso bajo, paso alto, paso banda y banda eliminada. La función de transferencia del circuito será nuestro punto de partida para el análisis de la respuesta en frecuencia. Preste especial atención a las similitudes existentes entre las funciones de transferencia de aquellos circuitos que llevan a cabo la misma función de filtrado. Utilizaremos esas similitudes a la hora de diseñar circuitos de filtrado en el Capítulo 15.



**Figura 14.1.** La acción de un filtro sobre una señal de entrada produce una señal de salida.

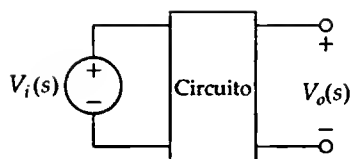
## 14.1. Preliminares

Recuerde, de la Sección 13.7, que la función de transferencia de un circuito proporciona una forma sencilla para calcular la respuesta de régimen permanente a una entrada sinusoidal. Allí, hemos considerado únicamente fuentes de frecuencia fija. Para estudiar la respuesta en frecuencia de un circuito, vamos a sustituir la fuente sinusoidal de frecuencia fija por una fuente sinusoidal de frecuencia variable. La función de transferencia sigue siendo una herramienta enormemente útil, porque el módulo y la fase de la señal de salida dependen únicamente del módulo y de la fase de la función de transferencia  $H(j\omega)$ .

Observe que el método que acabamos de esbozar presupone que podemos variar la frecuencia de una señal sinusoidal sin cambiar su módulo ni su ángulo de fase. Por tanto, la amplitud y la fase de la salida sólo variarán si varían la amplitud o la fase de la función de transferencia a medida que cambia la frecuencia de la fuente sinusoidal.

Para simplificar todavía más este primer análisis de los circuitos de frecuencia selectiva, vamos a restringir también nuestra atención a aquellos casos en que tanto la entrada como la salida son tensiones sinusoidales, como se ilustra en la Figura 14.2. Por tanto, la función de transferencia que nos interesa es el cociente entre la transformada de Laplace de la tensión de salida y la transformada de Laplace de la tensión de entrada, es decir,  $H(s) = V_o(s)/V_i(s)$ . Sin embargo, debemos tener presente que, en cualquier aplicación práctica concreta, puede que sea una corriente la señal de entrada o de salida que nos interese.

Las señales que pasan de la entrada a la salida caen dentro de una banda de frecuencias denominada **banda de paso**. Las tensiones de entrada situadas fuera de esta banda verán atenuado su módulo por el circuito, impidiéndoles así alcanzar los terminales de salida del circuito. Las frecuencias que no

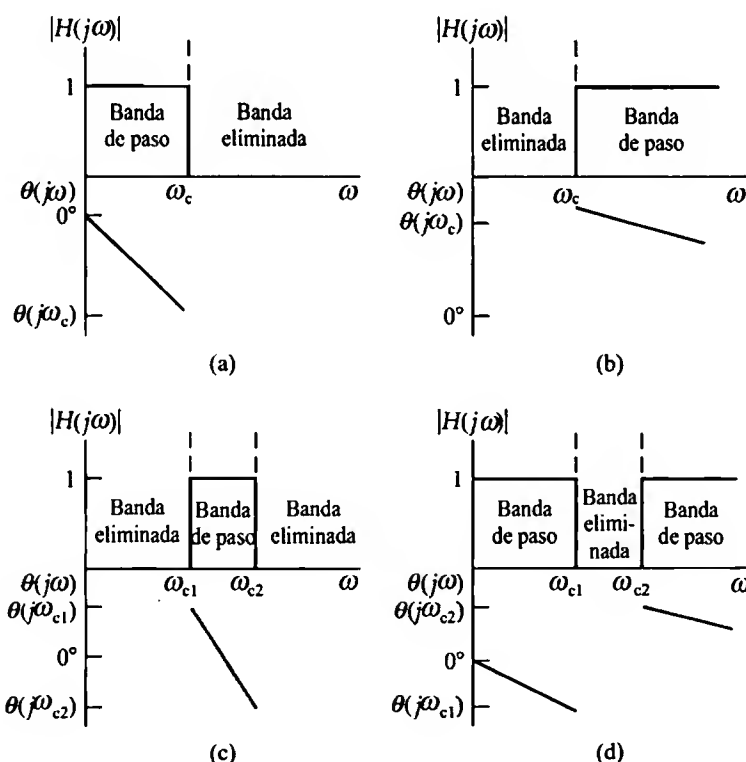


**Figura 14.2.** Circuito con una tensión de entrada y una tensión de salida.

están contenidas en la banda de paso de un circuito forman lo que se conoce como **banda eliminada**. Los circuitos de frecuencia selectiva se clasifican dependiendo de la ubicación de la banda de paso.

Una forma de identificar el tipo de circuito de frecuencia selectiva consiste en examinar su **gráfica de respuesta en frecuencia**. La gráfica de respuesta en frecuencia muestra cómo cambia la función de transferencia del circuito (tanto en amplitud como en fase) a medida que varía la frecuencia de la fuente. Una gráfica de respuesta en frecuencia tiene dos partes. En una de ellas se dibuja  $|H(j\omega)|$  en función de la frecuencia  $\omega$ . Esta parte de la gráfica se denomina **diagrama de ganancia**. La otra parte es una gráfica de  $\theta(j\omega)$  en función de la frecuencia  $\omega$  y se denomina **diagrama de fase**.

En la Figura 14.3 se muestran las gráficas de respuesta en frecuencia ideales para las cuatro categorías principales de filtros. Las partes (a) y (b) ilustran las gráficas ideales para un filtro paso bajo y un filtro paso alto, respectivamente. Ambos filtros tienen una banda de paso y una banda eliminada, las cuales están definidas por la **frecuencia de corte** que las separa. Los nombres *paso bajo* y *paso alto*



**Figura 14.3.** Gráficas de respuesta en frecuencia ideal para los cuatro tipos de circuitos de filtro.  
 (a) Un filtro paso bajo ideal. (b) Un filtro paso alto ideal. (c) Un filtro paso banda ideal. (d) Un filtro de banda eliminada ideal.

derivan de las gráficas del módulo: un **filtro paso bajo** deja pasar de la entrada a la salida aquellas señales cuya frecuencia es inferior a la frecuencia de corte, mientras que un *filtro paso alto* deja pasar las señales cuya frecuencia sea superior a la frecuencia de corte. Por tanto, los términos *bajo* y *alto* se utilizan aquí no para referirse a ningún valor absoluto de frecuencia, sino a valores relativos con respecto a la frecuencia de corte.

Observe en la gráficas que ambos tipos de filtro (así como los correspondientes a los filtros paso banda y de banda eliminada) presentan un diagrama de fase (para el filtro ideal) que varía linealmente dentro de la banda de paso. El diagrama de fase no presenta ningún interés fuera de la banda de paso, porque en las bandas eliminadas el módulo de la función de transferencia es cero. El motivo de que exista una variación lineal de la fase dentro de la banda de paso es que de esa forma se evita la distorsión de la señal (véase el Capítulo 16, Sección 16.5).

Las dos restantes categorías de filtro tienen dos frecuencias de corte cada una. La Figura 14.3(c) ilustra la gráfica de respuesta en frecuencia ideal para un **filtro paso banda**, que deja pasar la tensión de la fuente hacia la salida únicamente si la frecuencia de la fuente está comprendida dentro de la banda definida por las dos frecuencias de corte. La Figura 14.3(d) muestra la gráfica ideal de un **filtro de banda eliminada**, que deja pasar la tensión de la fuente hacia la salida únicamente si la frecuencia de la fuente está fuera de la banda definida por las dos frecuencias de corte. El filtro de banda eliminada rechaza, por tanto, la tensión de la fuente cuando su frecuencia está comprendida dentro de la banda definida por las frecuencias de corte.

A la hora de especificar un filtro real utilizando cualquiera de los circuitos descritos en este capítulo, es importante tener en cuenta que las características de módulo y de ángulo de fase no son independientes. En otras palabras, las características de un circuito que permiten obtener un determinado diagrama de ganancia dictarán también la forma del diagrama de fase, y viceversa. Por ejemplo, una vez que seleccionemos una determinada forma para la respuesta de ganancia de un circuito, también quedará determinada la respuesta de fase. Por poner otro ejemplo, si seleccionamos una determinada forma para la respuesta de fase, el módulo de la función de transferencia quedará también determinado. Aunque hay algunos circuitos de frecuencia selectiva para los que se puede especificar de forma independiente el comportamiento en cuanto al módulo y al ángulo de fase, no vamos a presentar esos circuitos aquí.

Las secciones siguientes presentan ejemplos de circuitos correspondientes a cada una de las cuatro categorías de filtros. Se trata solamente de unos cuantos ejemplos de entre los muchos circuitos que presentan este tipo de comportamiento. Lo importante es centrar nuestra atención en tratar de identificar las propiedades de un circuito que determinan su comportamiento como filtro. Examine atentamente la forma de la función de transferencia para aquellos circuitos que realizan la misma función de filtrado. La identificación de la forma de la función de transferencia del filtro le servirá de gran ayuda al diseñar circuitos de filtrado para aplicaciones concretas.

Todos los filtros que vamos a considerar en este capítulo son **filtros pasivos**, así llamados porque sus capacidades de filtrado sólo dependen de los elementos pasivos: resistencias, condensadores y bobinas. La máxima amplitud de salida que dichos filtros permiten obtener es normalmente 1 y si se coloca una impedancia en serie con la fuente o en paralelo con la carga dicha amplitud se reducirá. Puesto que muchas aplicaciones prácticas de filtrado requieren incrementar la amplitud de la salida, los filtros pasivos presentan significativas desventajas. El único filtro pasivo descrito en este capítulo que puede amplificar la salida es el filtro resonante *RLC* en serie. Existen muchos más filtros amplificadores dentro de la categoría de los circuitos de filtrado activos, que analizaremos en el Capítulo 15.

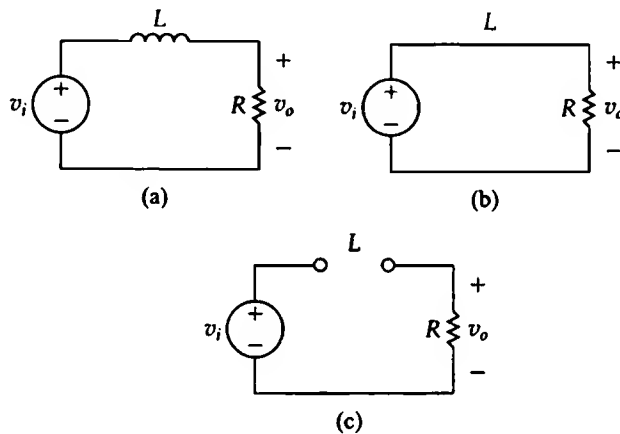


## 14.2. Filtros paso bajo

En esta sección vamos a examinar dos circuitos que se comportan como filtros paso bajo, el circuito  $RL$  en serie y el circuito  $RC$  en serie, y veremos cuáles son las características de estos circuitos que determinan la frecuencia de corte.

### Circuito $RL$ en serie: análisis cualitativo

En la Figura 14.4(a) se muestra un circuito  $RL$  en serie. La entrada del circuito es una fuente de tensión sinusoidal de frecuencia variable, mientras que la salida está definida como la tensión que cae en la resistencia. Suponga que la frecuencia de la fuente comienza en un valor muy pequeño y va incrementándose gradualmente. Sabemos que el comportamiento de la resistencia ideal no se modifica, porque su impedancia es independiente de la frecuencia, pero veamos de qué modo varía el comportamiento de la bobina.



**Figura 14.4.** (a) Un filtro paso bajo  $RL$  en serie. (b) El circuito equivalente para  $\omega = 0$ .  
(c) El circuito equivalente para  $\omega = \infty$ .

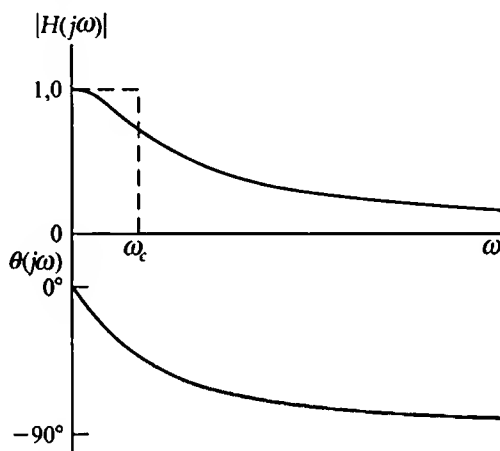
Recuerde que la impedancia de una bobina es  $j\omega L$ . A baja frecuencia, la impedancia de la bobina es muy pequeña comparada con la de la resistencia, por lo que la bobina funciona en la práctica como un cortocircuito. El término *baja frecuencia* hace referencia, por tanto, a todas las frecuencias para las que  $\omega L \ll R$ . El circuito equivalente para  $\omega = 0$  se muestra en la Figura 14.4(b). En él, la tensión de salida y la tensión de entrada son iguales tanto en módulo como en ángulo de fase.

A medida que se incrementa la frecuencia, la impedancia de la bobina también se incrementa en relación con la de la resistencia. Al incrementarse la impedancia de la bobina, se produce un incremento correspondiente en la magnitud de la caída de tensión en bornes de la misma y una reducción correspondiente en la magnitud de la tensión de salida. Incrementar la impedancia de la bobina introduce también un desplazamiento en el ángulo de fase existente entre la tensión y la corriente en la bobina. Esto hace que exista una diferencia de fase entre la tensión de entrada y la de salida. La tensión de salida está retardada con respecto a la de entrada y, a medida que se incrementa la frecuencia, este retardo de fase se aproxima a  $90^\circ$ .

Para altas frecuencias, la impedancia de la bobina es muy grande comparada con la de la resistencia, por lo que la bobina funciona como un circuito abierto, bloqueando el flujo de corriente en el circuito. El término *alta frecuencia* se refiere, por tanto, a todas las frecuencias para las que  $\omega L \gg R$ . El

circuito equivalente para  $\omega = \infty$  se muestra en la Figura 14.4(c), donde el módulo de la tensión de salida es cero. El ángulo de fase de la tensión de salida es de  $90^\circ$  en retardo con respecto a la tensión de entrada.

Basándonos en el comportamiento del módulo de la tensión de salida, vemos que este circuito  $RL$  en serie deja pasar selectivamente las señales de entrada de baja frecuencia hacia la salida, bloqueando las señales de entrada de alta frecuencia. Por tanto, esta respuesta del circuito a una frecuencia de entrada variable tiene la forma mostrada en la Figura 14.5. Las dos gráficas de la figura forman la gráfica de respuesta en frecuencia del circuito  $RL$  en serie de la Figura 14.4(a). La gráfica superior muestra cómo varía  $|H(j\omega)|$  con la frecuencia, mientras que la gráfica inferior muestra  $\theta(j\omega)$  en función de la frecuencia. Presentamos un método más formal para construir estas gráficas en el Apéndice E.



**Figura 14.5.** Gráfica de respuesta en frecuencia para el circuito  $RL$  en serie de la Figura 14.4(a).

También hemos superpuesto en la figura el diagrama ideal del módulo de un filtro paso bajo de la Figura 14.3(a). Obviamente, existe una gran diferencia entre el diagrama de ganancia de un filtro ideal y la respuesta en frecuencia de un filtro  $RL$  real. El filtro ideal muestra una discontinuidad en el módulo en la frecuencia de corte,  $\omega_c$ , lo que crea una transición abrupta en la frontera entre la banda de paso y la banda eliminada. Aunque esto es lo que nos gustaría poder hacer con los filtros, idealmente no resulta posible utilizar componentes reales para construir un circuito con este tipo de transición abrupta en el diagrama de ganancia. Los circuitos que actúan como filtros paso bajo tienen una respuesta en módulo que cambia gradualmente entre la banda de paso y la banda eliminada. Por tanto, el diagrama de ganancia de un circuito real nos obliga a definir con más precisión el concepto de frecuencia de corte,  $\omega_c$ .

## Definición de la frecuencia de corte

Necesitamos definir la frecuencia de corte,  $\omega_c$ , para los circuitos de filtrado reales, en los que el diagrama de ganancia no nos permite identificar una única frecuencia de separación entre la banda de paso y la banda eliminada. La definición de frecuencia de corte más ampliamente utilizada por los ingenieros eléctricos es la frecuencia para la que el módulo de la función de transferencia se reduce según el factor  $1/\sqrt{2}$  con respecto al valor máximo:

✦ **DEFINICIÓN DE FRECUENCIA DE CORTE**

$$|H(j\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}} H_{\max}, \quad (14.1)$$

donde  $H_{\text{máx}}$  es el valor máximo del módulo de la función de transferencia. De la Ecuación 14.1 podemos deducir que la banda de paso de un filtro real se define como el rango de frecuencias para el que la amplitud de la tensión de salida es igual o superior al 70,7% de la amplitud máxima posible.

La constante  $1/\sqrt{2}$  utilizada al definir la frecuencia de corte puede parecer una elección arbitraria, pero examinando otra consecuencia de la definición de frecuencia de corte vemos que esta elección parece bastante razonable. Recuerde, de la Sección 10.5, que la potencia media entregada por cualquier circuito a una carga es proporcional a  $V_L^2$ , donde  $V_L$  es la amplitud de la caída de tensión experimentada en la carga:

$$P = \frac{1}{2} \frac{V_L^2}{R}. \quad (14.2)$$

Si el circuito tiene una fuente de tensión sinusoidal,  $V_i(j\omega)$ , entonces la tensión en la carga es también una senoide y su amplitud está en función de la frecuencia  $\omega$ . Definamos  $P_{\text{máx}}$  como el valor de la potencia media entregada a la carga cuando el módulo de la tensión en la carga es máximo:

$$P_{\text{máx}} = \frac{1}{2} \frac{V_{L\text{máx}}^2}{R}. \quad (14.3)$$

Si variamos la frecuencia de la fuente de tensión sinusoidal,  $V_i(j\omega)$ , la tensión en la carga será máxima cuando el módulo de la función de transferencia del circuito sea también máximo:

$$V_{L\text{máx}} = H_{\text{máx}} |V_i|. \quad (14.4)$$

Ahora considere lo que sucede con la potencia media cuando la frecuencia de la fuente de tensión es  $\omega_c$ . Utilizando la Ecuación 14.1, vemos que el módulo de la tensión en la carga para  $\omega_c$  es

$$\begin{aligned} |V_L(j\omega_c)| &= |H(j\omega_c)| |V_i| \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} H_{\text{máx}} |V_i| \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} V_{L\text{máx}}. \end{aligned} \quad (14.5)$$

Sustituyendo la Ecuación 14.5 en la Ecuación 14.2,

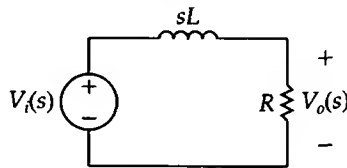
$$\begin{aligned} P(j\omega_c) &= \frac{1}{2} \frac{|V_L(j\omega_c)|^2}{R} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} V_{L\text{máx}}\right)^2}{R} \\ &= \frac{1}{2} \frac{V_{L\text{máx}}^2 / 2}{R} \\ &= \frac{P_{\text{máx}}}{2}. \end{aligned} \quad (14.6)$$

La Ecuación 14.6 muestra que, para la frecuencia de corte  $\omega_c$ , la potencia media entregada por el circuito es igual a la mitad de la potencia media máxima. Debido a ello,  $\omega_c$  también se denomina fre-

**cuencia de potencia mitad.** Así, en la banda de paso, la potencia media entregada a la carga es igual o superior al 50% de la potencia media máxima.

### Circuito $RL$ en serie: análisis cuantitativo

Ahora que hemos definido la frecuencia de corte para circuitos de filtro reales, podemos analizar el circuito  $RL$  en serie para descubrir la relación existente entre los valores de los componentes y la frecuencia de corte para este tipo de filtro paso bajo. Comenzamos construyendo el equivalente en el dominio de  $s$  para el circuito de la Figura 14.4(a), suponiendo unas condiciones iniciales iguales a cero. El circuito equivalente resultante se muestra en la Figura 14.6.



**Figura 14.6.** Equivalente en el dominio de  $s$  para el circuito de la Figura 14.4(a).

La función de transferencia de tensión para este circuito es

$$H(s) = \frac{R/L}{s + R/L}. \quad (14.7)$$

Para estudiar la respuesta en frecuencia, hacemos la sustitución  $s = j\omega$  en la Ecuación 14.7:

$$H(j\omega) = \frac{R/L}{j\omega + R/L}. \quad (14.8)$$

Ahora podemos separar la Ecuación 14.8 en dos ecuaciones. La primera define el módulo de la función de transferencia en función de la frecuencia, mientras que la segunda define el ángulo de fase de la función de transferencia, también en función de la frecuencia:

$$|H(j\omega)| = \frac{R/L}{\sqrt{\omega^2 + (R/L)^2}}, \quad (14.9)$$

$$\theta(j\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R}\right). \quad (14.10)$$

Un examen de la Ecuación 14.9 nos permite verificar la corrección de la gráfica de módulo que se muestra en la Figura 14.5. Cuando  $\omega = 0$ , el denominador y el numerador son iguales y  $|H(j0)| = 1$ . Esto quiere decir que, para  $\omega = 0$ , la tensión de entrada pasa a los terminales de salida sin que se produzca ningún cambio en el módulo de la tensión.

A medida que se incrementa la potencia, el numerador de la Ecuación 14.9 no sufre ningún cambio, pero el denominador se hace cada vez más grande. Por tanto,  $|H(j\omega)|$  decrece a medida que se incrementa la frecuencia, como se muestra en la gráfica de la Figura 14.5. De forma similar, a medida que la frecuencia se incrementa, el ángulo de fase cambia desde su valor de continua, igual a  $0^\circ$ , haciéndose cada vez más negativo, como puede deducirse de la Ecuación 14.10.

Cuando  $\omega = \infty$ , el denominador de la Ecuación 14.9 tiene un valor infinito y  $|H(j\infty)| = 0$ , como puede verse en la Figura 14.5. Para  $\omega = \infty$ , el ángulo de fase alcanza un límite igual a  $-90^\circ$ , como puede deducirse de la Ecuación 14.10 y de la gráfica de ángulo de fase de la Figura 14.5.

Utilizando la Ecuación 14.9, podemos calcular la frecuencia de corte,  $\omega_c$ . Recuerde que  $\omega_c$  se define como la frecuencia para la que  $|H(j\omega_c)| = (1/\sqrt{2})H_{\max}$ . Para el filtro paso bajo,  $H_{\max} = |H(j0)|$ , como puede verse en la Figura 14.5. Por tanto, para el circuito de la Figura 14.4(a),

$$|H(j\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}}|1| = \frac{R/L}{\sqrt{\omega_c^2 + (R/L)^2}}. \quad (14.11)$$

Despejando  $\omega_c$  en la Ecuación 14.11, obtenemos

✦ **FRECUENCIA DE CORTE PARA LOS FILTROS  $RL$**   $\omega_c = \frac{R}{L}. \quad (14.12)$

La Ecuación 14.12 proporciona un importante resultado. La frecuencia de corte,  $\omega_c$ , puede fijarse en cualquier valor deseado seleccionando los valores apropiados de  $R$  y  $L$ . Podemos por tanto diseñar un filtro paso bajo con cualquier frecuencia de corte que sea necesaria. El Ejemplo 14.1 ilustra la aplicación de la Ecuación 14.12 a las tareas de diseño.

### EJEMPLO 14.1 Diseño de un filtro paso bajo

La electrocardiología es el estudio de las señales eléctricas producidas por el corazón. Estas señales mantienen el latido rítmico del corazón y se miden mediante un instrumento denominado electrocardiógrafo. Dicho instrumento debe ser capaz de detectar señales periódicas cuya frecuencia está en torno a 1 Hz (el corazón funciona normalmente a unos 72 latidos por minuto). El electrocardiógrafo debe operar en presencia de ruido sinusoidal compuesto por señales procedentes del entorno eléctrico circundante, cuya frecuencia fundamental es de 50 o 60 Hz, la frecuencia a la que funciona la red eléctrica.

Vamos a seleccionar valores de  $R$  y  $L$  en el circuito de la Figura 14.4(a) para que el circuito resultante pueda usarse en un electrocardiógrafo con el fin de filtrar todo el ruido situado por encima de 10 Hz y dejar pasar las señales eléctricas del corazón con una frecuencia próxima a 1 Hz. A continuación, calcularemos el módulo de  $V_o$  para 1 Hz, 10 Hz y 60 Hz con el fin de analizar el comportamiento del filtro.

#### SOLUCIÓN

El problema consiste en seleccionar valores para  $R$  y  $L$  que nos permitan obtener un filtro paso

bajo con una frecuencia de corte de 10 Hz. En la Ecuación 14.12, vemos que no se pueden especificar independientemente  $R$  y  $L$  para generar un valor de  $\omega_c$ . Por tanto, seleccionemos un valor comúnmente disponible para  $L$ , como por ejemplo 100 mH. Antes de utilizar la Ecuación 14.12 para calcular el valor de  $R$  necesario para obtener la frecuencia de corte deseada, tenemos que convertir la frecuencia de corte de hercios a radianes por segundo:

$$\omega_c = 2\pi(10) = 20\pi \text{ rad/s}.$$

Ahora, podemos hallar el valor de  $R$  que, combinado con  $L = 100 \text{ mH}$ , nos proporcione un filtro paso bajo con una frecuencia de corte de 10 Hz:

$$R = \omega_c L = (20\pi)(100 \times 10^{-3}) = 6,28 \Omega.$$

Podemos calcular el módulo de  $V_o$  utilizando la ecuación  $|V_o| = |H(j\omega)| \cdot |V_i|$ :

$$\begin{aligned} |V_o(\omega)| &= \frac{R/L}{\sqrt{\omega^2 + (R/L)^2}} |V_i| \\ &= \frac{20\pi}{\sqrt{\omega^2 + 400\pi^2}} |V_i|. \end{aligned}$$

La Tabla 14.1 muestra los valores calculados del módulo para las frecuencias de 1 Hz, 10 Hz y 60 Hz. Como cabía esperar, las tensiones de entrada y de salida tienen la misma magnitud a baja frecuencia, porque el circuito es un filtro paso bajo. A la frecuencia de corte, el módulo de la tensión de salida se ha reducido según un factor  $1/\sqrt{2}$  con respecto al valor (igual a 1) existente en la banda de paso. A 60 Hz, el módulo de la tensión de salida se ha dividido aproximadamente por 6, consiguiéndose así la atenuación deseada del ruido que pudiera

corromper la señal que el electrocardiógrafo quiere medir.

Tabla 14.1. Módulo de la tensión de entrada y de salida para diversas frecuencias.		
$F(\text{Hz})$	$ V_I (\text{V})$	$ V_O (\text{V})$
1	1,0	0,995
10	1,0	0,707
60	1,0	0,164

Un circuito RC en serie

El circuito RC en serie mostrado en la Figura 14.7 también se comporta como un filtro paso bajo. Podemos verificarlo mediante el mismo análisis cualitativo que hemos utilizado en el caso anterior. De hecho, dicho examen cualitativo es un paso importante en la estrategia de resolución de problemas y es necesario acostumbrarse a realizarlo a la hora de analizar filtros. Tal examen nos permite predecir las características del filtro (paso bajo, paso alto, etc.) y predecir también la forma general de la función de transferencia. Si la función de transferencia calculada se corresponde con la forma predicha de modo cualitativo, podemos comprobar la precisión de los resultados.

Observe que la salida del circuito se define como la tensión entre los terminales del condensador. Al igual que hicimos en el análisis cualitativo anterior, vamos a utilizar tres regiones de frecuencia para determinar el comportamiento del circuito RC en serie de la Figura 14.7:

- 1. *Frecuencia cero* ( $\omega = 0$ ). La impedancia del condensador es infinita y éste actúa como un circuito abierto. Por tanto, las tensiones de entrada y de salida son iguales.
- 2. *Región de frecuencia creciente a partir de cero*. La impedancia del condensador se reduce en relación a la impedancia de la resistencia y la tensión de la fuente se divide entre la impedancia resistiva y la impedancia capacitiva. Por tanto, la tensión de salida es inferior a la tensión de la fuente.
- 3. *Frecuencia infinita* ( $\omega = \infty$ ). La impedancia del condensador es cero y éste actúa como un cortocircuito. Por tanto, la tensión de salida es cero.

Utilizando este análisis de la forma en que varía la tensión de salida en función de la frecuencia, vemos que el circuito RC en serie funciona como un filtro paso bajo. El Ejemplo 14.2 analiza este circuito cuantitativamente.

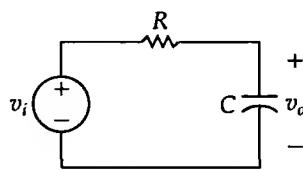


Figura 14.7. Un filtro paso bajo RC en serie.

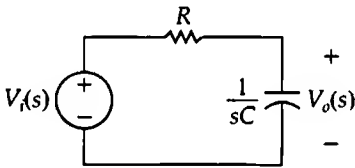
**EJEMPLO 14.2** Diseño de un filtro paso bajo  $RC$  en serie

Para el circuito  $RC$  en serie de la Figura 14.7:

- Determine la función de transferencia entre la tensión de la fuente y la tensión de salida.
- Determine una ecuación que nos proporcione la frecuencia de corte en el circuito  $RC$  en serie.
- Seleccione los valores de  $R$  y  $C$  que nos permitan obtener un filtro paso bajo con una frecuencia de corte de 3 kHz.

**SOLUCIÓN**

- Para hallar la expresión correspondiente a la función de transferencia, construimos primero el equivalente en el dominio de  $s$  del circuito de la Figura 14.7; dicho equivalente se muestra en la Figura 14.8.



**Figura 14.8.** Equivalente en el dominio de  $s$  para el circuito de la Figura 14.7.

Utilizando la técnica de división de tensión en el dominio de  $s$  en el circuito equivalente, vemos que

$$H(s) = \frac{\frac{1}{sC}}{s + \frac{1}{RC}}.$$

Ahora, hacemos la sustitución  $s = j\omega$  y calculamos el módulo de la expresión compleja resultante:

$$|H(j\omega)| = \frac{\frac{1}{RC}}{\sqrt{\omega^2 + \left(\frac{1}{RC}\right)^2}}.$$

- Para la frecuencia de corte  $\omega_c$ ,  $|H(j\omega)|$  es igual a  $(1/\sqrt{2})H_{\text{máx}}$ . Para un filtro paso bajo,  $H_{\text{máx}} = H(j0)$  y, para el circuito de la Figura 14.8,  $H(j0) = 1$ . Podemos entonces describir de la forma siguiente la relación entre los valores de  $R$ ,  $C$  y  $\omega_c$ :

$$|H(j\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}}(1) = \frac{\frac{1}{RC}}{\sqrt{\omega_c^2 + \left(\frac{1}{RC}\right)^2}}.$$

Despejando  $\omega_c$  en esta ecuación, obtenemos

✦ **FRECUENCIA DE CORTE  
PARA LOS FILTROS  $RC$**

$$\omega_c = \frac{1}{RC}.$$

- Utilizando los resultados del apartado (b), vemos que la frecuencia de corte está determinada por los valores de  $R$  y  $C$ . Puesto que  $R$  y  $C$  pueden calcularse de forma independiente, seleccionamos  $C = 1 \mu\text{F}$ . Si tenemos la posibilidad de elegir, normalmente seleccionaremos primero el valor de  $C$ , en lugar del de  $R$  o  $L$ , porque el número de valores de condensador disponibles es mucho más pequeño que el de valores de resistencias o de bobinas. Recuerde que también hay que convertir la frecuencia de corte especificada de 3 kHz a  $(2\pi)(3)$  krad/s:

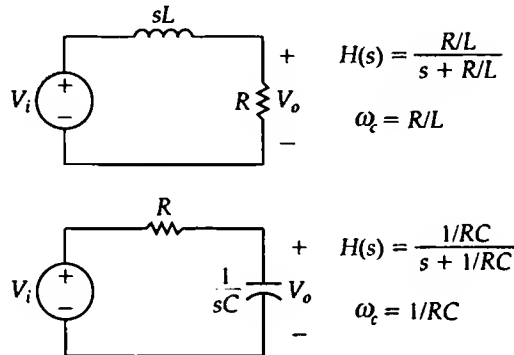
$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{\omega_c C} \\ &= \frac{1}{(2\pi)(3 \times 10^3)(1 \times 10^{-6})} \\ &= 53,05 \Omega. \end{aligned}$$

La Figura 14.9 es un resumen de los dos circuitos de filtro paso bajo que hemos examinado. Observe con cuidado las funciones de transferencia y vea cómo las dos tienen una forma similar: sólo difieren

en los términos que especifican la frecuencia de corte. De hecho, podemos enunciar una fórmula general para las funciones de transferencia de estos dos filtros paso bajo:

✦ **FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA DE UN FILTRO PASO BAJO** 
$$H(s) = \frac{\omega_c}{s + \omega_c}. \quad (14.13)$$

Cualquier circuito que tenga una relación de tensiones como la que se muestra en la Ecuación 14.13 se comportará como un filtro paso bajo con una frecuencia de corte igual a  $\omega_c$ . Los problemas propcionados al final del capítulo incluyen otros ejemplos de circuitos con este cociente de tensiones.



**Figura 14.9.** Dos filtros paso bajo, el filtro  $RL$  en serie y el filtro  $RC$  en serie, junto con sus funciones de transferencia y frecuencias de corte.

## Relación entre el dominio de la frecuencia y el dominio del tiempo

Finalmente, puede que el lector haya observado otra importante relación. Recuerde, de nuestras explicaciones sobre la respuesta natural de los circuitos  $RL$  y  $RC$  de primer orden en el Capítulo 6, que un parámetro importante de estos circuitos es la constante de relajación,  $\tau$ , que caracteriza la forma de la respuesta temporal. Para el circuito  $RL$ , la constante de relajación tiene el valor  $L/R$  (Ecuación 7.14). Para el circuito  $RC$ , la constante de relajación es  $RC$  (Ecuación 7.24). Compare las constantes de relajación con las frecuencias de corte de estos circuitos y observe que

$$\tau = 1/\omega_c. \quad (14.14)$$

Este resultado es una consecuencia directa de la relación existente entre la respuesta temporal de un circuito y su respuesta en frecuencia, como pone de manifiesto la transformada de Laplace. Las explicaciones sobre la memoria y la ponderación representadas en la integral de convolución de la Sección 13.6 muestran que, cuando  $\omega_c \rightarrow \infty$ , el filtro no tiene memoria y la salida tiende a ser una réplica de la entrada cambiada de escala; es decir, no hay filtrado alguno. Cuando  $\omega_c \rightarrow 0$ , la memoria del filtro es cada vez más grande y la tensión de salida es una versión cada vez más distorsionada de la entrada, debido al filtrado.

### Evaluación del objetivo 1

- Conocer las configuraciones de circuito  $RL$  y  $RC$  que actúan como filtros paso bajo.



**14.1.** Un filtro paso bajo  $RC$  en serie requiere una frecuencia de corte de 8 kHz. Utilice  $R = 10 \text{ k}\Omega$  y calcule el valor de  $C$  necesario.

**RESPUESTA** 1,99 nF.

**14.2.** Un filtro paso bajo  $RL$  en serie requiere una frecuencia de corte de 2 kHz. Uti-

lizando  $R = 5 \text{ k}\Omega$ , calcule (a)  $L$ , (b)  $|H(j\omega)|$  a 50 kHz y (c)  $\theta(j\omega)$  a 50 kHz.

**RESPUESTA**

(a) 0,40 H;

(b) 0,04;

(c)  $-87,71^\circ$ .

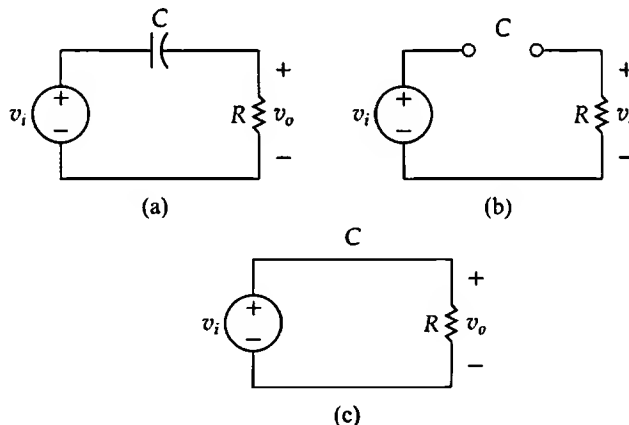
**NOTA** Trate también de resolver los Problemas 14.1 y 14.2 del capítulo.

## 14.3. Filtros paso alto

Vamos a examinar a continuación dos circuitos que funcionan como filtros paso alto. Una vez más, son los circuitos  $RL$  y  $RC$  en serie. Como veremos, el mismo circuito en serie puede actuar como filtro paso bajo o filtro paso alto, dependiendo de dónde se defina la tensión de salida. También vamos a determinar la relación existente entre los valores de los componentes y la frecuencia de corte de estos filtros.

### Circuito $RC$ en serie: análisis cualitativo

En la Figura 14.10(a) se muestra un circuito  $RC$  en serie. A diferencia de su equivalente paso bajo de la Figura 14.7, la tensión de salida se define aquí en bornes de la resistencia, no del condensador. Debido a esto, el efecto de variar la impedancia capacitiva es diferente que en la configuración paso bajo.



**Figura 14.10.** (a) Un filtro paso alto  $RC$  en serie. (b) El circuito equivalente para  $\omega = 0$ . (c) El circuito equivalente para  $\omega = \infty$ .

Para  $\omega = 0$ , el condensador se comporta como un circuito abierto, por lo que no fluye ninguna corriente a través de la resistencia. Esto se ilustra mediante el circuito equivalente de la Figura 14.10(b). En este circuito, no cae ninguna tensión en la resistencia y el circuito filtra la tensión de baja frecuencia de la fuente antes de que pueda alcanzar la salida del circuito.

A medida que se incrementa la frecuencia de la fuente de tensión, la impedancia del condensador se reduce en relación a la impedancia de la resistencia y ahora la tensión de la fuente se divide entre el

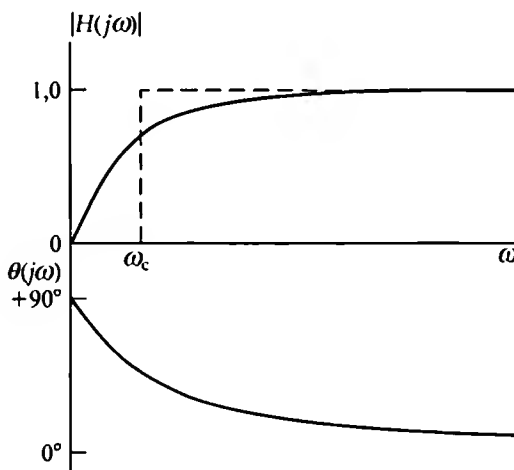
condensador y la resistencia. Como consecuencia, el módulo de la tensión de salida comienza a incrementarse.

Cuando la frecuencia de la fuente es infinita ( $\omega = \infty$ ), el condensador se comporta como un cortocircuito y no cae, por tanto, ninguna tensión entre los terminales del mismo. Esto se ilustra en el circuito equivalente de la Figura 14.10(c). En este circuito, la tensión de salida y la tensión de entrada son iguales.

La diferencia en ángulo de fase entre las tensiones de la fuente y de salida también varía a medida que cambia la frecuencia de la fuente. Para  $\omega = \infty$ , la tensión de salida es igual a la tensión de entrada, por lo que la diferencia en ángulo de fase es cero. A medida que se reduce la frecuencia de la fuente y se incrementa la impedancia del condensador, se introduce un desplazamiento de fase entre la tensión y la corriente en el condensador. Esto crea una diferencia de fase entre las tensiones de la fuente y de salida. El ángulo de fase de la tensión de salida está adelantado con respecto a la tensión de la fuente. Cuando  $\omega = 0$ , esta diferencia del ángulo de fase alcanza su valor máximo de  $+90^\circ$ .

Utilizando nuestro análisis cualitativo, vemos que cuando la salida se define como la tensión en bornes de la resistencia, el circuito RC en serie se comporta como un filtro paso alto. Los componentes y las conexiones son idénticos a los del circuito RC en serie paso bajo, pero la elección de la salida es diferente. Por tanto, hemos confirmado la observación anterior de que las características de filtrado de un circuito dependen tanto de la definición de la salida como de los tipos de componentes del circuito, de los valores de esos componentes y de sus interconexiones.

La Figura 14.11 muestra la gráfica de respuesta en frecuencia para el filtro paso alto RC en serie. Como referencia, las líneas discontinuas representan el diagrama de ganancia para un filtro paso alto ideal. Realicemos ahora un análisis cuantitativo de este mismo circuito.



**Figura 14.11.** Diagrama de respuesta en frecuencia para el circuito RC en serie de la Figura 14.10(a).

## Circuito RC en serie: análisis cuantitativo

Para empezar, construyamos el equivalente en el dominio de  $s$  del circuito de la Figura 14.10(a). Dicho equivalente se muestra en la Figura 14.12. Aplicando la regla de división de tensiones en el dominio de  $s$  al circuito, escribimos la función de transferencia:

$$H(s) = \frac{s}{s + 1/RC}.$$

Haciendo la sustitución  $s = j\omega$ , se obtiene

$$H(j\omega) = \frac{j\omega}{j\omega + 1/RC}. \quad (14.15)$$

A continuación, separamos la Ecuación 14.15 en dos ecuaciones. La primera será la ecuación que describe el módulo de la función de transferencia. La segunda es la ecuación correspondiente al ángulo de fase de dicha función:

$$|H(j\omega)| = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + (1/RC)^2}}, \quad (14.16)$$

$$\theta(j\omega) = 90^\circ - \tan^{-1} \omega RC. \quad (14.17)$$

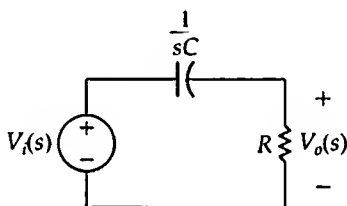


Figura 14.12. Equivalente en el dominio de  $s$  del circuito de la Figura 14.10(a).

Un examen atento de las Ecuaciones 14.16 y 14.17 nos permite confirmár la forma de la gráfica de respuesta en frecuencia de la Figura 14.11. Utilizando la Ecuación 14.16, podemos calcular la frecuencia de corte del filtro paso alto  $RC$  en serie. Recuerde que, para la frecuencia de corte, el módulo de la función de transferencia es  $(1/\sqrt{2})H_{\text{máx}}$ . Para un filtro paso alto,  $H_{\text{máx}} = |H(j\omega)|_{\omega=\infty} = |H(j\infty)|$ , como puede verse en la Figura 14.11. Podemos escribir la ecuación correspondiente a  $\omega_c$  igualando el lado izquierdo de la Ecuación 14.16 a  $(1/\sqrt{2})|H(j\infty)|$  y observando, para este circuito  $RC$  en serie, que  $|H(j\infty)| = 1$ :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\omega_c}{\sqrt{\omega_c^2 + (1/RC)^2}}. \quad (14.18)$$

Despejando  $\omega_c$  en la Ecuación 14.18, obtenemos

$$\omega_c = \frac{1}{RC}. \quad (14.19)$$

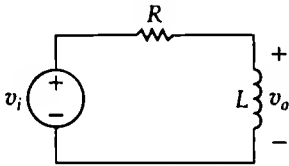
La Ecuación 14.19 nos presenta un resultado ya familiar. La frecuencia de corte para el circuito  $RC$  en serie tiene el valor  $1/RC$ , independientemente de que el circuito esté configurado como filtro paso bajo (Figura 14.7) o como filtro paso alto [Figura 14.10(a)]. Quizá el lector no se sorprenda en exceso, ya que antes hemos reseñado la conexión existente entre la frecuencia de corte,  $\omega_c$ , y la constante de relajación del circuito,  $\tau$ .

El Ejemplo 14.3 analiza un circuito  $RL$  en serie, pero esta vez configurado como filtro paso alto. El Ejemplo 14.4 examina el efecto de añadir una resistencia de carga en paralelo con la bobina.

**EJEMPLO 14.3** Diseño de un filtro paso alto  $RL$  en serie

Demuestre que el circuito  $RL$  en serie de la Figura 14.3 también actúa como filtro paso alto:

- Determine la expresión correspondiente a la función de transferencia del circuito.
- Utilice el resultado del apartado (a) para determinar una ecuación que nos dé la frecuencia de corte en el circuito  $RL$  en serie.
- Seleccione sendos valores para  $R$  y  $L$  que permitan obtener un filtro paso alto con una frecuencia de corte de 15 kHz.



**Figura 14.13.** Circuito para el Ejemplo 14.3.

**SOLUCIÓN**

- Comenzamos construyendo el equivalente en el dominio de  $s$  del circuito  $RL$  en serie, equivalente que se muestra en la Figura 14.14. A continuación, utilizamos la regla de división de tensión en el dominio de  $s$  en dicho circuito equivalente para construir la función de transferencia:

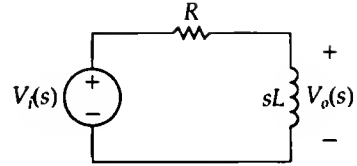
$$H(s) = \frac{s}{s + R/L}.$$

Haciendo la sustitución  $s = j\omega$ , obtenemos

$$H(j\omega) = \frac{j\omega}{j\omega + R/L}.$$

Observe que esta ecuación tiene la misma forma que la Ecuación 14.15 correspondiente al filtro paso alto  $RC$  en serie.

- Para hallar la ecuación correspondiente a la frecuencia de corte, calculamos primero el módulo de  $H(j\omega)$ :



**Figura 14.14.** Equivalente en el dominio de  $s$  del circuito de la Figura 14.13.

$$|H(j\omega)| = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + (R/L)^2}}$$

A continuación, igual que antes, igualamos el lado izquierdo de esta ecuación a  $(1/\sqrt{2})H_{\max}$ , utilizando la definición de la frecuencia de corte  $\omega_c$ . Recuerde que  $H_{\max} = |H(j\infty)|$  para un filtro paso alto y que, para el circuito  $RL$  en serie,  $|H(j\infty)| = 1$ .

Podemos despejar la frecuencia de corte en la ecuación resultante:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\omega_c}{\sqrt{\omega_c^2 + (R/L)^2}},$$

$$\omega_c = \frac{R}{L}.$$

Se trata de la misma frecuencia de corte que ya habíamos calculado para el filtro paso bajo  $RL$  en serie.

- Utilizando la ecuación correspondiente a  $\omega_c$  calculada en el apartado (b), vemos que no es posible especificar independientemente los valores de  $R$  y  $L$ . Por tanto, seleccionamos arbitrariamente un valor de  $500 \, \Omega$  para  $R$ . Acuérdesse también de convertir la frecuencia de corte a radianes por segundo:

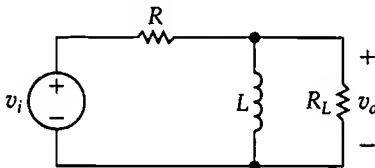
$$L = \frac{R}{\omega_c}$$

$$= \frac{500}{(2\pi)(15.000)} = 5,31 \text{ mH}.$$

**EJEMPLO 14.4** Adición de una carga al filtro paso alto  $RL$  en serie

Vamos a examinar el efecto de colocar una resistencia de carga en paralelo con la bobina del filtro paso alto  $RL$ , tal como se muestra en la Figura 14.15.

- Determine la función de transferencia del circuito de la Figura 14.15.
- Dibuje la gráfica del módulo del filtro paso alto  $RL$  con carga, utilizando los valores de  $R$  y  $L$  del circuito del Ejemplo 14.3(c) y haciendo  $R_L = R$ . Dibuje en la misma gráfica el módulo del filtro paso alto  $RL$  sin carga del Ejemplo 14.3(c).



**Figura 14.15.** Circuito del Ejemplo 14.4.

**SOLUCIÓN**

- Comenzamos transformando el circuito de la Figura 14.15 al dominio de  $s$ , y obtenemos el circuito equivalente mostrado en la Figura 14.16. Utilizamos la regla de la división de tensión en bornes de la combinación en paralelo de la bobina y de la resistencia de carga para calcular la función de transferencia:

$$H(s) = \frac{\frac{R_L sL}{R_L + sL}}{R + \frac{R_L sL}{R_L + sL}}$$

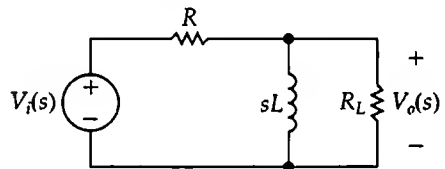
$$= \frac{\left(\frac{R_L}{R + R_L}\right)s}{s + \left(\frac{R_L}{R + R_L}\right)\frac{R}{L}} = \frac{Ks}{s + \omega_c},$$

donde

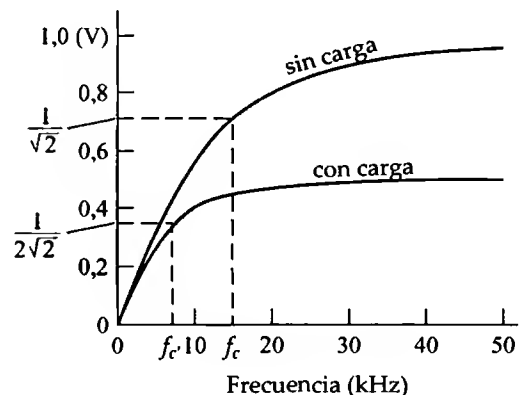
$$K = \frac{R_L}{R + R_L}, \quad \omega_c = K R / L$$

Observe que  $\omega_c$  es la frecuencia de corte del filtro con carga.

- Para el filtro paso alto  $RL$  sin carga del Ejemplo 14.3(c), el módulo en la banda de paso es 1 y la frecuencia de corte es 15 kHz. Para el filtro paso alto  $RL$  con carga,  $R = R_L = 500 \, \Omega$ , por lo que  $K = 1/2$ . Por tanto, para el filtro con carga, el módulo en la banda de paso es  $(1)(1/2) = 1/2$  y la frecuencia de corte es  $(15.000)(1/2) = 7,5$  kHz. En la Figura 14.17 se muestran las gráficas del módulo para los circuitos con carga y sin carga.



**Figura 14.16.** Equivalente en el dominio de  $s$  del circuito de la Figura 14.15.



**Figura 14.17.** Gráficas del módulo para el filtro paso alto  $RL$  sin carga de la Figura 14.13 y el filtro paso alto  $RL$  con carga de la Figura 14.15.

Comparando las funciones de transferencia del filtro sin carga del Ejemplo 14.3 y del filtro con carga del Ejemplo 14.4 podemos obtener algunas conclusiones interesantes. Ambas funciones de transferencia tienen la forma

$$H(s) = \frac{Ks}{s + K(R/L)},$$

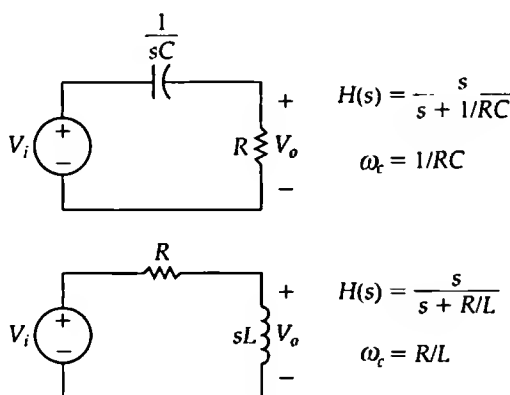
con  $K = 1$  para el filtro sin carga y  $K = R_L/(R + R_L)$  para el filtro con carga. Observe que el valor de  $K$  para el circuito con carga se reduce al valor de  $K$  para el circuito sin carga cuando  $R_L = \infty$ ; es decir, cuando no hay resistencia de carga. Las frecuencias de corte de ambos filtros pueden obtenerse directamente a partir de sus funciones de transferencia. En ambos casos,  $\omega_c = K(R/L)$ , donde  $K = 1$  para el circuito sin carga y  $K = R_L/(R + R_L)$  para el filtro con carga. De nuevo, la frecuencia de corte del circuito con carga se reduce a la del circuito sin carga cuando  $R_L = \infty$ . Puesto que  $R_L/(R + R_L) < 1$ , el efecto de la resistencia de carga consiste en reducir el módulo en la banda de paso según el factor  $K$  y reducir la frecuencia de corte según ese mismo factor. Ya habíamos predicho estos resultados al comienzo del capítulo. La amplitud de salida máxima que puede obtenerse con un filtro paso alto pasivo es 1 y el colocar una carga en paralelo con el filtro, como hemos hecho con el Ejemplo 14.4, sirve para reducir dicha amplitud. Cuando necesitemos amplificar las señales de la banda de paso, deberemos utilizar filtros activos como los que se analizan en el Capítulo 15.

El efecto de la carga sobre la función de transferencia de un filtro nos presenta otro dilema relativo al diseño de circuitos. Normalmente, partiremos de una especificación de la función de transferencia y diseñaremos un filtro para producir dicha función. Puede que no sepamos cuál va a ser la carga del filtro, pero, en cualquier caso, lo normal es que queramos que la función de transferencia del filtro sea la misma independientemente de la carga a la que se conecte. Este comportamiento no puede obtenerse con los filtros pasivos presentados en este capítulo.

La Figura 14.18 resume los circuitos de filtrado paso alto que hemos examinado. Observe atentamente las expresiones correspondientes a  $H(s)$  y vea cómo sus formas son similares. Sólo difieren en el denominador, que incluye la frecuencia de corte. Como hicimos con los filtros paso bajo en la Ecuación 14.13, podemos enunciar una fórmula general para la función de transferencia de estos dos filtros paso alto:

➤ **FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA  
DE UN FILTRO PASO ALTO**

$$H(s) = \frac{s}{s + \omega_c}. \quad (14.20)$$



**Figura 14.18.** Dos filtros paso alto, el circuito  $RC$  en serie y el circuito  $RL$  en serie, junto con sus funciones de transferencia y sus frecuencias de corte.

Cualquier circuito que tenga una función de transferencia como la de la Ecuación 14.20 se comportará como un filtro paso alto con una frecuencia de corte igual a  $\omega_c$ . En los problemas proporcionados al final del capítulo se incluyen otros ejemplos de circuitos con este cociente de tensiones.

También hemos referido anteriormente otra relación importante, cuando descubrimos que un circuito  $RC$  en serie tiene la misma frecuencia de corte independientemente de que esté configurado como filtro paso bajo o como filtro paso alto. Lo mismo se cumple para un circuito  $RL$  en serie. Habiendo descubierto anteriormente la conexión que existe entre la frecuencia de corte de un circuito de filtro y la constante de relajación de dicho circuito, cabe también esperar que la frecuencia de corte sea un parámetro característico del circuito cuyo valor depende sólo de los tipos de componentes del circuito, de sus valores y de la forma en que esos componentes están interconectados.

## Evaluación del objetivo 2

■ Conocer las configuraciones de circuito  $RL$  y  $RC$  que actúan como filtros paso alto.

- 14.3. Un filtro paso alto  $RL$  en serie tiene  $R = 5 \text{ k}\Omega$  y  $L = 3,5 \text{ mH}$ . ¿Cuál es el valor de  $\omega_c$  para este filtro?

RESPUESTA 1,43 Mrad/s.

- 14.4. Un filtro paso alto  $RC$  en serie tiene  $C = 1 \text{ }\mu\text{F}$ . Calcule la frecuencia de corte para los siguientes valores de  $\omega_c$ : (a)  $100 \text{ }\Omega$ ; (b)  $5 \text{ k}\Omega$  y (c)  $30 \text{ k}\Omega$ .

RESPUESTA

(a)  $10 \text{ krad/s}$ ;

(b)  $200 \text{ rad/s}$ ; (c)  $33,33 \text{ rad/s}$ .

- 14.5. Calcule la función de transferencia de un filtro paso bajo  $RC$  en serie que tenga una resistencia de carga  $R_L$  en paralelo con el condensador.

RESPUESTA

$$H(s) = \frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{KRC}}, \text{ donde } K = \frac{R_L}{R + R_L}.$$

NOTA Trate también de resolver los Problemas 14.9 y 14.10 del capítulo.

## 14.4. Filtros paso banda

Los siguientes filtros que vamos a examinar son aquellos que permiten pasar hacia la salida las tensiones comprendidas dentro de una banda de frecuencias, eliminando en el proceso todas las tensiones cuyas frecuencias caen fuera de esta banda. Estos filtros son algo más complicados que los filtros paso bajo y paso alto de las secciones anteriores. Como hemos visto ya en la Figura 14.3(c), los filtros paso banda ideales tienen dos frecuencias de corte,  $\omega_{c1}$  y  $\omega_{c2}$ , que identifican la banda de paso. En los filtros paso banda reales, estas frecuencias de corte se definen como las frecuencias para las que el módulo de la función de transferencia es igual a  $(1/\sqrt{2})H_{\text{máx}}$ .

### Frecuencia central, ancho de banda y factor de calidad

Hay otros tres parámetros importantes que caracterizan a un filtro paso banda. El primero es la **frecuencia central**,  $\omega_o$ , que se define como la frecuencia para la que la función de transferencia del circuito es

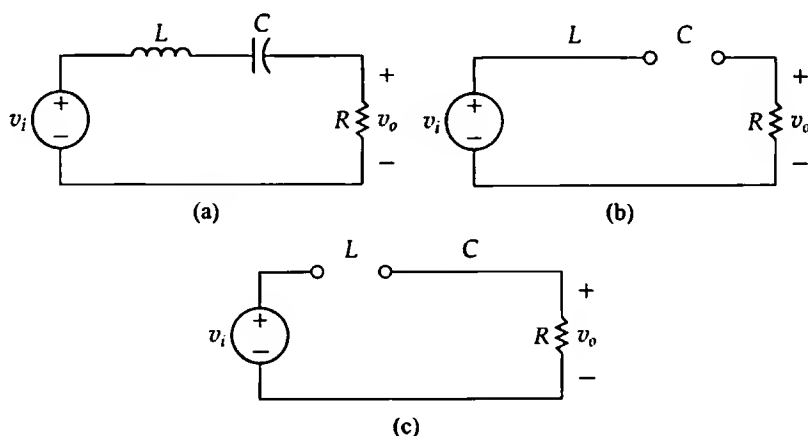
puramente real. Otro nombre de la frecuencia central es el de **frecuencia de resonancia**. Se trata del mismo nombre que se asigna a la frecuencia que caracteriza la respuesta natural de los circuitos de segundo orden que vimos en el Capítulo 8, lo que no es de extrañar ya que se trata de la misma frecuencia. Cuando se excita un circuito a la frecuencia de resonancia, decimos que el circuito *está resonando*, porque la frecuencia de la función excitadora es igual a la frecuencia natural del circuito. La frecuencia central es el centro geométrico de la banda de paso, es decir,  $\omega_o = \sqrt{\omega_{c1}\omega_{c2}}$ . Para los filtros paso banda, el módulo de la función de transferencia alcanza su máximo a la frecuencia central ( $H_{\text{máx}} = |H(j\omega_o)|$ ).

El segundo parámetro es el **ancho de banda**,  $\beta$ , que es la anchura de la banda de paso. El último de los tres parámetros es el **factor de calidad**, que es el cociente entre la frecuencia central y el ancho de banda. El factor de calidad nos proporciona una medida de la anchura de la banda de paso, medida que es independiente de la ubicación de la banda dentro del eje de frecuencias. También describe la forma del diagrama de ganancia de forma independiente de la frecuencia.

Aunque hay cinco parámetros distintos que caracterizan a los filtros paso banda ( $\omega_{c1}$ ,  $\omega_{c2}$ ,  $\omega_o$ ,  $\beta$  y  $Q$ ), sólo pueden especificarse de forma independiente dos de esos cinco parámetros. En otras palabras, una vez que determinemos el valor de dos cualesquiera de esos parámetros, los otros tres pueden calcularse utilizando las relaciones de dependencia que existen entre unos parámetros y otros. Definiremos estas magnitudes de forma más específica después de haber analizado un filtro paso banda. En la sección siguiente vamos a examinar dos circuitos *RLC* que actúan como filtros paso banda y luego obtendremos las expresiones correspondientes a todos sus parámetros característicos.

## Circuito *RLC* en serie: análisis cualitativo

La Figura 14.19(a) muestra un circuito *RLC* en serie. Podemos ver en él cuál es el efecto que tiene el variar la frecuencia de la fuente sobre el módulo de la tensión de salida. Como antes, los cambios en la frecuencia de la fuente provocan variaciones en la impedancia del condensador y de la bobina. Sin embargo, el análisis cualitativo es algo más complicado esta vez, dado que el circuito tiene tanto una bobina como un condensador.



**Figura 14.19.** (a) Un filtro paso banda *RLC* en serie. (b) Circuito equivalente para  $\omega = 0$ . (c) Circuito equivalente para  $\omega = \infty$ .

Para  $\omega = 0$ , el condensador se comporta como un circuito abierto y la bobina como un cortocircuito. El circuito equivalente se muestra en la Figura 14.19(b). El circuito abierto que representa la impe-



dancia del condensador impide que la corriente llegue a la resistencia, por lo que la tensión de salida resultante es cero.

Para  $\omega = \infty$ , el condensador se comporta como un cortocircuito y la bobina como un circuito abierto. El circuito equivalente se muestra en la Figura 14.19(c). Ahora es la bobina la que impide que la corriente llegue hasta la resistencia, siendo de nuevo la tensión de salida igual a cero.

Pero ¿qué sucede en la región de frecuencias comprendidas entre  $\omega = 0$  y  $\omega = \infty$ ? Entre estos dos extremos, tanto el condensador como la bobina tienen una impedancia finita. En esta región, la tensión suministrada por la fuente caerá en parte en la bobina y en el condensador, pero una cierta tensión caerá también en la resistencia. Recuerde que la impedancia del condensador es negativa, mientras que la impedancia de la bobina es positiva. Por tanto, para alguna frecuencia, la impedancia del condensador y la impedancia de la bobina tendrán igual magnitud y signos opuestos; las dos impedancias se cancelarán, haciendo que la tensión de salida sea igual a la tensión de la fuente. Esta frecuencia especial es la frecuencia central  $\omega_0$ . A ambos lados de  $\omega_0$ , la tensión de salida es inferior a la tensión de la fuente. Observe que, para  $\omega_0$ , la combinación en serie de la bobina y el condensador aparece como un cortocircuito.

En la Figura 14.20 se muestra la gráfica del cociente entre los módulos de la tensión. En la figura se ha superpuesto sobre el módulo de la función de transferencia del circuito  $RLC$  en serie el diagrama de ganancia de un filtro paso banda ideal.

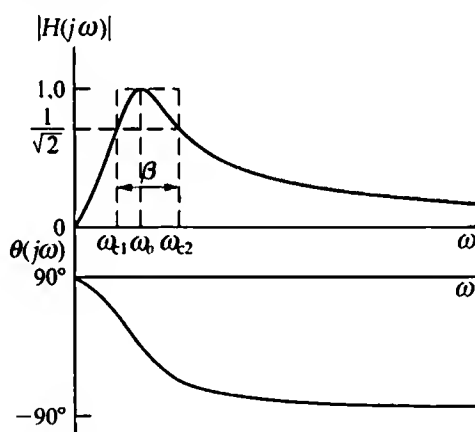


Figura 14.20. Gráfica de respuesta en frecuencia para el filtro paso banda  $RLC$  en serie de la Figura 14.19.

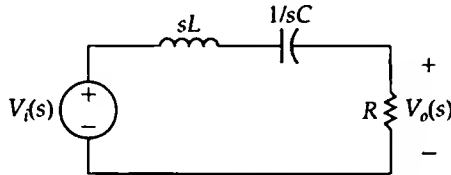
Consideremos ahora lo que sucede con el ángulo de fase de la tensión de salida. A la frecuencia en que las tensiones de la fuente y de salida son iguales, los ángulos de fase son también iguales. A medida que se reduce la frecuencia, la contribución del condensador al ángulo de fase es superior a la de la bobina. Puesto que el condensador fuerza un desplazamiento de fase positivo, el ángulo de fase neto a la salida será positivo. A muy baja frecuencia, el ángulo de fase de la salida alcanza su máximo de  $+90^\circ$ .

A la inversa, si incrementamos la frecuencia con respecto al valor para el que la tensión de la fuente y la tensión de salida están en fase, la contribución de la bobina al ángulo de fase es superior a la del condensador. La bobina provoca un desplazamiento de fase negativo, por lo que el ángulo de fase neto a la salida será negativo. A muy alta frecuencia, el ángulo de fase de la salida alcanzará su valor máximo negativo, igual a  $-90^\circ$ . Por tanto, la gráfica de la diferencia de ángulo de fase tiene la forma que se muestra en la Figura 14.20.

## Circuito $RLC$ en serie: análisis cuantitativo

Comenzamos dibujando el equivalente en el dominio de  $s$  para el circuito  $RLC$  en serie, equivalente que se muestra en la Figura 14.21. Si usamos la regla de la división de tensión en el dominio de  $s$  para escribir la ecuación correspondiente a la función de transferencia, obtenemos:

$$H(s) = \frac{(R/L)s}{s^2 + (R/L)s + (1/LC)}. \quad (14.21)$$



**Figura 14.21.** Equivalente en el dominio de  $s$  para el circuito de la Figura 14.19(a).

Como antes, hacemos la sustitución  $s = j\omega$  en la Ecuación 14.21 y obtenemos las ecuaciones correspondientes al módulo y al ángulo de fase de la función de transferencia:

$$|H(j\omega)| = \frac{\omega(R/L)}{\sqrt{[(1/LC) - \omega^2]^2 + [\omega(R/L)]^2}}, \quad (14.22)$$

$$\theta(j\omega) = 90^\circ - \tan^{-1} \left[ \frac{\omega(R/L)}{(1/LC) - \omega^2} \right]. \quad (14.23)$$

Calculemos ahora los cinco parámetros que caracterizan este filtro paso banda  $RLC$ . Recuerde que la frecuencia central,  $\omega_o$ , se define como la frecuencia para la que la función de transferencia del circuito es puramente real. La función de transferencia del circuito  $RLC$  de la Figura 14.19(a) será real cuando la frecuencia de la fuente de tensión haga que la suma de las impedancias del condensador y de la bobina sea cero:

$$j\omega_o L + \frac{1}{j\omega_o C} = 0. \quad (14.24)$$

Despejando  $\omega_o$  en la Ecuación 14.24 nos queda:

$$\omega_o = \sqrt{\frac{1}{LC}}. \quad (14.25)$$

A continuación, calculemos las frecuencias de corte,  $\omega_{c1}$  y  $\omega_{c2}$ . Recuerde que, para las frecuencias de corte, el módulo de la función de transferencia es  $(1/\sqrt{2})H_{\text{máx}}$ . Puesto que  $H_{\text{máx}} = |H(j\omega_o)|$ , podemos calcular  $H_{\text{máx}}$  sustituyendo la Ecuación 14.25 en la Ecuación 14.22:

$$\begin{aligned} H_{\text{máx}} &= |H(j\omega_o)| = \frac{\omega_o(R/L)}{\sqrt{[(1/LC) - \omega_o^2]^2 + (\omega_o R/L)^2}} \\ &= \frac{\sqrt{(1/LC)}(R/L)}{\sqrt{[(1/LC) - (1/LC)]^2 + [\sqrt{(1/LC)}(R/L)]^2}} = 1. \end{aligned}$$

Ahora, igualamos el lado izquierdo de la Ecuación 14.22 a  $(1/\sqrt{2})H_{\max}$  (que es igual a  $1/\sqrt{2}$ ) y podremos despejar  $\omega_c$ :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2}} &= \frac{\omega_c(R/L)}{\sqrt{[(1/LC) - \omega_c^2]^2 + (\omega_c R/L)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{[(\omega_c L/R) - (1/\omega_c RC)]^2 + 1}}.\end{aligned}\quad (14.26)$$

Podemos igualar los denominadores de los dos lados de la Ecuación 14.26 para obtener

$$\pm 1 = \omega_c \frac{L}{R} - \frac{1}{\omega_c RC}.\quad (14.27)$$

Reordenando la Ecuación 14.27, se obtiene la siguiente ecuación cuadrática:

$$\omega_c^2 L \pm \omega_c R - 1/C = 0.\quad (14.28)$$

La solución de la Ecuación 14.28 nos da cuatro posibles valores de la frecuencia de corte. Sólo dos de esos valores son positivos y tienen significado físico, y son ellos los que identifican la banda de paso de este filtro:

$$\omega_{c1} = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \left(\frac{1}{LC}\right)}.\quad (14.29)$$

✦ **FRECUENCIAS DE CORTE EN UN FILTRO RLC EN SERIE**

$$\omega_{c2} = \frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \left(\frac{1}{LC}\right)}.\quad (14.30)$$

Podemos usar las Ecuaciones 14.29 y 14.30 para confirmar que la frecuencia central,  $\omega_o$ , es la media geométrica de las dos frecuencias de corte:

$$\begin{aligned}\omega_o &= \sqrt{\omega_{c1} \cdot \omega_{c2}} \\ &= \sqrt{\left[-\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \left(\frac{1}{LC}\right)}\right] \left[\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \left(\frac{1}{LC}\right)}\right]} \\ &= \sqrt{\frac{1}{LC}}.\end{aligned}\quad (14.31)$$

✦ **RELACIÓN ENTRE LA FRECUENCIA CENTRAL Y LAS FRECUENCIAS DE CORTE**

Recuerde que el ancho de banda de un filtro paso banda se define como la diferencia entre las dos frecuencias de corte. Puesto que  $\omega_{c2} > \omega_{c1}$ , podemos calcular el ancho de banda restando la Ecuación 14.29 de la Ecuación 14.30:

$$\begin{aligned}\beta &= \omega_{c2} - \omega_{c1} \\ &= \left[\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \left(\frac{1}{LC}\right)}\right] - \left[-\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \left(\frac{1}{LC}\right)}\right] \\ &= \frac{R}{L}.\end{aligned}\quad (14.32)$$

✦ **RELACIÓN ENTRE EL ANCHO DE BANDA Y LAS FRECUENCIAS DE CORTE**

El factor de calidad, el último de los cinco parámetros característicos, se define como el cociente entre la frecuencia central y el ancho de banda. Utilizando las Ecuaciones 14.25 y 14.32:

✦ **FACTOR DE CALIDAD**

$$\begin{aligned} Q &= \omega_o / \beta \\ &= \frac{\sqrt{(1/LC)}}{(R/L)} \\ &= \sqrt{\frac{L}{CR^2}}. \end{aligned} \quad (14.33)$$

Ahora disponemos de cinco parámetros que caracterizan el filtro paso banda *RLC* en serie: dos frecuencias de corte,  $\omega_{c1}$  y  $\omega_{c2}$ , que delimitan la banda de paso; la frecuencia central,  $\omega_o$ , para la que el módulo de la función de transferencia es máximo; el ancho de banda,  $\beta$ , una medida de la anchura de la banda de paso; y el factor de calidad,  $Q$ , una segunda medida de la anchura de la banda de paso. Como ya hemos recalado anteriormente, sólo se pueden especificar independientemente dos de estos parámetros dentro de un diseño. Ya hemos visto que el factor de calidad se define en términos de la frecuencia central y del ancho de banda. También podemos reescribir las ecuaciones correspondientes a las frecuencias de corte en función de la frecuencia central y del ancho de banda:

$$\omega_{c1} = -\frac{\beta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + \omega_o^2}, \quad (14.34)$$

$$\omega_{c2} = \frac{\beta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + \omega_o^2}. \quad (14.35)$$

Otras formas alternativas de estas ecuaciones nos permiten expresar las frecuencias de corte en función del factor de calidad y de la frecuencia central:

$$\omega_{c1} = \omega_o \cdot \left[ -\frac{1}{2Q} + \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q}\right)^2} \right], \quad (14.36)$$

$$\omega_{c2} = \omega_o \cdot \left[ \frac{1}{2Q} + \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q}\right)^2} \right]. \quad (14.37)$$

Véase también el Problema 14.11 del capítulo.

Los ejemplos que siguen ilustran el diseño de filtros paso banda, introducen otro circuito *RLC* que se comporta como un filtro paso banda y examinan el efecto que tiene la resistencia de la fuente sobre los parámetros característicos de un filtro paso banda *RLC* en serie.

### EJEMPLO 14.5 Diseño de un filtro paso banda

Un ecualizador gráfico es un amplificador de audio que permite seleccionar diferentes niveles de amplificación en las diferentes regiones de frecuencia. Utilizando el circuito *RLC* en serie de la Figura 14.19(a), seleccione valores para  $R$ ,  $L$  y

$C$  que permitan obtener un circuito paso banda capaz de seleccionar las señales de entrada comprendidas dentro de la banda de frecuencias 1-10 kHz. Dicho circuito podría utilizarse en un ecualizador gráfico para seleccionar esta banda de fre-

cuencias de entre la banda de audio (que tiene un tamaño mayor, generalmente de 0-20 kHz) antes de la amplificación.

### SOLUCIÓN

Necesitamos calcular valores para  $R$ ,  $L$  y  $C$  que generen un filtro paso banda con frecuencias de corte de 1 kHz y 10 kHz. Existen muchas formas posibles de obtener una solución. Por ejemplo, podríamos utilizar las Ecuaciones 14.29 y 14.30, que especifican  $\omega_{c1}$  y  $\omega_{c2}$  en términos de  $R$ ,  $L$  y  $C$ . Pero, debido a la forma de estas ecuaciones, las manipulaciones algebraicas correspondientes podrían resultar algo complicadas. En lugar de ello, vamos a utilizar el hecho de que la frecuencia central es la media geométrica de las frecuencias de corte para calcular  $\omega_o$  y luego usaremos la Ecuación 14.31 para hallar  $L$  y  $C$  a partir de  $\omega_o$ . Después, usaremos la definición del factor de calidad para calcular  $Q$  y por último emplearemos la Ecuación 14.33 para hallar  $R$ . Aunque este método requiere un mayor número de pasos de cálculo individuales, cada uno de los cálculos es relativamente simple.

Sea cual sea el método que utilicemos, sólo podremos obtener dos ecuaciones (que no son suficientes para hallar el valor de las tres incógnitas) debido a las dependencias existentes entre las características del filtro paso banda. Por tanto, deberemos seleccionar un valor para  $R$ ,  $L$  o  $C$  y utilizar las dos ecuaciones seleccionadas para calcular los restantes valores de componentes. Aquí, vamos a elegir  $1 \mu\text{F}$  como valor del condensador, ya que hay limitaciones más estrictas con respecto a los condensadores comercialmente disponibles que con respecto a las bobinas o resistencias.

Calculamos la frecuencia central como la media geométrica de las frecuencias de corte:

$$f_o = \sqrt{f_{c1} f_{c2}}$$

$$= \sqrt{(1000)(10.000)} = 3162,28 \text{ Hz.}$$

A continuación, hallamos el valor de  $L$  utilizando la frecuencia central obtenida y el valor

seleccionado de  $C$ . Es necesario convertir la frecuencia central a radianes por segundo antes de utilizar la Ecuación 14.31:

$$L = \frac{1}{\omega_o^2 C}$$

$$= \frac{1}{[2\pi(3162,28)]^2 (10^{-6})} = 2,533 \text{ mH.}$$

El factor de calidad,  $Q$ , se define como el cociente entre la frecuencia central y el ancho de banda. El ancho de banda es la diferencia entre los valores de las dos frecuencias de corte. Por tanto,

$$Q = \frac{f_o}{f_{c2} - f_{c1}}$$

$$= \frac{3162,28}{10.000 - 1000} = 0,3514.$$

Ahora utilizamos la Ecuación 14.33 para calcular  $R$ :

$$R = \sqrt{\frac{L}{CQ^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{0,0025}{(10^{-6})(0,3514)^2}} = 143,24 \Omega.$$

Para comprobar si estos valores de componentes generan el filtro paso banda deseado, sustituimos los valores en las Ecuaciones 14.29 y 14.30, y vemos que

$$\omega_{c1} = 6283,19 \text{ rad/s (1000 Hz),}$$

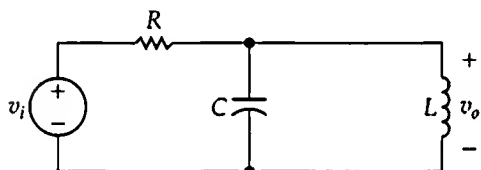
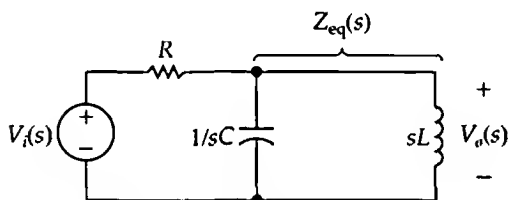
$$\omega_{c2} = 62.831,85 \text{ rad/s (10.000 Hz),}$$

que son las frecuencias de corte especificadas para el filtro.

Este ejemplo nos recuerda que sólo pueden especificarse de forma independiente dos de los cinco parámetros del filtro paso banda. Los otros tres parámetros siempre puede calcularse a partir de los dos especificados. A su vez, estos cinco valores de parámetros dependen de los tres valores de componentes  $R$ ,  $L$  o  $C$ , de los cuales sólo dos pueden especificarse de forma independiente.

**EJEMPLO 14.6** Diseño de un filtro paso banda *RLC* paralelo

- a) Demuestre que el circuito *RLC* de la Figura 14.22 es también un filtro paso banda hallando la expresión correspondiente a la función de transferencia  $H(s)$ .
- b) Calcule la frecuencia central,  $\omega_o$ .
- c) Calcule las frecuencias de corte,  $\omega_{c1}$  y  $\omega_{c2}$ , el ancho de banda,  $\beta$ , y el factor de calidad,  $Q$ .
- d) Calcule sendos valores de  $R$  y  $L$  que permitan obtener un filtro paso banda con una frecuencia central de 5 kHz y un ancho de banda de 200 Hz, utilizando un condensador de 5  $\mu\text{F}$ .

**Figura 14.22.** Circuito del Ejemplo 14.6.**Figura 14.23.** Equivalente en el dominio de  $s$  del circuito de la Figura 14.22.**SOLUCIÓN**

- a) Comenzamos dibujando el equivalente en el dominio de  $s$  del circuito de la Figura 14.22, equivalente que se muestra en la Figura 14.23. Aplicando la regla de la división de tensión, podemos hallar la función de transferencia para el circuito equivalente si calculamos primero la impedancia equivalente de la combinación en paralelo de  $L$  y  $C$ , identificada como  $Z_{eq}(s)$  en la Figura 14.23:

$$Z_{eq} = \frac{\frac{L}{s}}{sL + \frac{1}{sC}}$$

Ahora,

$$H(s) = \frac{\frac{s}{RC}}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}}$$

- b) Para hallar la frecuencia central,  $\omega_o$ , necesitamos calcular el punto en que el módulo de la función de transferencia es máximo. Haciendo la sustitución  $s = j\omega$  en  $H(s)$ ,

$$\begin{aligned} |H(j\omega)| &= \frac{\frac{\omega}{RC}}{\sqrt{\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{\omega}{RC}\right)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\omega RC - \frac{1}{\omega \frac{L}{R}}\right)^2}} \end{aligned}$$

El módulo de esta función de transferencia será máximo cuando el término

$$\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)^2$$

sea cero. Por tanto,

$$\omega_o = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

y

$$H_{\max} = |H(j\omega_o)| = 1.$$

- c) A las frecuencias de corte, el módulo de la función de transferencia será  $(1/\sqrt{2})H_{\max} = 1/\sqrt{2}$ . Sustituyendo esta constante en el lado izquierdo de la ecua-

ción del módulo y simplificando, obtenemos

$$\left[ \omega_c RC - \frac{1}{\omega_c \frac{L}{R}} \right] = \pm 1.$$

Elevando al cuadrado el lado izquierdo de esta ecuación obtenemos, de nuevo, dos ecuaciones cuadráticas para las frecuencias de corte, con cuatro soluciones. Sólo dos de las soluciones son positivas y tienen, por tanto, significado físico:

$$\omega_{c1} = -\frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 + \frac{1}{LC}},$$

$$\omega_{c2} = \frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 + \frac{1}{LC}}.$$

#### ✦ FRECUENCIAS DE CORTE PARA UN FILTRO *RLC* PARALELO

Calculamos el ancho de banda a partir de las frecuencias de corte:

$$\beta = \omega_{c2} - \omega_{c1} = \frac{1}{RC}.$$

Finalmente, utilizamos la definición del factor de calidad para calcular  $Q$ :

$$Q = \omega_o / \beta = \sqrt{\frac{R^2 C}{L}}.$$

Observe de nuevo que podemos especificar las frecuencias de corte de este filtro paso banda en términos de su frecuencia central y del ancho de banda:

$$\omega_{c1} = -\frac{\beta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + \omega_o^2},$$

$$\omega_{c2} = \frac{\beta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + \omega_o^2}.$$

- d) Utilicemos la ecuación del ancho de banda del apartado (c) para calcular un valor de  $R$ , dada una capacidad de  $5 \mu\text{F}$ . Acuérdesse de convertir el ancho de banda a las unidades apropiadas:

$$R = \frac{1}{\beta C} = \frac{1}{(2\pi)(200)(5 \times 10^{-6})} = 159,15 \Omega.$$

Utilizando el valor del condensador y la ecuación correspondiente a la frecuencia central del apartado (b), calculamos el valor de la bobina:

$$L = \frac{1}{\omega_o^2 C} = \frac{1}{[2\pi(5000)]^2 (5 \times 10^{-6})} = 202,64 \mu\text{H}.$$

### EJEMPLO 14.7 Determinación del efecto de una fuente de tensión no ideal sobre un filtro *RLC* paso banda

Para cada uno de filtros paso banda que hemos construido, hemos supuesto que se utilizaba una fuente de tensión ideal, es decir, una fuente de tensión sin resistencia en serie. Aunque esta suposición suele ser válida en muchas ocasiones, algunas veces no lo es, como en aquellos casos en que sólo puede diseñarse el filtro con valores de  $R$ ,  $L$  y  $C$  cuya impedancia equivalente tenga una magnitud parecida a la impedancia de la fuente de tensión. Vamos a examinar el efecto que tiene una resistencia de fuente distinta de cero,  $R_s$ ,

sobre las características de un filtro paso banda *RLC* en serie.

- Determine la función de transferencia del circuito de la Figura 14.24.
- Dibuje el diagrama de ganancia para el circuito de la Figura 14.24 utilizando los valores de  $R$ ,  $L$  y  $C$  del Ejemplo 14.5 y haciendo  $R_s = R$ . Dibuje en la misma gráfica el módulo de la función de transferencia para el circuito del Ejemplo 14.5, en el que  $R_s = 0$ .

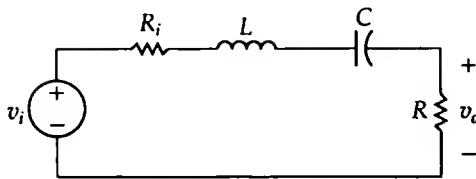


Figura 14.24. Circuito del Ejemplo 14.7.

### SOLUCIÓN

- a) Comenzamos transformando el circuito de la Figura 14.24 a su equivalente en el dominio de  $s$ , el cual se muestra en la Figura 14.25. A continuación usamos la regla de división de tensión para construir la función de transferencia:

$$H(s) = \frac{\frac{R}{L}s}{s^2 + \left(\frac{R+R_i}{L}\right)s + \frac{1}{LC}}.$$

Haciendo la sustitución  $s = j\omega$  y calculando el módulo de la función de transferencia, nos queda:

$$|H(j\omega)| = \frac{\frac{R}{L}\omega}{\sqrt{\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)^2 + \left(\omega \frac{R+R_i}{L}\right)^2}}.$$

La frecuencia central,  $\omega_o$ , es la frecuencia para la que el módulo de esta función de transferencia es máximo; dicha frecuencia es

$$\omega_o = \sqrt{\frac{1}{LC}}.$$

A la frecuencia central, el valor máximo del módulo es

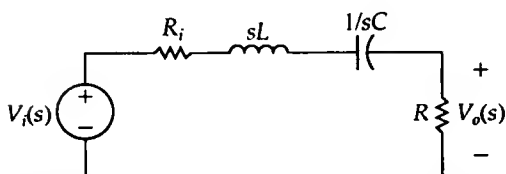


Figura 14.25. Equivalente en el dominio de  $s$  del circuito de la Figura 14.24.

$$H_{\max} = |H(j\omega_o)| = \frac{R}{R_i + R}.$$

Las frecuencias de corte pueden calcularse igualando el módulo de la función de transferencia a  $(1/\sqrt{2})H_{\max}$ :

$$\omega_{c1} = -\frac{R+R_i}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R+R_i}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}},$$

$$\omega_{c2} = \frac{R+R_i}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R+R_i}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}}.$$

El ancho de banda se calcula a partir de las frecuencias de corte:

$$\beta = \frac{R+R_i}{L}.$$

Finalmente, el factor de calidad puede obtenerse a partir de la frecuencia central y del ancho de banda:

$$Q = \frac{\sqrt{L/C}}{R+R_i}.$$

En este análisis, vemos que podemos escribir la función de transferencia del filtro paso banda RLC en serie con resistencia de fuente distinta de cero en la forma:

$$H(s) = \frac{K\beta s}{s^2 + \beta s + \omega_o^2},$$

donde

$$K = \frac{R}{R+R_i}$$

Observe que, cuando  $R_i = 0$ ,  $K = 1$  y la función de transferencia es

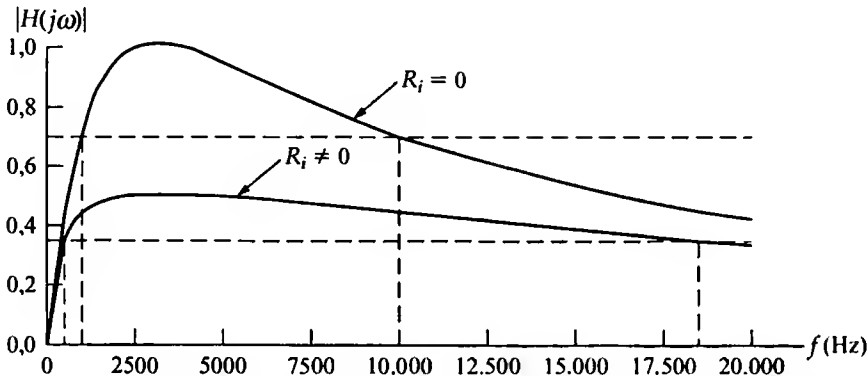
$$H(s) = \frac{\beta s}{s^2 + \beta s + \omega_o^2}$$

- b) El circuito del Ejemplo 14.5 tiene una frecuencia central de 3162,28 Hz y un ancho de banda de 9 kHz con  $H_{\max} = 1$ . Si usamos los mismos valores para  $R$ ,  $L$  y  $C$  en



el circuito de la Figura 14.24 y hacemos  $R_i = R$ , entonces la frecuencia central seguirá siendo de 3162,28 Hz, pero  $\beta = (R + R_i)/L = 18 \text{ kHz}$  y  $H_{\text{máx}} = R/(R + R_i) =$

1/2. El módulo de la función de transferencia para estos dos filtros paso banda se muestra en una misma gráfica en la Figura 14.26.



**Figura 14.26.** Gráficas del módulo para un filtro paso banda *RLC* en serie con resistencia de fuente igual a cero y resistencia de fuente distinta de cero.

Si comparamos los valores de los parámetros característicos para el filtro con  $R_i = 0$  y para el filtro con  $R_i \neq 0$ , vemos lo siguiente:

- Las frecuencias centrales son iguales.
- El valor máximo del módulo de la función de transferencia para el filtro con  $R_i \neq 0$  es menor que para el filtro con  $R_i = 0$ .
- El ancho de banda para el filtro con  $R_i \neq 0$  es mayor que para el filtro con  $R_i = 0$ . Por tanto, las frecuencias de corte y los factores de calidad para los dos circuitos también son diferentes.

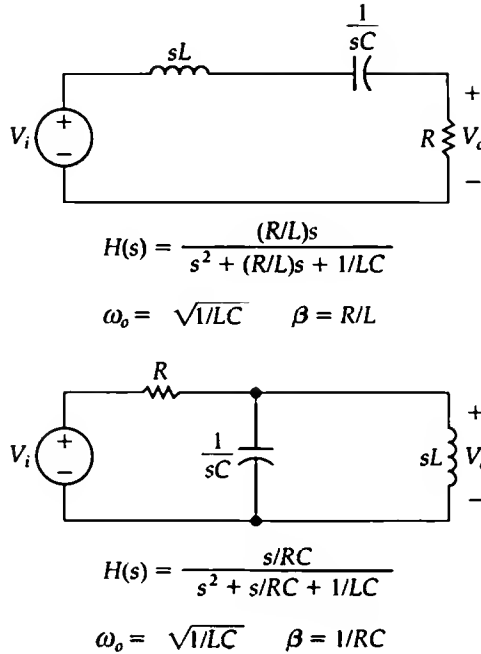
La adición de una resistencia de fuente distinta de cero a un filtro paso banda *RLC* en serie no modifica la frecuencia central, pero hace que la banda de paso se haga más grande y reduce el módulo de la función de transferencia dentro de la banda de paso.

Aquí nos encontramos con los mismos desafíos de diseño que ya vimos al añadir una resistencia de carga al filtro paso alto, es decir, que nos gustaría diseñar un filtro paso banda que tuviera las mismas propiedades de filtrado independientemente de la resistencia interna asociada con la fuente de tensión. Desafortunadamente, los filtros construidos a partir de elementos pasivos no pueden evitar que la acción de filtrado se vea modificada al añadir la resistencia de la fuente. En el Capítulo 15, veremos que los filtros activos no son sensibles a los cambios en la resistencia de la fuente y están, por tanto, mejor adaptados para aquellos diseños en los que este problema tenga importancia.

La Figura 14.27 resume lo relativo a los dos filtros paso banda *RLC* que hemos estudiado. Observe que las expresiones correspondientes a la función de transferencia de ambos circuitos tienen la misma forma. Como hemos hecho anteriormente, podemos enunciar una fórmula general para la función de transferencia de estos filtros paso banda:

➤ **FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA PARA UN FILTRO PASO BANDA *RLC***

$$H(s) = \frac{\beta s}{s^2 + \beta s + \omega_o^2} \quad (14.38)$$



**Figura 14.27.** Dos filtros paso banda *RLC*, junto con las ecuaciones de la función de transferencia, de la frecuencia central y del ancho de banda de cada uno.

Cualquier circuito que tenga una función de transferencia como la de la Ecuación 14.38 actuará como un filtro paso banda con una frecuencia central  $\omega_o$  y un ancho de banda  $\beta$ .

En el Ejemplo 14.7, hemos visto que la función de transferencia también puede escribirse en la forma

$$H(s) = \frac{K\beta s}{s^2 + \beta s + \omega_o^2} \quad (14.39)$$

donde los valores de  $K$  y  $\beta$  dependen de que la resistencia en serie de la fuente de tensión sea cero o distinta de cero.

## Relación entre el dominio de la frecuencia y el dominio del tiempo

Podemos identificar una relación entre los parámetros que caracterizan la respuesta en frecuencia de los filtros paso banda *RLC* y los parámetros que caracterizan la respuesta temporal de los circuitos *RLC*. Considere el circuito *RLC* en serie de la Figura 14.19(a). En el Capítulo 8 hemos descubierto que la respuesta natural de este circuito está caracterizada por la frecuencia de Neper ( $\alpha$ ) y por la frecuencia de resonancia ( $\omega_o$ ). Estos parámetros se expresaban en función de los componentes del circuito en las Ecuaciones 8.58 y 8.59; repetimos aquí las fórmulas correspondientes para mayor comodidad:

$$\alpha = \frac{R}{2L} \text{ rad/s}, \quad (14.40)$$

$$\omega_o = \sqrt{\frac{1}{LC}} \text{ rad/s}. \quad (14.41)$$

Vemos que se utiliza el mismo parámetro,  $\omega_0$ , para caracterizar tanto la respuesta temporal como la respuesta en frecuencia. Ésa es la razón por la que a la frecuencia central se la denomina también frecuencia de resonancia. El ancho de banda y la frecuencia de Neper están relacionados por la ecuación

$$\beta = 2\alpha. \quad (14.42)$$

Recuerde que la respuesta natural de un circuito *RLC* en serie puede ser subamortiguada, sobreamortiguada o críticamente amortiguada. La transición de sobreamortiguada a subamortiguada se produce cuando  $\omega_0^2 = \alpha^2$ . Considere la relación entre  $\alpha$  y  $\beta$  expresada en la Ecuación 14.42 y la definición de factor de calidad  $Q$ . La transición de una respuesta sobreamortiguada a otra subamortiguada se produce cuando  $Q = 1/2$ . Por tanto, un circuito cuya respuesta en frecuencia contenga un pico agudo en  $\omega_0$ , lo que indica un alto valor de  $Q$  y un ancho de banda pequeño, tendrá una respuesta natural subamortiguada. A la inversa, un circuito cuya respuesta en frecuencia tenga un gran ancho de banda y un bajo valor de  $Q$  tendrá una respuesta natural sobreamortiguada.

### Evaluación del objetivo 3

■ Conocer las configuraciones de circuito *RLC* que actúan como filtros paso banda

- 14.6.** Utilizando el circuito de la Figura 14.19(a), calcule los valores de  $R$  y  $L$  que permiten obtener un filtro paso banda con una frecuencia central de 12 kHz y un factor de calidad de 6. Utilice un condensador de  $0,1 \mu\text{F}$ .

**RESPUESTA**

$$L = 1,76 \text{ mH}, R = 22,10 \Omega.$$

- 14.7.** Utilizando el circuito de la Figura 14.22, calcule los valores de  $L$  y  $C$  que permiten obtener un filtro paso banda con una frecuencia central de 2 kHz y un ancho de banda de 500 Hz. Utilice una resistencia de  $250 \Omega$ .

**RESPUESTA**

$$L = 4,97 \text{ mH}, C = 1,27 \mu\text{F}.$$

- 14.8.** Calcule de nuevo los valores de los componentes para el circuito del Ejemplo 14.6(d) de modo que la respuesta en frecuencia del circuito resultante no varíe cuando se utilice un condensador de  $0,2 \mu\text{F}$ .

**RESPUESTA**

$$L = 5,07 \text{ mH}, R = 3,98 \text{ k}\Omega.$$

- 14.9.** Vuelva a calcular los valores de los componentes para el circuito del Ejemplo 14.6(d) de modo que el factor de calidad del circuito resultante no varíe pero la frecuencia central pase a ser de 2 kHz. Utilice un condensador de  $0,2 \mu\text{F}$ .

**RESPUESTA**

$$R = 9,95 \text{ k}\Omega, L = 31,66 \text{ mH}.$$

**NOTA** Trate también de resolver los Problemas 14.15 y 14.16 del capítulo.

## 14.5. Filtros de banda eliminada

Analizamos ahora la última de las cuatro categorías de filtro, los filtros de banda eliminada. Este filtro deja pasar hacia la salida las tensiones de fuente situadas fuera de la banda definida por las dos frecuencias de corte y atenúa las tensiones de fuente cuya frecuencia esté comprendida entre las dos frecuencias de corte. Por tanto, la banda de paso de estos filtros son todas las frecuencias que no están

comprendidas entre las dos frecuencias de corte. Los filtros paso banda y los filtros de banda eliminada realizan, por tanto, funciones complementarias en el dominio de la frecuencia.

Los filtros de banda eliminada se caracterizan por los mismos parámetros que los filtros paso banda: las dos frecuencias de corte, la frecuencia central, el ancho de banda y el factor de calidad. De nuevo, sólo dos de estos cinco parámetros puede especificarse de forma independiente.

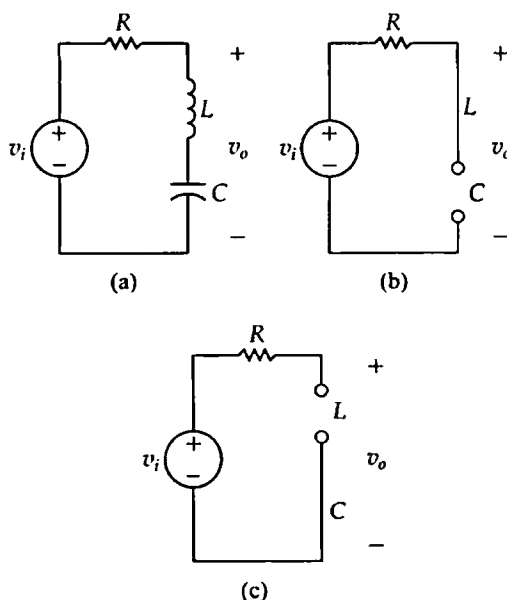
En las secciones siguientes, vamos a examinar dos circuitos que funcionan como filtros de banda eliminada y vamos a calcular las ecuaciones que relacionan los valores de los componentes de circuito con los parámetros característicos de cada circuito.

### Circuito *RLC* en serie: análisis cualitativo

La Figura 14.28(a) muestra un circuito *RLC* en serie. Aunque los componentes de circuito y las conexiones son idénticos a los del filtro paso banda *RLC* en serie de la Figura 14.19(a), el circuito de la Figura 14.28(a) tiene una diferencia importante: la tensión de salida se define ahora en bornes de la combinación formada por la bobina y el condensador. Como vimos en el caso de los filtros paso bajo y paso alto, el mismo circuito puede realizar dos diferentes funciones de filtrado, dependiendo de dónde se defina la tensión de salida.

Ya hemos indicado que para  $\omega = 0$  la bobina se comporta como un cortocircuito y el condensador como un circuito abierto, mientras que para  $\omega = \infty$  estos papeles se intercambian. La Figura 14.28(b) presenta el circuito equivalente para  $\omega = 0$ , mientras que la Figura 14.28(c) presenta el circuito equivalente para  $\omega = \infty$ . En ambos circuitos equivalentes, la tensión de salida se define sobre un circuito abierto, por lo que las tensiones de entrada y de salida tienen la misma magnitud. Este circuito de filtro de banda eliminada *RLC* en serie tiene, por tanto, dos bandas de paso: una por debajo de una frecuencia de corte inferior y la otra por encima de una frecuencia de corte superior.

Entre estas dos bandas de paso, tanto la bobina como el condensador tienen impedancias finitas y de signos opuestos. A medida que se incrementa la frecuencia a partir de cero, la impedancia de la bobi-



**Figura 14.28.** (a) Un filtro de banda eliminada *RLC* en serie. (b) Circuito equivalente para  $\omega = 0$ . (c) Circuito equivalente para  $\omega = \infty$ .

na se incrementa y la del condensador disminuye. Por tanto, el desplazamiento de fase entre la entrada y la salida se aproxima a  $-90^\circ$  a medida que  $\omega L$  se aproxima a  $1/\omega C$ . En cuanto  $\omega L$  supera el valor de  $1/\omega C$ , el desplazamiento de fase salta a  $+90^\circ$  y luego tiende a cero a medida que  $\omega$  continúa incrementándose.

Para alguna frecuencia comprendida entre las dos bandas de paso, las impedancias de la bobina y del condensador serán iguales pero de signo opuesto. Para esta frecuencia, la combinación en serie de la bobina y del condensador equivale a un cortocircuito, por lo que el módulo de la tensión de salida deberá ser cero. Ésta es la frecuencia central de este filtro de banda eliminada *RLC* en serie.

La Figura 14.29 muestra una gráfica de la respuesta en frecuencia del filtro de banda eliminada *RLC* en serie de la Figura 14.28(a). Hemos superpuesto al diagrama de ganancia la gráfica correspondiente a un filtro de banda eliminada ideal, extraída de la Figura 14.3(d). Nuestro análisis cualitativo confirma la forma de los diagramas de ganancia y de fase. Realicemos ahora un análisis cuantitativo del circuito para confirmar que ésta es la respuesta en frecuencia correcta y para calcular los valores de los parámetros que caracterizan esta respuesta.

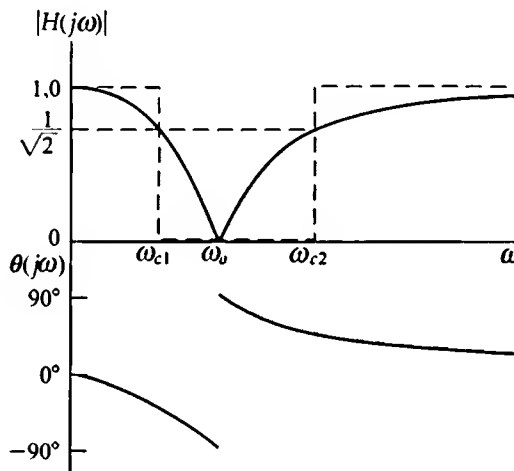


Figura 14.29. Gráfica de la respuesta en frecuencia para el circuito de filtro de banda eliminada *RLC* en serie de la Figura 14.28(a).

### Circuito *RLC* en serie: análisis cuantitativo

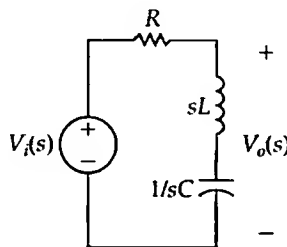


Figura 14.30. Equivalente en el dominio de  $s$  del circuito de la Figura 14.28(a).

Después de realizar la transformación al dominio de  $s$ , como se muestra en la Figura 14.30, utilizamos la regla de división de tensión para construir una ecuación para la función de transferencia:

$$H(s) = \frac{sL + \frac{1}{sC}}{R + sL + \frac{1}{sC}} = \frac{s^2 + \frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}. \quad (14.43)$$

Sustituyendo  $s$  por  $j\omega$  en la Ecuación 14.43, podemos generar sendas ecuaciones para el módulo y el ángulo de fase de la función de transferencia:

$$|H(j\omega)| = \frac{\left| \frac{1}{LC} - \omega^2 \right|}{\sqrt{\left( \frac{1}{LC} - \omega^2 \right)^2 + \left( \frac{\omega R}{L} \right)^2}}, \quad (14.44)$$

$$\theta(j\omega) = -\tan^{-1} \left( \frac{\frac{\omega R}{L}}{\frac{1}{LC} - \omega^2} \right). \quad (14.45)$$

Observe que las Ecuaciones 14.44 y 14.45 confirman la forma de la respuesta en frecuencia que se muestra en la Figura 14.29, forma que habíamos obtenido basándonos en un análisis meramente cualitativo.

Utilizamos el circuito de la Figura 14.30 para calcular la frecuencia central. Para el filtro de banda eliminada, la frecuencia central sigue definiéndose como la frecuencia para la cual la suma de las impedancias del condensador y la bobina es igual a cero. En el filtro paso banda, el módulo era máximo para la frecuencia central, pero en el filtro de banda eliminada, el módulo alcanza su mínimo para esta frecuencia. Esto se debe a que, en el filtro de banda eliminada, la frecuencia central no se encuentra dentro de la banda de paso. En lugar de ello, resulta fácil demostrar que la frecuencia central está dada por

$$\omega_o = \sqrt{\frac{1}{LC}}. \quad (14.46)$$

Sustituyendo la Ecuación 14.46 en la Ecuación 14.44, vemos que  $|H(j\omega_o)| = 0$ .

Las frecuencias de corte, el ancho de banda y el factor de calidad se definen, para el filtro de banda eliminada, de la misma manera que para los filtros paso banda. Calculamos las frecuencias de corte sustituyendo la constante  $(1/\sqrt{2})H_{\max}$  en el lado izquierdo de la Ecuación 14.44 y luego resolviendo la ecuación para hallar  $\omega_{c1}$  y  $\omega_{c2}$ . Observe que, para el filtro de banda eliminada,  $H_{\max} = |H(j0)| = |H(j\infty)|$  y para el filtro de banda eliminada  $RLC$  en serie de la Figura 14.28(a),  $H_{\max} = 1$ . Por tanto,

$$\omega_{c1} = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left( \frac{R}{2L} \right)^2 + \frac{1}{LC}}, \quad (14.47)$$

$$\omega_{c2} = \frac{R}{2L} + \sqrt{\left( \frac{R}{2L} \right)^2 + \frac{1}{LC}}. \quad (14.48)$$

Se pueden utilizar las frecuencias de corte para generar la ecuación correspondiente al ancho de banda,  $\beta$ :

$$\beta = R/L. \quad (14.49)$$

Finalmente, la frecuencia central y el ancho de banda nos permiten obtener la ecuación correspondiente al factor de calidad  $Q$ :

$$Q = \sqrt{\frac{L}{R^2 C}}. \quad (14.50)$$

De nuevo, podemos representar las dos frecuencias de corte en términos del ancho de banda y de la frecuencia central, como hicimos para el filtro paso banda:

$$\omega_{c1} = -\frac{\beta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + \omega_o^2}, \quad (14.51)$$

$$\omega_{c2} = \frac{\beta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + \omega_o^2}. \quad (14.52)$$

Las formas alternativas de estas ecuaciones expresan las frecuencias de corte en términos del factor de calidad y de la frecuencia central:

$$\omega_{c1} = \omega_o \cdot \left[ -\frac{1}{2Q} + \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q}\right)^2} \right]. \quad (14.53)$$

$$\omega_{c2} = \omega_o \cdot \left[ \frac{1}{2Q} + \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q}\right)^2} \right]. \quad (14.54)$$

El Ejemplo 14.8 ilustra el proceso de diseño de un filtro de banda eliminada *RLC* en serie.

#### EJEMPLO 14.8 Diseño de un filtro de banda eliminada *RLC* en serie

Utilizando el circuito *RLC* en serie de la Figura 14.28(a), calcule los valores de los componentes que permiten obtener un filtro de banda eliminada con un ancho de banda de 250 Hz y una frecuencia central de 750 Hz. Utilice un condensador de 100 nF. Calcule los valores correspondientes a  $R$ ,  $L$ ,  $\omega_{c1}$ ,  $\omega_{c2}$  y  $Q$ .

#### SOLUCIÓN

Comenzamos utilizando la definición de factor de calidad para calcular su valor para este filtro:

$$Q = \omega_o / \beta = 3.$$

Utilizando la Ecuación 14.46, hallamos el valor de  $L$ , acordándonos de convertir  $\omega_o$  a radianes por segundo:

$$L = \frac{1}{\omega_o^2 C} = \frac{1}{[2\pi(750)]^2 (100 \times 10^{-9})} = 450 \text{ mH}.$$

Aplicamos la Ecuación 14.49 para calcular  $R$ :

$$R = \beta L = 2\pi(250)(450 \times 10^{-3}) = 707 \, \Omega.$$

Los valores de la frecuencia central y del ancho de banda pueden usarse en las Ecuaciones 14.51 y 14.52 para calcular las dos frecuencias de corte:

$$\omega_{c1} = -\frac{\beta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + \omega_o^2} = 3992,0 \text{ rad/s},$$

$$\omega_{c2} = \frac{\beta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + \omega_o^2} = 5562,8 \text{ rad/s}.$$

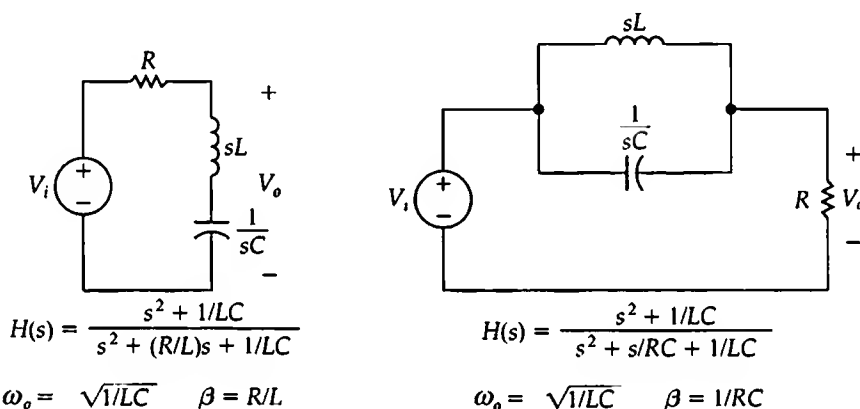
Las frecuencias de corte son 635,3 Hz y 885,3 Hz. Su diferencia es  $885,3 - 635,3 = 250$  Hz, lo que confirma el ancho de banda especificado. La media geométrica es  $\sqrt{(635,3)(885,3)} = 750$  Hz, lo que confirma la frecuencia central especificada.

Como el lector estará sospechando, otra configuración con la que puede construirse un filtro de banda eliminada es un circuito  $RLC$  paralelo. Aunque vamos a dejar los detalles del análisis del circuito  $RLC$  paralelo para el Problema 14.23, los resultados se resumen en la Figura 14.31, junto con los correspondientes al filtro de banda eliminada  $RLC$  en serie. Como hemos hecho para las otras categorías de filtros, podemos enunciar una forma general de la función de transferencia de un filtro de banda eliminada, sustituyendo los términos constantes por  $\beta$  y  $\omega_o$ :

➤ **FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA  
PARA UN FILTRO DE BANDA  
ELIMINADA  $RLC$**

$$H(s) = \frac{s^2 + \omega_o^2}{s^2 + \beta s + \omega_o^2} \quad (14.55)$$

La Ecuación 14.55 resulta muy útil en el diseño de filtros, porque cualquier circuito que tenga una función de transferencia de esta forma puede utilizarse como filtro de banda eliminada.



**Figura 14.31.** Dos filtros de banda eliminada  $RLC$  junto con las ecuaciones de la función de transferencia, de la frecuencia central y del ancho de banda.

### Evaluación del objetivo 4

- Conocer las configuraciones de circuito  $RLC$  que actúan como filtros de banda eliminada.
- 14.10.** Seleccione valores de componentes para el filtro de banda eliminada  $RLC$  en serie mostrado en la Figura 14.28(a) de modo que la frecuencia central sea de 4 kHz y el factor de calidad sea igual a 5. Utilice un condensador de 500 nF.

**RESPUESTA**

$L = 3,17 \text{ mH}, R = 14,92 \Omega$ .

**14.11.** Vuelva a calcular los valores de componentes para el Problema de evaluación 14.10 con el fin de obtener un filtro de banda eliminada cuya frecuencia central sea de 20 kHz. El filtro tiene una resistencia de 100  $\Omega$ . El factor de calidad sigue siendo 5.

**RESPUESTA**

$L = 3,98 \text{ mH}, C = 15,92 \text{ nF}$ .

**NOTA** Trate también de resolver los Problemas 14.24 y 14.25 del capítulo.

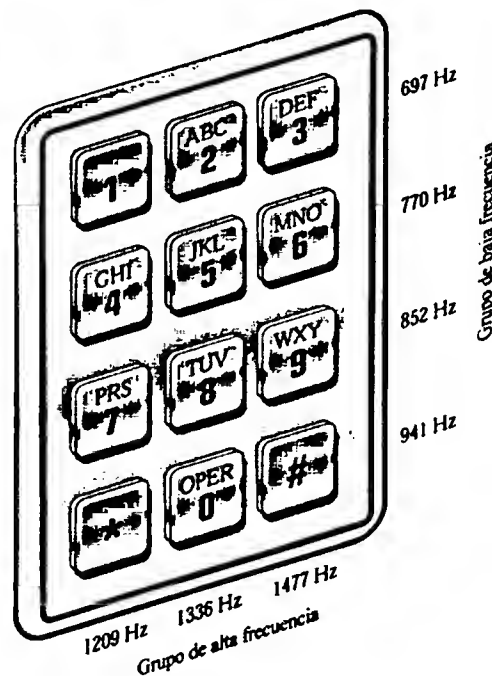


## Perspectiva práctica

### Circuitos telefónicos de marcación por tonos

En la sección de Perspectiva práctica del principio del capítulo, hemos descrito el sistema de multifrecuencia de doble tono (DTMF) utilizado para señalar que se ha presionado un botón en un teléfono de marcación por tonos. Un elemento clave del sistema DTMF es el receptor DTMF, un circuito que decodifica los tonos producidos al pulsar un botón y determina qué botón se ha pulsado.

Para diseñar un receptor DTMF, necesitamos comprender mejor cómo funciona dicho sistema. Como puede ver en la Figura 14.32, los botones del teléfono están organizados en filas y columnas. La pareja de tonos que se generan al pulsar un botón depende de la fila y columna en las que el botón esté situado. La fila del botón determina su tono de baja frecuencia y la columna del botón determina su tono de alta frecuencia<sup>1</sup>. Por ejemplo, presionando el botón «6» se generan sendos tonos sinusoidales de frecuencias 770 Hz y 1477 Hz.



**Figura 14.32.** Tonos generados por las filas y columnas de los pulsadores de marcación telefónica.

En la central telefónica, una serie de filtros paso banda contenidos en el receptor DTMF detecta en primer lugar si hay presentes simultáneamente dos tonos pertenecientes al grupo de baja y de alta frecuencia. Esta comprobación permite rechazar muchas señales de audio espurias que no son tonos DTMF. Si hay presentes tonos en ambas bandas, se utilizan otros filtros para seleccionar entre los posibles tonos de cada banda, de modo que puedan decodificarse las frecuencias y ver a qué botón corresponde la señal. Se realiza también una serie de comprobaciones adicionales para evitar la falsa detección de pulsaciones de botón. Por ejemplo, sólo se permite la presencia de un tono por cada una

<sup>1</sup> Hay reservado un cuarto tono de alta frecuencia, de 1633 Hz. Este tono se usa de manera infrecuente y no puede generarse mediante un teléfono estándar de 12 botones.

de las dos bandas de frecuencias; asimismo, el inicio y el fin del tono de alta frecuencia deben estar separados como máximo unos pocos milisegundos con respecto a los del tono de baja frecuencia; finalmente, las amplitudes de señal en la banda baja y en la banda alta deben estar suficientemente próximas.

Puede que se esté preguntando por qué se utilizan filtros paso banda en lugar de un filtro paso alto para el grupo de alta frecuencia de tonos DTMF y un filtro paso bajo para el grupo de baja frecuencia de tonos DTMF. La razón es que el sistema telefónico utiliza frecuencias situadas fuera de la banda de 300-3 kHz para otros propósitos de señalización, como por ejemplo hacer sonar el timbre del teléfono. Los filtros paso banda impiden que el receptor DTMF detecte erróneamente esas otras señales como válidas.

**NOTA** *Evalúe su comprensión de esta Perspectiva práctica intentando resolver los Problemas 14.31-14.32 del capítulo.*

## RESUMEN

- Un **circuito de frecuencia selectiva** o **filtro** permite que las señales de ciertas frecuencias pasen hacia la salida y atenúa las señales de otras frecuencias, impidiéndoles alcanzar la salida. La **banda de paso** está compuesta por las frecuencias de aquellas señales que se dejan pasar; la **banda eliminada** está compuesta por las frecuencias de aquellas señales que son atenuadas (véase la página 686).
- La **frecuencia de corte**,  $\omega_c$ , identifica la ubicación en el eje de frecuencias del punto que separa la banda de paso de la banda eliminada. A la frecuencia de corte, el módulo de la función de transferencia es igual a  $(1/\sqrt{2})H_{\text{máx}}$  (véase la página 690).
- Un **filtro paso bajo** deja pasar las señales cuya frecuencia está por debajo de  $\omega_c$  y atenúa las frecuencias situadas por encima de  $\omega_c$ . Todo circuito con la función de transferencia

$$H(s) = \frac{\omega_c}{s + \omega_c}$$

funciona como filtro paso bajo (véase la página 696).

- Un **filtro paso alto** deja pasar las señales cuya frecuencia sea superior a  $\omega_c$  y atenúa aquellas cuya frecuencia está situada por

debajo de  $\omega_c$ . Todo circuito con la función de transferencia

$$H(s) = \frac{s}{s + \omega_c}$$

funciona como filtro paso alto (véase la página 702).

- Tanto los filtros paso banda como los filtros de banda eliminada tienen dos frecuencias de corte,  $\omega_{c1}$  y  $\omega_{c2}$ . Estos filtros se caracterizan además por su **frecuencia central** ( $\omega_o$ ), su **ancho de banda** ( $\beta$ ) y su **factor de calidad** ( $Q$ ). Estas magnitudes se definen como

$$\omega_o = \sqrt{\omega_{c1} \cdot \omega_{c2}},$$

$$\beta = \omega_{c2} - \omega_{c1},$$

$$Q = \omega_o / \beta.$$

(Véase las páginas 707–708).

- Un **filtro paso banda** deja pasar las señales cuya frecuencia está comprendida dentro de la banda de paso, es decir, entre  $\omega_{c1}$  y  $\omega_{c2}$ . El filtro atenúa las frecuencias situadas fuera de la banda de paso. Todo circuito con la función de transferencia

$$H(s) = \frac{\beta s}{s^2 + \beta s + \omega_o^2}$$

funciona como filtro paso banda (véase la página 679).

- Un filtro de banda eliminada atenúa las señales cuya frecuencia está comprendida dentro de la banda eliminada, es decir, entre  $\omega_{c1}$  y  $\omega_{c2}$ . El filtro deja pasar las frecuencias situadas fuera de la banda eliminada. Todo circuito con la función de transferencia

$$H(s) = \frac{s^2 + \omega_o^2}{s^2 + \beta s + \omega_o^2},$$

funciona como filtro de banda eliminada (véase la página 720).

- Si se conecta una carga a la salida de un filtro pasivo, se cambian las propiedades de filtrado, alterando la ubicación y la anchura de la banda de paso. Si sustituimos una fuente ideal de tensión por otra cuya resistencia de fuente sea distinta de cero, también se cambian las propiedades de filtrado del resto del circuito, de nuevo alterando la ubicación y la anchura de la banda de paso (véanse las páginas 711-712).

## PROBLEMAS

- 14.1.** a) Calcule la frecuencia de corte en hercios para el filtro  $RL$  mostrado en la Figura P14.1.  
 b) Calcule  $H(j\omega)$  para  $\omega_c$ ,  $0,2\omega_c$  y  $5\omega_c$ .  
 c) Si  $v_i = 10 \cos \omega t$  V, escriba la ecuación de régimen permanente para  $v_o$  cuando  $\omega = \omega_c$ ,  $\omega = 0,2\omega_c$  y  $\omega = 5\omega_c$ .
- 14.2.** Utilice una bobina de 5 mH para diseñar un filtro pasivo  $RL$  paso bajo con una frecuencia de corte de 1 kHz.
- ◆
- a) Especifique el valor de la resistencia.  
 b) Conectamos una carga con una resistencia de  $270 \Omega$  en paralelo con los terminales de salida del filtro. ¿Cuál es la frecuencia de corte, en hercios, del filtro con carga?
- 14.3.** Añadimos una resistencia, que denominaremos  $R_i$ , en serie con la bobina del circuito de la Figura 14.4(a). El nuevo circuito de filtro paso bajo se muestra en la Figura P14.3.
- a) Determine la expresión correspondiente a  $H(s)$ , donde  $H(s) = V_o/V_i$ .  
 b) ¿Para qué frecuencia será máximo el módulo de  $H(j\omega)$ ?  
 c) ¿Cuál es el valor máximo del módulo de  $H(j\omega)$ ?  
 d) ¿Para qué frecuencia será el módulo de  $H(j\omega)$  igual a su máximo valor dividido por  $\sqrt{2}$ ?  
 e) Suponga que añadimos una resistencia de  $75 \Omega$  en serie con la bobina de 10 mH del circuito de la Figura P14.1. Calcule  $\omega_c$ ,  $H(j0)$ ,  $H(j\omega_c)$ ,  $H(j0,3\omega_c)$  y  $H(j3\omega_c)$ .

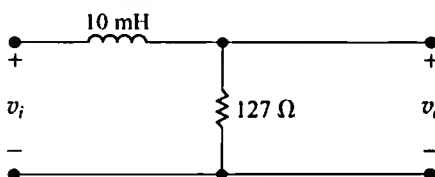


Figura P14.1

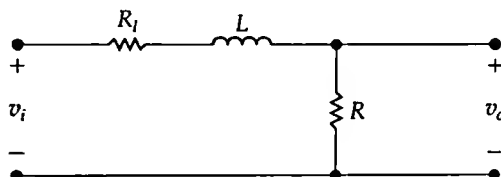


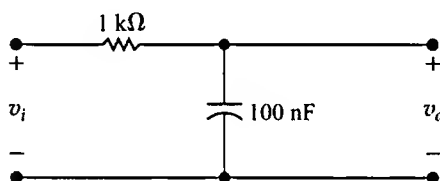
Figura P14.3

- 14.4.** a) Calcule la frecuencia de corte (en hercios) del filtro paso bajo mostrado en la Figura P14.4.  
 b) Calcule  $H(j\omega)$  para  $\omega_c$ ,  $0,1\omega_c$  y  $10\omega_c$ .

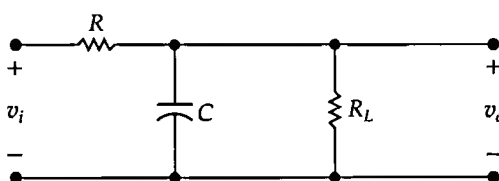
- c) Si  $v_i = 200 \cos \omega t$  mV, escriba la ecuación de régimen permanente para  $v_o$  cuando  $\omega = \omega_c$ ,  $0,1\omega_c$  y  $10\omega_c$ .

**14.5.** Conectamos una resistencia, que designaremos por  $R_L$ , en paralelo con el condensador del circuito de la Figura 14.7. El correspondiente circuito de filtro paso bajo con carga se muestra en la Figura P14.5.

- Determine la expresión correspondiente a la función de transferencia de tensión  $V_o/V_i$ .
- ¿Para qué frecuencias será máximo el módulo de  $H(j\omega)$ ?
- ¿Cuál es el máximo valor del módulo de  $H(j\omega)$ ?
- ¿Para qué frecuencia será el módulo de  $H(j\omega)$  igual a su máximo valor dividido por  $\sqrt{2}$ ?
- Suponga que añadimos una resistencia de  $10 \text{ k}\Omega$  en paralelo con el condensador de  $100 \text{ nF}$  del circuito de la Figura P14.4. Calcule  $\omega_c$ ,  $H(j0)$ ,  $H(j\omega_c)$ ,  $H(j0,1\omega_c)$  y  $H(j10\omega_c)$ .



**Figura P14.4**



**Figura P14.5**

**14.6.** Utilice un condensador de  $0,5 \mu\text{F}$  para diseñar un filtro pasivo paso bajo con una frecuencia de corte de  $50 \text{ krad/s}$ .

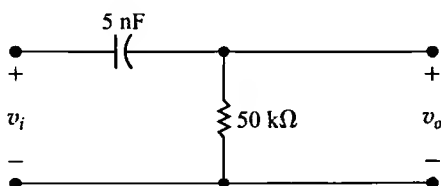


- Especifique la frecuencia de corte en hercios.
- Especifique el valor de la resistencia del filtro.
- Suponga que la frecuencia de corte no puede incrementarse más de un 5%. ¿Cuál es el valor más pequeño de resistencia de carga que podemos conectar a los terminales de salida del filtro?
- Si conectamos la resistencia calculada en el apartado (c) entre los terminales de salida, ¿cuál será el módulo de  $H(j\omega)$  cuando  $\omega = 0$ ?

**14.7.** a) Calcule la frecuencia de corte (en hercios) para el filtro paso alto mostrado en la Figura P14.7.

b) Calcule  $H(j\omega)$  para  $\omega_c$ ,  $0,2\omega_c$  y  $5\omega_c$ .

c) Si  $v_i = 500 \cos \omega t$  mV, escriba la ecuación de régimen permanente para  $v_o$  cuando  $\omega = \omega_c$ ,  $\omega = 0,2\omega_c$  y  $\omega = 5\omega_c$ .



**Figura P14.7**

**14.8.** Conectamos una resistencia, que designaremos por  $R_c$ , en serie con el condensador del circuito de la Figura 14.10(a). El nuevo circuito de filtro paso alto se muestra en la Figura P14.8.

- Determine la expresión correspondiente a  $H(s)$  cuando  $H(s) = V_o/V_i$ .

- b) ¿Para qué frecuencias será máximo el módulo de  $H(j\omega)$ ?
- c) ¿Cuál es el máximo valor del módulo de  $H(j\omega)$ ?
- d) ¿Para qué frecuencia será el módulo de  $H(j\omega)$  igual a su máximo valor dividido por  $\sqrt{2}$ ?
- e) Suponga que conectamos una resistencia de  $12,5 \text{ k}\Omega$  en serie con el condensador de  $5 \text{ nF}$  del circuito de la Figura P14.7. Calcule  $\omega_c$ ,  $H(j\omega_c)$ ,  $H(j0,2\omega_c)$  y  $H(j5\omega_c)$ .

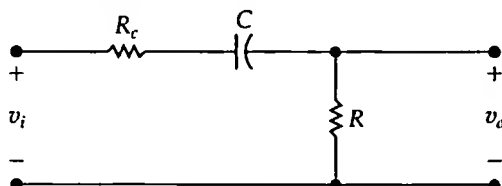


Figura P14.8

- 14.9.** Utilizando un condensador de  $100 \text{ nF}$ , diseñe un filtro pasivo paso alto con una frecuencia de corte de  $300 \text{ Hz}$ .
- ☐ a) Especifique el valor de  $R$  en kilohmios.
- ☐ b) Conectamos una resistencia de  $47 \text{ k}\Omega$  a los terminales de salida del filtro. ¿Cuál es la frecuencia de corte, en hercios, del filtro con carga?
- 14.10.** Utilizando una bobina de  $5 \text{ mH}$ , diseñe un filtro pasivo  $RL$  paso alto con una frecuencia de corte de  $25 \text{ krad/s}$ .
- ☐ a) Especifique el valor de la resistencia.
- ☐ b) Suponga que conectamos el filtro a una carga puramente resistiva. La frecuencia de corte no debe bajar de  $24 \text{ krad/s}$ . ¿Cuál es la resistencia de carga más pequeña que podemos conectar a los terminales de salida del filtro?
- 14.11.** Demuestre que las formas alternativas de las ecuaciones correspondientes a las frecuencias de corte de un filtro paso banda, dadas en las Ecuaciones 14.36 y 14.37, pueden obtenerse a partir de las Ecuaciones 14.34 y 14.35.
- 14.12.** Calcule la frecuencia central, el ancho de banda y el factor de calidad de un filtro paso banda con una frecuencia de corte superior de  $121 \text{ krad/s}$  y una frecuencia de corte inferior de  $100 \text{ krad/s}$ .
- 14.13.** Un filtro paso banda tiene una frecuencia central o de resonancia de  $50 \text{ krad/s}$  y un factor de calidad igual a  $4$ . Calcule el ancho de banda, la frecuencia de corte superior y la frecuencia de corte inferior. Exprese todas las respuestas en kilohercios.
- 14.14.** Utilice un condensador de  $5 \text{ nF}$  para diseñar un filtro paso banda  $RLC$  en serie, como el mostrado en la parte superior de la Figura 14.27. La frecuencia central del filtro es de  $8 \text{ kHz}$  y el factor de calidad es  $2$ .
- ☐ a) Especifique los valores de  $R$  y  $L$ .
- ☐ b) ¿Cuál es la frecuencia de corte inferior en kilohercios?
- ☐ c) ¿Cuál es la frecuencia de corte superior en kilohercios?
- ☐ d) ¿Cuál es el ancho de banda del filtro en kilohercios?
- 14.15.** Para el filtro paso banda mostrado en la Figura P14.15, calcule (a)  $\omega_o$ , (b)  $f_o$ , (c)  $Q$ , (d)  $\omega_{c1}$ , (e)  $f_{c1}$ , (f)  $\omega_{c2}$ , (g)  $f_{c2}$  y (h)  $\beta$ .
- ☐

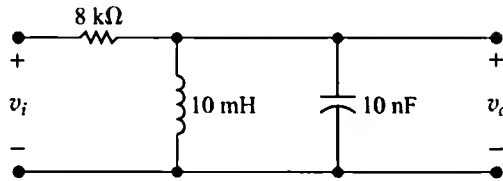


Figura P14.15

- 14.16. Utilizando un condensador de 50 nF en el circuito paso banda mostrado en la Figura 14.22, diseñe un filtro con un factor de calidad igual a 5 y una frecuencia central de 20 krad/s.



- Especifique los valores numéricos de  $R$  y  $L$ .
- Calcule las frecuencias de corte superior e inferior en kilohercios.
- Calcule el ancho de banda en hercios.

- 14.17. Para el filtro paso banda mostrado en la Figura P14.17, calcule los valores siguientes: (a)  $f_o$ , (b)  $Q$ , (c)  $f_{c1}$ , (d)  $f_{c2}$  y (e)  $\beta$ .

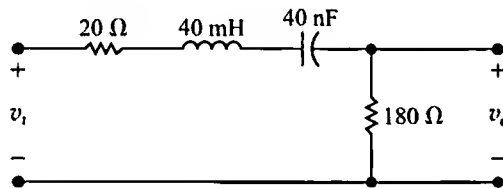


Figura P14.17

- 14.18. La tensión de entrada en el circuito de la Figura P14.17 es  $500 \cos \omega t$  mV. Calcule la tensión de salida cuando (a)  $\omega = \omega_o$ , (b)  $\omega = \omega_{c1}$  y (c)  $\omega = \omega_{c2}$ .
- 14.19. La Figura P14.19 muestra el diagrama de bloques de un sistema compuesto por una fuente de tensión sinusoidal, un filtro paso banda  $RLC$  en serie y una carga. La impedancia interna de la fuente sinusoidal es  $80 + j0 \Omega$  y la impedancia de la carga es  $480 + j0 \Omega$ .

El filtro paso banda  $RLC$  en serie tiene un condensador de 20 nF, una frecuencia central de 50 krad/s y un factor de calidad de 6,25.

- Dibuje un diagrama de circuito del sistema.
- Especifique los valores numéricos de  $L$  y  $R$  para la sección de filtro del sistema.
- ¿Cuál es el factor de calidad del sistema completo?
- ¿Cuál es el ancho de banda (en hercios) del sistema completo?

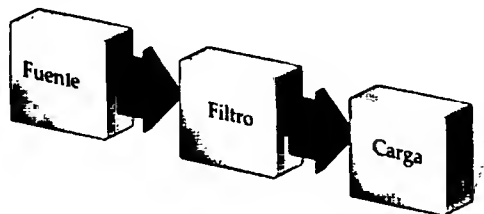


Figura P14.19

- 14.20. El propósito de este problema es investigar cómo afecta una carga resistiva conectada a los terminales de salida del filtro paso banda de la Figura 14.19 al factor de calidad y, por tanto, al ancho de banda del sistema de filtrado. El circuito de filtro con carga se muestra en la Figura P14.20.

- Determine la función de transferencia  $V_o/V_i$  para el circuito mostrado en la Figura P14.20.

- b) ¿Cuál es la expresión correspondiente al ancho de banda del sistema?
- c) ¿Cuál es la expresión correspondiente al ancho de banda con carga ( $\beta_L$ ) en función del ancho de banda sin carga ( $\beta_U$ )?
- d) ¿Cuál es la expresión correspondiente al factor de calidad del sistema?
- e) ¿Cuál es la expresión correspondiente al factor de calidad con carga ( $Q_L$ ) en función del factor de calidad sin carga ( $Q_U$ )?
- f) ¿Cuáles son las expresiones correspondientes a las frecuencias de corte  $\omega_{c1}$  y  $\omega_{c2}$ ?

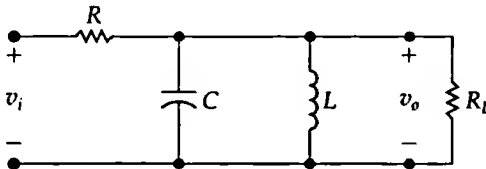


Figura P14.20

**14.21.** Considere el circuito mostrado en la Figura P14.21.



- a) Calcule  $\omega_o$ .
- b) Calcule  $\beta$ .
- c) Calcule  $Q$ .
- d) Calcule la expresión en régimen permanente para  $v_o$  cuando  $v_i = 250 \cos \omega_o t$  mV.
- e) Demuestre que, si expresamos  $R_L$  en kilohmios, la  $Q$  del circuito de la Figura P14.21 es

$$Q = \frac{20}{1 + 100/R_L}$$

- f) Dibuje  $Q$  en función de  $R_L$  para  $20 \text{ k}\Omega \leq R_L \leq 2 \text{ M}\Omega$ .

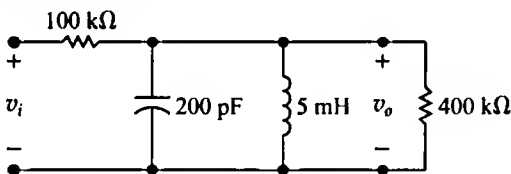


Figura P14.21

**14.22.** Los parámetros del circuito de la Figura P14.21 son  $R = 2,4 \text{ k}\Omega$ ,  $C = 50 \text{ pF}$  y  $L = 2 \text{ }\mu\text{H}$ . El factor de calidad del circuito no debe bajar de 7,5. ¿Cuál es el valor más pequeño admisible de la resistencia de carga  $R_L$ ?

- 14.23.** a) Demuestre (mediante un análisis cualitativo) que el circuito de la Figura P14.23 es un filtro de banda eliminada.
- b) Complemente el análisis cualitativo del apartado (a) hallando la función de transferencia de tensión para el filtro.
- c) Determine la expresión correspondiente a la frecuencia central del filtro.
- d) Determine las expresiones correspondientes a las frecuencias de corte  $\omega_{c1}$  y  $\omega_{c2}$ .
- e) ¿Cuál es la expresión correspondiente al ancho de banda del filtro?
- f) ¿Cuál es la expresión correspondiente al factor de calidad del circuito?

**14.24.** Para el filtro de banda eliminada de la Figura P14.24, calcule (a)  $\omega_o$ , (b)  $f_o$ , (c)  $Q$ , (d)  $\omega_{c1}$ , (e)  $f_{c1}$ , (f)  $\omega_{c2}$ , (g)  $f_{c2}$  y (h)  $\beta$  en kilohercios.



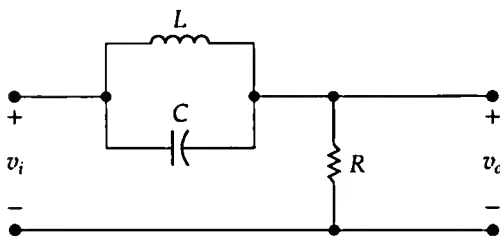


Figura P14.23

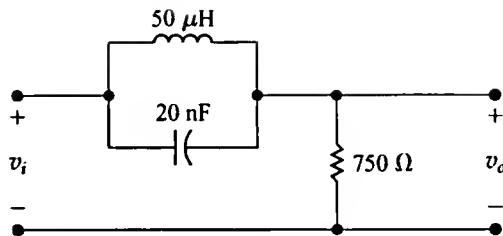


Figura P14.24

14.25. Utilice un condensador de  $0,5 \mu\text{F}$  para diseñar un filtro de banda eliminada como el que se muestra en la Figura P14.25. El filtro debe tener una frecuencia central de  $4 \text{ kHz}$  y un factor de calidad igual a 5.



- Especifique los valores numéricos de  $R$  y  $L$ .
- Calcule las frecuencias de corte superior e inferior en kilohercios.
- Calcule el ancho de banda del filtro en hercios.

14.26. Suponga que cargamos el filtro de banda eliminada del Problema 14.25 con una resistencia de  $1 \text{ k}\Omega$ .



- ¿Cuál será el factor de calidad del circuito con carga?
- ¿Cuál es el ancho de banda (en kilohercios) del circuito con carga?
- ¿Cuál es la frecuencia de corte superior en kilohercios?
- ¿Cuál es la frecuencia de corte inferior en kilohercios?

14.27. El propósito de este problema es investigar cómo afecta al comportamiento del filtro una carga resistiva conectada a los terminales de salida del filtro de banda eliminada que se muestra en la Figura 14.28(a). El circuito de filtro con carga se ilustra en la Figura P14.27.

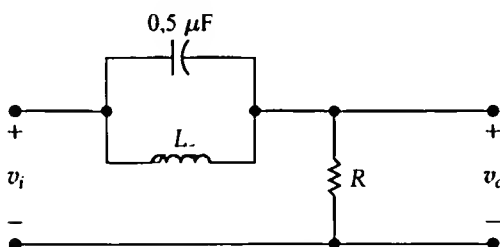


Figura P14.25

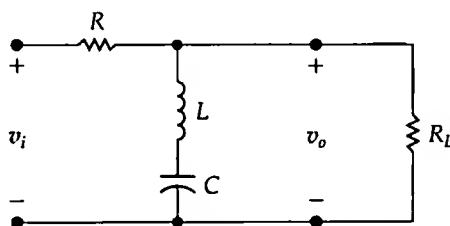


Figura P14.27

- Determine la función de transferencia de tensión  $V_o/V_i$ .
- ¿Cuál es la expresión correspondiente a la frecuencia central?
- ¿Cuál es la expresión correspondiente al ancho de banda?
- ¿Cuál es la expresión correspondiente al factor de calidad?
- Evalúe  $H(j\omega_o)$ .
- Evalúe  $H(j0)$ .
- Evalúe  $H(j\infty)$ .
- ¿Cuáles son las expresiones correspondientes a las frecuencias de corte  $\omega_{c1}$  y  $\omega_{c2}$ ?



**14.28.** Los parámetros del circuito de la Figura P14.27 son  $R = 30 \, \Omega$ ,  $L = 1 \, \mu\text{H}$ ,  $C = 4 \, \text{pF}$  y  $R_L = 150 \, \Omega$ .



- Calcule  $\omega_0$ ,  $\beta$  (en megahercios) y  $Q$ .
- Calcule  $H(j0)$  y  $H(j\infty)$ .
- Calcule  $f_{c1}$  y  $f_{c2}$ .
- Demuestre que, si expresamos  $R_L$  en ohmios, la  $Q$  del circuito es

$$Q = \frac{50}{3} [1 + (30/R_L)]$$

- Dibuje  $Q$  en función de  $R_L$  para  $10 \leq R_L \leq 300 \, \Omega$ .

**14.29.** La carga en el circuito de filtro de banda eliminada mostrado en la Figura P14.27 es de  $36 \, \text{k}\Omega$ . La frecuencia central del filtro es de  $1 \, \text{Mrad/s}$  y el condensador tiene un valor de  $400 \, \text{pF}$ . A frecuencias muy altas y muy bajas, la amplitud de la tensión sinusoidal de salida debe ser igual o superior al 96% de la amplitud de la tensión sinusoidal de entrada.



- Especifique los valores numéricos de  $R$  y  $L$ .
- ¿Cuál es el factor de calidad del circuito?

**14.30.** Dada la siguiente función de transferencia de tensión:

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{10^{10}}{s^2 + 50.000s + 10^{10}}$$

- ¿Para qué frecuencias (en radianes por segundo) será igual a la unidad el cociente  $V_o/V_i$ ?
- ¿Para qué frecuencia será máximo dicho cociente?

**14.31.** Diseñe un filtro paso banda  $RLC$  en serie (véase la Figura 14.27) para detectar el tono de baja frecuencia generado al pulsar el botón de un teléfono, como se ilustra en la Figura 14.32.



- Calcule los valores de  $L$  y  $C$  que permiten situar las frecuencias de corte en los bordes de la banda DTMF de baja frecuencia. Tenga en cuenta que la resistencia en los circuitos telefónicos estándar es siempre  $R = 600 \, \Omega$ .
- ¿Cuál es la amplitud de salida de este circuito en cada una de las frecuencias de la banda baja, en relación con la amplitud de pico del filtro paso banda?
- ¿Cuál es la amplitud de salida de este circuito para la frecuencia más baja de la banda superior?

**14.32.** Diseñe un filtro paso banda DTMF para la banda alta similar al filtro para la banda baja que hemos diseñado en el Problema 14.31. Asegúrese de incluir el cuarto tono de alta frecuencia, de  $1633 \, \text{Hz}$ , en el diseño. ¿Cuál es la amplitud de la respuesta del filtro para el mayor de los tonos DTMF de baja frecuencia?



**14.33.** La señal de  $20 \, \text{Hz}$  que hace sonar el timbre del teléfono tiene que tener una amplitud muy grande para producir una señal de llamada de intensidad suficiente. Determine la máxima amplitud de la señal de llamada, en relación con la señal DTMF de la banda baja, de modo que la respuesta del filtro del Problema 14.31 produzca una amplitud que no sea superior a la mitad de la amplitud del tono DTMF de mayor amplitud.



# CAPÍTULO

# 15

# Filtros activos

## Contenido del capítulo

- 15.1. Filtros paso bajo y paso alto de primer orden
- 15.2. Cambio de escala
- 15.3. Filtros paso banda y de banda eliminada con amplificador operacional
- 15.4. Filtros de orden superior basados en amplificador operacional
- 15.5. Filtros paso banda y de banda eliminada de banda estrecha

Hasta este punto, sólo hemos considerado circuitos de filtro pasivos, es decir, circuitos de filtrado compuestos por resistencias, bobinas y condensadores. Sin embargo, hay muchas áreas de aplicación en las que los circuitos activos (circuitos basados en amplificadores operacionales) presentan ciertas ventajas con respecto a los filtros pasivos. Por ejemplo, los circuitos activos permiten construir filtros paso banda y de banda eliminada sin utilizar bobinas, lo cual resulta deseable en muchas ocasiones porque las bobinas suelen ser grandes, pesadas y costosas y pueden introducir efectos de campo electromagnético que dificulten conseguir las características de respuesta en frecuencia deseadas.

Si examinamos las funciones de transferencia de todos los circuitos de filtro del Capítulo 14, podemos ver que el valor máximo del módulo no es superior a 1. Aunque los filtros pasivos resonantes permiten amplificar la tensión y la corriente a la frecuencia de resonancia, en general los filtros pasivos no pueden amplificar la señal, porque el módulo de la señal de salida es igual o inferior al módulo de la señal de entrada. No resulta raro que así sea, ya que muchas de las funciones de transferencia del Capítulo 14 fueron obtenidas utilizando la técnica de división de tensión o de corriente. Los filtros activos proporcionan un control de la amplificación que no está disponible en los circuitos de filtro pasivos.

Finalmente, recuerde que tanto la frecuencia de corte como la anchura de la banda de paso de los filtros pasivos se veían alteradas cuando se añadía una carga resistiva a la salida del filtro. Esto no sucede con los filtros activos, debido a las propiedades de los amplificadores operacionales. Por tanto, utilizamos circuitos activos para implementar diseños de filtros en todas aquellas ocasiones en que la ganancia, la variación debida a la carga y el tamaño físico sean parámetros importantes dentro de las especificaciones de diseño.



## Perspectiva práctica

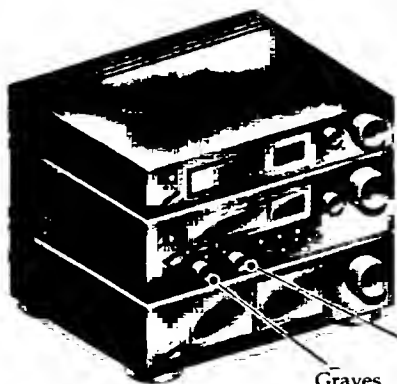
### Control de graves

En este capítulo, vamos a continuar con nuestro examen de circuitos de frecuencia selectiva. Como hemos descrito en el Capítulo 14, esto quiere decir que el comportamiento del circuito depende de la frecuencia de su entrada sinusoidal. La mayoría de los circuitos que vamos a presentar aquí caen en una de las cuatro categorías identificadas en el Capítulo 14: filtros paso bajo, filtros paso alto, filtros paso banda y filtros de banda eliminada. Pero, mientras que los circuitos del Capítulo 14 se construían utilizando fuentes, resistencias, condensadores y bobinas, los circuitos de este capítulo llevan amplificadores operacionales. Pronto veremos cuáles son las ventajas de construir un circuito de filtro utilizando amplificadores operacionales.

Los equipos electrónicos de audio, como por ejemplo radios, reproductores de cintas y reproductores de CD, suelen proporcionar controles de volumen independientes que se designan «agudos» y «graves». Estos controles permiten al usuario seleccionar el volumen de las señales de audio de alta frecuencia («agudos») de forma independiente del volumen de las señales de audio de baja frecuencia («graves»). La capacidad de ajustar independientemente la cantidad de amplificación o atenuación en estas dos bandas de frecuencia permiten al oyente personalizar el sonido con una precisión mayor que la que permitiría un único control de volumen. Por eso los circuitos de control de amplificación se suelen denominar también circuitos de control de tono.

El ejemplo de Perspectiva práctica presentado al final del capítulo ilustra un circuito que implementa el control de graves

utilizando un único amplificador operacional, junto con una serie de resistencias y condensadores. Una resistencia ajustable proporciona el necesario control de la amplificación en el rango de las bajas frecuencias.



### Objetivos del capítulo

1. Conocer los circuitos con amplificador operacional que se comportan como filtros paso bajo y paso alto de primer orden y ser capaz de calcular los valores de componentes necesarios para que estos circuitos cumplan las especificaciones de frecuencias de corte y de ganancia en la banda de paso.
2. Ser capaz de diseñar circuitos de filtro a partir de un circuito prototipo y utilizar la técnica de cambio de escala para conseguir las características deseadas de respuesta en frecuencia y los valores de componentes deseados.
3. Comprender cómo utilizar filtros de Butterworth de primer y segundo orden en cascada para implementar filtros paso bajo, paso alto, paso banda y de banda eliminada de cualquier orden.
4. Ser capaz de utilizar las ecuaciones de diseño para calcular los valores de los componentes para que los filtros prototipo de banda estrecha, paso banda y de banda eliminada cumplan las especificaciones de filtrado deseadas.

En este capítulo, vamos a examinar algunos de los muchos circuitos de filtrado basados en amplificadores operacionales. Como veremos, estos circuitos con amplificador operacional resuelven las desventajas de los circuitos de filtro pasivos. Asimismo, veremos cómo combinar circuitos de filtro básicos basados en amplificador operacional para conseguir una respuesta en frecuencia específica y para que la respuesta del filtro se aproxime más a la ideal. Es preciso recalcar que a todo lo largo de este capítulo vamos a suponer que los amplificadores operacionales se comportan como amplificadores operacionales ideales.

## 15.1. Filtros paso bajo y paso alto de primer orden

Considere el circuito de la Figura 15.1. Cualitativamente, cuando variamos la frecuencia de la fuente, sólo se ve afectada la impedancia del condensador. A frecuencias muy bajas, el condensador actúa como un circuito abierto y el circuito basado en amplificador operacional es un amplificador pero con una ganancia igual a  $-R_2/R_1$ . A frecuencias muy altas, el condensador actúa como un cortocircuito, conectando la salida del amplificador operacional a masa. El circuito con amplificador operacional de la Figura 15.1 actúa, por tanto, como un filtro paso bajo con una ganancia en la banda de paso igual a  $-R_2/R_1$ .

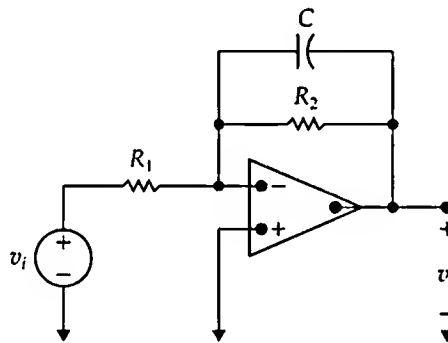


Figura 15.1. Filtro paso bajo de primer orden.

Para confirmar esta estimación cualitativa, podemos calcular la función de transferencia  $H(s) = V_o(s)/V_i(s)$ . Observe que el circuito de la Figura 15.1 tiene la forma general del circuito mostrado en la Figura 15.2, donde la impedancia en la rama de entrada ( $Z_i$ ) es la resistencia  $R_1$ , mientras que la impedancia en la rama de realimentación ( $Z_f$ ) es la combinación en paralelo de la resistencia  $R_2$  y del condensador  $C$ .

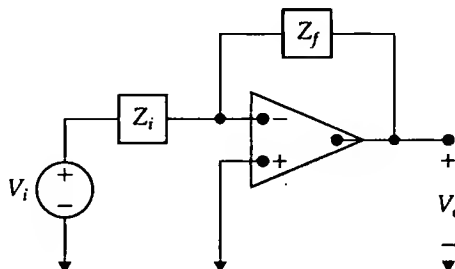


Figura 15.2. Circuito genérico basado en amplificador operacional.

El circuito de la Figura 15.2 es análogo al circuito amplificador inversor que hemos estudiado en el Capítulo 5, por lo que su función de transferencia es  $-Z_f/Z_i$ . Por tanto, la función de transferencia para el circuito de la Figura 15.1 será

$$H(s) = \frac{-Z_f}{Z_i} = \frac{-R_2 \parallel \left(\frac{1}{sC}\right)}{R_1} = -K \frac{\omega_c}{s + \omega_c}, \quad (15.1)$$

donde

$$K = \frac{R_2}{R_1}, \quad (15.2)$$

y

$$\omega_c = \frac{1}{R_2 C}. \quad (15.3)$$

Observe que la Ecuación 15.1 tiene la misma forma que la ecuación general de los filtros paso bajo que hemos enunciado en el Capítulo 14, con una importante excepción: la ganancia en la banda de paso,  $K$ , se puede ajustar variando el cociente  $R_2/R_1$ . El filtro paso bajo basado en amplificador operacional permite, por tanto, especificar de forma independiente la ganancia en la banda de paso y la frecuencia de corte.

## Una observación acerca de los diagramas de respuesta en frecuencia

Los diagramas de respuesta en frecuencia, que hemos presentado en el Capítulo 14, nos proporcionan una valiosa información sobre la forma en que opera un circuito de filtro. Es por eso por lo que haremos también en este capítulo un uso extenso de dichos diagramas de respuesta en frecuencia. Los diagramas utilizados en el Capítulo 14 estaban compuestos por dos gráficas separadas: una que expresaba el módulo de la función de transferencia en función de la frecuencia y otra que indicaba el ángulo de fase de la función de transferencia, en grados, también en función de la frecuencia. Cuando utilizamos ambas gráficas, normalmente se pone una de ellas encima de la otra para poder compartir un mismo eje de frecuencias.

En este capítulo, vamos a utilizar un tipo especial de gráfica de respuesta en frecuencia, denominada **diagrama de Bode**. Los diagramas de Bode se explican detalladamente en el Apéndice E, que incluye información sobre cómo construir estos diagramas de forma manual. Normalmente, se utiliza una computadora para construir los diagramas de Bode, por lo que aquí vamos a limitarnos a resumir las características especiales que presentan estos diagramas. Los diagramas de Bode difieren de las gráficas de respuesta en frecuencia del Capítulo 14 en dos sentidos principales.

En primer lugar, en vez de utilizar un eje lineal para los valores de frecuencia, los diagramas de Bode utilizan un eje logarítmico. Esto nos permite dibujar un rango más amplio de frecuencias de interés. Normalmente, se dibujan tres o cuatro décadas de frecuencias, como por ejemplo de  $10^2$  rad/s a  $10^6$  rad/s, o de 1 kHz a 1 MHz, seleccionando el rango de frecuencias para el que las características de la función de transferencia estén variando. Si dibujamos tanto el diagrama de ganancia como el del ángulo de fase, ambos diagramas compartirán de nuevo el eje de frecuencias.

En segundo lugar, en vez de mostrar el valor absoluto del módulo de la función de transferencia en función de la frecuencia, en los diagramas de Bode se expresa la ganancia en decibelios (dB) en fun-

ción del logaritmo de la frecuencia. El decibelio se explica en el Apéndice D. Para resumir, si el módulo de la función de transferencia es  $|H(j\omega)|$ , su valor en dB está dado por

$$A_{dB} = 20 \log_{10} |H(j\omega)|$$

Es importante recordar que, mientras que  $|H(j\omega)|$  es una magnitud sin signo,  $A_{dB}$  es una magnitud con signo. Cuando  $A_{dB} = 0$ , el módulo de la función de transferencia es 1, ya que  $20 \log_{10}(1) = 0$ . Cuando  $A_{dB} < 0$ , el módulo de la función de transferencia está comprendido entre 0 y 1, y cuando  $A_{dB} > 0$ , el módulo de la función de transferencia es superior a 1. Finalmente, observe que

$$20 \log_{10} |1/\sqrt{2}| = -3 \text{ dB}$$

Recuerde que la frecuencia de corte de los filtros se define determinando las frecuencias para las que el módulo de la función de transferencia es igual al valor máximo multiplicado por  $1/\sqrt{2}$ . Si traducimos esta definición a dB, la frecuencia de corte de un filtro se define determinando la frecuencia para la que el módulo de la función de transferencia es 3 dB inferior al valor máximo del módulo. Por ejemplo, si el módulo de la función de transferencia de un filtro paso bajo es de 26 dB en la banda de paso, el valor utilizado para hallar la frecuencia de corte será  $26 - 3 = 23 \text{ dB}$ .

El Ejemplo 15.1 ilustra el diseño de un filtro paso bajo de primer orden a partir de unas especificaciones iniciales de la ganancia en la banda de paso y de la frecuencia de corte; el ejemplo ilustra también la utilización de diagramas de Bode para representar la función de transferencia de un filtro.

### EJEMPLO 15.1 Diseño de un filtro paso bajo con amplificador operacional

Utilizando el circuito mostrado en la Figura 15.1, calcule los valores de  $C$  y  $R_2$  que, junto con  $R_1 = 1 \Omega$ , permiten obtener un filtro paso bajo con una ganancia de 1 en la banda de paso y una frecuencia de corte de 1 rad/s. Determine la función de transferencia del filtro y utilícela para dibujar un diagrama de Bode de la respuesta en frecuencia del filtro.

#### SOLUCIÓN

La Ecuación 15.2 nos da la ganancia en la banda de paso en función de  $R_1$  y  $R_2$ , por lo que podemos emplearla para calcular el valor de  $R_2$  requerido:

$$\begin{aligned} R_2 &= K R_1 \\ &= (1)(1) = 1 \Omega. \end{aligned}$$

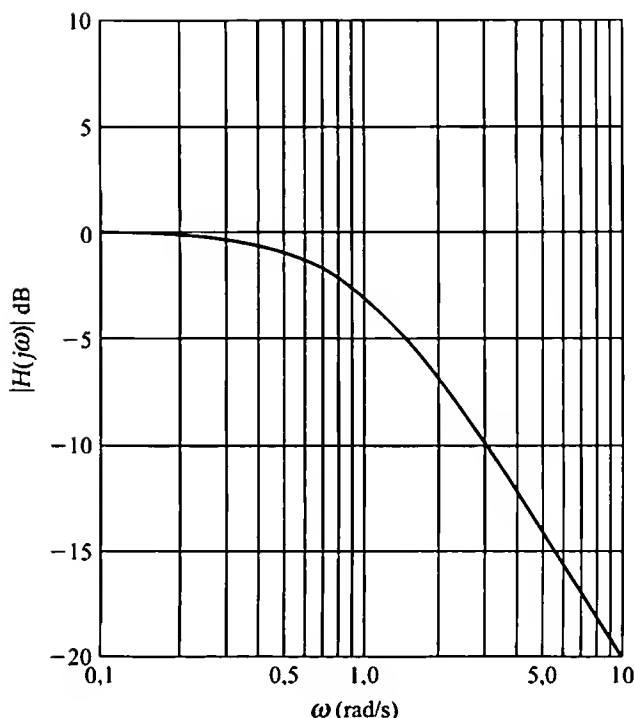
La Ecuación 15.3 nos permite entonces calcular  $C$  de modo que se obtenga la frecuencia de corte especificada:

$$C = \frac{1}{R_2 \omega_c} = \frac{1}{(1)(1)} = 1 \text{ F}.$$

La función de transferencia del filtro paso bajo está dada por la Ecuación 15.1:

$$\begin{aligned} H(s) &= -K \frac{\omega_c}{s + \omega_c} \\ &= \frac{-1}{s + 1}. \end{aligned}$$

El diagrama de Bode de  $|H(j\omega)|$  se muestra en la Figura 15.3. Éste es el denominado filtro **prototipo** paso bajo con amplificador operacional, porque utiliza un valor de resistencia de  $1 \Omega$  y un valor de condensador de 1 F y proporciona una frecuencia de corte de 1 rad/s. Como veremos en la sección siguiente, los filtros prototipo proporcionan un buen punto de partida para el diseño de filtros que utilicen valores de componentes más realistas con el fin de conseguir una determinada respuesta en frecuencia deseada.



**Figura 15.3.** Diagrama de Bode de la ganancia para el filtro paso bajo del Ejemplo 15.1.

El lector puede haber reconocido el circuito de la Figura 15.1 como el circuito amplificador integrador que hemos presentado en el Capítulo 7. Se trata, en efecto, del mismo circuito, así que la integración en el dominio del tiempo se corresponde con un filtrado paso bajo en el dominio de la frecuencia. Esta relación entre integración y filtrado paso bajo puede confirmarse mediante la transformada operacional de Laplace para la integración, que hemos visto en el Capítulo 12.

El circuito de la Figura 15.4 es un filtro paso alto de primer orden. Este circuito también tiene la forma general del circuito de la Figura 15.2, aunque ahora la impedancia en la rama de entrada es la combinación en serie de  $R_1$  y  $C$ , y la impedancia en la rama de realimentación es la resistencia  $R_2$ . La función de transferencia del circuito de la Figura 15.4 es, por tanto,

$$\begin{aligned}
 H(s) &= \frac{-Z_f}{Z_i} \\
 &= \frac{-R_2}{R_1 + \frac{1}{sC}} = -K \frac{s}{s + \omega_c},
 \end{aligned} \tag{15.4}$$

donde

$$K = \frac{R_2}{R_1}, \tag{15.5}$$

y

$$\omega_c = \frac{1}{R_1 C}. \tag{15.6}$$

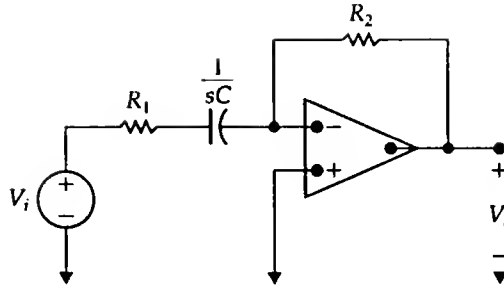


Figura 15.4. Un filtro paso alto de primer orden.

De nuevo, la forma de la función de transferencia dada en la Ecuación 15.4 es igual a la enunciada en la Ecuación 14.20, que era la ecuación para los filtros paso alto pasivos. Asimismo, vemos también que el filtro activo permite obtener una ganancia en la banda de paso superior a 1. El Ejemplo 15.2 analiza el diseño de un filtro paso alto activo a partir de unas especificaciones de respuesta en frecuencia expresadas mediante un diagrama de Bode.

### EJEMPLO 15.2 Diseño de un filtro paso alto con amplificador operacional

La Figura 15.5 muestra el diagrama de Bode de la ganancia de un filtro paso alto. Utilizando el circuito activo de filtro paso alto de la Figura 15.4, halle los valores de  $R_1$  y  $R_2$  que permiten obtener la respuesta deseada en lo que respecta al módulo de la función de transferencia. Utilice un condensador de  $0,1 \mu\text{F}$ . Si se añade una resistencia de carga de  $10 \text{ k}\Omega$  a este filtro, ¿cómo cambiará el módulo de la respuesta en frecuencia?

#### SOLUCIÓN

Comenzamos escribiendo una función de transferencia cuyo diagrama de ganancia sea el mostrado en la Figura 15.5. Para hacer esto, observe que la ganancia en la banda de paso es de 20 dB; por tanto,  $K = 10$ . Observe también que el punto de 3 dB es 500 rad/s. La Ecuación 15.4 es la función de transferencia para un filtro paso alto, por lo que una función de transferencia que tenga la respuesta en frecuencia cuyo módulo se muestra en la Figura 15.5 será

$$H(s) = \frac{-10s}{s + 500}.$$

Podemos calcular los valores de  $R_1$  y  $R_2$  que se necesitan para obtener esta función de transferencia igualando la función de transferencia a la Ecuación 15.4:

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{-10s}{s + 500} \\ &= \frac{-(R_2/R_1)s}{s + (1/R_1C)}. \end{aligned}$$

Si igualamos los numeradores y denominadores y simplificamos, se obtienen las dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} 10 &= \frac{R_2}{R_1}, \\ 500 &= \frac{1}{R_1C}. \end{aligned}$$

Utilizando el valor especificado de  $C$  ( $0,1 \mu\text{F}$ ), vemos que

$$\begin{aligned} R_1 &= 20 \text{ k}\Omega, \\ R_2 &= 200 \text{ k}\Omega. \end{aligned}$$

El circuito completo se muestra en la Figura 15.6.



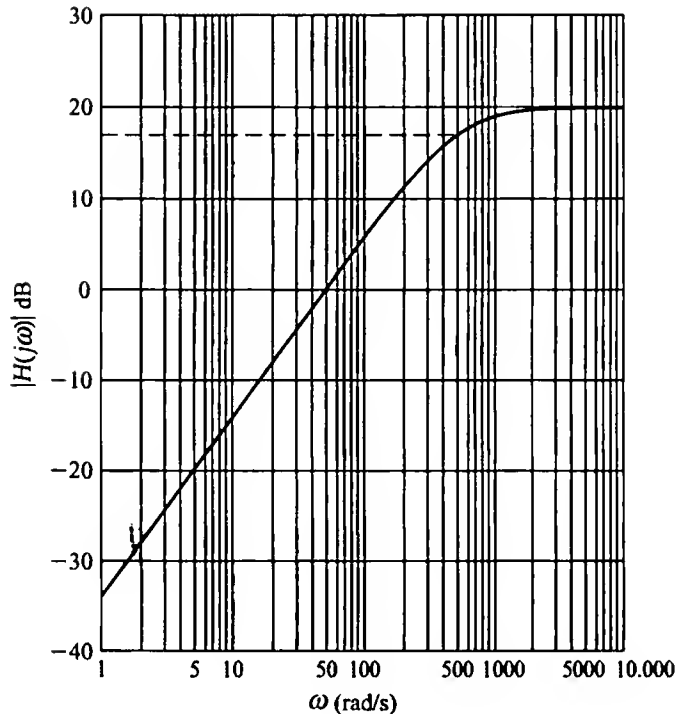


Figura 15.5. Diagrama de Bode de la ganancia para el filtro paso alto del Ejemplo 15.2.

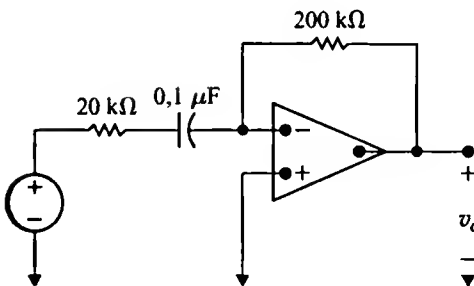


Figura 15.6. Filtro paso alto del Ejemplo 15.2.

Puesto que hemos hecho la suposición de que el amplificador operacional de este circuito de filtro paso alto es ideal, la adición de cualquier resistencia de carga, independientemente de su valor, no afectará al comportamiento del amplificador operacional. Por tanto, el módulo de la respuesta de un filtro paso alto con una resistencia de carga es igual que cuando no hay resistencia de carga; la respuesta continuará siendo la que se muestra en la Figura 15.5.

■ Conocer los circuitos basados en amplificador operacional que se comportan como filtros paso bajo y paso alto de primer orden y ser capaz de calcular sus valores de componentes.

■ Calcule los valores de  $R_2$  y  $C$  que permiten obtener un filtro paso alto con una ganancia en la banda de paso igual a 1 y una frecuencia de corte de 1 rad/s si  $R_1 = 1 \Omega$ .

(Nota: éste es el filtro prototipo paso alto).

**RESPUESTA**

$R_2 = 1 \Omega$ ,  $C = 1 \text{ F}$ .

- 15.2. Calcule los valores de resistencias necesarios para el circuito de filtro paso bajo de la Figura 15.1 si se desea obtener la función de transferencia

$$H(s) = \frac{-20.000}{s + 5000}.$$

Utilice un condensador de  $5 \mu\text{F}$ .

### RESPUESTA

$$R_1 = 10 \Omega,$$

$$R_2 = 40 \Omega.$$

**NOTA** Trate también de resolver los Problemas 15.4 y 15.5 del capítulo.

## 15.2. Cambio de escala

En el diseño y análisis de circuitos de filtro tanto activos como pasivos, resulta a veces conveniente trabajar con valores de los componentes como  $1 \Omega$ ,  $1 \text{ H}$  y  $1 \text{ F}$ . Aunque estos valores no son realistas a la hora de especificar componentes reales, sí permiten simplificar enormemente los cálculos. Después de realizar los cálculos utilizando valores convenientes para  $R$ ,  $L$  y  $C$ , el diseñador puede transformar esos valores en otros más realistas utilizando un proceso llamado **cambio de escala**.

Hay dos tipos de cambio de escala: de **magnitud** y de **frecuencia**. Se puede cambiar de escala la ganancia de un circuito multiplicando la impedancia a una frecuencia determinada por el factor de escala  $k_m$ . Así, se multiplican todas las resistencias y bobinas por  $k_m$  y todos los condensadores por  $1/k_m$ . Si representamos mediante variables sin prima los valores iniciales de los parámetros y mediante variables con prima los valores de las variables después del cambio de escala, tendremos

$$R' = k_m R, \quad L' = k_m L \quad \text{y} \quad C' = C / k_m. \quad (15.7)$$

Observe que  $k_m$  es, por definición, un número real positivo que puede ser superior o inferior a 1.

En los cambios de escala de la frecuencia, cambiamos los parámetros del circuito de modo que, para la nueva frecuencia, la impedancia de cada elemento sea igual que para la frecuencia original. Puesto que los valores de las resistencias son independientes de la frecuencia, las resistencias no se ven afectadas por el cambio de escala de la frecuencia. Si designamos mediante  $k_f$  el factor de escala de la frecuencia, tanto las bobinas como los condensadores se verán multiplicados por  $1/k_f$ . Así, para un cambio de escala de la frecuencia,

$$R' = R, \quad L' = L / k_f \quad \text{y} \quad C' = C / k_f. \quad (15.8)$$

El factor de escala de la frecuencia,  $k_f$ , es también un número real positivo que puede ser superior o inferior a la unidad.

Podemos cambiar la escala de un circuito tanto en magnitud como en frecuencia simultáneamente. Los valores después del cambio de escala (con prima) en función de los valores originales (sin prima) serán

$$R' = k_m R,$$

$$L' = \frac{k_m}{k_f} L,$$

$$C' = \frac{1}{k_m k_f} C. \quad (15.9)$$

✦ **FACTORES DE ESCALA PARA LOS COMPONENTES**

## Utilización del cambio de escala en el diseño de filtros basados en amplificador operacional

Para aplicar el concepto de cambio de escala en el diseño de filtros basados en amplificador operacional, seleccione primero la frecuencia de corte,  $\omega_c$ , de modo que sea igual a 1 rad/s (si está diseñando filtros paso bajo o paso alto) o seleccione la frecuencia central,  $\omega_o$ , de modo que sea igual a 1 rad/s (si está diseñando filtros paso banda o de banda eliminada). A continuación, seleccione un condensador de 1 F y calcule los valores de las resistencias necesarios para obtener la ganancia deseada en la banda de paso y la frecuencia de corte o frecuencia central de 1 rad/s. Finalmente, utilice el cambio de escala para hallar valores de componentes más realistas que le proporcionen la frecuencia de corte o frecuencia central deseadas.

El Ejemplo 15.3 ilustra el proceso de cambio de escala en general y el Ejemplo 15.4 ilustra la aplicación de un cambio de escala en el diseño de un filtro paso bajo.

### EJEMPLO 15.3 Cambio de escala en un circuito $RLC$ en serie

El circuito  $RLC$  en serie mostrado en la Figura 15.7 tiene una frecuencia central de  $\sqrt{1/LC} = 1$  rad/s, un ancho de banda de  $R/L = 1$  rad/s y, por tanto, un factor de calidad igual a 1. Utilice la técnica de cambio de escala para calcular nuevos valores de  $R$  y  $L$  que proporcionen un circuito con el mismo factor de calidad pero con una frecuencia central de 500 Hz. Utilice un condensador de  $2 \mu\text{F}$ .

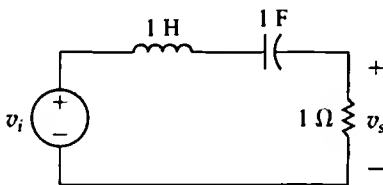


Figura 15.7. Circuito  $RLC$  en serie para el Ejemplo 15.3.

### SOLUCIÓN

Comenzamos calculando el factor de escala de la frecuencia que permitirá desplazar la frecuencia central de 1 rad/s a 500 Hz. Las variables sin prima representan los valores antes del cambio de escala, mientras que las variables con prima representan los valores después del cambio de escala.

$$k_f = \frac{\omega'_o}{\omega_o} = \frac{2\pi(500)}{1} = 3141,59.$$

Ahora, utilizamos la Ecuación 15.9 para calcular el factor de cambio de escala de la magnitud que, junto con el factor de cambio de escala de la frecuencia, permite obtener un valor de condensador de  $2 \mu\text{F}$ :

$$\begin{aligned} k_m &= \frac{1}{k_f} \frac{C}{C'} \\ &= \frac{1}{(3141,59)(2 \times 10^{-6})} = 159,155. \end{aligned}$$

Utilizamos la Ecuación 15.9 otra vez para calcular los valores de  $R$  y  $L$  después del cambio de escala de magnitud y de frecuencia:

$$R' = k_m R = 159,155 \Omega,$$

$$L' = \frac{k_m}{k_f} L = 50,66 \text{ mH}.$$

Con estos valores de componentes, la frecuencia central del circuito  $RLC$  en serie será  $\sqrt{1/LC} = 3141,61$  rad/s, es decir, 500 Hz, y el ancho de banda será  $R/L = 3141,61$  rad/s, es decir, 500 Hz; por tanto, el factor de calidad seguirá siendo igual a 1.

### EJEMPLO 15.4 Cambio de escala en un filtro prototipo paso bajo basado en amplificador operacional

Utilice el filtro prototipo paso bajo basado en amplificador operacional del Ejemplo 15.1, junto con la técnica de cambio de escala de la magnitud y la frecuencia, para calcular los valores de resistencias para un filtro paso bajo con una ganancia de 5 y una frecuencia de corte de 1000 Hz, utilizando un condensador de realimentación de  $0,01 \mu\text{F}$ . Dibuje un diagrama de Bode del módulo de la función de transferencia resultante.

#### SOLUCIÓN

Para comenzar, utilizamos un cambio de escala de frecuencia para situar la frecuencia de corte en 1000 Hz:

$$k_f = \omega'_c / \omega_c = 2\pi(1000)/1 = 6283,185,$$

donde la variable con prima representa el nuevo valor de la frecuencia de corte, mientras que la variable sin prima representa el valor antiguo. A

continuación, calculamos el factor de escala de la magnitud que, junto con  $k_f = 6283,185$ , permitirá obtener un condensador de  $0,01 \mu\text{F}$ :

$$k_m = \frac{1}{k_f} \frac{C}{C'} = \frac{1}{(6283,185)(10^{-8})} = 15.915,5.$$

Puesto que las resistencias se cambian de escala aplicando únicamente el factor de cambio de escala de la magnitud,

$$R'_1 = R'_2 = k_m R = (15.915,5)(1) = 15.915,5 \Omega.$$

Finalmente, necesitamos satisfacer la especificación referida a la ganancia en la banda de paso. Podemos ajustar los valores de  $R_1$  o  $R_2$  ya que  $K = R_2/R_1$ . Si ajustamos  $R_2$ , cambiaremos la frecuencia de corte, porque  $\omega_c = 1/R_2 C$ . Por tanto, tendremos que ajustar el valor de  $R_1$  para que sólo se vea modificada la ganancia en la banda de paso:

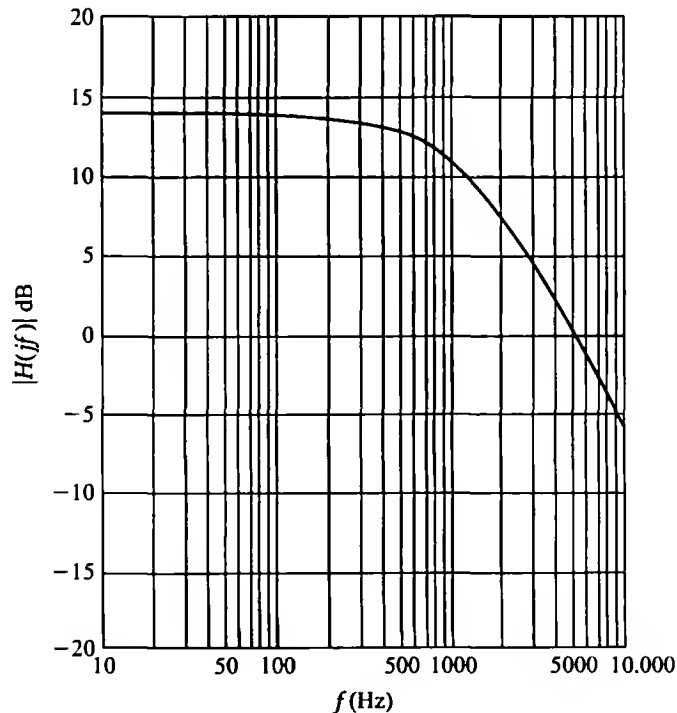


Figura 15.8. Diagrama de Bode de la ganancia del filtro paso bajo del Ejemplo 15.4.

$$R_1 = R_2 / K = (15.915,5)/(5) = 3183,1 \, \Omega.$$

Los valores finales de los componentes son

$$R_1 = 3183,1 \, \Omega,$$

$$R_2 = 15.915,5 \, \Omega,$$

$$C = 0,01 \, \mu\text{F}.$$

La función de transferencia del filtro está dada por

$$H(s) = \frac{-31.415,93}{s + 6283,185}.$$

El diagrama de Bode del módulo de esta función de transferencia se muestra en la Figura 15.8.

## Evaluación del objetivo 2

- Ser capaz de diseñar circuitos de filtro partiendo de un prototipo y utilizando la técnica de cambio de escala para conseguir los valores de componentes y la respuesta en frecuencia deseados.

**15.3.** ¿Qué factores de cambio de escala de magnitud y de frecuencia permitirán transformar el filtro prototipo paso alto en un filtro paso alto con un condensador de  $0,5 \, \mu\text{F}$  y una frecuencia de corte de  $10 \, \text{kHz}$ ?

### RESPUESTA

$$k_f = 62.831,85,$$

$$k_m = 31,831.$$

**NOTA** Trate también de resolver los Problemas 15.9 y 15.10 del capítulo.

## 15.3. Filtros paso banda y de banda eliminada con amplificador operacional

Vamos a centrarnos ahora en el análisis y diseño de circuitos basados en amplificador operacional que actúen como filtros paso banda o de banda eliminada. Aunque hay una amplia variedad de tales circuitos basados en amplificador operacional, el método inicial que vamos a emplear parte del diagrama de Bode mostrado en la Figura 15.9. Podemos ver, a partir del diagrama, que el filtro paso banda está compuesto por tres componentes independientes:

1. Un filtro paso bajo de ganancia unidad cuya frecuencia de corte es  $\omega_{c2}$ , la mayor de las dos frecuencias de corte;
2. Un filtro paso alto de ganancia unidad cuya frecuencia de corte es  $\omega_{c1}$ , la más pequeña de las dos frecuencias de corte; y
3. Una etapa de amplificación para proporcionar el nivel deseado de ganancia en la banda de paso.

Estos tres componentes se conectan en cascada y se combinan de forma aditiva en la construcción del diagrama de Bode, por lo que se combinarán de forma multiplicativa en el dominio de  $s$ . Es importante observar que este método de construcción de la respuesta de ganancia de un filtro paso banda supone que la frecuencia de corte inferior ( $\omega_{c1}$ ) es más pequeña que la frecuencia de corte superior ( $\omega_{c2}$ ). El filtro resultante se denomina filtro paso banda de **banda ancha**, porque la banda de frecuencias que se deja pasar tiene una anchura significativa. La definición formal de un filtro de banda ancha requiere que las dos frecuencias de corte satisfagan la ecuación

$$\frac{\omega_{c2}}{\omega_{c1}} \geq 2.$$

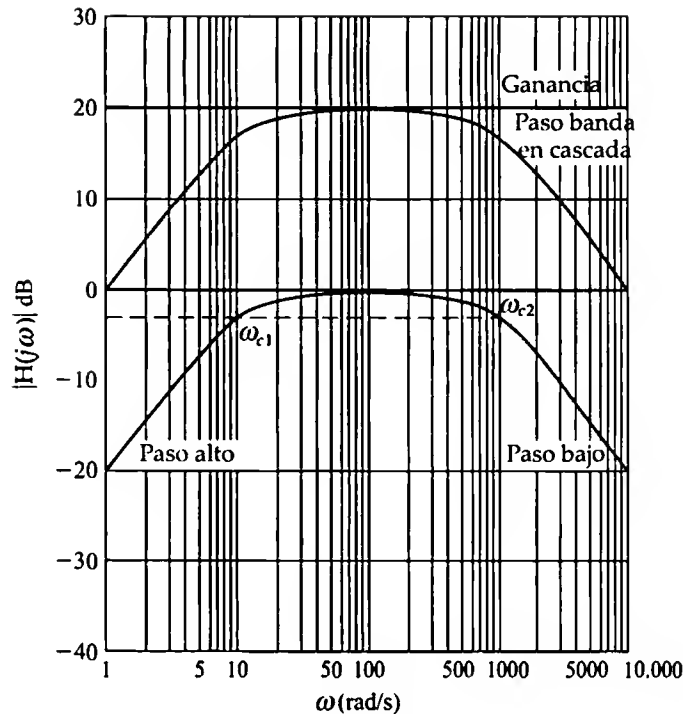


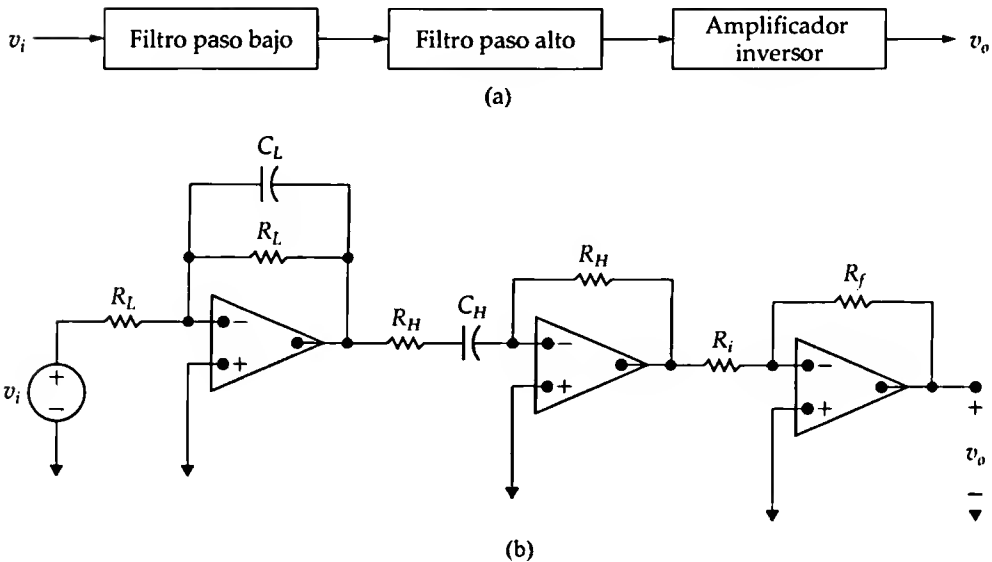
Figura 15.9. Construcción del diagrama de Bode de la ganancia para un filtro paso banda.

Como se ilustra en la construcción del diagrama de Bode de la Figura 15.9, es necesario que el valor del módulo para el filtro paso alto sea igual a la unidad en la frecuencia de corte del filtro paso bajo y que el valor del módulo del filtro paso bajo sea igual a la unidad en la frecuencia de corte del filtro paso alto. Así, el filtro paso banda tendrá las frecuencias de corte especificadas por los filtros paso bajo y paso alto. Será necesario determinar la relación entre  $\omega_{c1}$  y  $\omega_{c2}$  que permite satisfacer los requisitos ilustrados en la Figura 15.9.

Podemos construir un circuito que proporcione cada una de las tres componentes conectando en cascada un filtro paso bajo basado en amplificador operacional, un filtro paso alto basado en amplificador operacional y un amplificador inversor (véase la Sección 5.3), como se muestra en la Figura 15.10(a). Dicha figura es un tipo de ilustración denominado **diagrama de bloques**. Cada bloque representa un componente o subcircuito y la salida de cada uno de los bloques es la entrada al siguiente, en la dirección indicada. Podemos tratar de establecer la relación entre  $\omega_{c1}$  y  $\omega_{c2}$  que nos permita diseñar de forma independiente cada subcircuito, sin preocuparnos de los otros subcircuitos conectados en cascada; entonces, el diseño del filtro paso banda se reducirá al diseño de un filtro paso bajo de primer orden y ganancia unidad, un filtro paso alto de primer orden y ganancia unidad y un amplificador inversor, cada uno de los cuales es un circuito relativamente sencillo.

La función de transferencia del filtro paso banda en cascada es el producto de las funciones de transferencia de los tres componentes conectados en serie:

$$\begin{aligned}
 H(s) &= \frac{V_o}{V_i} = \left( \frac{-\omega_{c2}}{s + \omega_{c2}} \right) \left( \frac{-s}{s + \omega_{c1}} \right) \left( \frac{-R_f}{R_i} \right) \\
 &= \frac{-K\omega_{c2}s}{(s + \omega_{c1})(s + \omega_{c2})} = \frac{-K\omega_{c2}s}{s^2 + (\omega_{c1} + \omega_{c2})s + \omega_{c1}\omega_{c2}}.
 \end{aligned} \tag{15.10}$$



**Figura 15.10.** Filtro paso banda basado en amplificadores operacionales con conexión en cascada. (a) Diagrama de bloques. (b) El circuito.

Podemos observar inmediatamente que la Ecuación 15.10 no tiene la forma estándar de la función de transferencia de los filtros paso banda que hemos visto en el Capítulo 14, es decir,

$$H_{BP} = \frac{\beta s}{s^2 + \beta s + \omega_o^2}.$$

Para poder convertir la Ecuación 15.10 a la forma de la función de transferencia estándar de un filtro paso banda, imponemos la condición de que

$$\omega_{c2} \gg \omega_{c1}. \quad (15.11)$$

Cuando se cumple la Ecuación 15.11,

$$(\omega_{c1} + \omega_{c2}) \approx \omega_{c2},$$

y la función de transferencia del filtro paso banda en cascada de la Ecuación 15.10 se transforma en

$$H(s) = \frac{-K\omega_{c2}s}{s^2 + \omega_{c2}s + \omega_{c1}\omega_{c2}}.$$

Una vez confirmado que la Ecuación 15.11 se cumple para las frecuencias de corte especificadas para el filtro paso banda deseado, podemos diseñar cada etapa del circuito en cascada de forma independiente y satisfacer las especificaciones del filtro. Podemos calcular los valores de  $R_L$  y  $C_L$  en el filtro paso bajo para obtener la frecuencia de corte superior deseada,  $\omega_{c2}$ :

$$\omega_{c2} = \frac{1}{R_L C_L}. \quad (15.12)$$

También podemos calcular los valores de  $R_H$  y  $C_H$  en el filtro paso alto para obtener la frecuencia de corte inferior deseada,  $\omega_{c1}$ :

$$\omega_{c1} = \frac{1}{R_H C_H}. \quad (15.13)$$

Después, calculamos los valores de  $R_i$  y  $R_f$  en el amplificador inversor para obtener la ganancia deseada en la banda de paso. Para hacer esto, debemos considerar el módulo de la función de transferencia del filtro paso banda, evaluado a la frecuencia central,  $\omega_o$ :

$$|H(j\omega_o)| = \left| \frac{-K\omega_{c2}(j\omega_o)}{(j\omega_o)^2 + \omega_{c2}(j\omega_o) + \omega_{c1}\omega_{c2}} \right| = \frac{K\omega_{c2}}{\omega_{c2}} = K. \quad (15.14)$$

Recuerde del Capítulo 5 que la ganancia del amplificador inversor es  $R_f/R_i$ . Por tanto,

$$|H(j\omega_o)| = \frac{R_f}{R_i}. \quad (15.15)$$

Cualquier selección de resistencias que satisfaga la Ecuación 15.15 nos permitirá obtener la ganancia deseada en la banda de paso.

El Ejemplo 15.5 ilustra el proceso de diseño para el filtro paso banda en cascada.

### EJEMPLO 15.5 Diseño de un filtro paso banda de banda ancha basado en amplificador operacional

Diseñe un filtro paso banda para un ecualizador gráfico que proporcione un nivel de amplificación igual a 2 dentro de la banda de frecuencias comprendida entre 100 y 10.000 Hz. Utilice condensadores de  $0,2 \mu\text{F}$ .

$$\begin{aligned} \omega_{c1} &= \frac{1}{R_H C_H} = 2\pi(100), \\ R_H &= \frac{1}{[2\pi(100)](0,2 \times 10^{-6})} \\ &\approx 7958 \Omega. \end{aligned}$$

### SOLUCIÓN

Podemos diseñar cada subcircuito de la conexión en cascada y satisfacer los valores de frecuencia de corte especificados únicamente si se cumple la Ecuación 15.11. En este caso,  $\omega_{c2} = 100\omega_{c1}$ , por lo que podemos decir que  $\omega_{c2} \gg \omega_{c1}$ .

Comenzando por la etapa de filtro paso bajo, podemos ver, a partir de la Ecuación 15.12, que

$$\begin{aligned} \omega_{c2} &= \frac{1}{R_L C_L} = 2\pi(10.000), \\ R_L &= \frac{1}{[2\pi(10.000)](0,2 \times 10^{-6})} \\ &\approx 80 \Omega. \end{aligned}$$

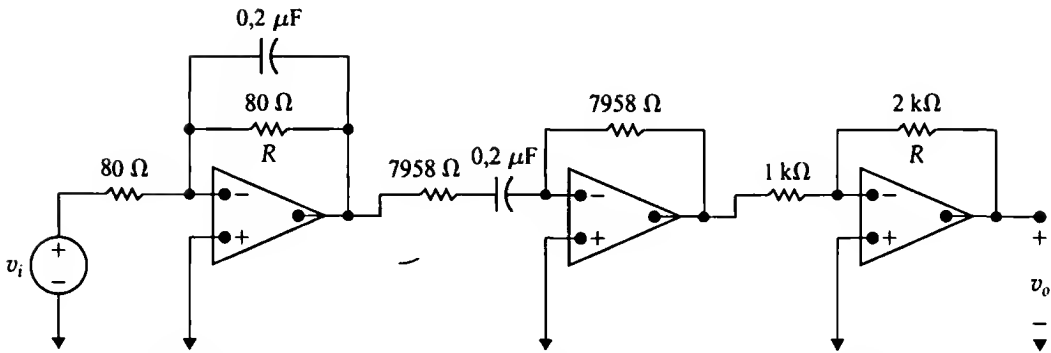
A continuación, veamos el filtro paso alto. De la Ecuación 15.13,

Finalmente, necesitamos calcular la etapa de ganancia. De la Ecuación 15.15, deducimos que hay dos incógnitas, por lo que una de las resistencias podrá seleccionarse arbitrariamente. Si seleccionamos una resistencia de  $1 \text{ k}\Omega$  para  $R_i$ , a partir de la Ecuación 15.15 tendremos que

$$\begin{aligned} R_f &= 2(1000) \\ &= 2000 \Omega = 2 \text{ k}\Omega. \end{aligned}$$

El circuito resultante se muestra en la Figura 15.11. Dejamos como ejercicio al lector la verificación de que el módulo de la función de transferencia de este circuito se reduce en un factor  $1/\sqrt{2}$  en ambas frecuencias de corte, lo que permite verificar la validez de la suposición inicial  $\omega_{c2} \gg \omega_{c1}$ .

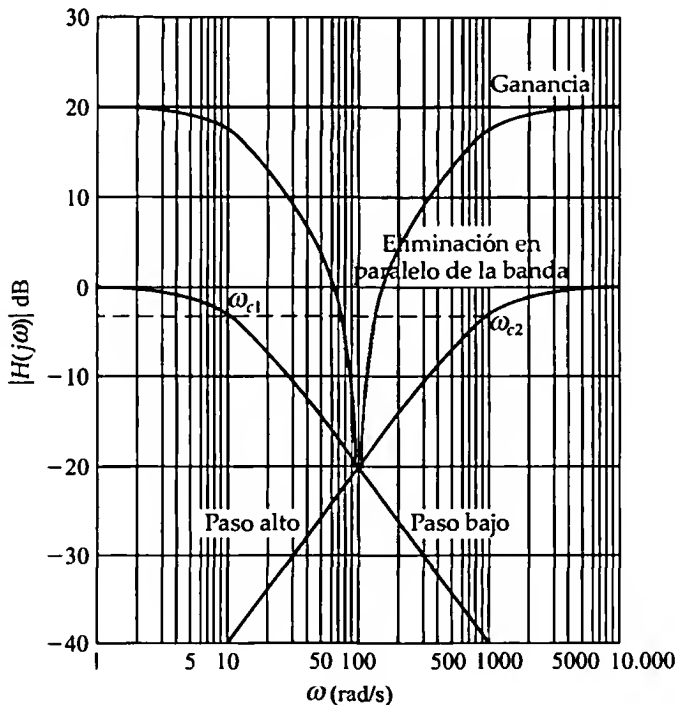




**Figura 15.11.** El filtro paso banda en cascada basado en amplificador operacional diseñado en el Ejemplo 15.5.

También podemos utilizar esta técnica de descomposición en subcircuitos para diseñar filtros de banda eliminada basados en amplificador operacional, como ilustra la Figura 15.12. Al igual que el filtro paso banda, el filtro de banda eliminada está compuesto por tres componentes separadas. Sin embargo, existen importantes diferencias:

1. El filtro paso bajo de ganancia unidad tiene una frecuencia de corte igual a  $\omega_{c1}$ , que es la menor de las dos frecuencias de corte.
2. El filtro paso alto de ganancia unidad tiene una frecuencia de corte igual a  $\omega_{c2}$ , que es la mayor de las dos frecuencias de corte.
3. La etapa de amplificación proporciona la ganancia deseada en las bandas de paso.



**Figura 15.12.** Construcción del diagrama de magnitud de Bode para un filtro de banda eliminada.

La diferencia más importante es que estos tres componentes no pueden conectarse en serie, porque no se combinan de forma aditiva en el diagrama de Bode. En lugar de ello, debemos utilizar una conexión en paralelo y un amplificador sumador, como se muestra tanto en el diagrama de bloques como en el circuito de la Figura 15.13. De nuevo, suponemos que las dos frecuencias de corte están ampliamente separadas, de modo que el diseño resultante es un filtro de banda eliminada con banda ancha y  $\omega_{c2} \gg \omega_{c1}$ . Entonces, podemos generar de forma independiente cada uno de los componentes del diseño en paralelo y las especificaciones de frecuencias de corte podrán ser satisfechas. La función de transferencia del circuito resultante es la suma de las funciones de transferencia del filtro paso bajo y del filtro paso alto. A partir de la Figura 15.13(b),

$$\begin{aligned} H(s) &= \left( -\frac{R_f}{R_i} \left[ \frac{-\omega_{c1}}{s + \omega_{c1}} + \frac{-s}{s + \omega_{c2}} \right] \right) = \frac{R_f}{R_i} \left( \frac{\omega_{c1}(s + \omega_{c2}) + s(s + \omega_{c1})}{(s + \omega_{c1})(s + \omega_{c2})} \right) \\ &= \frac{R_f}{R_i} \left( \frac{s^2 + 2\omega_{c1}s + \omega_{c1}\omega_{c2}}{(s + \omega_{c1})(s + \omega_{c2})} \right). \end{aligned} \quad (15.16)$$

Utilizando el mismo razonamiento que para el filtro paso banda en cascada, las dos frecuencias de corte para la función de transferencia de la Ecuación 15.16 serán  $\omega_{c1}$  y  $\omega_{c2}$  únicamente en el caso de que  $\omega_{c2} \gg \omega_{c1}$ . Entonces, las frecuencias de corte estarán dadas por las ecuaciones

$$\omega_{c1} = \frac{1}{R_L C_L}, \quad (15.17)$$

$$\omega_{c2} = \frac{1}{R_H C_H}. \quad (15.18)$$

En las dos bandas de paso (cuando  $s \rightarrow 0$  y  $s \rightarrow \infty$ ), la ganancia de la función de transferencia es  $R_f/R_i$ . Por tanto,

$$K = \frac{R_f}{R_i}. \quad (15.19)$$

Al igual que con el diseño de filtro paso banda en cascada, tenemos seis incógnitas y tres ecuaciones. Normalmente, lo que haremos es seleccionar valores de condensador comercialmente disponibles para  $C_L$  y  $C_H$ . Entonces, las Ecuaciones 15.17 y 15.18 nos permitirán calcular  $R_L$  y  $R_H$  de forma que se satisfagan las frecuencias de corte especificadas. Finalmente, seleccionaremos un valor para  $R_f$  o  $R_i$  y usaremos la Ecuación 15.19 para calcular la otra resistencia.

Observe que el módulo de la función de transferencia dada por la Ecuación 15.16 para la frecuencia central,  $\omega_o = \sqrt{\omega_{c1} \cdot \omega_{c2}}$ , es:

$$|H(j\omega_o)| = \left| \frac{R_f}{R_i} \left( \frac{(j\omega_o)^2 + 2\omega_{c1}(j\omega_o) + \omega_{c1}\omega_{c2}}{(j\omega_o)^2 + (\omega_{c1} + \omega_{c2})(j\omega_o) + \omega_{c1}\omega_{c2}} \right) \right| = \frac{R_f}{R_i} \frac{2\omega_{c1}}{\omega_{c1} + \omega_{c2}} \approx \frac{R_f}{R_i} \frac{2\omega_{c1}}{\omega_{c2}}. \quad (15.20)$$

Si  $\omega_{c2} \gg \omega_{c1}$ , entonces  $|H(j\omega)| \ll 2R_f/R_i$  (ya que  $\omega_{c1}/\omega_{c2} \ll 1$ ), por lo que el módulo será mucho más pequeño a la frecuencia central que en la banda de paso. Por tanto, el filtro de banda eliminada rechaza adecuadamente las frecuencias situadas cerca de la frecuencia central, confirmando de nuevo nuestra suposición de que la implementación en paralelo resulta adecuada para diseños de filtros de banda eliminada con banda ancha.

El Ejemplo 15.6 ilustra el proceso de diseño para un filtro de banda eliminada con configuración paralela.

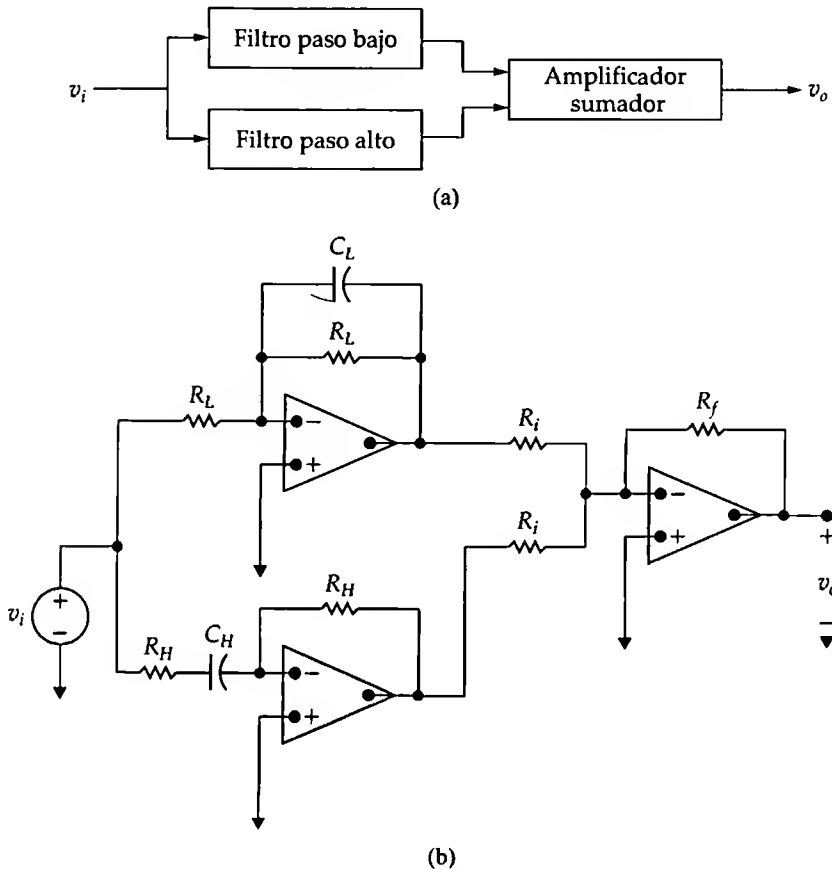


Figura 15.13. Filtro de banda eliminada con configuración paralela. (a) Diagrama de bloques. (b) El circuito.

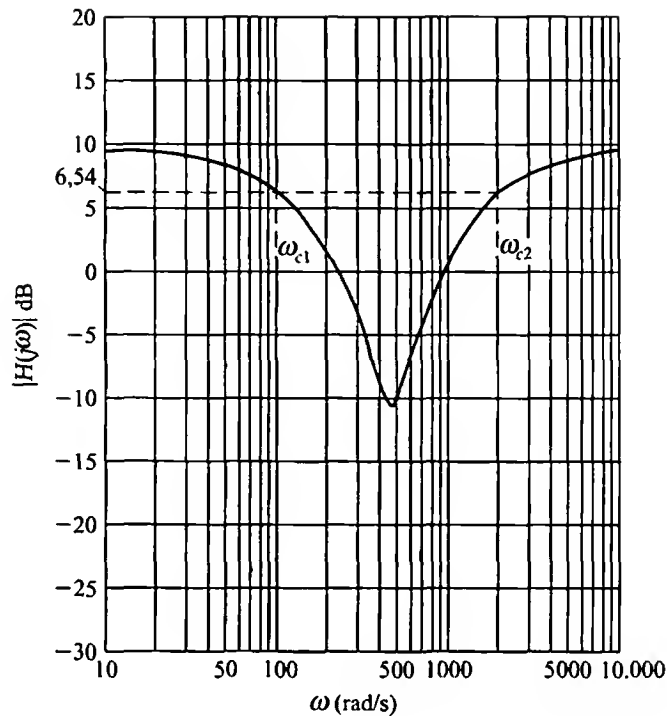
### EJEMPLO 15.6 Diseño de un filtro de banda eliminada y banda ancha basado en amplificador operacional

**Diseño** un circuito basado en el filtro de banda eliminada con amplificador operacional y configuración paralela de la Figura 15.3(b). El diagrama de Bode de la ganancia de este filtro se muestra en la Figura 15.14. Utilice condensadores de  $0.5 \mu\text{F}$  para el diseño.

### SOLUCIÓN

En el diagrama de Bode de ganancia que se muestra en la Figura 15.14, vemos que el filtro de

banda eliminada tiene como frecuencias de corte  $100 \text{ rad/s}$  y  $2000 \text{ rad/s}$ , así como una ganancia igual a 3 en las bandas de paso. Por tanto,  $\omega_{c2} = 20\omega_{c1}$ , de modo que podemos dar por válida la suposición de que  $\omega_{c2} \gg \omega_{c1}$ . Partiendo del filtro prototipo paso bajo y utilizando la técnica de cambio de escala para cumplir las especificaciones relativas a la frecuencia de corte y al valor del condensador, vemos que el factor de cambio de escala en frecuencia  $k_f$  es 100, lo que lleva la frecuencia de corte desde  $1 \text{ rad/s}$  a  $100 \text{ rad/s}$  y que



**Figura 15.14.** Diagrama de magnitud de Bode para el circuito que hay que diseñar en el Ejemplo 15.6.

el factor de cambio de escala de la magnitud,  $k_m$ , es 20.000, que permite utilizar un condensador de  $0,5 \mu\text{F}$ . Si se utilizan estos factores de cambio de escala, se obtienen los siguientes valores de componentes:

$$R_L = 20 \text{ k}\Omega, \quad C_L = 0,5 \mu\text{F}.$$

La frecuencia de corte resultante para el filtro paso bajo es

$$\begin{aligned} \omega_{c1} &= \frac{1}{R_L C_L} \\ &= \frac{1}{(20 \times 10^3)(0,5 \times 10^{-6})} = 100 \text{ rad/s.} \end{aligned}$$

Utilizamos la misma técnica para diseñar el filtro paso alto, comenzando con el filtro prototipo paso alto basado en amplificador operacional. Ahora, el factor de cambio de escala en frecuencia es  $k_f = 2000$  y el factor de cambio de escala de la magnitud es  $k_m = 1000$ , lo que da los siguientes valores de componentes:

$$R_H = 1 \text{ k}\Omega, \quad C_H = 0,5 \mu\text{F}.$$

Finalmente, puesto que las frecuencias de corte tienen una gran separación, podemos utilizar el cociente  $R_f/R_i$  para establecer la ganancia deseada en las bandas de paso, cuyo valor debe ser igual a 3. Podemos elegir  $R_i = 1 \text{ k}\Omega$ , puesto que ya estamos utilizando ese valor de resistencia para  $R_H$ . Entonces,  $R_f = 3 \text{ k}\Omega$  y  $K = R_f/R_i = 3000/1000 = 3$ . El circuito de filtro de banda eliminada resultante, basado en amplificadores operacionales y con estructura en paralelo, se muestran en la Figura 15.15.

Comprobemos ahora la suposición de que  $\omega_{c2} \gg \omega_{c1}$  calculando la ganancia efectiva para las frecuencias de corte especificadas. Podemos hacer esto realizando las sustituciones  $s = j2\pi(100)$  y  $s = j2\pi(2000)$  en la función de transferencia del filtro de banda eliminada con arquitectura paralela, cuya función de transferencia está dada por la Ecuación 15.16, la cual nos permite calcular la ganancia resultante. Dejamos como

ejercicio al lector la verificación de que la magnitud para las frecuencias de corte especificadas es 2,024, inferior al valor de  $3/\sqrt{2} = 2,12$

que esperábamos. Por tanto, la banda eliminada es algo más ancha de lo que se especificaba en el enunciado del problema.

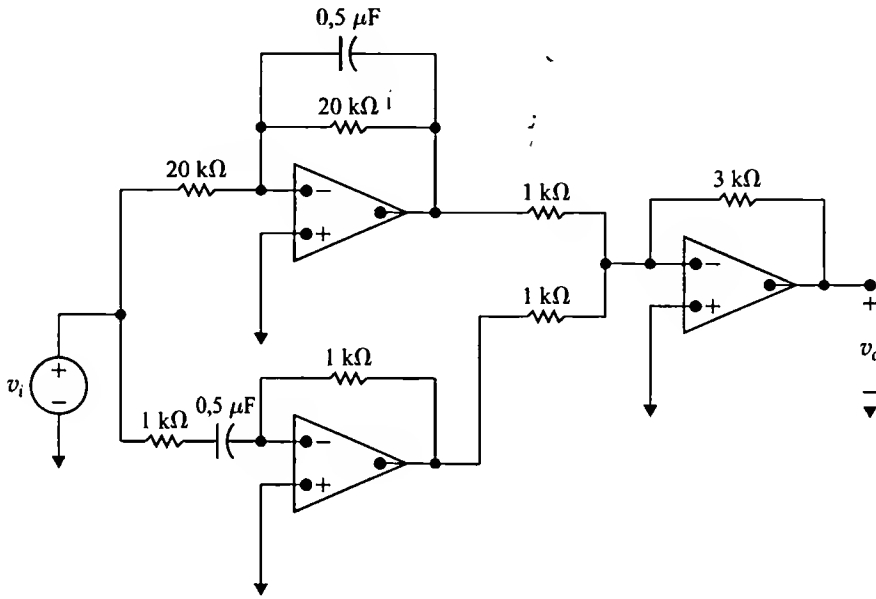


Figura 15.15. El circuito resultante de filtro de banda eliminada diseñado en el Ejemplo 15.6.

**NOTA** Evalúe su comprensión de este material intentando resolver los Problemas 15.25 y 15.26 del capítulo.

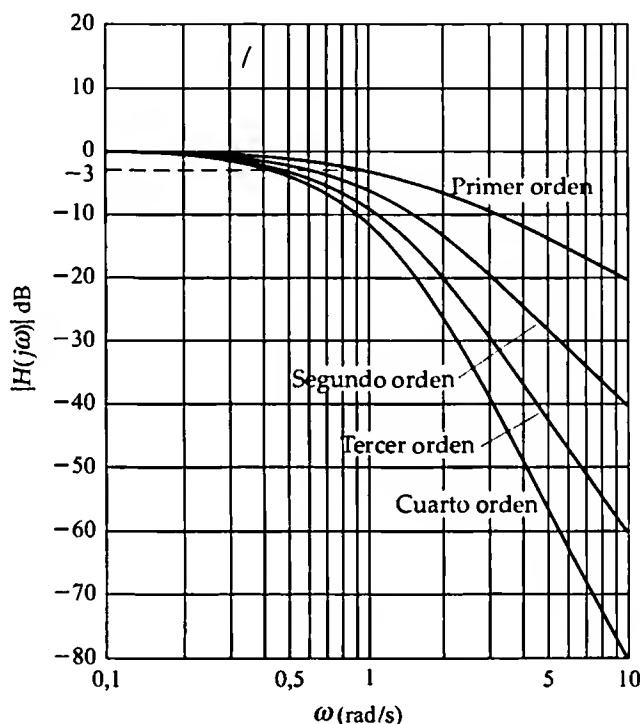
## 15.4. Filtros de orden superior basados en amplificador operacional

El lector habrá observado, posiblemente, que todos los circuitos de filtro que hemos examinado hasta ahora, tanto pasivos como activos, son no ideales. En el Capítulo 14 ya dijimos que un filtro ideal presenta una discontinuidad en el punto de corte, discontinuidad que divide claramente la banda de paso y la banda eliminada. Aunque resulta imposible construir un circuito que tenga una respuesta en frecuencia discontinua, sí podemos construir circuitos que presenten una transición más brusca, aunque siga siendo continua, a la frecuencia de corte.

### Conexión en cascada de filtros idénticos

¿Cómo podemos obtener una transición más abrupta entre la banda de paso y la banda eliminada? Los diagramas de Bode de ganancia de la Figura 15.16 nos sugieren una posible solución. Dicha figura muestra los diagramas de Bode de ganancia de una conexión en cascada de filtros prototipo paso bajo idénticos; la figura incluye la gráfica correspondiente a un único filtro, a la conexión de dos filtros en cascada, a la conexión de tres filtros y a la conexión de cuatro filtros. Resulta obvio que, a medida que

se añaden más filtros a la conexión en cascada, la transición entre la banda de paso y la banda eliminada se hace más abrupta. Las reglas para la construcción de diagramas de Bode (expuestas en el Apéndice E) nos dicen que para un filtro la transición se produce con una pendiente asintótica de 20 decibelios por década (dB/dec). Puesto que los circuitos en cascada son aditivos en un diagrama de Bode de ganancia, una conexión en cascada de dos filtros tendrá una transición con una pendiente asintótica de  $20 + 20 = 40$  dB/dec; para tres filtros, la pendiente asintótica será de 60 dB/dec y para cuatro filtros será de 80 dB/dec, como se muestra en la Figura 15.16.

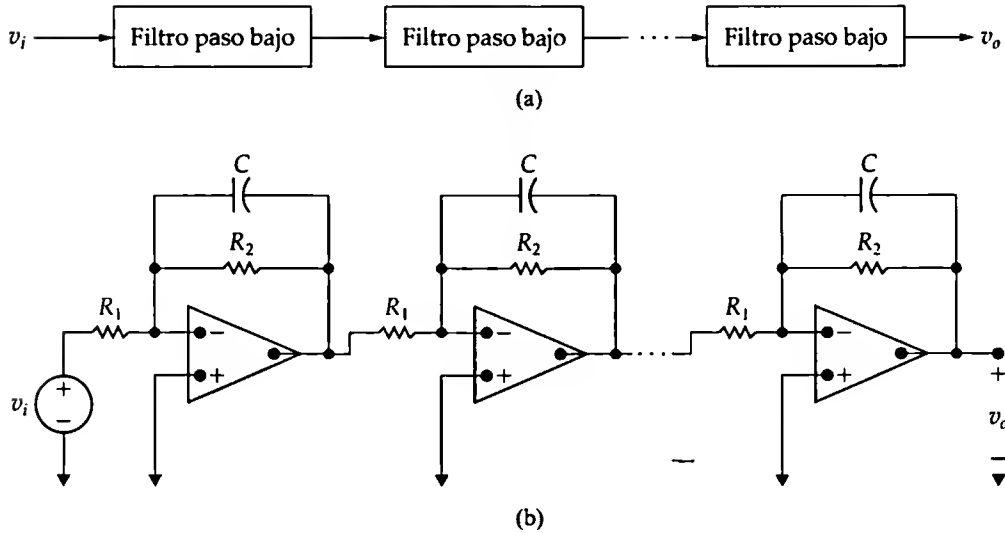


**Figura 15.16.** Diagrama de Bode de ganancia para una conexión en cascada de filtros prototipo de primer orden idénticos.

En general, una conexión en cascada de  $n$  elementos idénticos de filtrado paso bajo tendrá una pendiente en la transición entre la banda de paso y la banda eliminada igual a  $20n$  dB/dec. La Figura 15.17 muestra el diagrama de bloques y el diagrama de circuito de dicha conexión en cascada. Resulta fácil calcular la función de transferencia correspondiente a una conexión en cascada de  $n$  filtros prototipo paso bajo; basta con multiplicar las funciones de transferencia individuales:

$$\begin{aligned}
 H(s) &= \left( \frac{-1}{s+1} \right) \left( \frac{-1}{s+1} \right) \cdots \left( \frac{-1}{s+1} \right) \\
 &= \frac{(-1)^n}{(s+1)^n}.
 \end{aligned} \tag{15.21}$$

El orden de un filtro está determinado por el número de polos que su función de transferencia contiene. En la Ecuación 15.21 vemos que una conexión en cascada de filtros paso bajo de primer orden proporciona un filtro de orden superior. De hecho, una conexión en cascada de  $n$  filtros de primer orden



**Figura 15.17.** Una conexión en cascada de filtros paso bajo idénticos de ganancia unidad. (a) Diagrama de bloques. (b) El circuito.

genera un filtro de orden  $n$ , que tiene  $n$  polos en su función de transferencia y una pendiente final igual a  $20n$  dB/dec en la banda de transición.

Existe un problema importante que resolver, sin embargo, como puede ver si examina atentamente la Figura 15.16. A medida que se incrementa el orden del filtro paso bajo añadiendo filtros paso bajo prototipo a la conexión en cascada, la frecuencia de corte también se modifica. Por ejemplo, en una conexión en cascada de dos filtros paso bajo de primer orden, el módulo de la función de transferencia del filtro de segundo orden resultante es de  $-6$  dB para  $\omega_c$ , por lo que la frecuencia de corte del filtro de segundo orden no es igual a  $\omega_c$ . De hecho, la frecuencia de corte será inferior a  $\omega_c$ .

Sin embargo, si podemos calcular la frecuencia de corte de los filtros de orden superior que se generan al conectar en cascada filtros de primer orden, podemos emplear la técnica de cambio de escala de la frecuencia para calcular los valores de los componentes que nos permitan desplazar la frecuencia de corte hasta su ubicación especificada. Si comenzamos con una conexión en cascada de  $n$  filtros prototipo paso bajo, podemos calcular la frecuencia de corte para el filtro paso bajo resultante de orden  $n$ . Para ello, despejamos el valor de  $\omega_{cn}$  que hace que  $|H(j\omega)| = 1/\sqrt{2}$ :

$$H(s) = \frac{(-1)^n}{(s+1)^n},$$

$$|H(j\omega_{cn})| = \left| \frac{1}{(j\omega_{cn}+1)^n} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\frac{1}{(\sqrt{\omega_{cn}^2+1})^n} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\frac{1}{\omega_{cn}^2+1} = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{2/n}.$$

$$\sqrt[n]{2} = \omega_{cn}^2 + 1,$$

$$\omega_{cn} = \sqrt[n]{\sqrt{2} - 1}. \quad (15.22)$$

Para ilustrar el uso de la Ecuación 15.22, vamos a calcular la frecuencia de corte de un filtro paso bajo de cuarto orden y ganancia unidad construido a partir de una conexión en cascada de cuatro filtros prototipo paso bajo:

$$\omega_{c4} = \sqrt[4]{\sqrt{2} - 1} = 0,435 \text{ rad/s}. \quad (15.23)$$

Por tanto, podemos diseñar un filtro paso bajo de cuarto orden con una frecuencia de corte arbitraria comenzando con una conexión en cascada de cuarto orden compuesta por filtros prototipo paso bajo y luego cambiando la escala de los componentes según un factor  $k_f = \omega_c/0,435$ , para situar la frecuencia de corte en el valor de  $\omega_c$  deseado.

Observe que podemos construir un filtro paso bajo de orden superior con una ganancia distinta de la unidad añadiendo un circuito amplificador inversor a la conexión en cascada. El Ejemplo 15.7 ilustra el diseño de un filtro paso bajo de cuarto orden con ganancia distinta de la unidad.

### EJEMPLO 15.7 Diseño de un filtro paso bajo de cuarto orden basado en amplificador operacional

Vamos a diseñar un filtro paso bajo de cuarto orden con una frecuencia de corte de 500 Hz y una ganancia en la banda de paso igual a 10. Utilizaremos condensadores de  $1 \mu\text{F}$  y dibujaremos el diagrama de Bode de ganancia para este filtro.

#### SOLUCIÓN

Comenzamos el diseño conectando en cascada cuatro filtros prototipo paso bajo. Ya hemos utilizado la Ecuación 15.23 para calcular la frecuencia de corte del filtro paso bajo resultante de cuarto orden, frecuencia que era igual a 0,435 rad/s. Un factor de cambio de escala en frecuencia de  $k_f = 7222,39$  nos permitirá obtener los valores de componentes necesarios para que la frecuencia de corte sea igual a 500 Hz. Asimismo, un factor de cambio de escala de la magnitud de valor  $k_m = 138,46$  nos permitirá utilizar condensadores de  $1 \mu\text{F}$ . Los valores resultantes de los componentes serán:

$$R = 138,46 \Omega;$$

$$C = 1 \mu\text{F}.$$

Finalmente, añadimos una etapa de amplificador inversor con una ganancia de  $R_f/R_i = 10$ . Como de costumbre, podemos seleccionar arbitrariamente uno de los dos valores de resistencia. Puesto que ya estamos utilizando resistencias de  $138,46 \Omega$ , haremos  $R_i = 138,46 \Omega$ ; entonces,

$$\begin{aligned} R_f &= 10R_i \\ &= 1384,6 \Omega. \end{aligned}$$

La Figura 15.18 muestra el circuito correspondiente a este filtro paso bajo de cuarto orden con conexión en cascada. Su función de transferencia es

$$H(s) = -10 \left[ \frac{7222,39}{s + 7222,39} \right]^4.$$

El diagrama de Bode de la ganancia para esta función de transferencia es el que se muestra en la Figura 15.19.



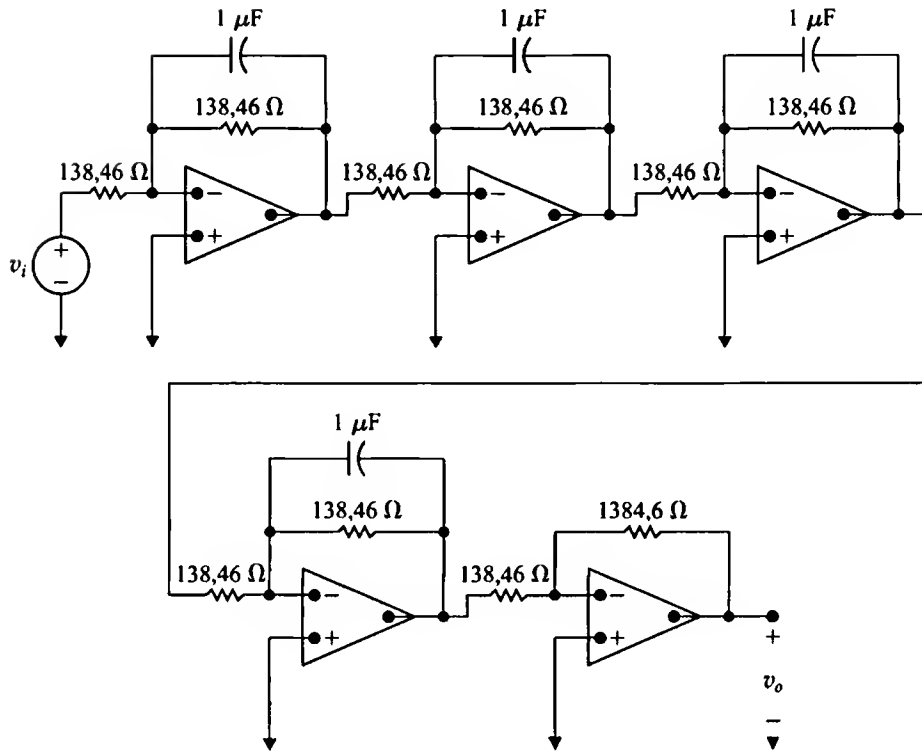


Figura 15.18. Circuito en cascada para el filtro paso bajo de cuarto orden del Ejemplo 15.7.

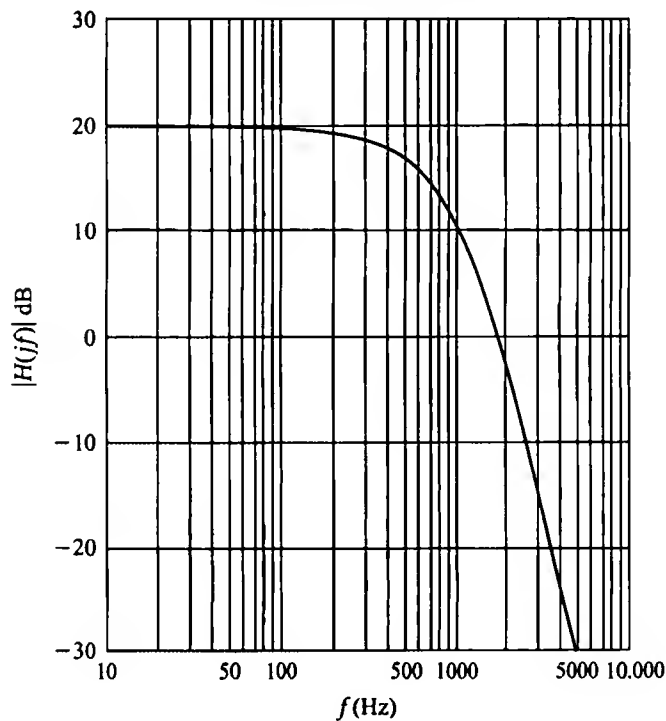


Figura 15.19. Diagrama de Bode de la ganancia del filtro paso bajo de cuarto orden del Ejemplo 15.7.

Conectando en cascada una serie de filtros paso bajo idénticos, podemos incrementar la pendiente asintótica en la banda de transición y controlar la ubicación de la frecuencia de corte, pero nuestra técnica presenta una seria desventaja: la ganancia del filtro no es constante entre cero y la frecuencia de corte  $\omega_c$ . Recuerde que, en un filtro paso bajo ideal, el módulo de la función de transferencia en la banda de paso es igual a 1 para todas las frecuencias situadas por debajo de la frecuencia de corte. Pero, en la Figura 15.16, vemos que el módulo es inferior a 1 (0 dB) para frecuencias que están muy por debajo de la frecuencia de corte.

Este comportamiento no ideal en la banda de paso puede comprenderse mejor examinando el módulo de la función de transferencia para una conexión en cascada de  $n$  filtros paso bajo con ganancia unidad. Dado que

$$H(s) = \frac{\omega_{cn}^n}{(s + \omega_{cn})^n},$$

el módulo será

$$|H(j\omega)| = \frac{\omega_{cn}^n}{(\sqrt{\omega^2 + \omega_{cn}^2})^n} = \frac{1}{(\sqrt{(\omega/\omega_{cn})^2 + 1})^n}. \quad (15.24)$$

Como podemos ver en la Ecuación 15.24, cuando  $\omega \ll \omega_{cn}$ , el denominador es aproximadamente 1 y el módulo de la función de transferencia es también prácticamente igual a 1. Pero a medida que  $\omega \rightarrow \omega_{cn}$ , el denominador se hace mayor que 1, por lo que el módulo es inferior a la unidad. Debido a que la conexión en cascada de filtros paso bajo presenta este comportamiento no ideal en la banda de paso, se utilizarán otros enfoques para el diseño de filtros de orden superior. Examinaremos uno de dichos enfoques a continuación.

## Filtros de Butterworth

Un **filtro paso bajo de Butterworth** con ganancia unidad tiene una función de transferencia cuyo módulo está dado por

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_c)^{2n}}}, \quad (15.25)$$

donde  $n$  es un entero que denota el orden del filtro<sup>1</sup>.

Cuando analizamos la Ecuación 15.25, podemos observar lo siguiente:

1. La frecuencia de corte es  $\omega_c$  rad/s para todos los valores de  $n$ .
2. Si  $n$  es lo suficientemente grande, el denominador está siempre próximo a la unidad cuando  $\omega < \omega_c$ .
3. En la expresión correspondiente a  $|H(j\omega)|$ , el exponente de  $\omega/\omega_c$  es siempre par.

Esta última observación es muy importante, porque se requiere un exponente par para que el circuito sea físicamente implementable (véase el Problema 15.24).

<sup>1</sup> Este filtro fue desarrollado por el ingeniero británico S. Butterworth, que publicó un artículo sobre el mismo en *Wireless Engineering* 7 (1930): 536-541.

Dada la ecuación correspondiente al módulo de la ecuación de transferencia, ¿cómo podemos hallar  $H(s)$ ? La determinación de  $H(s)$  se simplifica enormemente si utilizamos un filtro prototipo. Por tanto, vamos a hacer  $\omega_c$  igual a 1 rad/s en la Ecuación 15.25. Como antes, utilizaremos la técnica de cambio de escala para transformar el filtro prototipo en un filtro que cumpla con las especificaciones de filtrado proporcionadas.

Para hallar  $H(s)$ , observe primero que si  $N$  es un número complejo, entonces  $|N|^2 = N N^*$ , donde  $N^*$  es el conjugado de  $N$ . De aquí se sigue que

$$|H(j\omega)|^2 = H(j\omega)H(-j\omega). \quad (15.26)$$

Pero, como  $s = j\omega$ , podemos escribir

$$|H(j\omega)|^2 = H(s)H(-s). \quad (15.27)$$

Ahora observe que  $s^2 = -\omega^2$ , por lo que

$$\begin{aligned} |H(j\omega)|^2 &= \frac{1}{1 + \omega^{2n}} = \frac{1}{1 + (\omega^2)^n} \\ &= \frac{1}{1 + (-s^2)^n} = \frac{1}{1 + (-1)^n s^{2n}}, \end{aligned}$$

o bien

$$H(s)H(-s) = \frac{1}{1 + (-1)^n s^{2n}}. \quad (15.28)$$

El procedimiento para determinar  $H(s)$  para un valor de  $n$  dado es el siguiente:

1. Halle las raíces del polinomio

$$1 + (-1)^n s^{2n} = 0.$$

2. Asigne las raíces del semiplano izquierdo a  $H(s)$  y las raíces del semiplano derecho a  $H(-s)$ .
  3. Combine los términos del denominador de  $H(s)$  para formar factores de primer y segundo orden.
- El Ejemplo 15.8 ilustra este proceso.

### EJEMPLO 15.8 Cálculo de funciones de transferencia de Butterworth

Halle las funciones de transferencia de Butterworth para  $n = 2$  y  $n = 3$ .

#### SOLUCIÓN

Para  $n = 2$ , hallamos las raíces del polinomio

$$1 + (-1)^2 s^4 = 0.$$

Reordenando los términos, vemos que

$$s^4 = -1 = 1 \angle 180^\circ.$$

Por tanto, las cuatro raíces son

$$s_1 = 1 \angle 45^\circ = 1/\sqrt{2} + j/\sqrt{2},$$

$$s_2 = 1 \angle 135^\circ = -1/\sqrt{2} + j/\sqrt{2},$$

$$s_3 = 1 \angle 225^\circ = -1/\sqrt{2} - j/\sqrt{2},$$

$$s_4 = 1 \angle 315^\circ = 1/\sqrt{2} - j/\sqrt{2}.$$

Las raíces  $s_2$  y  $s_3$  están en el semiplano izquierdo, por lo que

$$H(s) = \frac{1}{(s+1/\sqrt{2}-j/\sqrt{2})(s+1/\sqrt{2}+j/\sqrt{2})}$$

$$= \frac{1}{(s^2 + \sqrt{2}s + 1)}.$$

Para  $n = 3$ , hallamos las raíces del polinomio

$$1 + (-1)^3 s^6 = 0.$$

Reordenando los términos, nos queda

$$s^6 = 1 \angle 0^\circ = 1 \angle 360^\circ.$$

Por tanto, las seis raíces son

$$s_1 = 1 \angle 0^\circ = 1,$$

$$s_2 = 1 \angle 60^\circ = 1/2 + j\sqrt{3}/2,$$

$$s_3 = 1 \angle 120^\circ = -1/2 + j\sqrt{3}/2,$$

$$s_4 = 1 \angle 180^\circ = -1 + j0,$$

$$s_5 = 1 \angle 240^\circ = -1/2 - j\sqrt{3}/2,$$

$$s_6 = 1 \angle 300^\circ = 1/2 - j\sqrt{3}/2.$$

Las raíces  $s_3$ ,  $s_4$  y  $s_5$  se encuentran en el semiplano izquierdo, por lo que

$$H(s) = \frac{1}{(s+1)(s+1/2-j\sqrt{3}/2)(s+1/2+j\sqrt{3}/2)}$$

$$= \frac{1}{(s+1)(s^2+s+1)}.$$

Podemos observar que las raíces del polinomio de Butterworth están siempre equiespaciadas alrededor del círculo unidad en el plano  $s$ . Como ayuda para el diseño de filtros de Butterworth, la Tabla 15.1 enumera los polinomios de Butterworth hasta  $n = 8$ .

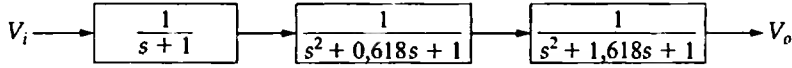
**Tabla 15.1.** Polinomios de Butterworth normalizados (de modo que  $\omega_c = 1$  rad/s) hasta el octavo orden

$n$	POLINOMIO DE BUTTERWORTH DE ORDEN $n$
1	$(s+1)$
2	$(s^2 + \sqrt{2}s + 1)$
3	$(s+1)(s^2 + s + 1)$
4	$(s^2 + 0,765s + 1)(s^2 + 1,848s + 1)$
5	$(s+1)(s^2 + 0,618s + 1)(s^2 + 1,618s + 1)$
6	$(s^2 + 0,518s + 1)(s^2 + \sqrt{2} + 1)(s^2 + 1,932s + 1)$
7	$(s+1)(s^2 + 0,445s + 1)(s^2 + 1,247s + 1)(s^2 + 1,802s + 1)$
8	$(s^2 + 0,390s + 1)(s^2 + 1,111s + 1)(s^2 + 1,6663s + 1)(s^2 + 1,962s + 1)$

## Circuitos de filtro de Butterworth

Ahora que sabemos cómo especificar la función de transferencia para un circuito de filtro de Butterworth (calculando los polos de la función de transferencia directamente o utilizando la Tabla 15.1), volvamos nuestra atención al problema de diseñar un circuito con dicha función de transferencia. Observe la forma de los polinomios de Butterworth enumerados en la Tabla 15.1. Se trata de polinomios que se obtienen como productos de factores de primer y segundo orden; por tanto, pode-

mos construir un circuito cuya función de transferencia tenga un polinomio de Butterworth en su denominador conectando en cascada circuitos basados en amplificador operacional, cada uno de los cuales debe proporcionar uno de los factores necesarios. En la Figura 15.20 se muestra un diagrama de bloques de dicha conexión en cascada, utilizando un polinomio de Butterworth de quinto orden como ejemplo.



**Figura 15.20.** Conexión en cascada de circuitos de primer y segundo orden con las funciones de transferencia indicadas, lo cual nos permite obtener un filtro paso bajo de Butterworth de quinto orden con  $\omega_c = 1$  rad/s.

Todos los polinomios de Butterworth de orden impar incluyen el factor  $(s + 1)$ , por lo que todos los circuitos de filtro de Butterworth de orden impar deben tener un subcircuito que proporcione la función de transferencia  $H(s) = 1/(s + 1)$ . Ésta es la función de transferencia del filtro prototipo paso bajo basado en amplificador operacional que se muestra en la Figura 15.1. Así que lo único que nos queda es encontrar un circuito que proporcione una función de transferencia de la forma  $H(s) = 1/(s^2 + b_1s + 1)$ .

Dicho circuito se muestra en la Figura 15.21. El análisis del circuito comienza escribiendo las ecuaciones de nodo en el dominio de  $s$  para el terminal no inversor del amplificador operacional y para el nodo etiquetado como  $V_a$ :

$$\frac{V_a - V_i}{R} + (V_a - V_o)sC_1 + \frac{V_a - V_o}{R} = 0, \quad (15.29)$$

$$V_o sC_2 + \frac{V_o - V_a}{R} = 0. \quad (15.30)$$

Simplificando las Ecuaciones 15.29 y 15.30, nos queda

$$(2 + RC_1s)V_a - (1 + RC_1s)V_o = V_i, \quad (15.31)$$

$$-V_a + (1 + RC_2s)V_o = 0. \quad (15.32)$$

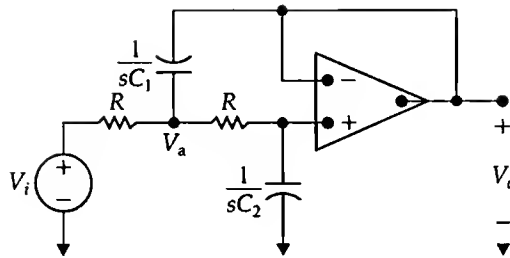
Podemos hallar el valor de  $V_o$  aplicando la regla de Cramer a las Ecuaciones 15.31 y 15.32:

$$V_o = \frac{\begin{vmatrix} 2 + RC_1s & V_i \\ -1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 + RC_1s & -(1 + RC_1s) \\ -1 & 1 + RC_2s \end{vmatrix}} = \frac{V_i}{R^2C_1C_2s^2 + 2RC_2s + 1}. \quad (15.33)$$

Después, reordenamos la Ecuación 15.33 para escribir la función de transferencia del circuito de la Figura 15.21:

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{\frac{1}{R^2C_1C_2}}{s^2 + \frac{2}{RC_1}s + \frac{1}{R^2C_1C_2}}. \quad (15.34)$$

Finalmente, hacemos  $R = 1 \Omega$  en la Ecuación 15.34, con lo que se obtiene



**Figura 15.21.** Un circuito que proporciona la función de transferencia de segundo orden para el filtro de Butterworth con arquitectura en cascada.

$$H(s) = \frac{\frac{1}{C_1 C_2}}{s^2 + \frac{2}{C_1} s + \frac{1}{C_1 C_2}}. \quad (15.35)$$

Observe que la Ecuación 15.35 tiene la forma requerida para el circuito de segundo orden que se incluye en la conexión en cascada de Butterworth. En otras palabras, para obtener una función de transferencia de la forma

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + b_1 s + 1},$$

utilizamos un circuito como el de la Figura 15.21 y seleccionamos los valores de los condensadores de modo que

$$b_1 = \frac{2}{C_1} \quad \text{y} \quad 1 = \frac{1}{C_1 C_2}. \quad (15.36)$$

De este modo queda esbozado el procedimiento para el diseño de un circuito paso bajo de Butterworth de orden  $n$  con una frecuencia de corte  $\omega_c = 1$  rad/s y una ganancia igual a 1 en la banda de paso. Podemos utilizar la técnica del cambio de escala de frecuencia para calcular los valores de los condensadores que nos permitan obtener cualquier otra frecuencia de corte, y también podemos emplear la técnica de cambio de escala de la magnitud para obtener valores de componentes más realistas o fáciles de encontrar para nuestro diseño. Para proporcionar una ganancia distinta a 1 en la banda de paso, podemos conectar en cascada un circuito amplificador inversor.

El Ejemplo 15.9 ilustra este proceso de diseño.

### EJEMPLO 15.9 Diseño de un filtro paso bajo de Butterworth de cuarto orden

Vamos a diseñar un filtro paso bajo de Butterworth de cuarto orden con una frecuencia de corte de 500 Hz y una ganancia en la banda de paso igual a 10. Trataremos de utilizar tantas resistencias de 1 k $\Omega$  como sea posible. Después, compararemos la gráfica de Bode de la ganancia para este filtro de Butterworth con la de la con-

exión en cascada de filtros idénticos que se muestra en el Ejemplo 15.7.

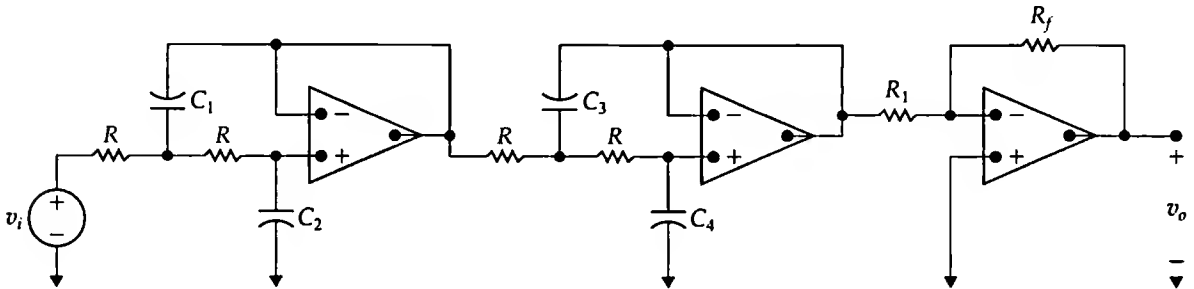
### SOLUCIÓN

Utilizando la Tabla 15.1, vemos que el polinomio de Butterworth de cuarto orden es

$$(s^2 + 0,765s + 1)(s^2 + 1,848s + 1).$$

Por tanto, necesitaremos conectar en cascada dos filtros de segundo orden para obtener la función de transferencia de cuarto orden; también

necesitaremos un circuito amplificador inversor para conseguir la ganancia de 10 en la banda de paso. El circuito se muestra en la Figura 15.22.



**Figura 15.22.** Un filtro de Butterworth de cuarto orden con ganancia distinta de la unidad.

Supongamos que la primera etapa de la conexión en cascada implementa la función de transferencia correspondiente al polinomio  $(s^2 + 0,765s + 1)$ . A partir de la Ecuación 15.36,

$$C_1 = 2,61 \text{ F},$$

$$C_2 = 0,38 \text{ F}.$$

La segunda etapa de la conexión en cascada implementará la función de transferencia correspondiente al polinomio  $(s^2 + 1,848s + 1)$ . De nuevo, aplicando la Ecuación 15.36,

$$C_3 = 1,08 \text{ F},$$

$$C_4 = 0,924 \text{ F}.$$

Los valores precedentes de  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  y  $C_4$  definen un filtro de Butterworth de cuarto orden con una frecuencia de corte de 1 rad/s. Aplicando un factor de cambio de escala en frecuencia  $k_f = 3141,6$ , podemos desplazar la frecuencia de corte a 500 Hz. Por su parte, un factor de cambio de escala de la magnitud  $k_m = 1000$  permitirá utilizar resistencias de 1 k $\Omega$  en lugar de resistencias de 1  $\Omega$ . Los valores de componentes resultantes son

$$R = 1 \text{ k}\Omega$$

$$C_1 = 831 \text{ nF},$$

$$C_2 = 121 \text{ nF},$$

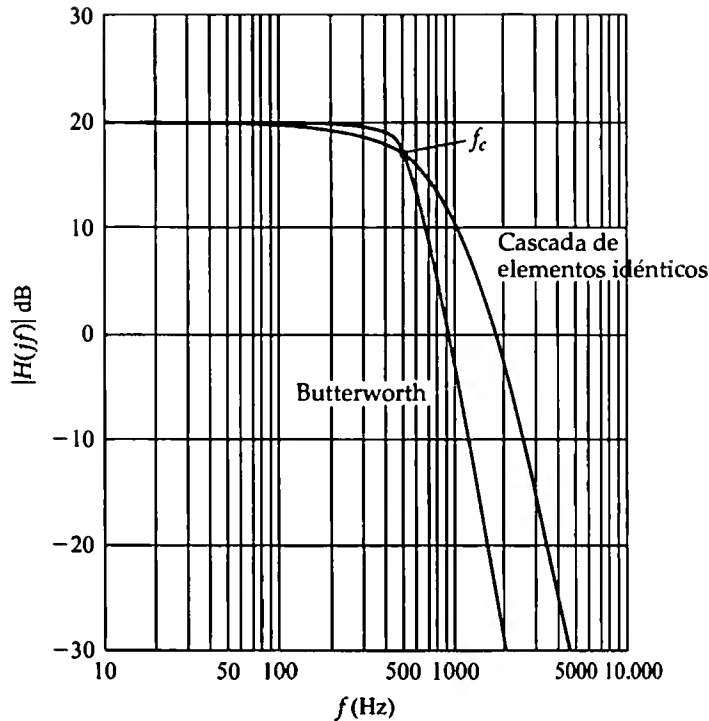
$$C_3 = 344 \text{ nF},$$

$$C_4 = 294 \text{ nF}.$$

Finalmente, necesitamos especificar los valores de las resistencias para la etapa del amplificador inversor, con el objetivo de obtener una ganancia en la banda de paso igual a 10. Sea  $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$ ; entonces

$$R_f = 10R_1 = 10 \text{ k}\Omega.$$

La Figura 15.23 compara la respuesta de ganancia del filtro de cuarto orden basado en la conexión en cascada de elementos idénticos, que estudiamos en el Ejemplo 15.7, y del filtro de Butterworth que acabamos de diseñar. Observe que ambos filtros proporcionan una ganancia en la banda de paso igual a 10 (20 dB) y una frecuencia de corte de 500 Hz, pero el filtro de Butterworth está más próximo al filtro paso bajo ideal, debido a que posee una banda de paso más plana y una caída más pronunciada a la frecuencia de corte. Por esto se prefiere diseñar filtros de Butterworth en lugar de conectar en cascada una serie de filtros idénticos.



**Figura 15.23.** Comparación entre el diagrama de ganancia de un filtro paso bajo de cuarto orden basado en elementos idénticos conectados en cascada y un filtro de Butterworth.

## Orden de un filtro de Butterworth

Resultará ya evidente para el lector, llegados a este punto, que cuanto más alto sea el orden del filtro de Butterworth, más próxima estará la gráfica de la respuesta del filtro a la del filtro paso bajo ideal. En otras palabras, a medida que se incrementa  $n$ , el módulo de la función de transferencia se aproxima más a la unidad en la banda de paso, la banda de transición se estrecha y el módulo se aproxima más a cero en la banda eliminada. Al mismo tiempo, a medida que se incrementa el orden del filtro, también lo hace el número de componentes del circuito. Por tanto, un problema fundamental en el diseño de un filtro consiste en determinar el menor valor de  $n$  que permita satisfacer las especificaciones del filtro.

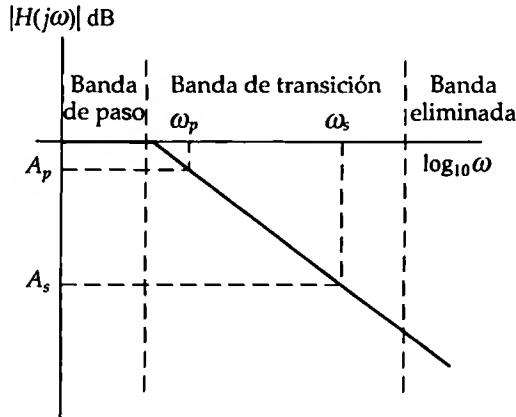
En el diseño de un filtro paso bajo, las especificaciones del filtro se suelen proporcionar en función de la caída en la región de transición, como se muestra en la Figura 15.24. Una vez especificados los valores de  $A_p$ ,  $\omega_p$ ,  $A_s$  y  $\omega_s$ , podemos determinar el orden del filtro de Butterworth.

Para el filtro de Butterworth,

$$A_p = 20 \log_{10} \frac{1}{\sqrt{1 + \omega_p^{2n}}} = -10 \log_{10}(1 + \omega_p^{2n}), \quad (15.37)$$

$$A_s = 20 \log_{10} \frac{1}{\sqrt{1 + \omega_s^{2n}}} = -10 \log_{10}(1 + \omega_s^{2n}). \quad (15.38)$$





**Figura 15.24.** Definición del orden de transición para un filtro paso bajo.

De la definición del logaritmo se sigue que

$$10^{-0.1A_p} = 1 + \omega_p^{2n}, \quad (15.39)$$

$$10^{-0.1A_s} = 1 + \omega_s^{2n}. \quad (15.40)$$

Ahora podemos despejar  $\omega_p^n$  y  $\omega_s^n$  y formar el cociente  $(\omega_s/\omega_p)^n$ , con lo que obtiene

$$\left(\frac{\omega_s}{\omega_p}\right)^n = \frac{\sqrt{10^{-0.1A_s} - 1}}{\sqrt{10^{-0.1A_p} - 1}} = \frac{\sigma_s}{\sigma_p}, \quad (15.41)$$

donde los símbolos  $\sigma_s$  y  $\sigma_p$  se han introducido por mera comodidad.

A partir de la Ecuación 15.41, podemos escribir

$$n \log_{10}(\omega_s / \omega_p) = \log_{10}(\sigma_s / \sigma_p),$$

o bien

$$n = \frac{\log_{10}(\sigma_s / \sigma_p)}{\log_{10}(\omega_s / \omega_p)}. \quad (15.42)$$

Podemos simplificar la Ecuación 15.42 teniendo en cuenta que  $\omega_p$  es la frecuencia de corte, porque entonces  $A_p$  es igual a  $-20 \log_{10} \sqrt{2}$  y  $\sigma_p = 1$ . Por tanto,

$$n = \frac{\log_{10} \sigma_s}{\log_{10}(\omega_s / \omega_p)}. \quad (15.43)$$

Todavía se puede hacer una simplificación más. Como lo que pretendemos es utilizar un filtro de Butterworth para conseguir una región de transición con una caída pronunciada, la especificación de filtrado hará que  $10^{-0.01A_s} \gg 1$ . Por tanto,

$$\sigma_s \approx 10^{-0.05A_s}, \quad (15.44)$$

$$\log_{10} \sigma_s \approx -0.05A_s. \quad (15.45)$$

De este modo, una buena aproximación para el cálculo de  $n$  es

$$n = \frac{-0,05 A_s}{\log_{10}(\omega_s / \omega_p)} \quad (15.46)$$

Observe que  $\omega_s / \omega_p = f_s / f_p$ , por lo que podemos trabajar tanto con radianes por segundo como con hercios para calcular  $n$ .

El orden del filtro debe ser un entero; por tanto, al aplicar la Ecuación 15.42 o la Ecuación 15.46, debemos seleccionar el valor entero más próximo que sea superior al resultado dado por la ecuación. Los siguientes ejemplos ilustran la utilidad de las Ecuaciones 15.42 y 15.46.

### EJEMPLO 15.10 Determinación del orden de un filtro de Butterworth

- a) Determine el orden de un filtro de Butterworth que tenga una frecuencia de corte de 1000 Hz y una ganancia no superior a  $-50$  dB a 6000 Hz.
- b) ¿Cuál es la ganancia que se obtiene, en dB, a 6000 Hz?

$$n = \frac{(-0,05)(-50)}{\log_{10}(6000/1000)} = 3,21.$$

Esto nos muestra que necesitamos un filtro de Butterworth de cuarto orden.

- b) Podemos utilizar la Ecuación 15.25 para calcular la ganancia que se obtendrá a 6000 Hz. La ganancia en decibelios será

$$K = 20 \log_{10} \left( \frac{1}{\sqrt{1 + 6^8}} \right) = -62,25 \text{ dB}.$$

### SOLUCIÓN

- a) Puesto que nos dan la frecuencia de corte, sabemos que  $\sigma_p = 1$ . También vemos, a partir de la especificación, que  $10^{-0,1(-50)}$  es muy superior a 1. Por tanto, podemos utilizar sin problemas la Ecuación 15.46:

### EJEMPLO 15.11 Un enfoque alternativo para la determinación del orden de un filtro de Butterworth

- a) Determine el orden de un filtro de Butterworth cuya ganancia sea 10 dB inferior para 500 Hz a la ganancia en la banda de paso y cuya ganancia a 5000 Hz sea 60 dB inferior a la ganancia en la banda de paso.
- b) Determine la frecuencia de corte del filtro (en hercios).
- c) ¿Cuál es la ganancia del filtro (en decibelios) a 5000 Hz?

corte, utilizaremos la Ecuación 15.42 para determinar el orden del filtro:

$$\sigma_p = \sqrt{10^{-0,1(-10)}} - 1 = 3,$$

$$\sigma_s = \sqrt{10^{-0,1(-60)}} - 1 \approx 1000,$$

$$\omega_s / \omega_p = f_s / f_p = 5000 / 500 = 10,$$

### SOLUCIÓN

- a) Puesto que no nos dan la frecuencia de

$$n = \frac{\log_{10}(1000/3)}{\log_{10}(10)} = 2,52.$$

Por tanto, necesitamos un filtro de Butterworth de tercer orden para cumplir con las especificaciones.

- b) Sabiendo que la ganancia a 500 Hz es de  $-10$  dB, podemos determinar la frecuencia de corte. Teniendo en cuenta la Ecuación 15.25, podemos escribir

$$-10 \log_{10}[1 + (\omega/\omega_c)^6] = -10,$$

donde  $\omega = 1000\pi$  rad/s. Por tanto,

$$1 + (\omega/\omega_c)^6 = 10,$$

y

$$\omega_c = \frac{\omega}{\sqrt[6]{9}} = 2178,26 \text{ rad/s.}$$

De aquí se sigue que

$$f_c = 346,68 \text{ Hz.}$$

- c) La ganancia del filtro a 5000 Hz será

$$\begin{aligned} K &= -10 \log_{10}[1 + (5000/346,68)^6] \\ &= -69,54 \text{ dB.} \end{aligned}$$

## Filtros de Butterworth paso alto, paso banda y de banda eliminada

Un filtro paso alto de Butterworth de orden  $n$  tiene una función de transferencia cuyo denominador es igual al polinomio de Butterworth de orden  $n$ , como sucedía con el filtro paso bajo de Butterworth de orden  $n$ . Pero en el filtro paso alto, el numerador de la función de transferencia es  $s^n$ , mientras que en el filtro paso bajo el numerador era 1. De nuevo, utilizamos una arquitectura en cascada para diseñar el filtro paso alto de Butterworth. El factor de primer orden se obtiene incluyendo un filtro prototipo paso alto (Figura 15.4, con  $R_1 = R_2 = 1 \Omega$  y  $C = 1 \text{ F}$ ) en la conexión en cascada.

Para obtener los factores de segundo orden del polinomio de Butterworth, necesitamos un circuito con una función de transferencia de la forma

$$H(s) = \frac{s^2}{s^2 + b_1 s + 1}.$$

Dicho circuito se muestra en la Figura 15.25.

El circuito tiene la función de transferencia

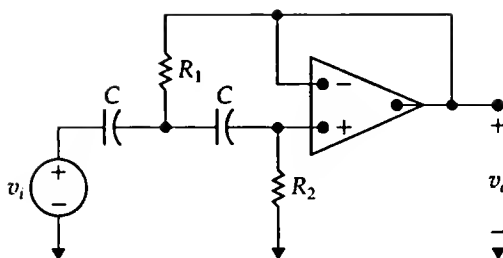
$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{s^2}{s^2 + \frac{2}{R_2 C} s + \frac{1}{R_1 R_2 C^2}}. \quad (15.47)$$

Haciendo  $C = 1 \text{ F}$ , obtenemos

$$H(s) = \frac{s^2}{s^2 + \frac{2}{R_2} s + \frac{1}{R_1 R_2}}. \quad (15.48)$$

Por tanto, podemos implementar cualquier factor de segundo orden en un polinomio de Butterworth de la forma  $(s^2 + b_1 s + 1)$  incluyendo en la conexión en cascada el circuito de segundo orden de la Figura 15.25, con valores de resistencias que satisfagan la Ecuación 15.49:

$$b_1 = \frac{2}{R_2} \quad \text{y} \quad 1 = \frac{1}{R_1 R_2}. \quad (15.49)$$



**Figura 15.25.** Circuito de filtro paso alto de Butterworth de segundo orden.

En este punto, conviene que hagamos un alto en el camino para realizar un par de observaciones relativas a las Figuras 15.21 y 15.25 y a sus funciones de transferencia prototípicas  $1/(s^2 + b_1s + 1)$  y  $s^2/(s^2 + b_1s + 1)$ . Estas observaciones son importantes porque se cumplen con carácter general. En primer lugar, el circuito paso alto de la Figura 15.25 se ha obtenido a partir del circuito paso bajo de la Figura 15.21, simplemente intercambiando las resistencias y condensadores. En segundo lugar, la función de transferencia prototipo de un filtro paso alto puede obtenerse a partir de la de un filtro paso bajo sustituyendo  $s$  en la función paso bajo por  $1/s$  (véase el Problema 15.41).

Podemos utilizar las técnicas de cambio de escala de frecuencia y de magnitud para diseñar un filtro paso alto de Butterworth con valores de componentes adecuados y con una frecuencia de corte distinta de 1 rad/s. Para implementar diseños con ganancia en la banda de paso distinta a la unidad, bastará añadir un amplificador inversor a la conexión en cascada. Los problemas proporcionados al final del capítulo incluyen varios diseños de filtro paso alto de Butterworth.

Ahora que sabemos cómo diseñar filtros de Butterworth de orden  $n$ , tanto paso bajo como paso alto, con frecuencias y ganancias en la banda de paso arbitrarias, podemos combinar estos filtros en cascada (como hicimos en la Sección 15.3) para obtener filtros paso banda de Butterworth de orden  $n$ . También podemos combinar estos filtros en paralelo y conectarlos a un amplificador sumador (de nuevo, como hicimos en la Sección 15.3) para obtener filtros de banda eliminada de Butterworth de orden  $n$ . La sección de Problemas del capítulo incluye también diseños de filtros paso banda y de banda eliminada de Butterworth.

### Evaluación del objetivo 3

- Comprender cómo utilizar filtros de Butterworth de primer y segundo orden conectados en cascada.
- 15.4. Para el circuito de la Figura 15.25, halle sendos valores de  $R_1$  y  $R_2$  que permitan obtener un filtro prototipo paso alto de Butterworth de segundo orden.

#### RESPUESTA

$$R_1 = 0,707 \, \Omega,$$

$$R_2 = 1,41 \, \Omega.$$

**NOTA** Trate también de resolver los Problemas 15.28, 15.31 y 15.32 del capítulo.

## 15.5. Filtros paso banda y de banda eliminada de banda estrecha

Los diseños consistentes en conectar en cascada o en paralelo una serie de componentes para sintetizar filtros paso banda y de banda eliminada a partir de filtros paso bajo y paso alto más simples tienen la restricción de que sólo pueden obtenerse filtros de banda ancha, es decir, filtros de baja  $Q$  (la  $Q$ , por supuesto, hace referencia al *factor de calidad*). Esta limitación se debe principalmente al hecho de que las funciones de transferencia correspondientes a los filtros paso banda en cascada y a los filtros de banda eliminada en paralelo tienen polos reales discretos. Las técnicas de síntesis son más apropiadas para frecuencias de corte que estén ampliamente separadas y que, por tanto, tengan factores de calidad bajos. Pero el factor de calidad más alto que podemos obtener con polos reales discretos se consigue cuando las frecuencias de corte, y por tanto la ubicación de los polos, son iguales. Considere la función de transferencia resultante:

$$\begin{aligned} H(s) &= \left( \frac{-\omega_c}{s + \omega_c} \right) \left( \frac{-s}{s + \omega_c} \right) \\ &= \frac{s\omega_c}{s^2 + 2\omega_c s + \omega_c^2} = \frac{0.5\beta s}{s^2 + \beta s + \omega_c^2}. \end{aligned} \quad (15.50)$$

La Ecuación 15.50 está en la forma estándar de la función de transferencia de un filtro paso banda, así que podemos determinar el ancho de banda y la frecuencia central directamente:

$$\beta = 2\omega_c, \quad (15.51)$$

$$\omega_o^2 = \omega_c^2. \quad (15.52)$$

A partir de las Ecuaciones 15.51 y 15.52 y de la definición de  $Q$ , vemos que

$$Q = \frac{\omega_o}{\beta} = \frac{\omega_c}{2\omega_c} = \frac{1}{2}. \quad (15.53)$$

Por tanto, con polos reales discretos, el filtro paso banda (o de banda eliminada) con factor de calidad más alto que podemos obtener tiene  $Q = 1/2$ .

Para construir filtros activos con factor de calidad alto, necesitamos un circuito basado en amplificador operacional que posea una función de transferencia con polos complejos conjugados. En la Figura 15.26 se muestra uno de tales circuitos. Si sumamos las corrientes en la entrada inversora del amplificador operacional, obtenemos

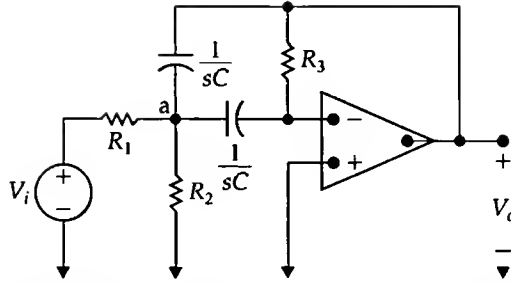
$$\frac{V_a}{1/sC} = \frac{-V_o}{R_3}.$$

Despejando  $V_a$ ,

$$V_a = \frac{-V_o}{sR_3C}. \quad (15.54)$$

Si sumamos las corrientes en el nodo etiquetado como a, vemos que

$$\frac{V_i - V_a}{R_1} = \frac{V_a - V_o}{1/sC} + \frac{V_a}{1/sC} + \frac{V_a}{R_2}.$$



**Figura 15.26.** Un filtro paso banda activo de alta  $Q$ .

Despejando  $V_i$ ,

$$V_i = (1 + 2sR_1C + R_1/R_2)V_a - sR_1CV_o. \quad (15.55)$$

Sustituyendo la Ecuación 15.54 en la Ecuación 15.55 y reordenando los términos, obtenemos la expresión correspondiente a la función de transferencia  $V_o/V_i$ :

$$H(s) = \frac{\frac{-s}{R_1C}}{s^2 + \frac{2}{R_3C}s + \frac{1}{R_{eq}R_3C^2}}, \quad (15.56)$$

donde

$$R_{eq} = R_1 \parallel R_2 = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}.$$

Puesto que la Ecuación 15.56 está en la forma estándar de las funciones de transferencia de los filtros paso banda, es decir,

$$H(s) = \frac{K\beta s}{s^2 + \beta s + \omega_o^2},$$

podemos igualar los términos y hallar los valores de las resistencias que permitan obtener una frecuencia central ( $\omega_o$ ), un factor de calidad ( $Q$ ) y una ganancia en la banda de paso ( $K$ ) especificadas:

$$\beta = \frac{2}{R_3C}; \quad (15.57)$$

$$K\beta = \frac{1}{R_1C}; \quad (15.58)$$

$$\omega_o^2 = \frac{1}{R_{eq}R_3C^2}. \quad (15.59)$$

En este punto, resulta conveniente definir la versión prototipo del circuito de la Figura 15.25 como un circuito en el que  $\omega_o = 1$  rad/s y  $C = 1$  F. Si lo hacemos así, podemos expresar  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$  en función del factor de calidad y de la ganancia en la banda de paso deseados. Dejamos como problema al

lector (véase el Problema 15.38) demostrar que, para el circuito prototipo, los valores de  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$  están dados por

$$R_1 = Q/K,$$

$$R_2 = Q/(2Q^2 - K),$$

$$R_3 = 2Q.$$

Será necesario utilizar la técnica del cambio de escala para obtener valores prácticos para los componentes del circuito. Este proceso de diseño se ilustra en el Ejemplo 15.12.

### EJEMPLO 15.12 Diseño de un filtro paso banda de alta $Q$

Vamos a diseñar un filtro paso banda basado en el circuito de la Figura 15.26, con una frecuencia central de 3000 Hz, un factor de calidad de 10 y una ganancia en la banda de paso igual a 2. Utilizaremos condensadores de  $0,01 \mu\text{F}$  en el diseño. Vamos a calcular la función de transferencia del circuito y a dibujar un diagrama de Bode de la ganancia.

#### SOLUCIÓN

Puesto que  $Q = 10$  y  $K = 2$ , los valores de  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$  en el circuito prototipo serán

$$R_1 = 10/2 = 5,$$

$$R_2 = 10/(200 - 2)$$

$$= 10/198,$$

$$R_3 = 2(10) = 20.$$

Los factores de cambio de escala son

$$k_f = 6000\pi$$

y

$$k_m = 10^8/k_f.$$

Después de cambiar la escala,

$$R_1 = 26,5 \text{ k}\Omega,$$

$$R_2 = 268,0 \Omega,$$

$$R_3 = 106,1 \text{ k}\Omega.$$

El circuito se muestra en la Figura 15.27.

Sustituyendo los valores de las resistencias y condensadores en la Ecuación 15.56, obtenemos la función de transferencia del circuito:

$$H(s) = \frac{-3770s}{s^2 + 1885,0s + 355 \times 10^6}.$$

Resulta fácil ver que esta función de transferencia satisface las especificaciones del filtro paso banda definidas en el ejemplo. La Figura 15.28 muestra un diagrama de Bode de la ganancia.

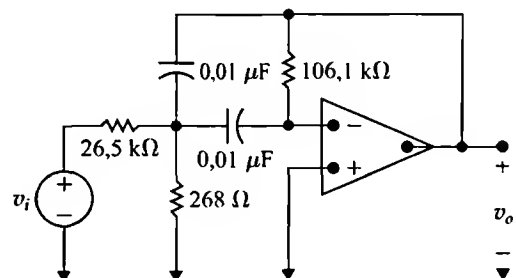
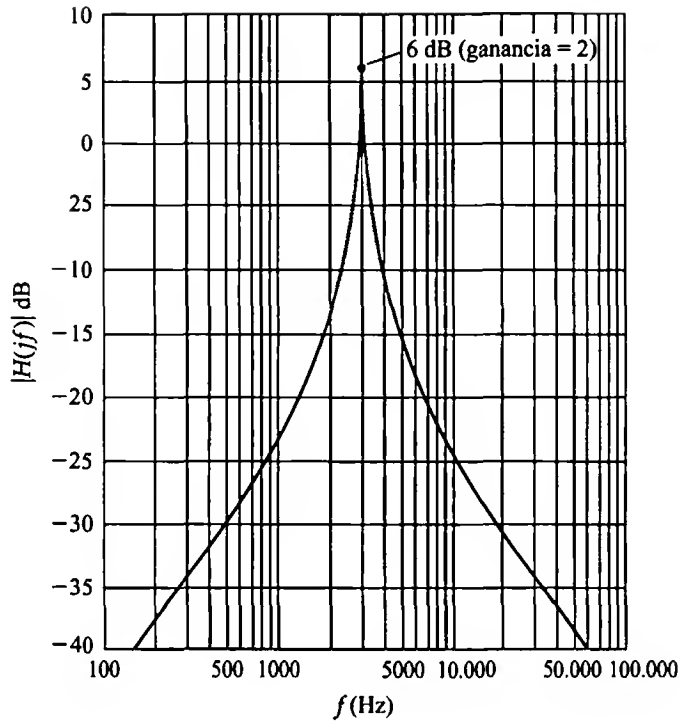
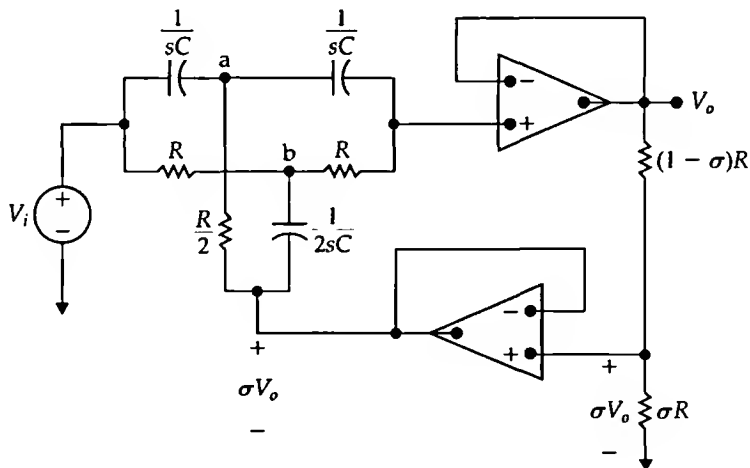


Figura 15.27. Filtro paso banda de alta  $Q$  del Ejemplo 15.12.



**Figura 15.28.** Diagrama de Bode de la ganancia para el filtro paso banda de alta  $Q$  diseñado en el Ejemplo 15.12.

La implementación en paralelo de un filtro de banda eliminada que combine etapas de filtro paso bajo y paso alto mediante un amplificador sumador tiene las mismas restricciones de baja  $Q$  que el filtro paso banda con conexión en cascada. El circuito de la Figura 15.29 es un filtro activo de banda eliminada y alta  $Q$  denominado **filtro de hendidura en T gemela**, debido a las dos conexiones en T que el circuito presenta en los nodos etiquetados como a y b.



**Figura 15.29.** Filtro activo de banda eliminada y alta  $Q$ .



Comenzamos el análisis del circuito sumando las corrientes que salen del nodo a:

$$(V_a - V_i)sC + (V_a - V_o)sC + \frac{2(V_a - \sigma V_o)}{R} = 0$$

o bien

$$V_a[2sCR + 2] - V_o[sCR + 2\sigma] = sCRV_i. \quad (15.60)$$

Sumando las corrientes que salen del nodo b, obtenemos

$$\frac{V_b - V_i}{R} + \frac{V_b - V_o}{R} + (V_b - \sigma V_o)2sC = 0$$

o bien

$$V_b[2 + 2RCs] - V_o[1 + 2\sigma RCs] = V_i. \quad (15.61)$$

Finalmente, si sumamos las corrientes que salen del terminal de la entrada no inversora del amplificador operacional superior, nos queda

$$(V_o - V_a)sC + \frac{V_o - V_b}{R} = 0$$

o bien

$$-sRCV_a - V_b + (sRC + 1)V_o = 0. \quad (15.62)$$

Podemos aplicar la regla de Cramer a las Ecuaciones 15.60-15.62 para hallar el valor de  $V_o$ :

$$V_o = \frac{\begin{vmatrix} 2(RCs+1) & 0 & sCRV_i \\ 0 & 2(RCs+1) & V_i \\ -RCs & -1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2(RCs+1) & 0 & -(RCs+2\sigma) \\ 0 & 2(RCs+1) & -(2\sigma RCs+1) \\ -RCs & -1 & (RCs+1) \end{vmatrix}} = \frac{(R^2C^2s^2 + 1)V_i}{R^2C^2s^2 + 4RC(1-\sigma)s + 1}. \quad (15.63)$$

Reordenando la Ecuación 15.63, podemos determinar la función de transferencia:

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{\left(s^2 + \frac{1}{R^2C^2}\right)}{\left[s^2 + \frac{4(1-\sigma)}{RC}s + \frac{1}{R^2C^2}\right]}, \quad (15.64)$$

que está en la forma estándar de las funciones de transferencia de los filtros de banda eliminada:

$$H(s) = \frac{s^2 + \omega_0^2}{s^2 + \beta s + \omega_0^2}. \quad (15.65)$$

Si igualamos las Ecuaciones 15.64 y 15.65, obtenemos

$$\omega_o^2 = \frac{1}{R^2 C^2}, \quad (15.66)$$

$$\beta = \frac{4(1-\sigma)}{RC}. \quad (15.67)$$

En este circuito, tenemos tres parámetros ( $R$ ,  $C$  y  $\sigma$ ) y dos restricciones de diseño ( $\omega_o$  y  $\beta$ ). Por tanto, podemos elegir uno de los parámetros arbitrariamente; normalmente se selecciona el valor del condensador, ya que suele haber menos valores de condensador comercialmente disponibles. Una vez elegido el valor de  $C$ ,

$$R = \frac{1}{\omega_o C}, \quad (15.68)$$

y

$$\sigma = 1 - \frac{\beta}{4\omega_o} = 1 - \frac{1}{4Q}. \quad (15.69)$$

El Ejemplo 15.13 ilustra el diseño de un filtro activo de banda eliminada y alta  $Q$ .

### EJEMPLO 15.13 Diseño de un filtro de banda eliminada y alta $Q$

Vamos a diseñar un filtro activo de banda eliminada y alta  $Q$  (basado en el circuito de la Figura 15.29) con una frecuencia central de 5000 rad/s y un ancho de banda de 1000 rad/s. Utilizaremos condensadores de  $1 \mu\text{F}$  en el diseño.

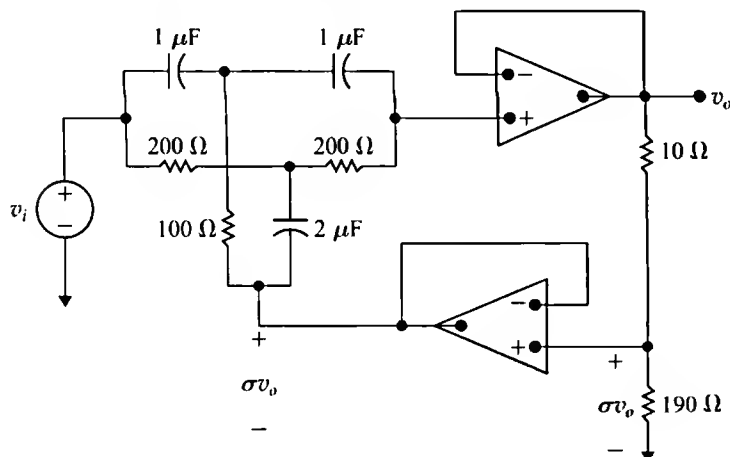
den determinarse a partir de las Ecuaciones 15.68 y 15.69. Teniendo en cuenta las especificaciones,  $Q = 5$ . Utilizando las Ecuaciones 15.68 y 15.69, vemos que

$$R = 200 \Omega, \quad \sigma = 0,95.$$

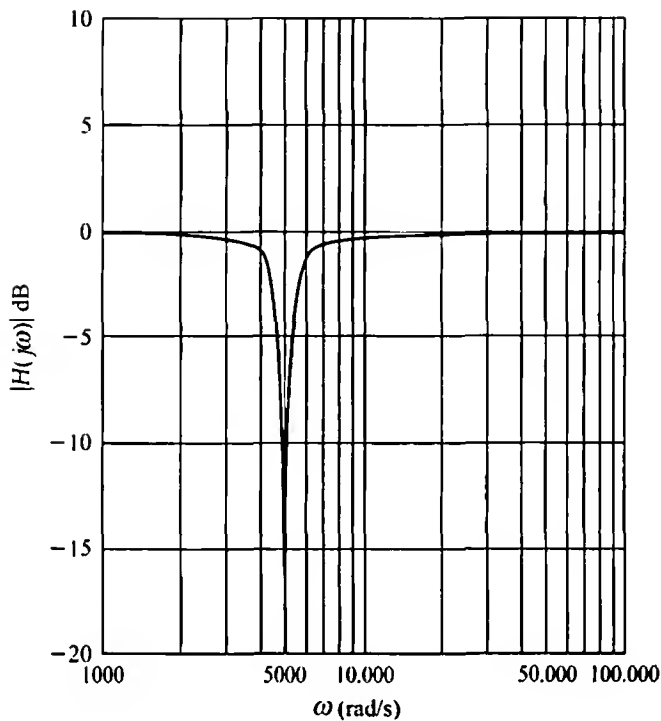
#### SOLUCIÓN

En el filtro prototipo de banda eliminada,  $\omega_o = 1$  rad/s,  $R = 1 \Omega$  y  $C = 1$  F. Como ya hemos indicado, si nos dan los valores de  $\omega_o$  y  $Q$ , podemos elegir el valor de  $C$  arbitrariamente y  $R$  y  $\sigma$  pue-

Por tanto, necesitamos resistencias de valores  $200 \Omega$  ( $R$ ),  $100 \Omega$  ( $R/2$ ),  $190 \Omega$  ( $\sigma R$ ) y  $10 \Omega$  [ $(1-\sigma)R$ ]. El diseño final se muestra en la Figura 15.30, mientras que la Figura 15.31 proporciona el diagrama de Bode de la ganancia.



**Figura 15.30.** Filtro activo de banda eliminada y alta  $Q$  del Ejemplo 15.13.



**Figura 15.31.** Diagrama de Bode de la ganancia para el filtro activo de banda eliminada y alta  $Q$  diseñado en el Ejemplo 15.13.

#### Evaluación del objetivo 4

- Ser capaz de utilizar las ecuaciones de diseño para calcular los valores de los componentes de los filtros prototipo paso banda y de banda eliminada de banda estrecha.
- 15.5.** Diseñe un filtro activo paso banda con  $Q = 8$ ,  $K = 5$  y  $\omega_0 = 1000$  rad/s. Utilice condensadores de  $1 \mu\text{F}$  y especifique los valores de todas las resistencias.
- 15.6.** Diseñe un filtro activo de banda eliminada y ganancia unidad con  $\omega_0 = 1000$  rad/s y  $Q = 4$ . Utilice condensadores de  $2 \mu\text{F}$  en el diseño y especifique los valores de  $R$  y  $\sigma$ .

#### RESPUESTA

$$R_1 = 1,6 \text{ k}\Omega,$$

$$R_2 = 65,04 \Omega,$$

$$R_3 = 16 \text{ k}\Omega.$$

#### RESPUESTA

$$R = 500 \Omega,$$

$$\sigma = 0,9375.$$

**NOTA** Trate también de resolver el Problema 15.53 del capítulo.

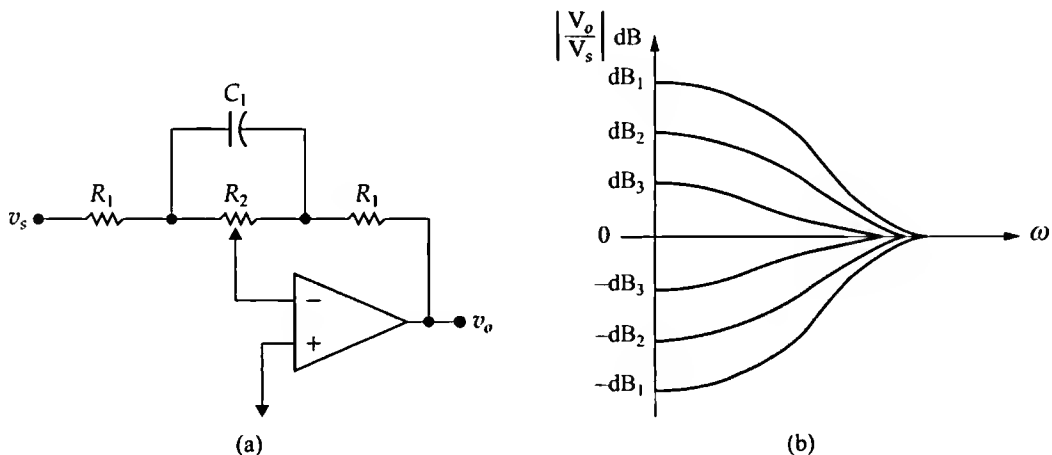
## Perspectiva práctica

### Control del volumen de graves

Vamos a analizar ahora un circuito basado en amplificador operacional que puede utilizarse para controlar el grado de amplificación de una señal de audio en el rango de los graves. El rango de señales de audio está compuesto por todas las señales cuya frecuencia esté comprendida entre 20 Hz y 20 kHz. El rango de los graves incluye las frecuencias hasta 300 Hz. En la Figura 15.32 se muestran el circuito de control de volumen y su respuesta en frecuencia. La curva de respuesta concreta dentro de la familia de curvas se selecciona ajustando el potenciómetro de la Figura 15.32(a).

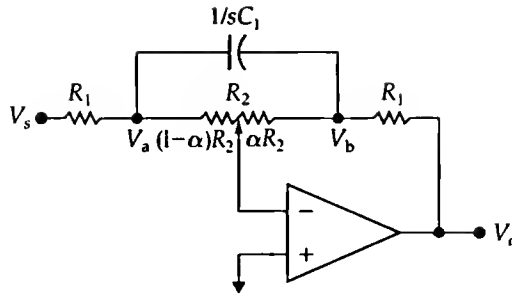
Al examinar las curvas de respuesta en frecuencia mostradas en la Figura 15.32(b), podemos observar lo siguiente. En primer lugar, la ganancia en dB puede ser tanto positiva como negativa. Si la ganancia es positiva, una señal en el rango de los graves se verá amplificada o intensificada. Si la ganancia es negativa, la señal será atenuada. En segundo lugar, se puede seleccionar una característica de respuesta que proporcione una ganancia unidad (cero dB) para todas las frecuencias en el rango de los graves. Como veremos, si situamos el potenciómetro en su punto medio, el circuito no afectará a las señales en el rango de los graves. Finalmente, a medida que se incrementa la frecuencia, todas las curvas de respuesta característica se aproximan a cero dB, es decir, a una ganancia unidad. Por tanto, este circuito de control de volumen no afectará a las señales situadas en el extremo superior (agudos) del rango de frecuencias audibles.

El primer paso para analizar la respuesta en frecuencia del circuito de la Figura 15.32(a) consiste en calcular la función de transferencia  $V_o/V_s$ . Para facilitar este cálculo, proporcionamos en la Figura 15.33 el circuito equivalente en el dominio de  $s$ . Hemos las tensiones de nodo por medio de  $V_a$  y  $V_b$  en el circuito para facilitar el análisis mediante las ecuaciones de tensión de nodo. La posición del potenciómetro se determina mediante el valor numérico  $\alpha$ , como se indica en la Figura 15.33.



**Figura 15.32.** (a) Circuito de control del volumen de graves. (b) Respuesta en frecuencia del circuito de control de graves.

Para determinar la función de transferencia, escribimos las tres ecuaciones de tensión de nodo que describen el circuito y luego resolvemos el sistema para hallar el cociente de tensiones  $V_o/V_s$ . Las ecuaciones de tensión de nodo son



**Figura 15.33.** Circuito en el dominio de  $s$  para el control del volumen de graves. Observe que  $\alpha$  determina la posición del potenciómetro, siendo  $0 \leq \alpha \leq 1$ .

$$\frac{V_a}{(1-\alpha)R_2} + \frac{V_a - V_s}{R_1} + (V_a - V_b)sC_1 = 0;$$

$$\frac{V_b}{\alpha R_2} + (V_b - V_a)sC_1 + \frac{V_b - V_o}{R_1} = 0;$$

$$\frac{V_a}{(1-\alpha)R_2} + \frac{V_b}{\alpha R_2} = 0.$$

Estas tres ecuaciones de tensión de nodo forman un sistema que puede resolverse para hallar  $V_o$  en función de  $V_s$  y, por tanto, la función de transferencia  $H(s)$ :

$$H(s) = \frac{V_o}{V_s} = \frac{-(R_1 + \alpha R_2 + R_1 R_2 C_1 s)}{R_1 + (1-\alpha)R_2 + R_1 R_2 C_1 s}.$$

De aquí se sigue directamente que

$$H(j\omega) = \frac{-(R_1 + \alpha R_2 + j\omega R_1 R_2 C_1)}{[R_1 + (1-\alpha)R_2 + j\omega R_1 R_2 C_1]}.$$

Ahora, verifiquemos que esta función de transferencia permite generar la familia de curvas de respuesta en frecuencia mostrada en la Figura 15.32(b). En primer lugar, observe que cuando  $\alpha = 0,5$  el módulo de  $H(j\omega)$  es la unidad para todas las frecuencias, es decir,

$$|H(j\omega)| = \frac{|R_1 + 0,5R_2 + j\omega R_1 R_2 C_1|}{|R_1 + 0,5R_2 + j\omega R_1 R_2 C_1|} = 1.$$

Cuando  $\omega = 0$ , tenemos

$$|H(j0)| = \frac{R_1 + \alpha R_2}{R_1 + (1-\alpha)R_2}.$$

Fijese en que  $|H(j0)|$  en  $\alpha = 1$  es el recíproco de  $|H(j0)|$  en  $\alpha = 0$ , es decir,

$$|H(j0)|_{\alpha=1} = \frac{R_1 + R_2}{R_1} = \frac{1}{|H(j0)|_{\alpha=0}}.$$

Un examen atento permite verificar que esta relación de reciprocidad se cumple para todas las frecuencias, no sólo para  $\omega = 0$ . Por ejemplo,  $\alpha = 0,4$  y  $\alpha = 0,6$  son simétricas con respecto a  $\alpha = 0,5$  y

$$H(j\omega)_{\alpha=0,4} = \frac{-(R_1 + 0,4R_2) + j\omega R_1 R_2 C_1}{(R_1 + 0,6R_2) + j\omega R_1 R_2 C_1}$$

mientras que

$$H(j\omega)_{\alpha=0,6} = \frac{-(R_1 + 0,6R_2) + j\omega R_1 R_2 C_1}{(R_1 + 0,4R_2) + j\omega R_1 R_2 C_1}.$$

Por tanto,

$$H(j\omega)_{\alpha=0,4} = \frac{1}{H(j\omega)_{\alpha=0,6}}.$$

De aquí se sigue que, dependiendo del valor de  $\alpha$ , el circuito de control de volumen puede amplificar o atenuar la señal entrante.

Los valores numéricos de  $R_1$ ,  $R_2$  y  $C_1$  están basados en dos decisiones de diseño. La primera es la amplificación o atenuación en la banda de paso, dentro del rango de los graves (a medida que  $\omega \rightarrow 0$ ). La segunda decisión de diseño es la frecuencia para la que el grado de amplificación o atenuación en la banda de paso cambia en 3 dB. Los valores de los componentes que satisfacen las decisiones de diseño se calculan para  $\alpha$  igual a 1 o 0.

Como ya hemos indicado, la ganancia máxima será  $(R_1 + R_2)/R_1$  y la atenuación máxima será  $R_1/(R_1 + R_2)$ . Si suponemos que  $(R_1 + R_2)/R_1 \gg 1$ , entonces la ganancia (o atenuación) variará 3 dB con respecto a su valor máximo cuando  $\omega = 1/R_2 C_1$ . Podemos ver que esto es así observando que

$$\begin{aligned} \left| H\left(j \frac{1}{R_2 C_1}\right) \right|_{\alpha=1} &= \frac{|R_1 + R_2 + jR_1|}{|R_1 + jR_1|} \\ &= \frac{\left| \frac{R_1 + R_2}{R_1} + j1 \right|}{|1 + j1|} \\ &\approx \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{R_1 + R_2}{R_1} \right) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \left| H\left(j \frac{1}{R_2 C_1}\right) \right|_{\alpha=0} &= \frac{|R_1 + jR_1|}{|R_1 + R_2 + jR_1|} \\ &= \frac{|1 + j1|}{\left| \frac{R_1 + R_2}{R_1} + j1 \right|} \approx \sqrt{2} \left( \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right). \end{aligned}$$

**NOTA** Evalúe su comprensión de esta Perspectiva práctica intentando resolver los Problemas 15.54 y 15.55 del capítulo.

## RESUMEN

- Los filtros activos están compuestos por amplificadores operacionales, resistencias y condensadores. Pueden configurarse como filtros paso bajo, paso alto, paso banda y de banda eliminada. Los filtros activos resuelven muchas de las desventajas asociadas con los filtros pasivos (véase la página 732).

- Un **filtro prototipo paso bajo** tiene como valores de componentes  $R_1 = R_2 = 1 \Omega$  y  $C = 1 F$ , proporcionando una ganancia en la banda de paso igual a la unidad y una frecuencia de corte de 1 rad/s. El **filtro prototipo paso alto** tiene los mismos valores de componentes y también produce una ganancia en la banda de paso igual a la unidad y una frecuencia de corte de 1 rad/s (véanse las páginas 734 a 739).

- Puede utilizarse un **cambio de escala de la magnitud** para cambiar los valores de los componentes sin modificar la respuesta en frecuencia del circuito. Para un factor de cambio de escala de magnitud igual a  $k_m$ , los valores modificados (con prima) de resistencias, condensadores y bobinas son

$$R' = k_m R, \quad L' = k_m L \quad \text{y} \quad C' = C / k_m.$$

(Véase la página 738).

- Puede utilizarse un **cambio de escala en frecuencia** para desplazar la respuesta del circuito a otra región de frecuencias sin cambiar la forma global de la respuesta en frecuencia. Para un factor de cambio de escala en frecuencia igual a  $k_f$ , los valores modificados (con prima) de resistencias, condensadores y bobinas son

$$R' = R, \quad L' = L / k_f \quad \text{y} \quad C' = C / k_f.$$

(Véase la página 739).

- Puede cambiarse la escala de los componentes tanto en magnitud como en frecuencia, siendo entonces los valores modifica-

dos (con prima) de los componentes los siguientes:

$$R' = k_m R, \quad L' = (k_m / k_f) L \quad \text{y} \quad C' = C / (k_m k_f).$$

(Véase la página 739).

- El diseño de los filtros activos paso bajo y paso alto puede realizarse a partir de un circuito de filtro prototipo. Después, puede emplearse la técnica del cambio de escala para desplazar la respuesta en frecuencia hasta la frecuencia de corte deseada y utilizar valores de componentes que estén comercialmente disponibles (véase la página 739).
- Puede construirse un filtro activo paso banda de banda ancha utilizando una conexión en cascada de un filtro paso bajo cuya frecuencia de corte sea igual a la frecuencia de corte superior del filtro paso banda y un filtro paso alto cuya frecuencia de corte sea igual a la frecuencia de corte inferior del filtro paso banda; opcionalmente, se puede añadir una etapa de ganancia con un amplificador inversor para conseguir una ganancia distinta a la unidad en la banda de paso. Los filtros paso banda implementados de esta manera deben ser filtros de banda ancha ( $\omega_{c2} \gg \omega_{c1}$ ), con el fin de poder especificar los elementos de la conexión en cascada independientemente unos de otros (véase la página 742).
- Puede construirse un filtro de banda eliminada de banda ancha utilizando una combinación en paralelo de un filtro paso bajo cuya frecuencia de corte sea igual a la frecuencia de corte inferior del filtro de banda eliminada y un filtro paso alto cuya frecuencia de corte sea igual a la frecuencia de corte superior del filtro de banda eliminada. Las salidas de ambos filtros se introducen en un amplificador sumador, con el que además se puede obtener una ganancia distinta a la unidad en la banda de paso. Los filtros de banda eliminada implemen-

tados de esta forma deben ser filtros de banda ancha ( $\omega_{c2} \gg \omega_{c1}$ ) para que se puedan diseñar los circuitos de filtro paso alto y paso bajo de forma independiente el uno del otro (véase la página 745).

- Los filtros activos de orden superior tienen múltiples polos en su función de transferencia, lo que da como resultado una transición más brusca entre la banda de paso y la banda eliminada y, por tanto, una respuesta en frecuencia más próxima a la ideal (véase la página 749).
- La función de transferencia de un filtro paso bajo de Butterworth de orden  $n$  con una frecuencia de corte de 1 rad/s puede determinarse a partir de la ecuación

$$H(s)H(-s) = \frac{1}{1 + (-1)^n s^{2n}}$$

de la forma siguiente:

- hallando las raíces del polinomio del denominador
- asignando las raíces del semiplano izquierdo a  $H(s)$
- escribiendo el denominador de  $H(s)$  como producto de factores de primer y segundo orden.

(Véase la página 754).

- El problema fundamental a la hora de diseñar un filtro de Butterworth consiste en determinar el orden del filtro. La especificación del filtro suele definir la caída en la banda de transición en función de los valores  $A_p$ ,  $\omega_p$ ,  $A_s$  y  $\omega_s$ . A partir de estos valores, podemos calcular el menor entero que sea igual o superior a la solución de la Ecuación 15.42 o la Ecuación 15.46 (véase la página 760).
- Si conectamos en cascada una serie de filtros paso bajo de segundo orden basados en amplificador operacional (Figura 15.21) con resistencias de 1  $\Omega$  y valores de condensador adecuados para generar cada factor del polinomio de Butterworth, podemos obtener un filtro paso bajo de Butter-

worth de orden par. Si se añade un filtro prototipo paso bajo basado en amplificador operacional, se obtiene un filtro paso bajo de Butterworth de orden impar (véase la página 756).

- Si conectamos en cascada filtros paso alto de segundo orden basados en amplificador operacional (Figura 15.25) con condensador de 1 F y valores de resistencias adecuados para generar cada factor del polinomio de Butterworth, generamos un filtro paso alto de Butterworth de orden par. Si se añade un filtro prototipo paso alto basado en amplificador operacional, se obtiene un filtro paso alto de Butterworth de orden impar (véase la página 763).
- Para los filtros de Butterworth (tanto paso alto como paso bajo), pueden utilizarse las técnicas de cambio de escala en frecuencia y en magnitud para desplazar la frecuencia de corte de 1 rad/s y para incluir valores de componentes realistas en el diseño. Si se conecta en cascada un amplificador inversor, puede obtenerse una ganancia en la banda de paso distinta de la unidad (véase la página 758).
- Pueden conectarse en cascada filtros de Butterworth paso bajo y paso alto para generar filtros paso banda de Butterworth de cualquier orden  $n$ . Asimismo, pueden combinarse en paralelo filtros paso bajo y paso alto de Butterworth mediante un amplificador sumador para generar un filtro de banda eliminada de Butterworth de cualquier orden  $n$  (véase la página 765).
- Si es necesario un filtro paso banda de banda eliminada de alta  $Q$  (de banda estrecha), no se pueden utilizar las técnicas de combinación en cascada o en paralelo. En lugar de ello, se utilizan los circuitos mostrados en las Figuras 15.26 y 15.29 con las ecuaciones de diseño apropiadas. Normalmente, se seleccionan valores de condensadores comercialmente disponibles y se emplean las ecuaciones de diseño para hallar los valores de las resistencias (véase la página 765).



## PROBLEMAS

- 15.1.** Calcule la función de transferencia  $V_o/V_i$  para el circuito mostrado en la Figura P15.1 si  $Z_f$  es la impedancia equivalente del circuito de realimentación,  $Z_i$  es la impedancia equivalente del circuito de entrada y el amplificador operacional es ideal.

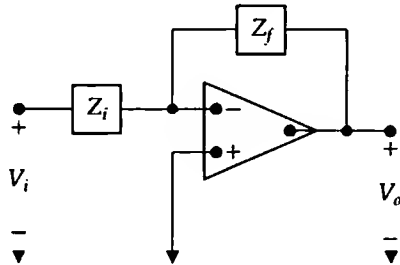


Figura P15.1

- 15.2.** a) Utilice los resultados del Problema 15.1 para hallar la función de transferencia del circuito mostrado en la Figura P15.2.  
 b) ¿Cuál es la ganancia del circuito a medida que  $\omega \rightarrow 0$ ?  
 c) ¿Cuál es la ganancia del circuito a medida que  $\omega \rightarrow \infty$ ?  
 d) ¿Tienen sentido las respuestas a los apartados (b) y (c) en términos del comportamiento conocido del circuito?

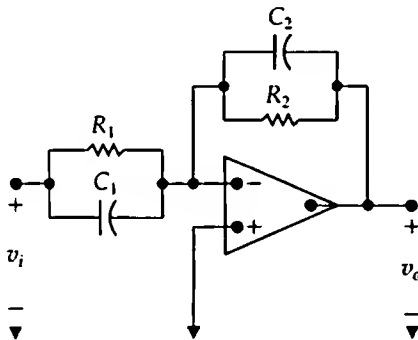


Figura P15.2

- 15.3.** Repita el Problema 15.2 utilizando el circuito mostrado en la Figura P15.3.

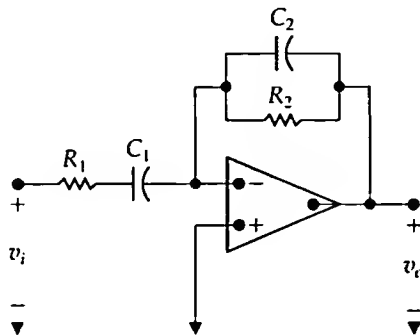


Figura P15.3

- 15.4. a) Utilizando el circuito de la Figura 15.1, diseñe un filtro paso bajo con una ganancia de 10 dB en la banda de paso y una frecuencia de corte de 1 kHz. Suponga que hay disponible un condensador de 750 nF.  
❖  
b) Dibuje el diagrama del circuito y etiquete todos los componentes.
- 15.5. a) Utilice el circuito de la Figura 15.4 para diseñar un filtro paso alto con frecuencia de corte de 8 kHz y una ganancia de 14 dB en la banda de paso. Utilice un condensador de 3,9 nF en el diseño.  
❖  
b) Dibuje el diagrama de circuito del filtro y etiquete todos los componentes.
- 15.6. La función de transferencia de tensión de los dos filtros prototipo paso bajo mostrados en la Figura P15.6 es

$$H(s) = \frac{1}{s+1}.$$

Demuestre que, si cambiamos la escala de cada circuito tanto en magnitud como en frecuencia, la función de transferencia modificada es

$$H'(s) = \frac{1}{(s/k_f) + 1}.$$

- 15.7. La función de transferencia de tensión de los dos filtros prototipo paso alto mostrados en la Figura P15.7 es

$$H(s) = \frac{s}{s+1}.$$

Demuestre que, si cambiamos la escala de cada circuito tanto en magnitud como en frecuencia, la función de transferencia modificada es

$$H'(s) = \frac{(s/k_f)}{(s/k_f) + 1}.$$

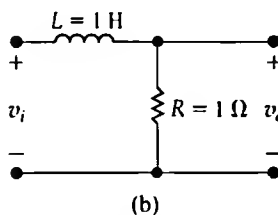
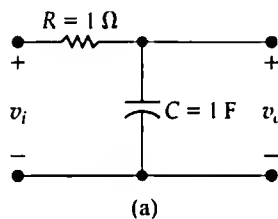


Figura P15.6

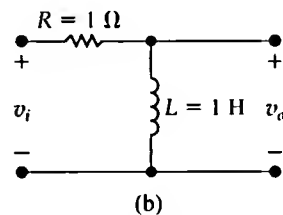
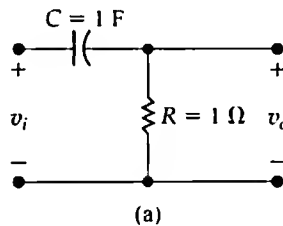


Figura P15.7

- 15.8.** La función de transferencia de tensión del filtro prototipo paso banda mostrado en la Figura P15.8 es

$$H(s) = \frac{\left(\frac{1}{Q}\right)s}{s^2 + \left(\frac{1}{Q}\right)s + 1}.$$

Demuestre que, si cambiamos la escala del circuito tanto en magnitud como en frecuencia, la función de transferencia modificada es

$$H'(s) = \frac{\left(\frac{1}{Q}\right)\left(\frac{s}{k_f}\right)}{\left(\frac{s}{k_f}\right)^2 + \left(\frac{1}{Q}\right)\left(\frac{s}{k_f}\right) + 1}.$$

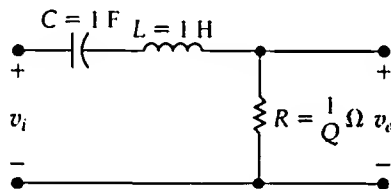


Figura P15.8

- 15.9.** a) Especifique los valores de componentes para el filtro prototipo paso banda pasivo descrito en el Problema 15.8 si el factor de calidad del filtro es igual a 20.  
 b) Especifique los valores de componentes para el filtro prototipo paso banda pasivo descrito en el Problema 15.8 si el factor de calidad es 20, si la frecuencia central o de resonancia es 40 krad/s y si la impedancia a la frecuencia de resonancia es de 5 k $\Omega$ .  
 c) Dibuje un diagrama de circuito del filtro una vez cambiada la escala y etiquete todos los componentes.
- 15.10.** Una alternativa al filtro prototipo paso banda ilustrado en la Figura P15.8 consiste en hacer  $\omega_o = 1 \text{ rad/s}$ ,  $R = 1 \Omega$  y  $L = Q$  henrios.  
 a) ¿Cuál es el valor de  $C$  en el circuito de filtro prototipo?  
 b) ¿Cuál es la función de transferencia del filtro prototipo?  
 c) Utilice el circuito prototipo alternativo que acabamos de describir para diseñar un filtro paso banda pasivo con un factor de calidad igual a 16, una frecuencia central de 25 krad/s y una impedancia de 10 k $\Omega$  a la frecuencia de resonancia.  
 d) Dibuje un diagrama del filtro, una vez cambiada la escala, y etiquete todos los componentes.  
 e) Utilice los resultados obtenidos en el Problema 15.8 para escribir la función de transferencia del circuito, después de efectuar el cambio de escala.
- 15.11.** El filtro paso banda pasivo ilustrado en la Figura 14.22 tiene dos circuitos prototipo. En el primer circuito prototipo,  $\omega_o = 1 \text{ rad/s}$ ,  $C = 1 \text{ F}$ ,  $L = 1 \text{ H}$  y  $R = Q$  ohmios. En el segundo circuito prototipo,  $\omega_o = 1 \text{ rad/s}$ ,  $R = 1 \Omega$ ,  $C = Q$  faradios y  $L = (1/Q)$  henrios.  
 a) Utilice uno de estos circuitos prototipo (el que prefiera) para diseñar un filtro paso banda pasivo con un factor de calidad igual a 25 y una frecuencia central de 50 krad/s. La resistencia  $R$  tiene un valor de 40 k $\Omega$ .

- b) Dibuje un diagrama del circuito, después de efectuado el cambio de escala, y etiquete todos los componentes.

15.12. La función de transferencia del filtro de banda eliminada mostrado en la Figura 14.28(a) es

$$H(s) = \frac{s^2 + \left(\frac{1}{LC}\right)}{s^2 + \left(\frac{R}{L}\right)s + \left(\frac{1}{LC}\right)}.$$

Demuestre que, si cambiamos la escala del circuito tanto en magnitud como en frecuencia, la función de transferencia del circuito modificado es igual a la función de transferencia del circuito original sustituyendo  $s$  por  $(s/k_f)$ , donde  $k_f$  es el factor de cambio de escala en frecuencia.

15.13. Demuestre que la observación realizada en el Problema 15.12 con respecto a la función de transferencia del circuito de la Figura 14.28(a) también es aplicable al circuito de filtro de banda eliminada de la Figura 14.31 (el circuito inferior).

15.14. El filtro pasivo de banda eliminada ilustrado en la Figura 14.28(a) tiene los dos circuitos prototipo que se muestran en la Figura P15.14.

- a) Demuestre que, para ambos circuitos, la función de transferencia es

$$H(s) = \frac{s^2 + 1}{s^2 + \left(\frac{1}{Q}\right)s + 1}.$$

- b) Escriba la función de transferencia de un filtro de banda eliminada con una frecuencia central de 10 krad/s y un factor de calidad igual a 8.

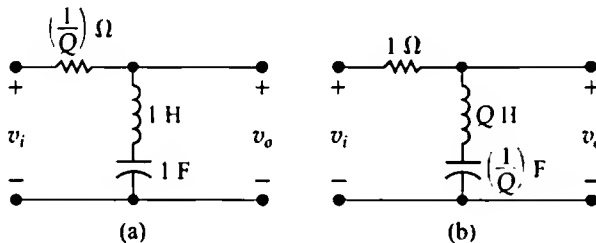


Figura P15.14

15.15. Las dos versiones prototipo del filtro pasivo de banda eliminada mostrado en la Figura 14.31 (circuito inferior) se ilustran en la Figura P15.15(a) y (b).

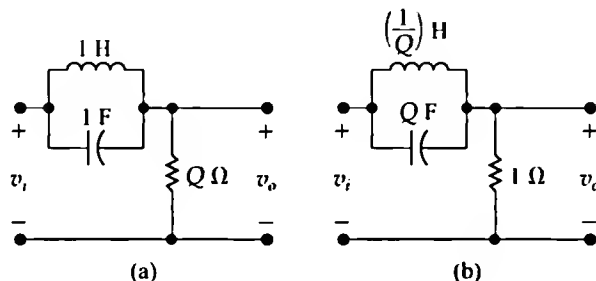


Figura P15.15

Demuestre que la función de transferencia para ambas versiones es

$$H(s) = \frac{s^2 + 1}{s^2 + \left(\frac{1}{Q}\right)s + 1}.$$

- 15.16.** Cambie la escala del filtro paso banda del Problema 14.15 de modo que la frecuencia central sea de 200 kHz y el factor de calidad siga siendo 8, utilizando un condensador de 2,5 nF. Determine los valores de la resistencia y la bobina, así como las dos frecuencias de corte del filtro resultante.
- 15.17.** Cambie la escala del filtro de banda eliminada del Problema 14.24 para obtener una frecuencia central de 50 krad/s, utilizando una bobina de 200  $\mu$ H. Determine los valores de la resistencia y del condensador y el ancho de banda del filtro resultante.
- 15.18.** Cambiamos la escala del circuito de la Figura P13.26 de modo que se sustituya la resistencia de 1  $\Omega$  por una resistencia de 1 k $\Omega$  y el condensador de 1 F por un condensador de 200 nF.
- ¿Cuál es el valor modificado de  $L$ ?
  - ¿Cuál es la expresión correspondiente a  $i_o$  en el circuito resultante?
- 15.19.** Cambie la escala del circuito del Problema 13.29 de modo que la resistencia de 50  $\Omega$  se incremente hasta 5 k $\Omega$  y que la frecuencia de la respuesta en tensión se multiplique por un factor de 5000. Halle la expresión correspondiente a  $i_o(t)$ .
- 15.20.**
- Demuestre que, si cambiamos la escala del filtro paso bajo ilustrado en la Figura 15.1 tanto en magnitud como en frecuencia, la función de transferencia del circuito resultante es igual a la Ecuación 15.1 sustituyendo  $s$  por  $s/k_f$ , donde  $k_f$  es el factor de cambio de escala en frecuencia.
  - En la versión prototipo del circuito de filtro paso bajo de la Figura 15.1,  $\omega_c = 1$  rad/s,  $C = 1$  F,  $R_2 = 1$   $\Omega$  y  $R_1 = 1/K$  ohmios. ¿Cuál es la función de transferencia del circuito proto-tipo?
  - Utilizando el resultado obtenido en el apartado (a), halle la función de transferencia del filtro resultante.
- 15.21.**
- Demuestre que, si cambiamos la escala del filtro paso alto ilustrado en la Figura 15.4 tanto en magnitud como en frecuencia, la función de transferencia es igual a la Ecuación 15.4 sustituyendo  $s$  por  $s/k_f$ , donde  $k_f$  es el factor de cambio de escala en frecuencia.
  - En la versión prototipo del circuito de filtro paso alto de la Figura 15.4,  $\omega_c = 1$  rad/s,  $R_1 = 1$   $\Omega$ ,  $C = 1$  F y  $R_2 = K$  ohmios. ¿Cuál es la función de transferencia del circuito prototipo?
  - Utilizando el resultado obtenido en el apartado (a), halle la función de transferencia del filtro resultante.
- 15.22.**
- Utilizando condensadores de 0,1  $\mu$ F, diseñe un filtro activo paso banda de primer orden, de banda ancha, que tenga una frecuencia de corte inferior de 1000 Hz, una frecuencia de corte superior de 5000 Hz y una ganancia en la banda de paso de 0 dB. Utilice versiones prototipo de los filtros paso bajo y paso alto en el proceso de diseño (véanse los Problemas 15.20 y 15.21).
  - Escriba la función de transferencia del filtro, después de efectuado el cambio de escala.
  - Utilice la función de transferencia hallada en el apartado (b) para determinar  $H(j\omega_o)$ , donde  $\omega_o$  es la frecuencia central del filtro.

- d) ¿Cuál es la ganancia en la banda de paso (en decibelios) del filtro para  $\omega_0$ ?
- e) Utilice un programa informático para realizar un diagrama de Bode de la ganancia del filtro.

15.23. a) Utilizando condensadores de 10 nF, diseñe un filtro activo de banda eliminada de primer orden, de banda ancha, que tenga una frecuencia de corte inferior de 400 Hz, una frecuencia de corte superior de 4000 Hz y una ganancia en la banda de paso de 0 dB. Utilice los circuitos de filtro prototipo presentados en los Problemas 15.20 y 15.21 durante el proceso de diseño.

- b) Dibuje el diagrama de circuito del filtro y etiquete todos los componentes.
- c) ¿Cuál es la función de transferencia del filtro resultante?
- d) Evalúe la función de transferencia hallada en el apartado (c) a la frecuencia central del filtro.
- e) ¿Cuál es la ganancia (en decibelios) a la frecuencia central?
- f) Utilice un programa informático para dibujar un diagrama de Bode del módulo de la función de transferencia del filtro.

15.24. Para circuitos compuestos de resistencias, condensadores, bobinas y amplificadores operacionales,  $|H(j\omega)|^2$  sólo incluye potencias pares de  $\omega$ . Para ilustrar esto, calcule  $|H(j\omega)|^2$  para los tres circuitos de la Figura P15.24 cuando

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i}.$$

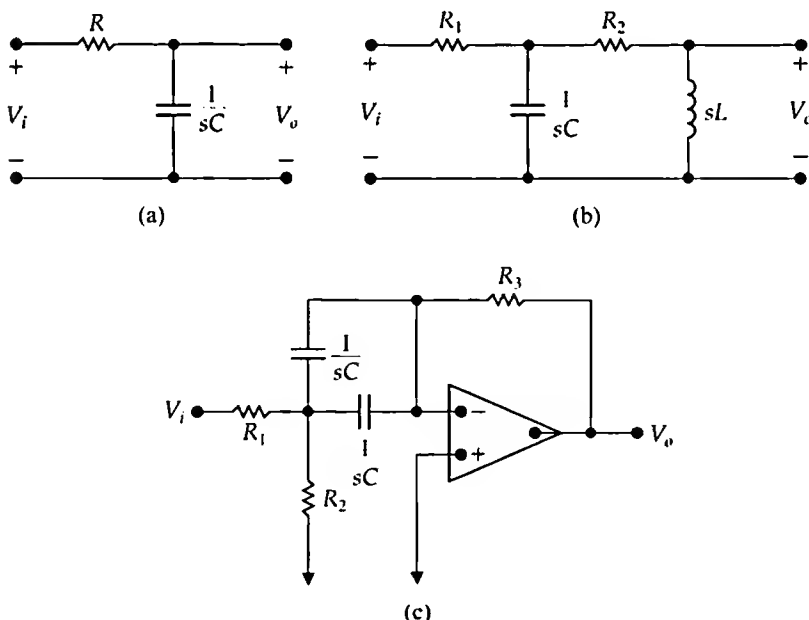


Figura P15.24

15.25. Diseñe un filtro paso banda con ganancia unidad utilizando una conexión en cascada, de modo que la frecuencia central sea de 200 Hz y el ancho de banda de 1000 Hz. Utilice condensadores de 5  $\mu$ F. Especifique  $f_{c1}$ ,  $f_{c2}$ ,  $R_L$  y  $R_H$ .

**15.26.** Diseñe un filtro de banda eliminada con arquitectura paralela con una frecuencia central de 1000 rad/s, un ancho de banda de 4000 rad/s y una ganancia en la banda de paso igual a 6. Utilice condensadores de  $0,2 \mu\text{F}$  y especifique los valores de todas las resistencias.

**15.27.** El propósito de este problema consiste en ilustrar la ventaja de un filtro paso bajo de Butterworth de orden  $n$  con respecto a la conexión en cascada de  $n$  secciones paso bajo idénticas; para ello calcularemos la pendiente (en decibelios por década) de cada gráfica de ganancia a la frecuencia de corte  $\omega_c$ . Para facilitar los cálculos, vamos a representar mediante  $y$  la ganancia de la gráfica (en decibelios) y vamos a hacer  $x = \log_{10} \omega$ . Después calcularemos  $dy/dx$  para  $\omega_c$ , para cada una de las gráficas.

a) Demuestre que, para la frecuencia de corte ( $\omega_c = 1$  rad/s), en un filtro prototipo paso bajo de Butterworth de orden  $n$  se cumple que

$$\frac{dy}{dx} = -10n \text{ dB/dec.}$$

b) Demuestre que para una conexión en cascada de  $n$  secciones prototipo paso bajo idénticas, la pendiente en  $\omega_c$  es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-20n(2^{1/n} - 1)}{2^{1/n}} \text{ dB/dec.}$$

c) Calcule  $dy/dx$  para cada tipo de filtro, para  $n = 1, 2, 3, 4$  e  $\infty$ .

d) Comente la importancia de los resultados obtenidos en el apartado (c).

**15.28.** a) Determine el orden de un filtro paso bajo de Butterworth que tenga una frecuencia de corte de 2000 Hz y una ganancia de al menos  $-30$  dB a 7000 Hz.

b) ¿Cuál es la ganancia real, en decibelios, a 7000 Hz?

**15.29.** El circuito de la Figura 15.21 tiene la función de transferencia dada en la Ecuación 15.34. Demuestre que, si cambiamos la escala del circuito de la Figura 15.21 tanto en magnitud como en frecuencia, la función de transferencia del circuito resultante es

$$H'(s) = \frac{\frac{1}{R^2 C_1 C_2}}{\left(\frac{s}{k_f}\right)^2 + \frac{2}{RC_1} \left(\frac{s}{k_f}\right) + \frac{1}{R^2 C_1 C_2}}.$$

**15.30.** a) Escriba la función de transferencia del filtro prototipo paso bajo de Butterworth obtenido en el Problema 15.28(a).

b) Escriba la función de transferencia del filtro del apartado (a) una vez efectuado el cambio de escala (véase el Problema 15.29).

c) Compruebe la expresión obtenida en el apartado (b) utilizándola para calcular la ganancia (en decibelios) a 7000 Hz. Compare el resultado con el obtenido en el Problema 15.28(b).

**15.31.** a) Utilizando resistencias de  $1 \text{ k}\Omega$  y amplificadores operacionales ideales, diseñe un circuito que implemente el filtro paso bajo de Butterworth especificado en el Problema 15.28. La ganancia en la banda de paso es igual a 1.



b) Construya el diagrama del circuito y etiquete todos los valores de los componentes.

- 15.32. a) Utilizando condensadores de 10 nF y amplificadores operacionales ideales, diseñe un filtro paso alto de Butterworth con ganancia unidad que tenga una frecuencia de corte de 2 kHz y una ganancia de al menos  $-48$  dB a 500 Hz.  
❖ b) Dibuje un diagrama de circuito del filtro e indique los valores de todos los componentes.

15.33. Verifique las filas de la Tabla 15.1 para  $n = 5$  y  $n = 6$ .

- 15.34. El circuito de la Figura 15.25 tiene la función de transferencia dada en la Ecuación 15.47. Demuestre que, si se cambia la escala del circuito tanto en magnitud como en frecuencia, la función de transferencia del circuito resultante es

$$H'(s) = \frac{\left(\frac{s}{k_f}\right)^2}{\left(\frac{s}{k_f}\right)^2 + \frac{2}{R_2 C} \left(\frac{s}{k_f}\right) + \frac{1}{R_1 C_2 C^2}}.$$

Por tanto, la función de transferencia del circuito cambiado de escala se obtiene a partir de la función de transferencia del circuito original sustituyendo simplemente la  $s$  de la función original por  $s/k_f$ , donde  $k_f$  es el factor de cambio de escala en frecuencia.

- 15.35. a) Utilizando resistencias de 1 k $\Omega$  y amplificadores operacionales ideales, diseñe un filtro paso bajo de Butterworth con ganancia unidad que tenga una frecuencia de corte de 8 kHz y una atenuación de al menos 48 dB a 32 kHz.  
❖ b) Dibuje un diagrama de circuito del filtro e indique los valores de todos los componentes.

15.36. Conectamos en cascada el filtro paso alto diseñado en el Problema 15.32 con el filtro paso bajo diseñado en el Problema 15.35.

- Describa el tipo de filtro que se genera mediante esta interconexión.
- Especifique las frecuencias de corte, la frecuencia central y el factor de calidad del filtro.
- Utilice los resultados de los Problemas 15.28 y 15.33 para hallar la función de transferencia del filtro, después del cambio de escala.
- Compruebe los resultados del apartado (c) utilizándolos para calcular  $H(j\omega_0)$ , donde  $\omega_0$  es la frecuencia central del filtro.

- 15.37. a) Utilice condensadores de 20 nF en el circuito de la Figura 15.26 para diseñar un filtro paso banda con un factor de calidad de 16, una frecuencia central de 6,4 kHz y una ganancia en la banda de paso de 20 dB.  
❖ b) Dibuje el diagrama de circuito del filtro e indique los valores de todos los componentes.

15.38. Demuestre que, si  $\omega_0 = 1$  rad/s y  $C = 1$  F en el circuito de la Figura 15.26, los valores prototipo de  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$  son

$$R_1 = \frac{Q}{K},$$

$$R_2 = \frac{Q}{2Q^2 - K},$$

$$R_3 = 2Q.$$



- ❖ 15.39. a) Diseñe un filtro paso banda de Butterworth de banda ancha con una frecuencia de corte inferior de 500 Hz y una frecuencia de corte superior de 4500 Hz. La ganancia en la banda de paso del filtro es de 20 dB. La ganancia debe ser al menos 20 dB inferior a una frecuencia de 200 Hz y de 11,25 kHz. Utilice condensadores de 15 nF en el circuito paso alto y resistencias de 10 kΩ en el circuito paso bajo.
- b) Dibuje un diagrama de circuito del filtro e indique los valores de todos los componentes.
- 15.40. a) Determine la expresión correspondiente a la función de transferencia del filtro diseñado en el Problema 15.39, después de efectuar el cambio de escala.
- b) Utilizando la expresión hallada en el apartado (a), determine la ganancia (en decibelios) a 200 Hz y a 1500 Hz.
- c) ¿Satisfacen los valores obtenidos en el apartado (b) las especificaciones de filtrado dadas en el Problema 15.39?
- 15.41. Determine la función de transferencia prototipo para un filtro paso alto de Butterworth de sexto orden, escribiendo primero la función de transferencia de un filtro prototipo paso bajo de Butterworth de sexto orden y luego sustituyendo  $s$  por  $1/s$  en dicha expresión.
- 15.42. Utilizamos el filtro de Butterworth de sexto orden del Problema 15.41 en un sistema en el que la frecuencia de corte es de 25 krad/s.
- a) ¿Cuál es la función de transferencia cambiada de escala para el filtro?
- b) Compruebe la expresión obtenida hallando la ganancia (en decibelios) a la frecuencia de corte.
- ❖ 15.43. El propósito de este problema consiste en guiarle a través del proceso de análisis necesario para establecer un procedimiento de diseño que permita determinar los componentes de circuito en un filtro. El circuito que hay que analizar se muestra en la Figura P15.43.
- a) Analice el circuito cualitativamente y compruebe que se trata de un filtro paso bajo con una ganancia en la banda de paso igual a  $R_2/R_1$ .
- b) Demuestre que es correcto el análisis cualitativo hallando la función de transferencia  $V_o/V_i$ . (*Sugerencia:* al hallar la función de transferencia, represente las resistencias mediante sus conductancias equivalentes, es decir,  $G_1 = 1/R_1$ , etc.). Para poder utilizar la función de transferencia con las filas de la Tabla 15.1, póngala en la forma

$$H(s) = \frac{-Kb_o}{s^2 + b_1s + b_o}.$$

- c) Ahora observe que tenemos cinco componentes de circuito ( $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ ,  $C_1$  y  $C_2$ ) y tres restricciones relativas a la función de transferencia ( $K$ ,  $b_1$  y  $b_o$ ). A primera vista, parece que tenemos la posibilidad de elegir arbitrariamente dos de los cinco componentes. Sin embargo, cuando investigamos las relaciones existentes entre los componentes del circuito y las restricciones de la función de transferencia, vemos que, si se elige arbitrariamente el valor de  $C_2$ , existirá un límite superior para  $C_1$ , a fin de que  $R_2(G_2)$  pueda ser implementable. Teniendo esto presente, demuestre que si  $C_2 = 1$  F, las tres conductancias están dadas por las ecuaciones

$$G_1 = KG_2;$$

$$G_3 = \left(\frac{b_o}{G_2}\right)C_1;$$

$$G_2 = \frac{b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - 4b_o(1+K)C_1}}{2(1+K)}.$$

Para que  $G_2$  tenga un valor físicamente posible,

$$C_1 \leq \frac{b_1^2}{4b_o(1+K)}.$$

- d) Basándose en los resultados obtenidos en el apartado (c), esboce el proceso de diseño necesario para seleccionar los componentes de circuito una vez que se conocen  $K$ ,  $b_o$  y  $b_1$ .

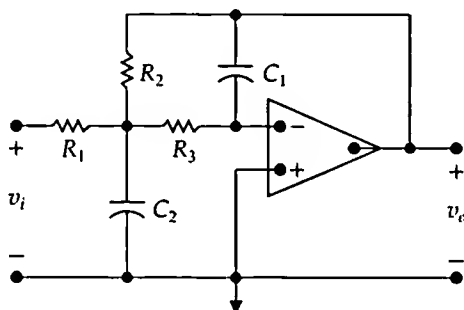


Figura P15.43

- ❖ 15.44. Suponga que el circuito analizado en el Problema 15.43 forma parte de un filtro paso bajo de Butterworth de tercer orden con una ganancia en la banda de paso igual a 4.
- Si  $C_2 = 1$  F en la sección prototipo de segundo orden, ¿cuál es el límite superior para  $C_1$ ?
  - Si elegimos el valor limitador para  $C_1$ , ¿cuáles son los valores prototipo de  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$ ?
  - Si la frecuencia de corte del filtro es de 2,5 kHz y asignamos a  $C_2$  un valor de 10 nF, calcule los valores de  $C_1$ ,  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$  después del cambio de escala.
  - Especifique los valores de las resistencias y del condensador, después del cambio de escala, en la sección de primer orden del filtro.
  - Construya un diagrama de circuito del filtro e indique los valores de todos los componentes en el diagrama.
- ❖ 15.45. Intercambie las resistencias y condensadores en el circuito de la Figura P15.43; es decir, sustituya  $R_1$  por  $C_1$ ,  $R_2$  por  $C_2$ ,  $R_3$  por  $C_3$ ,  $C_1$  por  $R_1$  y  $C_2$  por  $R_2$ .
- Describa el tipo de filtro que se implementa al efectuar este intercambio.
  - Confirme el tipo de filtro descrito en el apartado (a) hallando la función de transferencia  $V_o/V_i$ . Escriba la función de transferencia en una forma compatible con la Tabla 15.1.
  - Haga  $C_2 = C_3 = 1$  F y halle las ecuaciones correspondientes a  $C_1$ ,  $R_1$  y  $R_2$  en función de  $K$ ,  $b_1$  y  $b_o$  (véase en el Problema 15.43 la definición de  $b_1$  y  $b_o$ ).
  - Suponga que utilizamos el filtro descrito en el apartado (a) en el mismo tipo de filtro de Butterworth de tercer orden con una ganancia en la banda de paso igual a 8. Con  $C_2 = C_3 = 1$  F, calcule los valores prototipo de  $C_1$ ,  $R_1$  y  $R_2$  en la sección de segundo orden del filtro.
- ❖ 15.46. a) Utilice los circuitos analizados en los Problemas 15.43 y 15.45 para implementar un filtro de banda eliminada de banda ancha con una ganancia en la banda de paso de 0 dB, una fre-

cuencia de corte inferior de 400 Hz, una frecuencia de corte superior de 6400 Hz y una atenuación de al menos 30 dB a 1000 Hz y a 2560 Hz. Utilice condensadores de 10 nF siempre que sea posible.

b) Dibuje un diagrama de circuito del filtro e indique los valores de todos los componentes.

**15.47.** a) Determine la función de transferencia del filtro de banda eliminada descrito en el Problema 15.46.

b) Utilice la función de transferencia hallada en el apartado (a) para calcular la atenuación (en decibelios) a la frecuencia central del filtro.

**15.48.** El propósito de este problema es deducir las ecuaciones de diseño para el circuito de la Figura P15.48 (en el Problema 15.43 se proporcionan sugerencias sobre la determinación de las ecuaciones de diseño).

a) Basándose en un análisis cualitativo, describa el tipo de filtro implementado por el circuito.

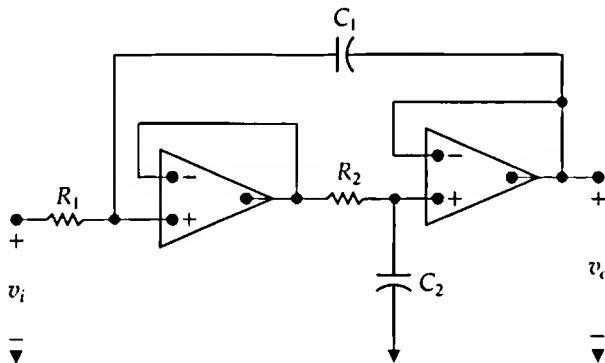
b) Verifique la conclusión obtenida en el apartado (a) hallando la función de transferencia  $V_o/V_i$ . Escriba la función de transferencia en una forma compatible con la Tabla 15.1.

c) ¿Cuántos grados de libertad hay a la hora de seleccionar los componentes del circuito?

d) Determine las ecuaciones de las conductancias  $G_1 = 1/R_1$  y  $G_2 = 1/R_2$  en función de  $C_1$ ,  $C_2$  y de los coeficientes  $b_0$  y  $b_1$  (véase en el Problema 15.43 la definición de  $b_0$  y  $b_1$ ).

e) ¿Hay alguna restricción que afecte a  $C_1$  o  $C_2$ ?

f) Suponga que utilizamos el circuito de la Figura P15.48 para diseñar un filtro paso bajo de Butterworth de cuarto orden y de ganancia unidad. Especifique los valores prototipo de  $R_1$  y  $R_2$  en cada una de las secciones de segundo orden si se utilizan condensadores de 1 F en el circuito prototipo.



**Figura P15.48**

**15.49.** Utilizamos el filtro paso bajo de Butterworth de cuarto orden y ganancia unidad del Problema 15.48 en un sistema en el que la frecuencia de corte es de 3 kHz. El filtro tiene condensadores de 4,7 nF.

a) Especifique los valores numéricos de  $R_1$  y  $R_2$  en cada sección del filtro.

b) Dibuje un diagrama de circuito del filtro e indique el valor de todos los componentes.

**15.50.** Intercambie las resistencias y los condensadores en el circuito de la Figura P15.48, sustituyendo  $R_1$  por  $C_1$ ,  $R_2$  por  $C_2$  y viceversa.

a) Analice cualitativamente el circuito y prediga el tipo de filtro que permite implementar.

- b) Verifique la conclusión obtenida en el apartado (a) hallando la función de transferencia  $V_o/V_i$ . Escriba la función de transferencia en una forma compatible con las entradas de la Tabla 15.1.
- c) ¿Cuántos grados de libertad existen a la hora de seleccionar los componentes del circuito?
- d) Calcule  $R_1$  y  $R_2$  en función de  $b_o$ ,  $b_1$ ,  $C_1$  y  $C_2$ .
- e) ¿Hay alguna restricción que afecte a los valores de  $C_1$  y  $C_2$ ?
- f) Suponga que utilizamos el circuito en un filtro de Butterworth de tercer orden del tipo determinado en el apartado (a). Especifique los valores prototipo de  $R_1$  y  $R_2$  en la sección de segundo orden del filtro si  $C_1 = C_2 = 1$  F.

**15.51.** a) Utilizamos el circuito del Problema 15.50 en un filtro paso alto de Butterworth de tercer orden que tiene una frecuencia de corte de 5 kHz. Especifique los valores de  $R_1$  y  $R_2$  si hay disponibles condensadores de 75 nF para construir el filtro.

- b) Especifique los valores de resistencia y capacidad en la sección de primer orden del filtro.
- c) Dibuje el diagrama del circuito e indique los valores de todos los componentes.
- d) Determine la expresión numérica correspondiente a la función de transferencia del filtro, después de cambiar la escala.
- e) Utilice la función de transferencia calculada en el apartado (d) para hallar la ganancia en dB a la frecuencia de corte.

**15.52.** a) Demuestre que la función de transferencia para un filtro prototipo de banda eliminada es

$$H(s) = \frac{s^2 + 1}{s^2 + (1/Q)s + 1}.$$

- b) Utilice el resultado del apartado (a) para hallar la función de transferencia del filtro diseñado en el Ejemplo 15.13.

**15.53.** a) Utilizando el circuito mostrado en la Figura 15.29, diseñe un filtro de banda eliminada de banda estrecha que tenga una frecuencia central de 1 kHz y un factor de calidad igual a 20. Utilice para el diseño  $C = 15$  nF.

- b) Dibuje el diagrama de circuito del filtro e indique los valores de todos los componentes en el diagrama.
- c) ¿Cuál es la función de transferencia del filtro, después de cambiar la escala?

**15.54.** Utilizando el circuito de la Figura 15.32(a), diseñe el circuito de control de volumen que proporcione una ganancia máxima de 20 dB y una ganancia de 17 dB a la frecuencia de 40 Hz. Utilice una resistencia de 11,1 k $\Omega$  y un potenciómetro de 100 k $\Omega$ . Compruebe el diseño calculando la ganancia máxima para  $\omega = 0$  y la ganancia para  $\omega = 1/R_2C_1$  utilizando los valores seleccionados de  $R_1$ ,  $R_2$  y  $C_1$ .

**15.55.** Utilice el circuito de la Figura 15.32(a) para diseñar un circuito de control del volumen de graves que tenga una ganancia máxima de 13,98 dB y que caiga 3 dB a 50 Hz.

**15.56.** Dibuje la ganancia máxima en decibelios en función de  $\alpha$  cuando  $\omega = 0$  para el circuito diseñado en el Problema 15.54. Haga variar  $\alpha$  entre 0 y 1 en incrementos de 0,1.

**15.57.** a) Demuestre que los circuitos de las Figuras P15.57(a) y (b) son equivalentes.

b) Demuestre que los puntos designados como  $x$  e  $y$  en la Figura P15.57(b) están siempre al mismo potencial.

- c) Utilizando la información de los apartados (a) y (b), demuestre que el circuito de la Figura 15.33 puede dibujarse como se muestra en la Figura P15.57(c).
- d) Demuestre que el circuito de la Figura P15.57(c) está en la forma del circuito de la Figura 15.2, donde

$$Z_i = \frac{R_1 + (1 - \alpha)R_2 + R_1 R_2 C_1 s}{1 + R_2 C_1 s},$$

$$Z_f = \frac{R_1 + \alpha R_2 + R_1 R_2 C_1 s}{1 + R_1 R_2 C_1 s}.$$

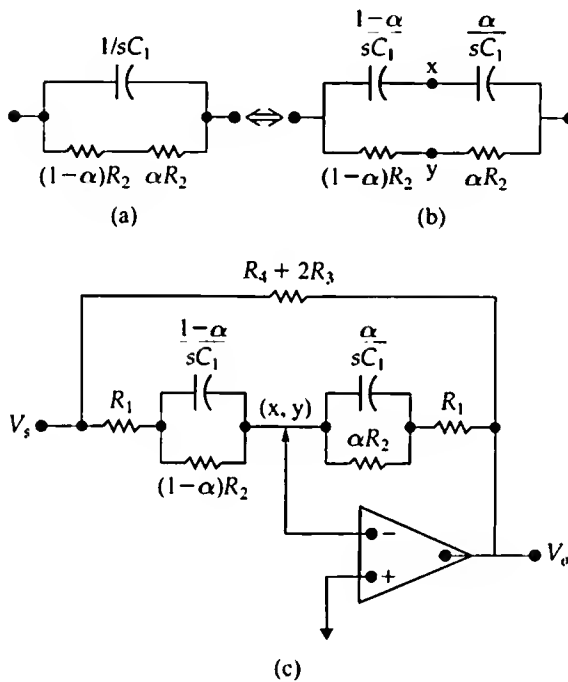


Figura P15.57

- 15.58. Un jefe de proyectos de ingeniería recibe una propuesta de un subordinado en la que se afirma que el circuito mostrado en la Figura P15.58 puede utilizarse como circuito de control del volumen de agudos si  $R_4 = R_1 + R_3 + 2R_5$ . El ingeniero afirma además que la función de transferencia de tensión del circuito es

$$H(s) = \frac{V_o}{V_s} = \frac{-\{(2R_3 + R_4) + [(1 - \beta)R_3 + R_o](\beta R_4 + R_3)C_2 s\}}{\{(2R_3 + R_4) + [(1 - \beta)R_4 + R_3](\beta R_4 + R_o)C_2 s\}}$$

donde  $R_o = R_1 + R_3 + 2R_5$ . Afortunadamente, el jefe de proyecto dispone de un becario que está estudiando ingeniería eléctrica y le pide que compruebe las afirmaciones de su subordinado.

En concreto, le pide al estudiante que compruebe el comportamiento de la función de transferencia a medida que  $\omega \rightarrow 0$ ; a medida que  $\omega \rightarrow \infty$ ; y el comportamiento cuando  $\omega = \infty$  y  $\beta$  varía entre 0 y 1. Teniendo en cuenta estas comprobaciones relativas a la función de transferencia, ¿cree que puede utilizarse el circuito como control del volumen de agudos? Explique su respuesta.

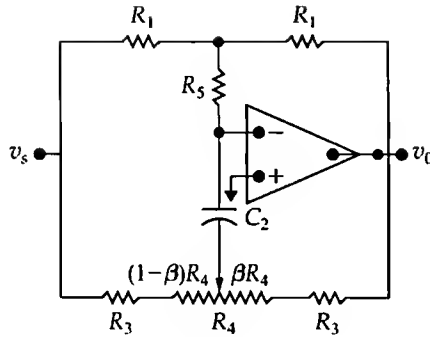


Figura P15.58

- 15.59.** En el circuito de la Figura P15.58, los valores de los componentes son  $R_1 = R_2 = 20 \text{ k}\Omega$ ,  $R_3 = 5,9 \text{ k}\Omega$ ,  $R_4 = 500 \text{ k}\Omega$  y  $C_2 = 2,7 \text{ nF}$ .
- ◆ a) Calcule la ganancia máxima en decibelios.
  - b) Calcule la atenuación máxima en decibelios.
  - c) ¿Es  $R_4$  significativamente mayor que  $R_o$ ?
  - d) Cuando  $\beta = 1$ , ¿cuál es la ganancia en decibelios para  $\omega = 1/R_3C_2$ ?
  - e) Cuando  $\beta = 0$ , ¿cuál es la atenuación en decibelios para  $\omega = 1/R_3C_2$ ?
  - f) Basándose en los resultados obtenidos en los apartados (d) y (e), ¿qué representa la frecuencia  $1/R_3C_2$  cuando  $R_4 \gg R_o$ ?
- 15.60.** Utilizando los valores de componentes dados en el Problema 15.59, dibuje la ganancia máxima en decibelios en función de  $\beta$  para  $\omega = 0$ . Haga variar  $\beta$  entre 0 y 1 en incrementos de 0,1.
- ◆



# CAPÍTULO

# 16

# Series de Fourier

## Contenido del capítulo

- 16.1. Análisis en series de Fourier: panorámica
- 16.2. Coeficientes de Fourier
- 16.3. Efecto de la simetría sobre los coeficientes de Fourier
- 16.4. Forma trigonométrica alternativa para las series de Fourier
- 16.5. Una aplicación
- 16.6. Cálculo de la potencia media con funciones periódicas
- 16.7. Valor rms de una función periódica
- 16.8. Forma exponencial de las series de Fourier
- 16.9. Espectros de amplitud y de fase

En los capítulos anteriores, hemos dedicado una gran cantidad de esfuerzo al análisis en régimen permanente sinusoidal. Una de las razones de nuestro interés en la función de excitación sinusoidal es que nos permite hallar la respuesta de régimen permanente a otros tipos de excitaciones no sinusoidales, pero periódicas. Una **función periódica** es una función que se repite cada  $T$  segundos. Por ejemplo, la forma de onda triangular ilustrada en la Figura 16.1 es una forma de onda no sinusoidal, pero periódica.

Una función periódica es aquella que satisface la relación

$$f(t) = f(t \pm nT), \quad (16.1)$$

donde  $n$  es un entero (1, 2, 3, ...) y  $T$  es el período. La función mostrada en la Figura 16.1 es periódica porque

$$f(t_0) = f(t_0 - T) = f(t_0 + T) = f(t_0 + 2T) = \dots$$

para cualquier valor de  $t_0$  arbitrariamente elegido. Observe que  $T$  es el intervalo de tiempo más pequeño que se puede desplazar una función periódica (en cualquier dirección) para producir una función idéntica a sí misma.

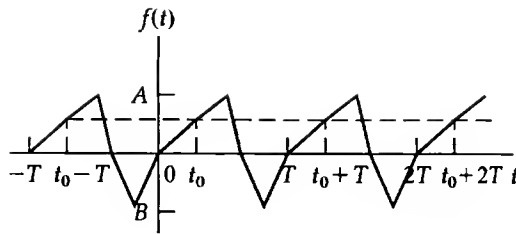
¿Por qué nos interesan las funciones periódicas? Una de las razones es que muchas fuentes eléctricas reales generan formas de onda periódicas. Por ejemplo, los rectificadores electrónicos no filtrados excitados por una fuente sinusoidal producen formas de onda rectificadas que no son sinusoidales, pero que sí son periódicas. Las Figuras 16.2(a) y (b) muestran las formas de onda de los rectificadores sinusoidales de onda completa y de media onda, respectivamente.

El generador de barrido utilizado para controlar el haz de electrones en un osciloscopio de rayos catódicos produce una onda triangular periódica como la que se muestra en la Figura 16.3.

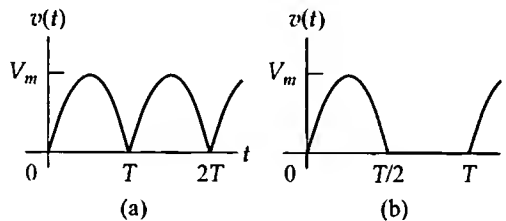


## **Objetivos del capítulo**

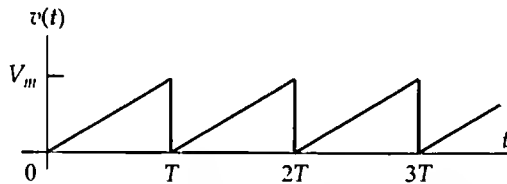
1. Ser capaz de calcular la forma trigonométrica de los coeficientes de Fourier para una forma de onda periódica utilizando la definición de los coeficientes y las simplificaciones que pueden aplicarse cuando la forma de onda exhibe uno o más tipos de simetría.
2. Saber cómo analizar la respuesta de un circuito a una forma de onda periódica utilizando los coeficientes de Fourier y el principio de superposición.
3. Ser capaz de estimar la potencia media entregada a una resistencia utilizando un pequeño número de coeficientes de Fourier.
4. Ser capaz de calcular la fórmula exponencial de los coeficientes de Fourier para una forma de onda periódica y utilizarlos para generar diagramas espectrales de magnitud y fase para dicha forma de onda.



**Figura 16.1.** Una forma de onda periódica.



**Figura 16.2.** Formas de onda de salida de un rectificador sinusoidal no filtrado.  
(a) Rectificación de onda completa. (b) Rectificación de media onda.



**Figura 16.3.** Forma de onda triangular del generador de barrido de un osciloscopio de rayos catódicos.

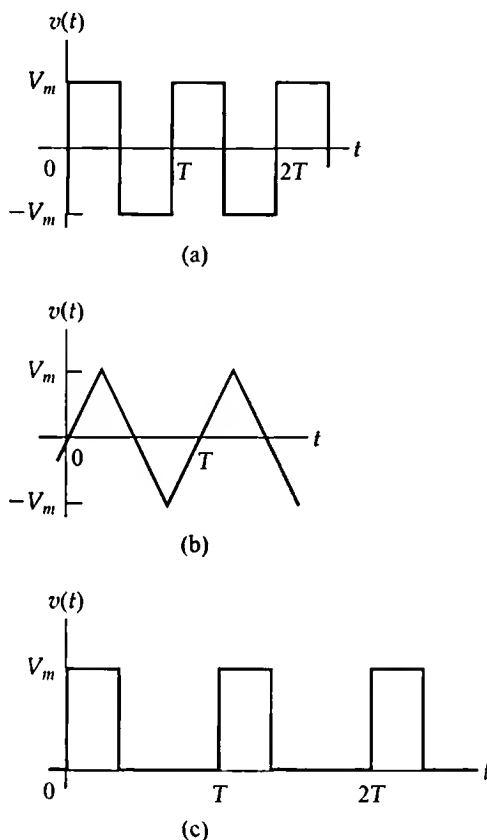
Los osciladores electrónicos, que resultan útiles durante la prueba en laboratorio de los equipos, se diseñan para producir formas de onda periódicas no sinusoidales. En la mayoría de los laboratorios de pruebas pueden encontrarse generadores de funciones que son capaces de producir formas de onda cuadradas, triangulares y rectangulares. La Figura 16.4 ilustra una serie de formas de onda típicas.

Otro problema práctico que provoca nuestro interés en las funciones periódicas es que los generadores de potencia, aunque están diseñados para producir formas de onda sinusoidales, no pueden producir en la práctica una onda sinusoidal pura. Sin embargo, la onda sinusoidal distorsionada es periódica. Por tanto, nos interesa como ingenieros averiguar las consecuencias de excitar los sistemas de potencia con tensiones sinusoidales ligeramente distorsionadas.

El interés en las funciones periódicas surge también de la observación general de que cualquier no linealidad en un circuito lineal crea una función periódica no sinusoidal. Un ejemplo de este fenómeno sería el circuito rectificador al que antes hemos hecho referencia. Otro ejemplo de no linealidad que genera una función periódica no sinusoidal sería la saturación magnética que se produce tanto en máquinas como en transformadores. Finalmente, podríamos citar también como ejemplo un circuito electrónico recortador que aproveche el fenómeno de la saturación de los transistores.

Además, las funciones periódicas no sinusoidales son también importantes en el análisis de sistemas no eléctricos. Son muchos los problemas relativos a las vibraciones mecánicas, al flujo de fluidos

y al flujo calorífico que hacen uso de funciones periódicas. De hecho, el estudio y análisis del flujo calorífico en una varilla de metal fue lo que condujo al matemático francés Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) a desarrollar la representación de una función periódica mediante series trigonométricas. Estas series llevan su nombre y constituyen el punto de partida para hallar la respuesta en régimen permanente de los circuitos eléctricos a las excitaciones periódicas.



**Figura 16.4.** Formas de onda producida por generadores de funciones utilizados en pruebas de laboratorio. (a) Onda cuadrada. (b) Onda triangular. (c) Pulso rectangular.

## 16.1. Análisis en series de Fourier: panorámica

Lo que Fourier descubrió al investigar los problemas de flujo calorífico es que una función periódica puede representarse mediante una suma infinita de funciones seno o coseno que están relacionadas de manera armónica. En otras palabras, el período de cualquier término trigonométrico de la serie infinita es un múltiplo entero, o armónico, del periodo fundamental  $T$  de la función periódica. Así, para una función periódica  $f(t)$ , Fourier demostró que  $f(t)$  puede expresarse como

✦ **REPRESENTACIÓN MEDIANTE  
SERIE DE FOURIER DE UNA  
FUNCIÓN PERIÓDICA**

$$f(t) = a_v + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t, \quad (16.2)$$

donde  $n$  es la secuencia entera 1, 2, 3, ...

En la Ecuación 16.2,  $a_v$ ,  $a_n$  y  $b_n$  se denominan **coeficientes de Fourier** y se calculan a partir de la expresión correspondiente a  $f(t)$ . El término  $\omega_0$  (que es igual a  $2\pi/T$ ) representa la **frecuencia fundamental** de la función periódica  $f(t)$ . Los múltiplos enteros de  $\omega_0$  (es decir,  $2\omega_0$ ,  $3\omega_0$ ,  $4\omega_0$ , etc.) se denominan **frecuencias armónicas** de  $f(t)$ . Así,  $2\omega_0$  es el segundo armónico,  $3\omega_0$  es el tercer armónico y  $n\omega_0$  es el  $n$ -ésimo armónico de  $f(t)$ .

En la Sección 16.2 veremos cómo se determinan los coeficientes de Fourier, pero, antes de adentrarnos en los detalles de la utilización de las series de Fourier en el análisis de circuitos, necesitamos primero examinar el proceso en términos generales. Desde el punto de vista de la aplicación, podemos expresar todas las funciones periódicas de interés en términos de una serie de Fourier. Matemáticamente, las condiciones que debe cumplir una función periódica  $f(t)$  para garantizar que  $f(t)$  pueda expresarse como una serie de Fourier convergente (lo que se conoce como **condiciones de Dirichlet**) son

1.  $f(t)$  debe ser univaluada,
2.  $f(t)$  debe tener un número finito de discontinuidades en el intervalo de periodicidad,
3.  $f(t)$  debe tener un número finito de máximos y mínimos en el intervalo de periodicidad,
4. la integral

$$\int_{t_0}^{t_0+T} |f(t)| dt$$

debe existir.

Toda función periódica generada mediante una fuente físicamente realizable satisface las condiciones de Dirichlet. Éstas son condiciones **suficientes**, pero no **necesarias**; es decir, si  $f(t)$  cumple estas condiciones, sabemos que podremos expresarla mediante una serie de Fourier. Sin embargo, si  $f(t)$  no cumple estas condiciones, puede que todavía seamos capaces de expresarla mediante una serie de Fourier. No se conoce cuál es el conjunto de condiciones necesarias para que  $f(t)$  sea expresable mediante una serie de Fourier.

Después de determinar  $f(t)$  y calcular los coeficientes de Fourier ( $a_v$ ,  $a_n$  y  $b_n$ ) descomponemos la fuente periódica en una fuente de continua ( $a_v$ ) y una suma de fuentes sinusoidales ( $a_n$  y  $b_n$ ). Puesto que la función periódica está excitando un circuito lineal, podemos usar el principio de superposición para hallar la respuesta de régimen permanente. En particular, calculamos primero la respuesta a cada una de las fuentes generadas por la representación en serie de Fourier de  $f(t)$  y luego sumamos las respuestas individuales para obtener la respuesta total. La forma más fácil de calcular la respuesta de régimen permanente correspondiente a cada fuente sinusoidal específica es aplicando el método de análisis basado en fasores.

El procedimiento es bastante sencillo y no requiere que introduzcamos nuevas técnicas de análisis de circuitos. El resultado de la aplicación de este método es una representación en serie de Fourier de la respuesta en régimen permanente; en consecuencia, no conocemos cuál es la forma real de la respuesta. Además, la forma de onda de la respuesta sólo puede estimarse sumando un número suficiente de términos. Sin embargo, aunque la técnica de cálculo de la respuesta en régimen permanente basada en series de Fourier tiene algunas desventajas, nos inicia en una forma de pensar acerca de los problemas que es tan importante como pueda serlo la obtención de resultados cuantitativos. De hecho, esa comprensión conceptual es más importante en algunos aspectos que el enfoque cuantitativo puro.

## 16.2. Coeficientes de Fourier

Después de definir una función periódica a lo largo de su período fundamental, podemos determinar los coeficientes de Fourier mediante las ecuaciones

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt, \quad (16.3)$$

### COEFICIENTES DE FOURIER

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos k\omega_0 t dt, \quad (16.4)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sen k\omega_0 t dt. \quad (16.5)$$

En las Ecuaciones 16.4 y 16.5, el sufijo  $k$  indica el  $k$ -ésimo coeficiente dentro de la secuencia entera 1, 2, 3, . . . Observe que  $a_0$  es el valor medio de  $f(t)$ ,  $a_k$  es igual a dos veces el valor medio de  $k\omega_0 t$  y  $b_k$  es igual a dos veces el valor medio de  $f(t) \sen k\omega_0 t$ .

Podemos deducir fácilmente las Ecuaciones 16.3-16.5 a partir de la Ecuación 16.2 recordando las siguientes relaciones, que se cumplen para todos los valores de  $m$  y  $n$  enteros:

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \sen m\omega_0 t dt = 0, \quad \text{para todo } m, \quad (16.6)$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \cos m\omega_0 t dt = 0, \quad \text{para todo } m, \quad (16.7)$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \cos m\omega_0 t \sen n\omega_0 t dt = 0, \quad \text{para todo } m \text{ y } n, \quad (16.8)$$

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_0+T} \sen m\omega_0 t \sen n\omega_0 t dt &= 0, \quad \text{para todo } m \neq n, \\ &= \frac{T}{2}, \quad \text{para } m = n, \end{aligned} \quad (16.9)$$

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_0+T} \cos m\omega_0 t \cos n\omega_0 t dt &= 0, \quad \text{para todo } m \neq n, \\ &= \frac{T}{2}, \quad \text{para } m = n. \end{aligned} \quad (16.10)$$

Dejamos como ejercicio al lector, en el Problema 16.5, la demostración de las Ecuaciones 16.6-16.10.

Para demostrar la Ecuación 16.3, simplemente integramos ambos lados de la Ecuación 16.2 a lo largo de un período:

$$\begin{aligned}
 \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt &= \int_{t_0}^{t_0+T} \left( a_v + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t \right) dt \\
 &= \int_{t_0}^{t_0+T} a_v dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{t_0}^{t_0+T} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) dt \\
 &= a_v T + 0.
 \end{aligned} \tag{16.11}$$

La Ecuación 16.3 se sigue directamente de la Ecuación 16.11.

Para demostrar la ecuación correspondiente al  $k$ -ésimo valor de  $a_n$ , primero multiplicamos la Ecuación 16.2 por  $\cos k\omega_0 t$  y luego integramos ambos lados a lo largo de un período de  $f(t)$ :

$$\begin{aligned}
 \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos k\omega_0 t dt &= \int_{t_0}^{t_0+T} a_v \cos k\omega_0 t dt \\
 &+ \sum_{n=1}^{\infty} \int_{t_0}^{t_0+T} (a_n \cos n\omega_0 t \cos k\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t \cos k\omega_0 t) dt \\
 &= 0 + a_k \left( \frac{T}{2} \right) + 0.
 \end{aligned} \tag{16.12}$$

Despejando  $a_k$  en la Ecuación 16.12, se obtiene la expresión proporcionada en la Ecuación 16.4.

Podemos obtener la expresión correspondiente al  $k$ -ésimo valor de  $b_n$  multiplicando primero ambos lados de la Ecuación 16.2 por  $\sin k\omega_0 t$  y luego integrando cada lado a lo largo de un período de  $f(t)$ . El Ejemplo 16.1 muestra cómo utilizar las Ecuaciones 16.3-16.5 para hallar los coeficientes de Fourier para una función periódica específica.

### EJEMPLO 16.1 Determinación de la serie de Fourier de una forma de onda triangular sin simetría

Determine la serie de Fourier para la tensión periódica mostrada en la Figura 16.5.

#### SOLUCIÓN

A la hora de emplear las Ecuaciones 16.3-16.5 para hallar  $a_v$ ,  $a_k$  y  $b_k$ , podemos elegir arbitrariamente el valor de  $t_0$ . Para la tensión periódica de la Figura 16.5, la mejor elección para  $t_0$  es cero. Cualquier otra elección haría que las operaciones de integración necesarias fueran más engorrosas. La expresión correspondiente a  $v(t)$  entre 0 y  $T$  es

$$v(t) = \left( \frac{V_m}{T} \right) t.$$

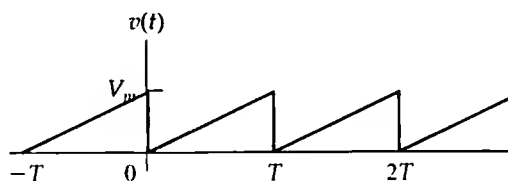


Figura 16.5. La tensión periódica para el Ejemplo 16.1.

La ecuación correspondiente a  $a_v$  es

$$a_v = \frac{1}{T} \int_0^T \left( \frac{V_m}{T} \right) t dt = \frac{1}{2} V_m.$$

Éste es, evidentemente, el valor medio de la forma de onda de la Figura 16.5.

La ecuación correspondiente al  $k$ -ésimo valor de  $a_n$  es

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T} \int_0^T \left( \frac{V_m}{T} \right) t \cos k\omega_0 t \, dt \\ &= \frac{2V_m}{T^2} \left( \frac{1}{k^2\omega_0^2} \cos k\omega_0 t + \frac{t}{k\omega_0} \sin k\omega_0 t \right) \Big|_0^T \\ &= \frac{2V_m}{T^2} \left[ \frac{1}{k^2\omega_0^2} (\cos 2\pi k - 1) \right] = 0 \quad \text{para todo } k. \end{aligned}$$

La ecuación correspondiente al valor  $k$ -ésimo de  $b_n$  es

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T \left( \frac{V_m}{T} \right) t \sin k\omega_0 t \, dt$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2V_m}{T^2} \left( \frac{1}{k^2\omega_0^2} \sin k\omega_0 t - \frac{t}{k\omega_0} \cos k\omega_0 t \right) \Big|_0^T \\ &= \frac{2V_m}{T^2} \left( 0 - \frac{T}{k\omega_0} \cos 2\pi k \right) \\ &= \frac{-V_m}{\pi k}. \end{aligned}$$

La serie de Fourier correspondiente a  $v(t)$  será

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{V_m}{2} - \frac{V_m}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin n\omega_0 t \\ &= \frac{V_m}{2} - \frac{V_m}{\pi} \sin \omega_0 t - \frac{V_m}{2\pi} \sin 2\omega_0 t \\ &\quad - \frac{V_m}{3\pi} \sin 3\omega_0 t - \dots \end{aligned}$$

### Evaluación del objetivo 1

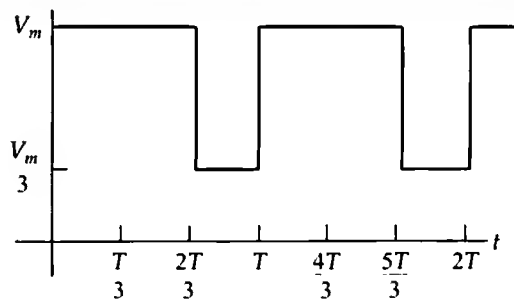
- Ser capaz de calcular la forma trigonométrica de los coeficientes de Fourier para una forma de onda periódica.

**16.1.** Determine las expresiones correspondientes a  $a_n$ ,  $a_k$  y  $b_k$  para la función de tensión periódica mostrada, si  $V_m = 9\pi$  V.

#### RESPUESTA

$$a_v = 21,99 \text{ V}, \quad a_k = \frac{6}{k} \sin \frac{4k\pi}{3} \text{ V},$$

$$b_k = \frac{6}{k} (1 - \cos \frac{4k\pi}{3}) \text{ V}.$$



**16.2.** En referencia al Problema de evaluación 16.1,

- ¿Cuál es el valor medio de la tensión periódica?
- Calcule los valores numéricos de  $a_1$ - $a_5$  y  $b_1$ - $b_5$ .
- Si  $T = 125,66$  ms, ¿cuál es la frecuencia fundamental en radianes por segundo?

d) ¿Cuál es la frecuencia del tercer armónico en hercios?

e) Escriba la serie de Fourier hasta el quinto armónico incluido.

#### RESPUESTA

(a) 21,99 V;

(b) -5,2 V, 2,6 V, 0 V, -1,3 y 1,04 V; 9 V, 4,5 V, 0 V, 2,25 V y 1,8 V;

- |  |                                   |
|--|-----------------------------------|
| (c) 50 rad/s;                                  | + 2,6 cos 100t + 4,5 sen 100t     |
| (d) 23,87 Hz;                                  | – 1,3 cos 200t + 2,25 sen 200t    |
| (e) $v(t) = 21,99 - 5,2 \cos 50t + 9 \sin 50t$ | + 1,04 cos 250t + 1,8 sen 250t V. |

**NOTA** Trate también de resolver los Problemas 16.1-16.3 del capítulo.

El cálculo de los coeficientes de Fourier es bastante tedioso en general. Por tanto, cualquier técnica que nos permita simplificar esta tarea resultará muy útil. Afortunadamente, si una función periódica posee ciertos tipos de simetría, la cantidad de trabajo implicada en la determinación de los coeficientes se reduce sustancialmente. En la Sección 16.3 vamos a ver cómo afecta la simetría a los coeficientes de una serie de Fourier.

### 16.3. Efecto de la simetría sobre los coeficientes de Fourier

Podemos utilizar cuatro tipos de simetría para simplificar la tarea de evaluar los coeficientes de Fourier:

- simetría de función par,
- simetría de función impar,
- simetría de media onda,
- simetría de cuarto de onda.

En las secciones siguientes analizamos el efecto de cada tipo de simetría sobre los coeficientes de Fourier.

#### Simetría de función par

Una función se define como par si

$$f(t) = f(-t) \quad (16.13)$$

Las funciones que satisfacen la Ecuación 16.3 se denominan funciones pares, porque las funciones polinómicas que sólo tienen exponentes pares poseen esta característica. Para las funciones periódicas pares, las ecuaciones de los coeficientes de Fourier se reducen a

$$a_v = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(t) dt, \quad (16.14)$$

$$a_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos k\omega_0 t dt, \quad (16.15)$$

$$b_k = 0, \quad \text{para todo } k. \quad (16.16)$$

Observe que todos los coeficientes  $b$  son cero si la función periódica es par. La Figura 16.6 presenta un ejemplo de función periódica par. La demostración de las Ecuaciones 16.14-16.16 es directa a partir de las Ecuaciones 16.3-16.5. Para cada demostración, seleccionamos  $t_0 = -T/2$  y luego descomponemos el intervalo de integración en dos rangos, uno que va de  $-T/2$  a 0 y otro de 0 a  $T/2$ :



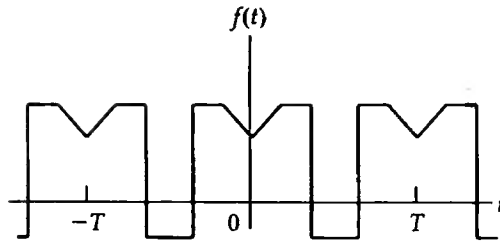


Figura 16.16. Una función periódica par,  $f(t) = f(-t)$ .

$$\begin{aligned}
 a_v &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^0 f(t) dt + \frac{1}{T} \int_0^{T/2} f(t) dt.
 \end{aligned} \tag{16.17}$$

Ahora, cambiamos la variable de integración en la primera integral del lado derecho de la Ecuación 16.17. Específicamente, hacemos  $t = -x$  y observamos que  $f(t) = f(-x) = f(x)$ , porque la función es par. También podemos ver que  $x = T/2$  cuando  $t = -T/2$  y  $dt = -dx$ . Entonces

$$\int_{-T/2}^0 f(t) dt = \int_{T/2}^0 f(x) (-dx) = \int_0^{T/2} f(x) dx, \tag{16.18}$$

que demuestra que la integración desde  $-T/2$  a 0 es idéntica a la de 0 a  $T/2$ ; por tanto, la Ecuación 16.17 es igual a la Ecuación 16.14. La demostración de la Ecuación 16.15 se realiza de forma similar. En este caso,

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^0 f(t) \cos k\omega_0 t dt + \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos k\omega_0 t dt, \tag{16.19}$$

pero

$$\int_{-T/2}^0 f(t) \cos k\omega_0 t dt = \int_{T/2}^0 f(x) \cos (-k\omega_0 x) (-dx) = \int_0^{T/2} f(x) \cos k\omega_0 x dx. \tag{16.20}$$

Como antes, la integración desde  $-T/2$  hasta 0 es idéntica a la de 0 a  $T/2$ . Combinando la Ecuación 16.20 con la Ecuación 16.19 se obtiene la Ecuación 16.15.

Todos los coeficientes  $b$  son cero cuando  $f(t)$  es una función periódica par, porque la integración desde  $-T/2$  hasta 0 es el negado de la integración desde 0 hasta  $T/2$ ; es decir,

$$\int_{-T/2}^0 f(t) \sin k\omega_0 t dt = \int_{T/2}^0 f(x) \sin (-k\omega_0 x) (-dx) = - \int_0^{T/2} f(x) \sin k\omega_0 x dx. \tag{16.21}$$

Cuando usamos las Ecuaciones 16.14 y 16.15 para hallar los coeficientes de Fourier, el intervalo de integración debe ser entre 0 y  $T/2$ .

## Simetría de función impar

Una función se define como impar si

$$f(t) = -f(-t) \quad (16.22)$$

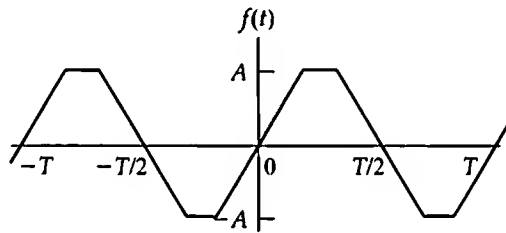
Las funciones que satisfacen la Ecuación 16.22 se denominan impares porque las funciones polinómicas que sólo tienen exponentes impares presentan esta característica. Las expresiones correspondientes a los coeficientes de Fourier son

$$a_v = 0; \quad (16.23)$$

$$a_k = 0, \quad \text{para todo } k; \quad (16.24)$$

$$b_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin k\omega_0 t \, dt. \quad (16.25)$$

Observe que todos los coeficientes  $a$  son cero si la función periódica es impar. La Figura 16.7 muestra una función periódica de este tipo.



**Figura 16.7.** Una función periódica impar,  $f(t) = -f(-t)$ .

Podemos utilizar para demostrar las Ecuaciones 16.23-16.25 el mismo proceso que ya hemos empleado para demostrar las Ecuaciones 16.14-16.16. Dejamos esta demostración como ejercicio para el lector, en el Problema 16.6.

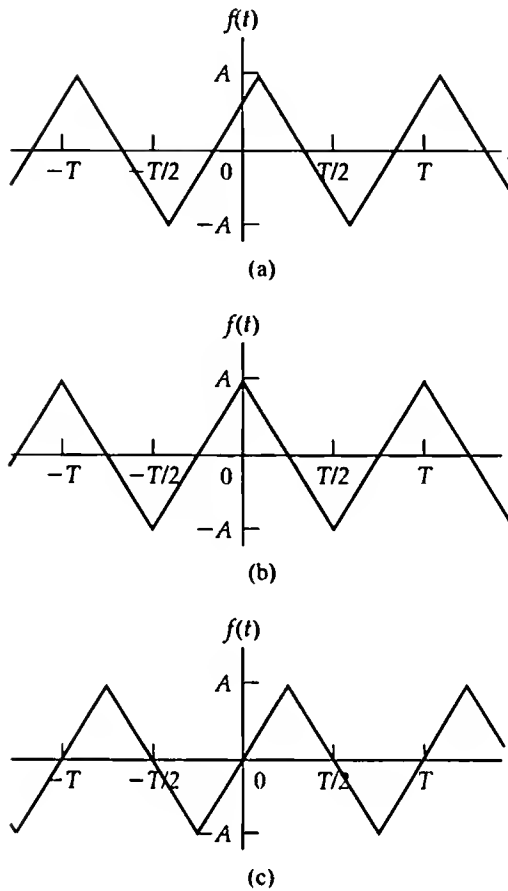
El carácter de función par o impar de una función periódica puede destruirse desplazando la función a lo largo del eje temporal. En otras palabras, una elección cuidadosa para el instante  $t_0$  puede proporcionar simetría par o impar a una función periódica. Por ejemplo, la función triangular mostrada en la Figura 16.8(a) no es ni par ni impar. Sin embargo, podemos hacer que la función sea par, como se muestra en la Figura 16.8(b), o impar, como se muestra en la Figura 16.8(c).

## Simetría de media onda

Una función periódica posee simetría de media onda si satisface la restricción

$$f(t) = -f(t - T/2). \quad (16.26)$$

La Ecuación 16.26 indica que una función periódica tiene simetría de media onda si, después de desplazarla un semiperíodo e invertirla, lo que resulta es una función idéntica a la función original. Por ejemplo, las funciones mostradas en las Figuras 16.7 y 16.8 tienen simetría de media onda, mientras que las de las Figuras 16.5 y 16.6 no la tienen. Observe que la simetría de media onda no depende de dónde situemos el instante  $t_0 = 0$ .



**Figura 16.8.** Ilustración de cómo la elección del instante  $t_0 = 0$  puede hacer que una función periódica sea par, impar o ninguna de las dos cosas. (a) Una forma de onda triangular periódica que no es ni par ni impar. (b) La forma de onda triangular del caso (a) se ha transformado en una función par desplazando la función a lo largo del eje  $t$ . (c) La forma de onda triangular del caso (a) se ha transformado en impar desplazando la función a lo largo del eje  $t$ .

Si una función periódica tiene simetría de media onda, tanto  $a_k$  como  $b_k$  son cero para los valores pares de  $k$ . Además,  $a_0$  también es cero, porque el valor medio de una función con simetría de media onda es cero. Las expresiones correspondientes a los coeficientes de Fourier son

$$a_0 = 0; \quad (16.27)$$

$$a_k = 0, \quad \text{para } k \text{ par}; \quad (16.28)$$

$$a_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos k\omega_0 t \, dt, \quad \text{para } k \text{ impar}; \quad (16.29)$$

$$b_k = 0, \quad \text{para } k \text{ par}; \quad (16.30)$$

$$b_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin k\omega_0 t \, dt, \quad \text{para } k \text{ impar}. \quad (16.31)$$

Podemos demostrar las Ecuaciones 16.27-16.31 comenzando a partir de las Ecuaciones 16.3-16.5 y seleccionando como intervalo de integración de  $-T/2$  a  $T/2$ . Después, dividimos este rango en los dos subintervalos  $-T/2$  a 0 y 0 a  $T/2$ . Por ejemplo, la demostración para  $a_k$  es

$$\begin{aligned}
 a_k &= \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos k\omega_0 t \, dt \\
 &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos k\omega_0 t \, dt \\
 &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^0 f(t) \cos k\omega_0 t \, dt \\
 &\quad + \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos k\omega_0 t \, dt.
 \end{aligned} \tag{16.32}$$

Ahora, hacemos un cambio de variable en la primera integral del lado derecho de la Ecuación 16.32. Específicamente, podemos hacer

$$t = x - T/2.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
 x &= T/2, & \text{cuando } t &= 0; \\
 x &= 0, & \text{cuando } t &= -T/2; \\
 dt &= dx.
 \end{aligned}$$

Podemos replantear la primera integral como

$$\int_{-T/2}^0 f(t) \cos k\omega_0 t \, dt = \int_0^{T/2} f(x - T/2) \cos k\omega_0(x - T/2) \, dx. \tag{16.33}$$

Observe que

$$\cos k\omega_0(x - T/2) = \cos(k\omega_0 x - k\pi) = \cos k\pi \cos k\omega_0 x$$

y que, por hipótesis,

$$f(x - T/2) = -f(x).$$

Por tanto, la Ecuación 16.33 se transforma en

$$\int_{-T/2}^0 f(t) \cos k\omega_0 t \, dt = \int_0^{T/2} [-f(x)] \cos k\pi \cos k\omega_0 x \, dx. \tag{16.34}$$

Introduciendo la Ecuación 16.34 en la Ecuación 16.32, se obtiene

$$a_k = \frac{2}{T} (1 - \cos k\pi) \int_0^{T/2} f(t) \cos k\omega_0 t \, dt. \tag{16.35}$$

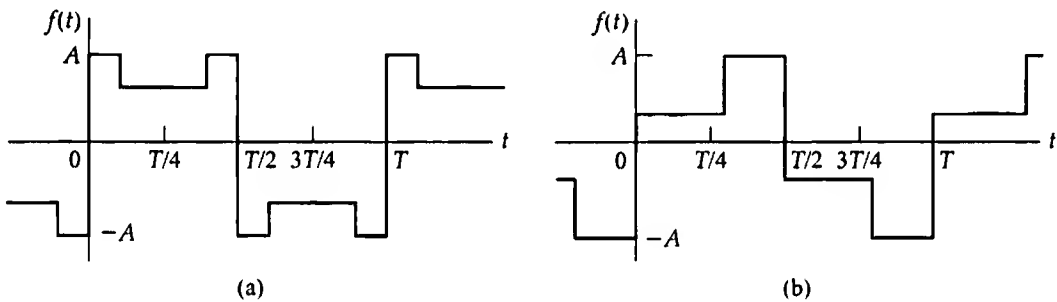
Pero  $\cos k\pi$  es 1 cuando  $k$  es par y  $-1$  cuando  $k$  es impar. Por tanto, la Ecuación 16.35 genera las Ecuaciones 16.28 y 16.29.

Dejemos como ejercicio para el lector (véase el Problema 16.7) la verificación de que puede utilizarse este mismo proceso para demostrar las Ecuaciones 16.30 y 16.31.

Podemos resumir nuestras observaciones resaltando que la representación mediante serie de Fourier de una función periódica con simetría de media onda tiene un valor medio, o de continua, igual a cero y contiene únicamente armónicos impares.

## Simetría de cuarto de onda

La expresión **simetría de cuarto de onda** describe una función periódica que tiene simetría de media onda y, además, simetría en torno al punto medio de los semiciclos positivos y negativos. La función ilustrada en la Figura 16.9(a) tiene simetría de cuarto de onda alrededor del punto medio de los semiciclos positivos y negativos. La función de la Figura 16.9(b) no tiene simetría de cuarto de onda, aunque sí tiene simetría de media onda.



**Figura 16.9.** (a) Una función con simetría de cuarto de onda. (b) Una función que no tiene simetría de cuarto de onda.

Una función periódica que tenga simetría de cuarto de onda siempre puede hacerse par o impar seleccionando adecuadamente el instante para el que  $t = 0$ . Por ejemplo, la función mostrada en la Figura 16.9(a) es impar y puede hacerse par desplazando la función  $T/4$  unidades hacia la derecha o hacia la izquierda a lo largo del eje  $t$ . Sin embargo, la función de la Figura 16.9(b) nunca puede hacerse par o impar. Para aprovechar la simetría de cuarto de onda en el cálculo de los coeficientes de Fourier, es preciso seleccionar el punto en el que  $t = 0$  para hacer que la función sea par o impar.

Si hacemos par la función, entonces

$$a_v = 0, \text{ debido a la simetría de media onda;}$$

$$a_k = 0, \text{ para } k \text{ par, debido a la simetría de media onda;}$$

$$a_k = \frac{8}{T} \int_0^{T/4} f(t) \cos k\omega_0 t \, dt, \quad \text{para } k \text{ impar;}$$

$$b_k = 0, \text{ para todo } k, \text{ porque la función es par.} \quad (16.36)$$

Las Ecuaciones 16.36 son la consecuencia de la simetría de cuarto de onda de la función y de su carácter de función par. Recuerde que la simetría de cuarto de onda está superpuesta a la simetría de

media onda, así que podemos eliminar  $a_v$  y  $a_k$  para  $k$  par. Comparando la expresión correspondiente a  $a_k$ ,  $k$  impar, en las Ecuaciones 16.36 con la Ecuación 16.29, vemos que la combinación de la simetría de cuarto de onda con el carácter de función par permite acortar el rango de integración, que pasa de ser el rango que va de 0 a  $T/2$  al rango que va de 0 a  $T/4$ . Dejamos como ejercicio para el lector, en el Problema 16.8, la demostración de las Ecuaciones 16.36.

Si hacemos impar la función con simetría de cuarto de onda,

$$a_v = 0, \text{ porque la función es impar;}$$

$$a_k = 0, \text{ para todo } k, \text{ porque la función es impar;}$$

$$b_k = 0, \text{ para } k \text{ par, debido a la simetría de media onda;}$$

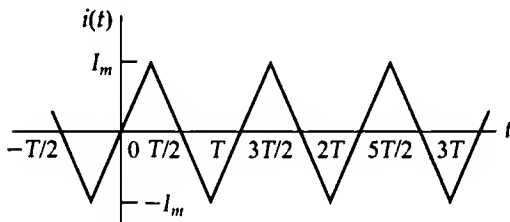
$$b_k = \frac{8}{T} \int_0^{T/4} f(t) \sin k\omega_0 t \, dt, \quad \text{para } k \text{ impar.} \quad (16.37)$$

Las Ecuaciones 16.37 son una consecuencia directa de la simetría de cuarto de onda y del carácter impar de la función. De nuevo, la simetría de cuarto de onda permite acortar el intervalo de integración, que pasa de ser el intervalo que va de 0 a  $T/2$  a ser el intervalo comprendido entre 0 y  $T/4$ . Dejamos como ejercicio para el lector, en el Problema 16.9, la demostración de las Ecuaciones 16.37.

El Ejemplo 16.2 muestra cómo utilizar la simetría para simplificar la tarea de determinación de los coeficientes de Fourier.

### EJEMPLO 16.2 Determinación de la serie de Fourier de una función impar con simetría

Determine la representación mediante serie de Fourier para la forma de onda de corriente mostrada en la Figura 16.10.



**Figura 16.10.** La función periódica del Ejemplo 16.2.

### SOLUCIÓN

Comenzamos buscando las posibles simetrías existentes en la forma de onda. Vemos que la función es impar y que, además, tiene simetría de media onda y de cuarto de onda. Puesto que la

función es impar, todos los coeficientes  $a$  serán cero; es decir,  $a_v = 0$  y  $a_k = 0$  para todo  $k$ . Puesto que la función tiene simetría de media onda,  $b_k = 0$  para los valores pares de  $k$ . Puesto que la función tiene simetría de cuarto de onda, la expresión correspondiente a  $b_k$  para valores impares de  $k$  será

$$b_k = \frac{8}{T} \int_0^{T/4} i(t) \sin k\omega_0 t \, dt.$$

En el intervalo  $0 \leq t \leq T/4$ , la expresión correspondiente a  $i(t)$  es

$$i(t) = \frac{4I_m}{T} t.$$

Entonces

$$b_k = \frac{8}{T} \int_0^{T/4} \frac{4I_m}{T} t \sin k\omega_0 t \, dt$$

$$= \frac{32I_m}{T^2} \left( \frac{\sin k\omega_0 t}{k^2 \omega_0^2} - \frac{t \cos k\omega_0 t}{k\omega_0} \right) \Big|_0^{T/4}$$

$$= \frac{8I_m}{\pi^2 k^2} \sin \frac{k\pi}{2} \quad (k \text{ es impar}).$$

La representación en serie de Fourier para  $i(t)$  será

$$i(t) = \frac{8I_m}{\pi} \sum_{n=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi}{2} \sin n\omega_0 t$$

$$= \frac{8I_m}{\pi^2} \left( \sin \omega_0 t - \frac{1}{9} \sin 3\omega_0 t + \frac{1}{25} \sin 5\omega_0 t - \frac{1}{49} \sin 7\omega_0 t + \dots \right).$$

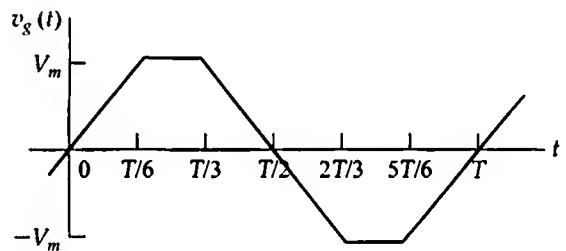
### Evaluación del objetivo 1

- Ser capaz de calcular la forma trigonométrica de los coeficientes de Fourier para una forma de onda periódica.

16.3. Determine la serie de Fourier para la tensión periódica mostrada.

**RESPUESTA**

$$v_g(t) = \frac{12V_m}{\pi^2} \sum_{n=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{\sin(n\pi/3)}{n^2} \sin n\omega_0 t.$$



**NOTA** Trate también de resolver los Problemas 16.10 y 16.11 del capítulo.

## 16.4. Forma trigonométrica alternativa para las series de Fourier

Al utilizar las series de Fourier en las aplicaciones de análisis de circuitos, combinamos los términos seno y coseno de la serie en un único término, por simple comodidad. Al hacer esto, podemos representar cada armónico de  $v(t)$  o de  $i(t)$  mediante un único fasor. Los términos seno y coseno pueden combinarse en una expresión seno o en una expresión coseno. Puesto que en su momento elegimos el formato coseno para el método de análisis mediante fasores (véase el Capítulo 9), elegiremos también aquí la expresión coseno como forma alternativa de las series. Así, escribiremos la serie de Fourier de la Ecuación 16.2 como

$$f(t) = a_v + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t - \theta_n), \quad (16.38)$$

donde  $A_n$  y  $\theta_n$  se definen mediante el valor complejo

$$a_n - jb_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \angle -\theta_n = A_n \angle -\theta_n. \quad (16.39)$$

Podemos demostrar las Ecuaciones 16.38 y 16.39 utilizando el método de los fasores para sumar los términos seno y coseno en la Ecuación 16.2. Comencemos expresando las funciones seno como funciones coseno, es decir, reescribiendo la Ecuación 16.2 como

$$f(t) = a_v + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \cos (n\omega_0 t - 90^\circ). \quad (16.40)$$

Sumando mediante fasores los términos contenidos en el sumatorio, se obtiene

$$\mathcal{P}\{a_n \cos n\omega_0 t\} = a_n \angle 0^\circ \quad (16.41)$$

y

$$\mathcal{P}\{b_n \cos (n\omega_0 t - 90^\circ)\} = b_n \angle -90^\circ = -jb_n. \quad (16.42)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\{a_n \cos n\omega_0 t + b_n \cos (n\omega_0 t - 90^\circ)\} &= a_n - jb_n \\ &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \angle -\theta_n = A_n \angle -\theta_n. \end{aligned} \quad (16.43)$$

Si aplicamos la transformación fasorial inversa a la Ecuación 16.43, obtenemos

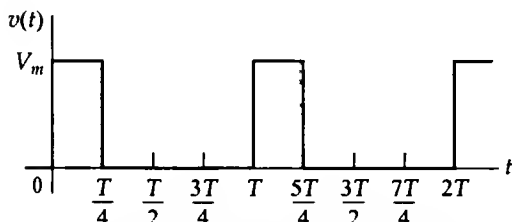
$$\begin{aligned} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \cos (n\omega_0 t - 90^\circ) &= \mathcal{P}^{-1}\{A_n \angle -\theta_n\} \\ &= A_n \cos (n\omega_0 t - \theta_n). \end{aligned} \quad (16.44)$$

Sustituyendo la Ecuación 16.44 en la Ecuación 16.40 se obtiene la Ecuación 16.38. La Ecuación 16.43 se corresponde con la Ecuación 16.39. Si la función periódica es par o impar,  $A_n$  se reduce a  $a_n$  (par) o a  $b_n$  (impar), y  $\theta_n$  será  $0^\circ$  (par) o  $90^\circ$  (impar).

La derivación de la forma alternativa de la serie de Fourier para una función periódica dada se ilustra en el Ejemplo 16.3.

### EJEMPLO 16.3 Cálculo de las distintas formas de la serie de Fourier trigonométrica para una tensión periódica

- a) Determine las expresiones correspondientes a  $a_k$  y  $b_k$  para la función periódica mostrada en la Figura 16.11.
- b) Escriba los cuatro primeros términos de la representación en serie de Fourier de  $v(t)$  utilizando el formato de la Ecuación 16.38.



**Figura 16.11.** La función periódica del Ejemplo 16.3.

#### SOLUCIÓN

- a) La tensión  $v(t)$  no es ni par ni impar, ni tampoco tiene simetría de media onda. Por tanto, utilizamos las Ecuaciones 16.4 y 16.5 para hallar  $a_k$  y  $b_k$ . Seleccionando  $t_0$  como cero, obtenemos

$$a_k = \frac{2}{T} \left[ \int_0^{T/4} V_m \cos k\omega_0 t \, dt + \int_{T/4}^T (0) \cos k\omega_0 t \, dt \right]$$



$$= \frac{2V_m}{T} \frac{\sin k\omega_0 t}{k\omega_0} \Big|_0^{T/4} = \frac{V_m}{k\pi} \sin \frac{k\pi}{2}$$

y

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^{T/4} V_m \sin k\omega_0 t \, dt$$

$$= \frac{2V_m}{T} \left( \frac{-\cos k\omega_0 t}{k\omega_0} \Big|_0^{T/4} \right)$$

$$= \frac{V_m}{k\pi} \left( 1 - \cos \frac{k\pi}{2} \right).$$

b) El valor medio de  $v(t)$  es

$$a_v = \frac{V_m(T/4)}{T} = \frac{V_m}{4}.$$

Los valores de  $a_k - jb_k$  para  $k = 1, 2$  y  $3$  son

$$a_1 - jb_1 = \frac{V_m}{\pi} - j \frac{V_m}{\pi} = \frac{\sqrt{2}V_m}{\pi} \angle -45^\circ,$$

$$a_2 - jb_2 = 0 - j \frac{V_m}{\pi} = \frac{V_m}{\pi} \angle -90^\circ.$$

$$a_3 - jb_3 = \frac{-V_m}{3\pi} - j \frac{V_m}{3\pi} = \frac{\sqrt{2}V_m}{3\pi} \angle -135^\circ.$$

Por tanto, los cuatro primeros términos de la representación de  $v(t)$  en serie de Fourier son

$$v(t) = \frac{V_m}{4} + \frac{\sqrt{2}V_m}{\pi} \cos(\omega_0 t - 45^\circ)$$

$$+ \frac{V_m}{\pi} \cos(2\omega_0 t - 90^\circ)$$

$$+ \frac{\sqrt{2}V_m}{3\pi} \cos(3\omega_0 t - 135^\circ) + \dots$$

### Evaluación del objetivo 1

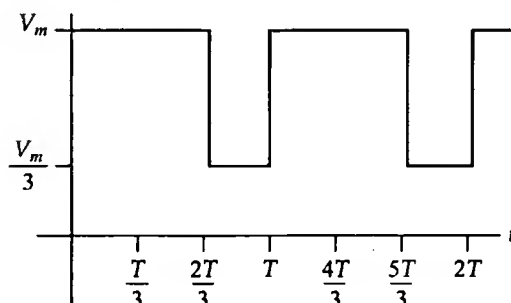
- Ser capaz de calcular la forma trigonométrica de los coeficientes de Fourier para una forma de onda periódica.

16.4. a) Calcule  $A_1$ - $A_5$  y  $\theta_1$ - $\theta_5$  para la función periódica mostrada si  $V_m = 9\pi$  V.

b) Utilizando el formado de la Ecuación 16.38, escriba la serie de Fourier correspondiente a  $v(t)$  hasta el quinto armónico, suponiendo que  $T = 125,66$  ms.

#### RESPUESTA

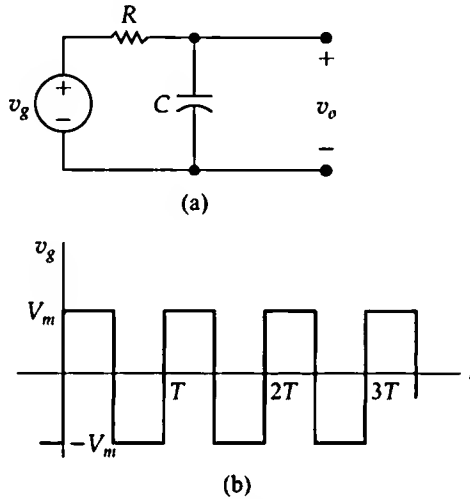
- (a) 10,4, 5,2, 0, 2,6, 2,1 V y  $-120^\circ$ ,  $-60^\circ$ , no definido,  $-120^\circ$ ,  $-60^\circ$ .  
 (b)  $v(t) = 21,99 + 10,4 \cos(50t - 120^\circ) + 5,2 \cos(100t - 60^\circ) + 2,6 \cos(200t - 120^\circ) + 2,1 \cos(250t - 60^\circ)$  V.



**NOTA** Trate también de resolver el Problema 16.18 del capítulo.

## 16.5. Una aplicación

Ahora vamos a ver cómo se utiliza la representación en serie de Fourier de una función de excitación periódica para hallar la respuesta en régimen permanente de un circuito lineal. El circuito  $RC$  mostrado en la Figura 16.12(a) será el que utilicemos como ejemplo. El circuito se excita mediante la tensión periódica de onda cuadrada que se muestra en la Figura 16.12(b). La señal de respuesta (o de salida) deseada es la tensión en bornes del condensador.



**Figura 16.12.** Un circuito  $RC$  excitado mediante una tensión periódica. (a) El circuito  $RC$  en serie. (b) La tensión de onda cuadrada.

El primer paso para hallar la respuesta de régimen permanente consiste en representar la fuente de excitación periódica mediante su serie de Fourier. Después de observar que la fuente tiene simetría impar, de media onda y de cuarto de onda, deducimos que los coeficientes de Fourier se reducen a  $b_k$ , estando  $k$  restringido a valores enteros impares:

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{8}{T} \int_0^{T/4} V_m \sin k\omega_0 t \, dt \\ &= \frac{4V_m}{\pi k} \quad (k \text{ es impar}). \end{aligned} \quad (16.45)$$

Entonces, la representación en serie de Fourier de  $v_g$  es

$$v_g = \frac{4V_m}{\pi} \sum_{n=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{1}{n} \sin n\omega_0 t. \quad (16.46)$$

Escribiendo la serie en forma expandida, tendremos que

$$v_g = \frac{4V_m}{\pi} \sin \omega_0 t + \frac{4V_m}{3\pi} \sin 3\omega_0 t + \frac{4V_m}{5\pi} \sin 5\omega_0 t + \frac{4V_m}{7\pi} \sin 7\omega_0 t + \dots \quad (16.47)$$

La fuente de tensión expresada por la Ecuación 16.47 es el equivalente a un número infinito de fuentes sinusoidales conectadas en serie, teniendo cada una de las fuentes su propia amplitud y frecuencia.

Para hallar la contribución de cada fuente a la tensión de salida, utilizaremos el principio de superposición.

Para cada una de las fuentes sinusoidales, la expresión correspondiente a la tensión de salida en el dominio de los fasores es

$$\mathbf{V}_o = \frac{\mathbf{V}_g}{1 + j\omega RC}. \quad (16.48)$$

Todas las fuentes de tensión están expresadas como funciones seno, por lo que interpretaremos los fasores en función del seno en lugar del coseno. En otras palabras, cuando pasemos de nuevo del dominio de los fasores al dominio del tiempo, simplemente escribiremos las expresiones en el dominio del tiempo como  $\sin(\omega t + \theta)$  en lugar de  $\cos(\omega t + \theta)$ .

El fasor de la tensión de salida debida a la frecuencia fundamental de la fuente sinusoidal es

$$\mathbf{V}_{o1} = \frac{(4V_m/\pi) \angle 0^\circ}{1 + j\omega_0 RC}. \quad (16.49)$$

Escribiendo  $\mathbf{V}_{o1}$  en forma polar obtenemos

$$\mathbf{V}_{o1} = \frac{(4V_m) \angle -\beta_1}{\pi \sqrt{1 + \omega_0^2 R^2 C^2}}, \quad (16.50)$$

donde

$$\beta_1 = \tan^{-1} \omega_0 RC. \quad (16.51)$$

Teniendo en cuenta la Ecuación 16.50, la expresión en el dominio del tiempo para la componente de  $v_o$  a la frecuencia fundamental es

$$v_{o1} = \frac{4V_m}{\pi \sqrt{1 + \omega_0^2 R^2 C^2}} \sin(\omega_0 t - \beta_1). \quad (16.52)$$

Podemos hallar el tercer armónico de la tensión de salida de una forma similar. El fasor correspondiente a la tensión del tercer armónico es

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{o3} &= \frac{(4V_m/3\pi) \angle 0^\circ}{1 + j3\omega_0 RC} \\ &= \frac{4V_m}{3\pi \sqrt{1 + 9\omega_0^2 R^2 C^2}} \angle -\beta_3, \end{aligned} \quad (16.53)$$

donde

$$\beta_3 = \tan^{-1} 3\omega_0 RC. \quad (16.54)$$

La expresión en el dominio del tiempo para el tercer armónico de la tensión de salida es

$$v_{o3} = \frac{4V_m}{3\pi \sqrt{1 + 9\omega_0^2 R^2 C^2}} \sin(3\omega_0 t - \beta_3). \quad (16.55)$$

Por tanto, la expresión correspondiente al  $k$ -ésimo armónico de la tensión de salida será

$$v_{ok} = \frac{4V_m}{k\pi\sqrt{1+k^2\omega_0^2 R^2 C^2}} \sin(k\omega_0 t - \beta_k) \quad (k \text{ es impar}), \quad (16.56)$$

donde

$$\beta_k = \tan^{-1} k\omega_0 RC \quad (k \text{ es impar}). \quad (16.57)$$

Ahora podemos escribir la representación en serie de Fourier de la tensión de salida:

$$v_o(t) = \frac{4V_m}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin(n\omega_0 t - \beta_n)}{n\sqrt{1+(n\omega_0 RC)^2}}. \quad (16.58)$$

La demostración de la Ecuación 16.58 no era complicada. Pero, aunque disponemos de una expresión analítica que nos dice cuál es la salida en régimen permanente, el aspecto de  $v_o(t)$  no resulta aparente de forma inmediata a partir de la Ecuación 16.58. Como ya hemos mencionado anteriormente, éste es uno de los problemas que presenta el método basado en series de Fourier. Sin embargo, la Ecuación 16.58 no resulta inútil, porque nos da una cierta noción de la forma de la salida  $v_o(t)$  en régimen permanente, si nos centramos en la respuesta en frecuencia del circuito. Por ejemplo, si  $C$  es grande,  $1/n\omega_0 C$  será pequeño para los armónicos de mayor orden. Por tanto, el condensador cortocircuita las componentes de alta frecuencia de las formas de onda de entrada, y los armónicos de orden superior en la Ecuación 16.58 son despreciables comparados con los armónicos de orden inferior. La Ecuación 16.58 refleja esta condición en el hecho de que, para valores grandes de  $C$ ,

$$\begin{aligned} v_o &\approx \frac{4V_m}{\pi\omega_0 RC} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin(n\omega_0 t - 90^\circ) \\ &\approx \frac{-4V_m}{\pi\omega_0 RC} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos n\omega_0 t. \end{aligned} \quad (16.59)$$

La Ecuación 16.59 muestra que la amplitud de los armónicos de la salida decrece según  $1/n^2$ , comparada con el decrecimiento según  $1/n$  para los armónicos de la entrada. Si  $C$  es tan grande que sólo la componente fundamental es significativa, entonces (en primera aproximación)

$$v_o(t) \approx \frac{-4V_m}{\pi\omega_0 RC} \cos \omega_0 t, \quad (16.60)$$

y el análisis de Fourier nos dice que la entrada de onda cuadrada se deforma para producir una salida sinusoidal.

Ahora veamos lo que sucede a medida que  $C \rightarrow 0$ . El circuito muestra que  $v_o$  y  $v_x$  son iguales cuando  $C = 0$ , porque la rama capacitiva actúa como un circuito abierto para todas las frecuencias. La Ecuación 16.58 predice el mismo resultado porque, a medida que  $C \rightarrow 0$ ,

$$v_o = \frac{4V_m}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \sin n\omega_0 t. \quad (16.61)$$

Pero la Ecuación 16.61 es idéntica a la Ecuación 16.46 y, por tanto,  $v_o \rightarrow v_x$  a medida que  $C \rightarrow 0$ .

De este modo, vemos que la Ecuación 16.58 sí resulta de utilidad, porque nos permite predecir que la salida será una réplica altamente distorsionada de la forma de onda de entrada cuando  $C$  es grande y

una réplica razonable si el valor de  $C$  es pequeño. En el Capítulo 13, examinamos la distorsión entre la entrada y la salida en cuanto al grado de memoria que la función de ponderación del sistema tenía. En el dominio de la frecuencia, analizamos la distorsión entre la entrada y la salida en régimen permanente según cómo se alteran la amplitud y la fase de los armónicos a medida que se transmiten a través del circuito. Cuando la red altera significativamente las relaciones de amplitud y fase entre los armónicos de la salida, en relación con los de la entrada, la salida será una versión distorsionada de la entrada. Por tanto, en el dominio de la frecuencia hablamos de distorsión de amplitud y distorsión de fase.

Para el circuito de nuestro ejemplo, hay una distorsión de amplitud porque las amplitudes de los armónicos de entrada decrecen según  $1/n$ , mientras que las amplitudes de los armónicos de salida decrecen según

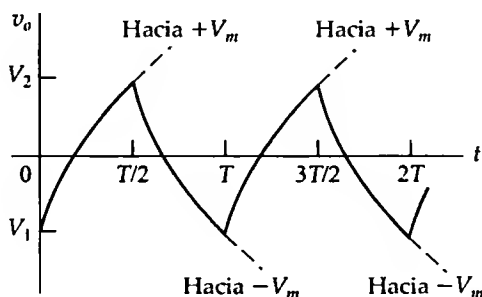
$$\frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{1 + (n\omega_0 RC)^2}}.$$

Este circuito también presenta una distorsión de fase, porque el ángulo de fase de cada armónico de entrada es cero, mientras que el ángulo de fase del  $n$ -ésimo armónico de la señal de salida es  $-\tan^{-1} n\omega_0 RC$ .

## Una aplicación de la técnica de cálculo directo de la respuesta en régimen permanente

Para el circuito  $RC$  simple mostrado en la Figura 16.12(a), podemos hallar la expresión correspondiente a la respuesta de régimen permanente sin utilizar la representación en serie de Fourier de la función de excitación. Vamos a hacer este análisis adicional, porque nos ayudará a comprender mejor la técnica basada en series de Fourier.

Para hallar la expresión de régimen permanente correspondiente a  $v_o$  mediante un análisis directo del circuito, el razonamiento que seguiremos es sencillo. La función de excitación de onda cuadrada va alternando entre la carga del condensador hacia  $+V_m$  y  $-V_m$ . Después de que el circuito alcance la operación en régimen permanente, este proceso alternativo de carga pasa a ser periódico. Sabemos, a partir del análisis del circuito  $RC$  con una única constante de relajación (Capítulo 7), que la respuesta a los cambios abruptos en la tensión de excitación es exponencial. Por tanto, la forma de onda de régimen permanente de la tensión existente en bornes del condensador en el circuito mostrado en la Figura 16.12(a) es la que se ilustra en la Figura 16.13.



**Figura 16.13.** Forma de onda en régimen permanente de  $v_o$  para el circuito de la Figura 16.12(a).

Las expresiones analíticas para  $v_o(t)$  en los intervalos de tiempo  $0 \leq t \leq T/2$  y  $T/2 \leq t \leq T$  son

$$v_o = V_m + (V_1 - V_m)e^{-t/RC}, \quad 0 \leq t \leq T/2; \quad (16.62)$$

$$v_o = -V_m + (V_2 + V_m)e^{-[t-(T/2)]/RC}, \quad T/2 \leq t \leq T. \quad (16.63)$$

Podemos demostrar las Ecuaciones 16.62 y 16.63 utilizando los métodos del Capítulo 7, como resume la Ecuación 7.60. Podemos calcular los valores de  $V_1$  y  $V_2$  observando, en la Ecuación 16.62, que

$$V_2 = V_m + (V_1 - V_m)e^{-T/2RC}, \quad (16.64)$$

y, en la Ecuación 16.63, que

$$V_1 = -V_m + (V_2 + V_m)e^{-T/2RC}. \quad (16.65)$$

Si resolvemos el sistema formado por las Ecuaciones 16.64 y 16.65, se obtienen los valores de  $V_1$  y  $V_2$

$$V_2 = -V_1 = \frac{V_m(1 - e^{-T/2RC})}{1 + e^{-T/2RC}}. \quad (16.66)$$

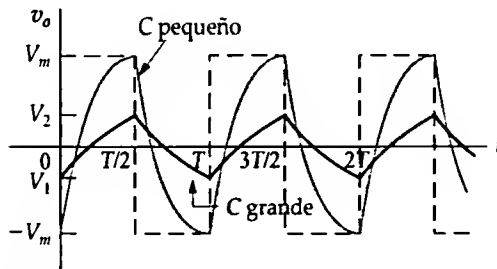
Sustituyendo la Ecuación 16.66 en las Ecuaciones 16.62 y 16.63, se obtiene

$$v_o = V_m - \frac{2V_m}{1 + e^{-T/2RC}} e^{-t/RC}, \quad 0 \leq t \leq T/2, \quad (16.67)$$

y

$$v_o = -V_m + \frac{2V_m}{1 + e^{-T/2RC}} e^{-[t-(T/2)]/RC}, \quad T/2 \leq t \leq T. \quad (16.68)$$

Las Ecuaciones 16.67 y 16.68 indican que  $v_o(t)$  tiene simetría de media onda y que, por tanto, el valor promedio de  $v_o$  es cero. Este resultado concuerda con la solución basada en serie de Fourier de la respuesta en régimen permanente; en concreto, puesto que la función de excitación no tiene una componente de frecuencia cero, la respuesta tampoco puede tener dicha componente. Las Ecuaciones 16.67 y 16.68 también muestran el efecto que tiene variar el tamaño del condensador. Si  $C$  es pequeño, las funciones exponenciales desaparecen rápidamente,  $v_o = V_m$  entre 0 y  $T/2$  y  $v_o = -V_m$  entre  $T/2$  y  $T$ . En otras palabras,  $v_o \rightarrow v_g$  a medida que  $C \rightarrow 0$ . Si  $C$  es grande, la forma de onda de salida adquiere una forma triangular, como muestra la Figura 16.14. Observe que, para grandes valores de  $C$ , podemos aproximar los términos exponenciales  $e^{-t/RC}$  y  $e^{-[t-(T/2)]/RC}$  mediante los términos lineales  $1 - (t/RC)$  y  $1 - \{[t - (T/2)]/RC\}$ , respectivamente. La Ecuación 16.59 da la serie de Fourier de esta forma de onda triangular.



**Figura 16.14.** Efecto del tamaño del condensador sobre la respuesta en régimen permanente.

La Figura 16.14 resume estos resultados. La línea a trazos de la Figura 16.14 es la tensión de entrada, mientras que las dos líneas continuas muestran la tensión de salida cuando  $C$  es pequeño y cuando  $C$  es grande.

Finalmente, vamos a verificar que la respuesta de régimen permanente dada por las Ecuaciones 16.67 y 16.68 es equivalente a la solución basada en series de Fourier de la Ecuación 16.58. Para ello, no tenemos más que hallar la representación en serie de Fourier de la función periódica descrita por las Ecuaciones 16.67 y 16.68. Ya hemos indicado que la tensión periódica de respuesta tiene simetría de media onda; por tanto, la serie de Fourier sólo contendrá armónicos impares. Para  $k$  impar,

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} \left( V_m - \frac{2V_m e^{-t/RC}}{1 + e^{-T/2RC}} \right) \cos k\omega_0 t \, dt \\ &= \frac{-8RCV_m}{T[1 + (k\omega_0 RC)^2]} \quad (k \text{ es impar}), \end{aligned} \quad (16.69)$$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} \left( V_m - \frac{2V_m e^{-t/RC}}{1 + e^{-T/2RC}} \right) \sin k\omega_0 t \, dt \\ &= \frac{4V_m}{k\pi} - \frac{8k\omega_0 R^2 C^2}{T[1 + (k\omega_0 RC)^2]} \quad (k \text{ es impar}). \end{aligned} \quad (16.70)$$

Para demostrar que los resultados obtenidos mediante las Ecuaciones 16.69 y 16.70 son coherentes con la Ecuación 16.58, tenemos que demostrar que

$$\sqrt{a_k^2 + b_k^2} = \frac{4V_m}{k\pi} \frac{1}{\sqrt{1 + (k\omega_0 RC)^2}}, \quad (16.71)$$

y que

$$\frac{a_k}{b_k} = -k\omega_0 RC. \quad (16.72)$$

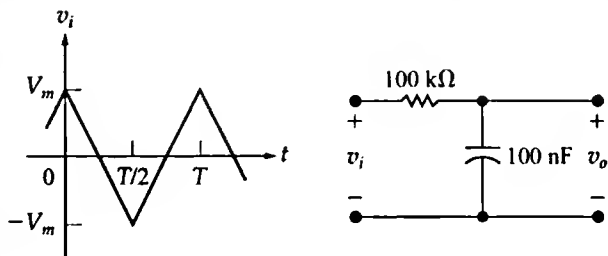
Dejamos como ejercicio para el lector, en los Problemas 16.19 y 16.20, la demostración de las Ecuaciones 16.69-16.72. Las Ecuaciones 16.71 y 16.72 se utilizan con las Ecuaciones 16.38 y 16.39 para determinar la expansión en serie de Fourier dada en la Ecuación 16.58; dejamos los detalles como ejercicio al lector en el Problema 16.21.

Con este circuito de ilustración, hemos mostrado cómo se utilizan las series de Fourier conjuntamente con el principio de superposición para obtener la respuesta de régimen permanente a una función periódica de excitación. De nuevo, la principal carencia de la técnica basada en las series de Fourier es la dificultad de visualizar la forma de onda de la respuesta. Sin embargo, razonando en función de la respuesta en frecuencia del circuito, podemos deducir una aproximación razonable a la respuesta de régimen permanente utilizando un número finito de términos adecuados, extraídos de la representación en serie de Fourier (véanse los Problemas 16.25 y 16.26).

## Evaluación del objetivo 2

- Saber cómo analizar la respuesta de un circuito a una forma de onda periódica.

16.5. Aplicamos la tensión con forma de onda triangular periódica mostrada a la izquierda de la figura al circuito que se muestra a la derecha. Determine los tres primeros términos distintos de cero en la serie de Fourier que representa la tensión de régimen permanente de  $v_o$  si  $V_m = 281,25 \pi^2$  mV y el período de la tensión de entrada es  $200\pi$  ms.



## RESPUESTA

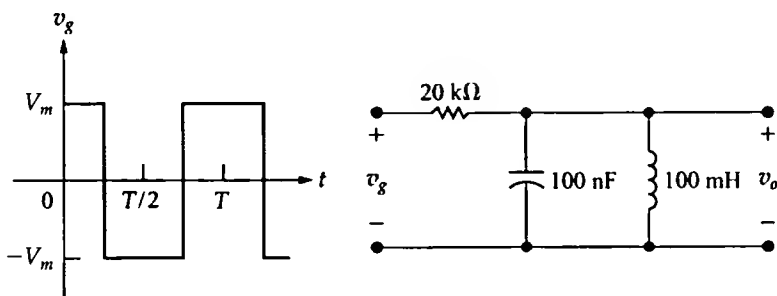
$$2238,83 \cos(10t - 5,71^\circ) + \\ 239,46 \cos(30t - 16,70^\circ) + \\ 80,50 \cos(50t - 26,57^\circ) + \dots \text{ mV}$$

16.6. Aplicamos la forma de onda cuadrada periódica mostrada a la izquierda de la figura al circuito que se muestra a la derecha.

- a) Determine los cuatro primeros términos distintos de cero de la serie de Fourier que representa la tensión de régimen permanente  $v_o$  si  $V_m = 10,5\pi$  V y el período de la tensión de entrada es  $\pi$  ms.
- b) ¿Qué armónico domina la tensión de salida? Explique su respuesta.

## RESPUESTA

- a)  $0,4375 \cos(2000t + 89,40^\circ) + 0,6555 \cos(6000t - 92,68^\circ) + 8,4 \cos(10.000t) + 0,4363 \cos(14.000t + 94,17^\circ) + \dots \text{ V}$
- b) El quinto armónico, situado en  $10.000$  rad/s, porque el circuito es un filtro paso banda con una frecuencia central de  $10.000$  rad/s y un factor de calidad de 20.



**NOTA** Trate también de resolver los Problemas 16.24 y 16.25 del capítulo.



## 16.6. Cálculo de la potencia media con funciones periódicas

Si disponemos de la representación en serie de Fourier de la tensión y la corriente en un par de terminales, en un circuito lineal con parámetros agrupados, podemos expresar fácilmente la potencia media en los terminales en función de las tensiones y corrientes armónicas. Utilizando la forma trigonométrica de la serie de Fourier expresada en la Ecuación 16.38, podemos escribir la tensión y la corriente periódicas en los terminales de una red como

$$v = V_{cc} + \sum_{n=1}^{\infty} V_n \cos(n\omega_0 t - \theta_{vn}) \quad (16.73)$$

$$i = I_{cc} + \sum_{n=1}^{\infty} I_n \cos(n\omega_0 t - \theta_{in}). \quad (16.74)$$

La notación utilizada en las Ecuaciones 16.73 y 16.74 se define de la forma siguiente:

$V_{cc}$  = amplitud de la componente de tensión continua,

$V_n$  = amplitud del  $n$ -ésimo armónico de la tensión,

$\theta_{vn}$  = ángulo de fase del  $n$ -ésimo armónico de la tensión,

$I_{cc}$  = amplitud de la componente de corriente continua,

$I_n$  = amplitud del  $n$ -ésimo armónico de la corriente,

$\theta_{in}$  = ángulo de fase del  $n$ -ésimo armónico de la corriente.

Suponemos que la referencia de la corriente está en la dirección de la caída de la tensión de referencia entre los terminales (utilizando el convenio de signos pasivo), de modo que la potencia instantánea en los terminales es  $vi$ . La potencia media será

$$P = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} p \, dt = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} vi \, dt. \quad (16.75)$$

Para hallar la expresión correspondiente a la potencia media, sustituimos las Ecuaciones 16.73 y 16.74 en la Ecuación 16.75 e integramos. A primera vista, parece que es una tarea muy compleja, porque el producto  $vi$  requiere multiplicar dos series infinitas. Sin embargo, los únicos términos que entrarán en la integración son los productos de la tensión y la corriente a la misma frecuencia: un vistazo a las Ecuaciones 16.8-16.10 debería convencer al lector de la validez de esta observación. Por tanto, la Ecuación 16.75 se reduce a

$$P = \frac{1}{T} V_{cc} I_{cc} t \Big|_{t_0}^{t_0+T} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} V_n I_n \cos(n\omega_0 t - \theta_{vn}) \times \cos(n\omega_0 t - \theta_{in}) \, dt. \quad (16.76)$$

Ahora, utilizamos la identidad trigonométrica

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) + \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta).$$

para simplificar la Ecuación 16.76, y nos queda

$$P = V_{cc} I_{cc} + \frac{1}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_n I_n}{2} \int_{t_0}^{t_0+T} [\cos(\theta_{vn} - \theta_{in}) + \cos(2n\omega_0 t - \theta_{vn} - \theta_{in})] dt. \quad (16.77)$$

La integral del segundo término contenido en el símbolo integral es cero, por lo que

$$P = V_{cc} I_{cc} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_n I_n}{2} \cos(\theta_{vn} - \theta_{in}). \quad (16.78)$$

La Ecuación 16.78 tiene una gran importancia, porque indica que, en el caso de una interacción entre una tensión periódica y la correspondiente corriente periódica, la potencia media total es la suma de las potencias medias obtenidas a partir de la interacción de las corrientes y tensiones de la misma frecuencia. Las corrientes y tensiones de frecuencias distintas no interactúan para producir una potencia media. Por tanto, en los cálculos de potencia media relativos a funciones periódicas, la potencia media total es la superposición de las potencias medias asociadas con cada tensión y corriente armónicas. El Ejemplo 16.4 ilustra el cálculo de la potencia media para una tensión periódica.

#### EJEMPLO 16.4 Cálculo de la potencia media para un circuito con una fuente de tensión periódica

Suponga que aplicamos la tensión periódica de onda cuadrada del Ejemplo 16.3 a los terminales de una resistencia de  $15 \Omega$ . El valor de  $V_m$  es  $60 \text{ V}$  y el de  $T$  es  $5 \text{ ms}$ .

- Escriba los cinco primeros términos distintos de cero de la representación en serie de Fourier de  $v(t)$ . Utilice la forma trigonométrica dada en la Ecuación 16.38.
- Calcule la potencia media asociada con cada término hallado en el apartado (a).
- Calcule la potencia media total entregada a la resistencia de  $15 \Omega$ .
- ¿Qué porcentaje de la potencia total es entregado por los cinco primeros términos de la serie de Fourier?

$$A_1 = \sqrt{2} 60 / \pi = 27,01 \text{ V},$$

$$\theta_1 = 45^\circ,$$

$$A_2 = 60 / \pi = 19,10 \text{ V},$$

$$\theta_2 = 90^\circ,$$

$$A_3 = 20 \sqrt{2} / \pi = 9,00 \text{ V},$$

$$\theta_3 = 135^\circ,$$

$$A_4 = 0,$$

$$\theta_4 = 0^\circ,$$

$$A_5 = 5,40 \text{ V},$$

$$\theta_5 = 45^\circ,$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi(1000)}{5} = 400\pi \text{ rad/s}.$$

Por tanto, utilizando los cinco primeros términos distintos de cero de la serie de Fourier,

#### SOLUCIÓN

- La componente continua de  $v(t)$  es

$$a_v = \frac{(60)(T/4)}{T} = 15 \text{ V}.$$

Del Ejemplo 16.3 tenemos

$$\begin{aligned}
 v(t) = & 15 + 27,01 \cos(400\pi t - 45^\circ) \\
 & + 19,10 \cos(800\pi t - 90^\circ) \\
 & + 9,00 \cos(1200\pi t - 135^\circ) \\
 & + 5,40 \cos(2000\pi t - 45^\circ) + \dots \text{ V.}
 \end{aligned}$$

- b) La tensión se aplica a los terminales de una resistencia, por lo que podemos hallar la potencia asociada a cada término de la forma siguiente:

$$P_{cc} = \frac{15^2}{15} = 15 \text{ W,}$$

$$P_1 = \frac{1}{2} \frac{27,01^2}{15} = 24,32 \text{ W,}$$

$$P_2 = \frac{1}{2} \frac{19,10^2}{15} = 12,16 \text{ W,}$$

$$P_3 = \frac{1}{2} \frac{9^2}{15} = 2,70 \text{ W,}$$

$$P_5 = \frac{1}{2} \frac{5,4^2}{15} = 0,97 \text{ W.}$$

- c) Para obtener la potencia media total entregada a la resistencia de  $15 \Omega$ , calculamos primero el valor rms de  $v(t)$ :

$$V_{rms} = \sqrt{\frac{(60)^2 (T/4)}{T}}$$

$$= \sqrt{900} = 30 \text{ V.}$$

La potencia media total entregada a la resistencia de  $15 \Omega$  es

$$\begin{aligned}
 P_T &= \frac{30^2}{15} \\
 &= 60 \text{ W.}
 \end{aligned}$$

- d) La potencia total entregada por los cinco primeros términos distintos de cero es

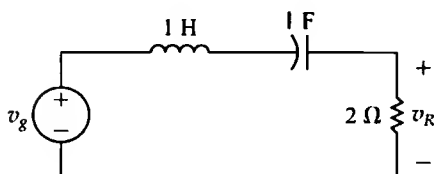
$$\begin{aligned}
 P &= P_{cc} + P_1 + P_2 + P_3 + P_5 \\
 &= 55,15 \text{ W.}
 \end{aligned}$$

Esto es  $(55,15/60)(100)$ , es decir, el 91,92% del total.

### Evaluación del objetivo 3

- Ser capaz de estimar la potencia media entregada a una resistencia utilizando un pequeño número de coeficientes de Fourier.

- 16.7. Aplicamos la función de tensión trapezoidal del Problema de evaluación 16.3 al circuito mostrado en la Figura. Si  $12V_m = 296,09 \text{ V}$  y  $T = 2094,4 \text{ ms}$ , estime la potencia media entregada a la resistencia de  $2 \Omega$ .



### RESPUESTA

60,75 W.

**NOTA** Trate también de resolver los Problemas 16.29 y 16.30 del capítulo.

## 16.7. Valor rms de una función periódica

El valor rms de una función periódica puede expresarse en función de los coeficientes de Fourier. Por definición,

$$F_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t)^2 dt}. \quad (16.79)$$

Representando  $f(t)$  mediante su serie de Fourier se obtiene

$$F_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \left[ a_v + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t - \theta_n) \right]^2 dt}. \quad (16.80)$$

La integral de la función temporal elevada al cuadrado se simplifica, porque los únicos términos que sobreviven a la integración a lo largo de un período son el producto del término de continua y los productos armónicos de la misma frecuencia. La integral de todos los demás productos es cero. Por tanto, la Ecuación 16.80 se reduce a

$$F_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T} \left( a_v^2 T + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T}{2} A_n^2 \right)} = \sqrt{a_v^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n^2}{2}} = \sqrt{a_v^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{A_n}{\sqrt{2}} \right)^2}. \quad (16.81)$$

La Ecuación 16.81 indica que el valor rms de una función periódica es la raíz cuadrada del resultado de sumar el cuadrado del valor rms de cada armónico y el cuadrado del valor de continua. Por ejemplo, supongamos que una tensión periódica está representada por la serie finita

$$v = 10 + 30 \cos(\omega_0 t - \theta_1) + 20 \cos(2\omega_0 t - \theta_2) + 5 \cos(3\omega_0 t - \theta_3) + 2 \cos(5\omega_0 t - \theta_5).$$

El valor rms de esta tensión es

$$V = \sqrt{10^2 + (30/\sqrt{2})^2 + (20/\sqrt{2})^2 + (5/\sqrt{2})^2 + (2/\sqrt{2})^2} = \sqrt{764,5} = 27,65 \text{ V}.$$

Usualmente, hace falta un número infinito de términos para representar una función periódica mediante una serie de Fourier, por lo que la Ecuación 16.81 proporciona una estimación del verdadero valor rms. Vamos a ilustrar este resultado en el Ejemplo 16.5.

### EJEMPLO 16.5 Estimación del valor rms de una función periódica

Utilice la Ecuación 16.81 para estimar el valor rms de la tensión del Ejemplo 16.4.

#### SOLUCIÓN

A partir del Ejemplo 16.4,

$$V_{\text{cc}} = 15 \text{ V},$$

$V_1 = 27,01/\sqrt{2} \text{ V}$ , el valor rms de la componente fundamental,

$V_2 = 19,10/\sqrt{2} \text{ V}$ , el valor rms del segundo armónico,

$V_3 = 9,00/\sqrt{2} \text{ V}$ , el valor rms del tercer armónico,

$V_5 = 5,40/\sqrt{2} \text{ V}$ , el valor rms del quinto armónico.

Por tanto,

$$V_{\text{rms}} = \sqrt{15^2 + \left(\frac{27,01}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{19,10}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{9,00}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{5,40}{\sqrt{2}}\right)^2} = 28,76 \text{ V.}$$

En el Ejemplo 16.4 vimos que el valor rms real es de 30 V. Podemos aproximarnos todavía más a este valor incluyendo más armónicos en la

Ecuación 16.81. Por ejemplo, si incluyéramos los armónicos hasta  $k = 9$ , la ecuación nos daría un valor de 29,32 V.

**NOTA** Evalúe su comprensión de este material intentando resolver los Problemas 16.33 y 16.34 del capítulo.

## 16.8. Forma exponencial de las series de Fourier

La forma exponencial de las series de Fourier resulta interesante porque nos permite expresar la serie de manera muy concisa. La forma exponencial de la serie es

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t}, \quad (16.82)$$

donde

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt. \quad (16.83)$$

Para demostrar las Ecuaciones 16.82 y 16.83, volvamos a la Ecuación 16.2 y sustituyamos las funciones seno y coseno por sus equivalentes exponenciales:

$$\cos n\omega_0 t = \frac{e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}}{2}, \quad (16.84)$$

$$\text{sen } n\omega_0 t = \frac{e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}}{2j}. \quad (16.85)$$

Sustituyendo las Ecuaciones 16.84 y 16.85 en la Ecuación 16.2, se obtiene

$$\begin{aligned} f(t) &= a_v + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2} (e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}) + \frac{b_n}{2j} (e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}) \\ &= a_v + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_n - jb_n}{2} \right) e^{jn\omega_0 t} + \left( \frac{a_n + jb_n}{2} \right) e^{-jn\omega_0 t}. \end{aligned} \quad (16.86)$$

Ahora definimos  $C_n$  como

$$C_n = \frac{1}{2} (a_n - jb_n) = \frac{A_n}{2} \angle -\theta_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (16.87)$$

A partir de la definición de  $C_n$ ,

$$C_n = \frac{1}{2} \left[ \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos n\omega_0 t dt - j \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \text{sen } n\omega_0 t dt \right]$$

$$= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) (\cos n\omega_0 t \, dt - j \operatorname{sen} n\omega_0 t) \, dt = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-jn\omega_0 t} \, dt, \quad (16.88)$$

lo que completa la demostración de la Ecuación 16.83. Para completar la demostración de la Ecuación 16.82, observamos primero en la Ecuación 16.88 que

$$C_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \, dt = a_v. \quad (16.89)$$

A continuación, vemos que

$$C_{-n} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{jn\omega_0 t} \, dt = C_n^* = \frac{1}{2}(a_n + jb_n). \quad (16.90)$$

Sustituyendo las Ecuaciones 16.87, 16.89 y 16.90 en la Ecuación 16.86 se obtiene

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n e^{jn\omega_0 t} + C_n^* e^{-jn\omega_0 t}) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n^* e^{-jn\omega_0 t}. \quad (16.91)$$

Observe que el segundo sumatorio del lado derecho de la Ecuación 16.91 es equivalente a sumar  $C_n e^{jn\omega_0 t}$  entre  $-1$  y  $-\infty$ ; es decir,

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n^* e^{-jn\omega_0 t} = \sum_{n=-1}^{-\infty} C_n e^{jn\omega_0 t}. \quad (16.92)$$

Puesto que el sumatorio desde  $-1$  a  $-\infty$  es igual al sumatorio desde  $-\infty$  a  $-1$ , podemos usar la Ecuación 16.92 para reescribir la Ecuación 16.91:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=-\infty}^{-1} C_n e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t}, \quad (16.93)$$

lo que completa la demostración de la Ecuación 16.82.

También podemos expresar el valor rms de una función periódica en función de los coeficientes complejos de Fourier. A partir de las Ecuaciones 16.81, 16.87 y 16.89,

$$F_{\text{rms}} = \sqrt{a_v^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}}, \quad (16.94)$$

$$|C_n| = \frac{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{2}, \quad (16.95)$$

$$C_0^2 = a_v^2. \quad (16.96)$$

Sustituyendo las Ecuaciones 16.95 y 16.96 en la Ecuación 16.94, obtenemos la expresión deseada:

$$F_{\text{rms}} = \sqrt{C_0^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |C_n|^2}. \quad (16.97)$$

El Ejemplo 16.6 ilustra el proceso de determinación de la representación en serie de Fourier exponencial de una función periódica.

### EJEMPLO 16.6 Determinación de la forma exponencial de la serie de Fourier

Determine la serie de Fourier exponencial para la tensión periódica mostrada en la Figura 16.15.

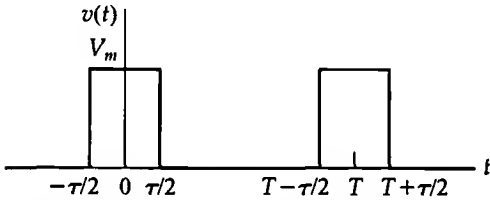


Figura 16.15. La tensión periódica para el Ejemplo 16.6.

#### SOLUCIÓN

Utilizando  $-\tau/2$  como punto de partida para la integración, tenemos, por la Ecuación 16.83,

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} V_m e^{-jn\omega_0 t} dt$$

$$= \frac{V_m}{T} \left( \frac{e^{-jn\omega_0 t}}{-jn\omega_0} \right) \bigg|_{-\tau/2}^{\tau/2}$$

$$= \frac{jV_m}{n\omega_0 T} (e^{-jn\omega_0 \tau/2} - e^{jn\omega_0 \tau/2}) = \frac{2V_m}{n\omega_0 T} \sin n\omega_0 \tau/2.$$

Aquí, como  $v(t)$  tiene simetría par,  $b_n = 0$  para todo  $n$  y, por tanto, podemos esperar que  $C_n$  sea real. Además, la amplitud de  $C_n$  tiene una distribución  $(\sin x)/x$ , como puede verse si reescribimos la expresión de la forma siguiente:

$$C_n = \frac{V_m \tau}{T} \frac{\sin(n\omega_0 \tau/2)}{n\omega_0 \tau/2}.$$

Diremos más acerca de este tema en la Sección 16.9. La representación en serie exponencial de  $v(t)$  es

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{V_m \tau}{T} \right) \frac{\sin(n\omega_0 \tau/2)}{n\omega_0 \tau/2} e^{jn\omega_0 t}$$

$$= \left( \frac{V_m \tau}{T} \right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(n\omega_0 \tau/2)}{n\omega_0 \tau/2} e^{jn\omega_0 t}.$$

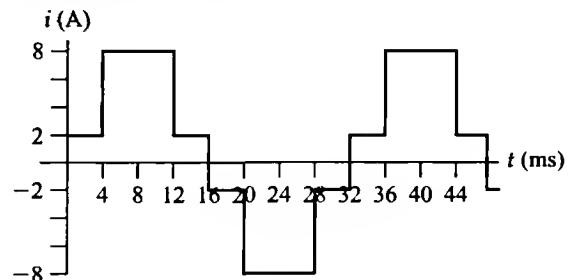
### Evaluación del objetivo 4

- Ser capaz de calcular la forma exponencial de los coeficientes de Fourier para una forma de onda periódica.

**16.8.** Determine la expresión correspondiente a los coeficientes de Fourier  $C_n$  para la función periódica mostrada. *Sugerencia:* aproveche la simetría existente, utilizando el hecho de que  $C_n = (a_n - jb_n)/2$ .

#### RESPUESTA

$$C_n = -j \frac{4}{\pi n} (1 + 3 \cos \frac{\pi n}{4}), n \text{ impar.}$$



16.9. a) Calcule el valor rms de la corriente periódica del Problema de evaluación 16.8.

b) Utilizando  $C_1$ - $C_{11}$ , estime el valor rms.

c) ¿Cuál es el porcentaje de error en el valor obtenido en el apartado (b), teniendo en cuenta el valor real hallado en el apartado (a)?

d) Para esta función periódica, ¿podríamos utilizar menos términos para esti-

mar el valor rms y seguir garantizando que el error sea inferior al 1%?

### RESPUESTA

(a)  $\sqrt{34}$  A;

(b) 5,777 A;

(c) -0,93%;

(d) sí; si utilizamos  $C_1$ - $C_9$ , el error será -0,98%.

**NOTA** Trate también de resolver los Problemas 16.41 y 16.42 del capítulo.

## 16.9. Espectros de amplitud y de fase

Una función periódica en el tiempo se define mediante sus coeficientes de Fourier y su período. En otras palabras, cuando conocemos  $a_n$ ,  $a_n$ ,  $b_n$  y  $T$ , podemos construir  $f(t)$ , al menos teóricamente. Cuando conocemos  $a_n$  y  $b_n$ , conocemos también la amplitud ( $A_n$ ) y el ángulo de fase ( $-\theta_n$ ) de cada armónico. De nuevo, no podemos visualizar, en general, el aspecto de la función periódica en el dominio del tiempo a partir de una descripción de los coeficientes y ángulos de fase; sin embargo, sabemos que estos valores caracterizan de modo completo a la función periódica. Por tanto, con un tiempo de cálculo suficiente, podríamos sintetizar la forma de onda en el dominio del tiempo a partir de los datos relativos a la amplitud y el ángulo de fase. Asimismo, cuando una función de excitación periódica se aplica a un circuito altamente selectivo en frecuencia, la serie de Fourier de la respuesta en régimen permanente está dominada sólo por unos pocos términos. Por tanto, la descripción de la respuesta en función de la amplitud y la fase puede proporcionar una comprensión de la forma de onda de salida.

Podemos presentar gráficamente la descripción de una función periódica en términos de la amplitud y el ángulo de fase de cada término de la serie de Fourier de  $f(t)$ . La gráfica de la amplitud de cada término en función de la frecuencia se denomina **espectro de amplitud** de  $f(t)$ , mientras que la gráfica del ángulo de fase en función de la frecuencia se denomina **espectro de fase** de  $f(t)$ . Puesto que los datos de amplitud y ángulo de fase corresponden a valores discretos de la frecuencia (es decir, a  $\omega_0$ ,  $2\omega_0$ ,  $3\omega_0$ , ...), estas gráficas también se denominan en ocasiones **espectros de líneas**.

### Una ilustración de los espectros de amplitud y de fase

Los diagramas espectrales de amplitud y fase están basados en la Ecuación 16.38 ( $A_n$  y  $-\theta_n$ ) o en la Ecuación 16.82 ( $C_n$ ). Vamos a centrarnos en la Ecuación 16.82 y dejaremos los diagramas basados en la Ecuación 16.38 para el Problema 16.45. Para ilustrar los espectros de amplitud y de fase basados en la forma exponencial de la serie de Fourier, vamos a emplear la tensión periódica del Ejemplo 16.6. Para facilitar las explicaciones, vamos a suponer que  $V_m = 5$  V y  $\tau = T/5$ . Teniendo en cuenta los resultados del Ejemplo 16.6,

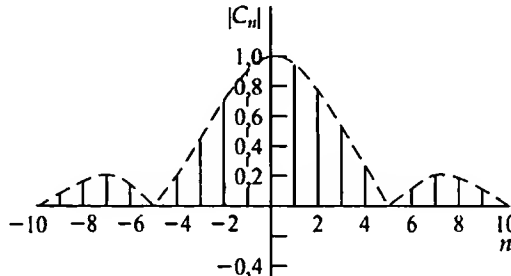
$$C_n = \frac{V_m \tau}{T} \frac{\sin(n\omega_0 \tau / 2)}{n\omega_0 \tau / 2}, \quad (16.98)$$

que, para los valores supuestos de  $V_m$  y  $\tau$ , se reduce a



$$C_n = 1 \frac{\text{sen}(n\pi/5)}{n\pi/5}. \quad (16.99)$$

La Figura 16.16 muestra el diagrama del módulo de  $C_n$  a partir de la Ecuación 16.99, para valores de  $n$  comprendidos entre  $-10$  y  $+10$ . La figura muestra claramente que el espectro de amplitud está acotado por la envolvente de la función  $|(\text{sen } x)/x|$ . Hemos utilizado el orden de los armónicos como escala de frecuencias porque el valor numérico de  $T$  no está especificado. Si conociéramos  $T$ , conoceríamos también  $\omega_0$  y la frecuencia correspondiente a cada armónico.

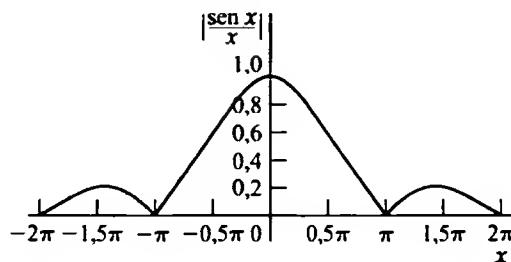


**Figura 16.16.** Gráfica de  $C_n$  en función de  $n$  cuando  $\tau = T/5$ , para la función periódica del Ejemplo 16.6.

La Figura 16.17 muestra el diagrama de  $|(\text{sen } x)/x|$  en función de  $x$ , donde  $x$  está en radianes. El diagrama muestra que la función pasa por cero cada vez que  $x$  es un múltiplo entero de  $\pi$ . A partir de la Ecuación 16.98,

$$n\omega_0 \left(\frac{\tau}{2}\right) = \frac{n\pi\tau}{T} = \frac{n\pi}{T/\tau}. \quad (16.100)$$

De la Ecuación 16.100 deducimos que el espectro de amplitud pasa por cero cada vez que  $n\pi/T$  es un entero. Por ejemplo, en el diagrama,  $\tau/T$  es  $1/5$ , por lo que la envolvente pasa por cero para  $n = 5, 10, 15$ , etc. En otras palabras, el quinto, décimo, decimoquinto, . . . armónico es igual a cero. A medida que el recíproco de  $\tau/T$  es un número entero cada vez mayor, el número de armónicos comprendidos en  $\pi$  radianes se incrementa. Si  $n\pi/T$  no es un entero, el espectro de amplitud sigue teniendo como envolvente la función  $|(\text{sen } x)/x|$ ; sin embargo, la envolvente no es cero para múltiplos enteros de  $\omega_0$ .



**Figura 16.17.** Diagrama de  $(\text{sen } x)/x$  en función de  $x$ .

Puesto que  $C_n$  es real para todo valor de  $n$ , el ángulo de fase asociado con  $C_n$  es cero o  $180^\circ$ , dependiendo del signo algebraico de  $(\text{sen } n\pi/5)/(n\pi/5)$ . Por ejemplo, el ángulo de fase es cero para  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$  y  $\pm 4$ . No está definido en  $n = \pm 5$ , porque  $C_{\pm 5}$  es cero. El ángulo de fase es  $180^\circ$  para

$n = \pm 6, \pm 7, \pm 8$  y  $\pm 9$  y no está definido para  $\pm 10$ . Este patrón se repite a medida que  $n$  toma valores enteros cada vez más grandes. La Figura 16.18 muestra el ángulo de fase de  $C_n$  dado por la Ecuación 16.98.

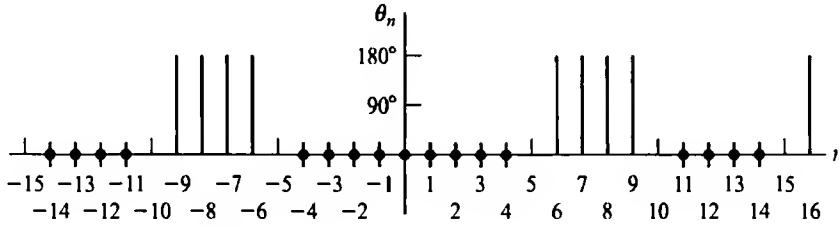


Figura 16.18. El ángulo de fase de  $C_n$ .

Ahora, ¿qué sucede con los espectros de amplitud y fase si se desplaza  $f(t)$  a lo largo del eje temporal? Para averiguarlo, vamos a desplazar la tensión periódica del Ejemplo 16.6  $t_0$  unidades hacia la derecha. Por hipótesis,

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} \quad (16.101)$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} v(t - t_0) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0(t - t_0)} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{-jn\omega_0 t_0} e^{jn\omega_0 t}, \end{aligned} \quad (16.102)$$

que indica que desplazar el origen no tiene ningún efecto sobre el espectro de amplitud, porque

$$|C_n| = |C_n e^{-jn\omega_0 t_0}|. \quad (16.103)$$

Sin embargo, una referencia a la Ecuación 16.87 revela que el espectro de fase ha cambiado a  $-(\theta_n + n\omega_0 t_0)$  radianes. Por ejemplo, vamos a desplazar la tensión periódica del Ejemplo 16.6  $\pi/2$  unidades hacia la derecha. Como antes, vamos a suponer que  $\tau = T/5$ ; entonces, el nuevo ángulo de fase  $\theta'_n$  será

$$\theta'_n = -(\theta_n + n\pi/5). \quad (16.104)$$

En la Figura 16.19 está dibujada la Ecuación 16.104 para  $n$  comprendida entre  $-8$  y  $+8$ . Observe que no hay ningún ángulo de fase asociado con los coeficientes de amplitud igual a cero.

El lector puede estar preguntándose por qué hemos prestado tanta atención al espectro de amplitud del pulso periódico del Ejemplo 16.6. La razón es que esta forma de onda periódica concreta proporciona una excelente manera de ilustrar la transición entre la representación mediante serie de Fourier de una función periódica y la representación mediante transformada de Fourier de una función no periódica. Analizaremos la transformada de Fourier en el Capítulo 17.

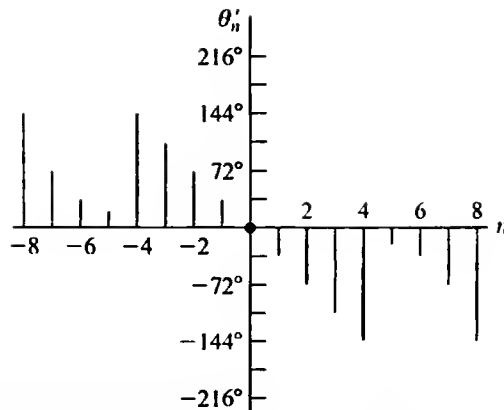


Figura 16.19. Gráfica de  $\theta'_n$  en función de  $n$  para la Ecuación 16.104.

#### Evaluación del objetivo 4

- Ser capaz de calcular la forma exponencial de los coeficientes de Fourier para una forma de onda periódica.

**16.10.** Desplazamos la función del Problema de evaluación 16.8 a lo largo del eje temporal, 8 ms hacia la derecha. Escriba la serie de Fourier exponencial correspondiente a la corriente periódica.

#### RESPUESTA

$$i(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=-\infty(\text{impar})}^{\infty} \frac{1}{n} \left( 1 + 3 \cos \frac{n\pi}{4} \right) e^{-(j\pi/2)(n+1)} e^{jn\omega_0 t} \text{ A.}$$

**NOTA** Trate también de resolver los Problemas 16.45 y 16.46 del capítulo.

## RESUMEN

- Una **función periódica** es una función que se repite a sí misma cada  $T$  segundos.
- Un período es el intervalo de tiempo más pequeño ( $T$ ) que puede desplazarse una función periódica para producir una función idéntica a la original. (Véase la página 792).
- La serie de Fourier es una serie infinita utilizada para representar una función periódica. La serie está compuesta de un término constante y un número infinito de términos seno y coseno armónicamente relacionados (véase la página 795).
- La **frecuencia fundamental** es la frecuencia determinada por el período fundamen-

tal ( $f_0 = 1/T$  o  $\omega_0 = 2\pi f_0$ ) (véase la página 795).

- La **frecuencia armónica** es un múltiplo entero de la frecuencia fundamental (véase la página 796).
- Los **coeficientes de Fourier** son el término constante y los coeficientes de cada término seno y coseno de la serie (véanse las Ecuaciones 16.3-16.5) (véase la página 797).
- Se utilizan cinco tipos de simetría para simplificar el cálculo de los coeficientes de Fourier:
  - *simetría par*, en la que todos los términos seno de la serie son cero
  - *simetría impar*, en la que todos los términos coseno y el término constante son cero
  - *simetría de media onda*, en la que todos los armónicos pares son cero
  - *simetría par de cuarto de onda y media onda*, en la que la serie sólo contiene términos armónicos coseno de orden impar
  - *simetría impar de cuarto de onda y media onda*, en la que la serie sólo contiene términos armónicos seno de orden impar
 (Véase la página 800).
- En la forma alternativa de las series de Fourier, cada armónico representado por la suma de un término seno y un término coseno se combina en un único término de la forma  $A_n \cos(n\omega_0 t - \theta_n)$  (véase la página 807).
- Para la respuesta en régimen permanente, la serie de Fourier de la señal de respuesta se determina hallando primero la respuesta

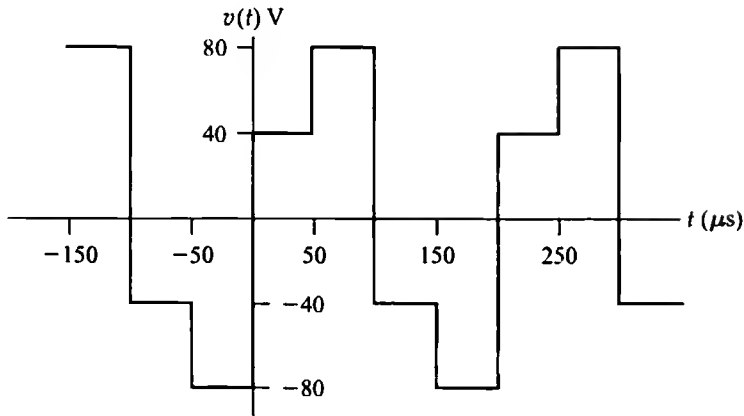
a cada componente de la señal de entrada. Las respuestas individuales se suman (se superponen) para formar la serie de Fourier de la señal de respuesta. La respuesta a los términos individuales de la serie de entrada puede hallarse mediante análisis en el dominio de la frecuencia o en el dominio de  $s$  (véase la página 810).

- La forma de onda de la señal de respuesta es difícil de visualizar sin la ayuda de una computadora. Algunas veces, la característica de respuesta en frecuencia (o de filtrado) del circuito puede utilizarse para ver hasta qué punto se asemeja la forma de onda de salida a la forma de onda de entrada (véase la página 811).
- Únicamente los armónicos de la misma frecuencia interactúan para producir potencia media. La potencia media total es la suma de las potencias medias asociadas con cada frecuencia (véase la página 817).
- El valor rms de una función periódica puede estimarse a partir de los coeficientes de Fourier (véanse las ecuaciones 16.81, 16.94 y 16.97) (véase la página 820).
- La serie de Fourier también puede escribirse en forma exponencial utilizando la identidad de Euler para sustituir los términos seno y coseno por sus equivalentes exponenciales (véase la página 821).
- Las series de Fourier se utilizan para predecir la respuesta de régimen permanente de un sistema cuando éste está excitado por una señal periódica. Las series sirven de ayuda para determinar la respuesta de régimen permanente, al transferir el análisis desde el dominio del tiempo al dominio de la frecuencia.

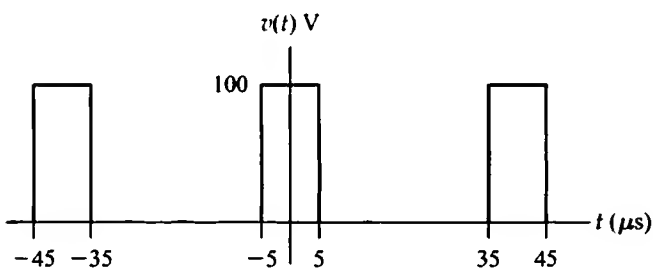
## PROBLEMAS

- 16.1. Para cada una de las funciones periódicas de la Figura P16.1, especifique
- a)  $\omega_0$  en radianes por segundo
  - b)  $f_0$  en hercios

- c) el valor de  $a_v$   
 d) las ecuaciones correspondientes a  $a_k$  y  $b_k$   
 e)  $v(t)$  como serie de Fourier



(a)



(b)

Figura P16.1

- 16.2. Determine la serie de Fourier para la tensión periódica mostrada en la Figura P16.2, supuesto que

$$v(t) = 100 \sin \frac{2\pi}{T} t V, \quad 0 \leq t \leq T/2;$$

$$v(t) = 60 \sin \frac{2\pi}{T} (t - \frac{T}{2}) V, \quad T/2 \leq t \leq T.$$

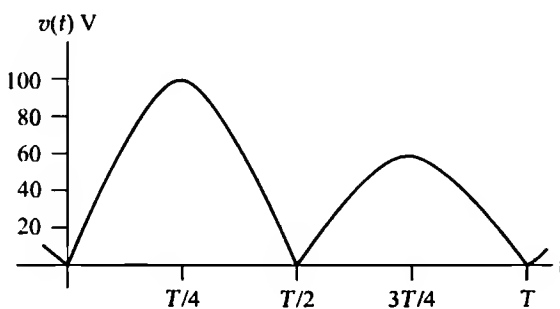
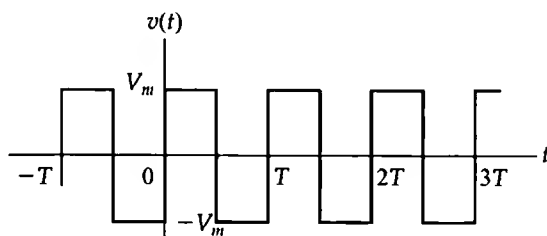
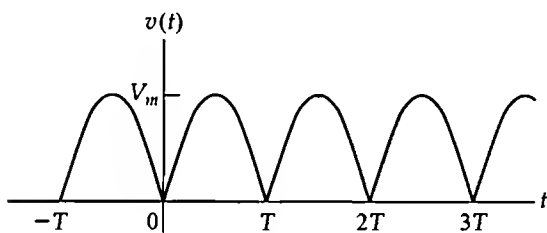


Figura P16.2

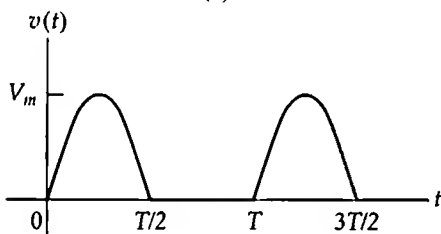
- 16.3.** Determine la expansión en serie de Fourier para las funciones de tensión periódica mostradas en la Figura P16.3. Observe que la Figura P16.3(a) ilustra una onda cuadrada; la Figura P16.3(b) se corresponde con una onda seno con rectificación de onda completa, donde  $v(t) = V_m \sin(\pi/T)t$ ,  $0 \leq t \leq T$ ; y la Figura P16.3(c) muestra una onda seno con rectificación de media onda, donde  $v(t) = V_m \sin(2\pi/T)t$ ,  $0 \leq t \leq T/2$ .



(a)



(b)



(c)

**Figura P16.3**

- 16.4.** Demuestre la Ecuación 16.5.
- 16.5.** a) Verifique las Ecuaciones 16.6 y 16.7.  
 b) Verifique la Ecuación 16.8. *Sugerencia:* utilice la identidad trigonométrica  

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \sin(\alpha + \beta) - \frac{1}{2} \sin(\alpha - \beta)$$
  
 c) Verifique la Ecuación 16.9. *Sugerencia:* utilice la identidad trigonométrica  

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) - \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta)$$
  
 d) Verifique la Ecuación 16.10. *Sugerencia:* utilice la identidad trigonométrica  

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) + \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta)$$
- 16.6.** Deduzca las expresiones para los coeficientes de Fourier de una función periódica impar. *Sugerencia:* utilice la misma técnica empleada en el texto para demostrar las Ecuaciones 16.14-16.16.
- 16.7.** Demuestre que, si  $f(t) = -f(t - T/2)$  los coeficientes  $b_k$  de Fourier están dados por las ecuaciones

$$b_k = 0, \quad \text{para } k \text{ par};$$

$$b_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin k\omega_0 t \, dt, \quad \text{para } k \text{ impar}.$$

*Sugerencia:* utilice las mismas técnicas empleadas en el texto para demostrar las Ecuaciones 16.28 y 16.29.

- 16.8.** Demuestre las Ecuaciones 16.36. *Sugerencia:* comience con la Ecuación 16.29 y divida el intervalo de integración en dos, de 0 a  $T/4$  y de  $T/4$  a  $T/2$ . Observe que, debido al carácter de función par y a la simetría de cuarto de onda,  $f(t) = -f(T/2 - t)$  en el intervalo  $T/4 \leq t \leq T/2$ . Haga  $x = T/2 - t$  en el segundo intervalo y combine la integral resultante con la correspondiente al intervalo que va de 0 a  $T/4$ .
- 16.9.** Demuestre las Ecuaciones 16.37. Siga la sugerencia dada en el Problema 16.8, pero ahora tenga en cuenta que, debido al carácter de función impar y a la simetría de cuarto de onda,  $f(t) = f(T/2 - t)$  en el intervalo  $T/4 \leq t \leq T/2$ .
- 16.10.** Un período de una función periódica está descrito por las siguientes ecuaciones:

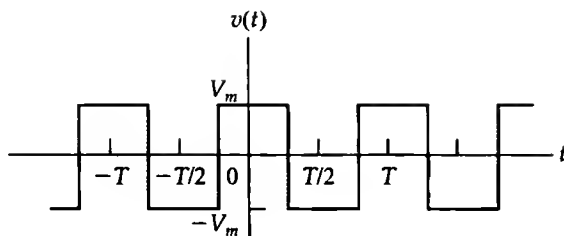
$$i(t) = 5t \text{ A}, \quad -2 \leq t \leq 2 \text{ ms};$$

$$i(t) = 10 \text{ mA}, \quad 2 \text{ ms} \leq t \leq 6 \text{ ms};$$

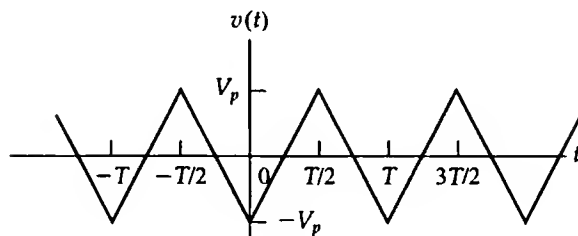
$$i(t) = 0,04 - 5t \text{ A}, \quad 6 \text{ ms} \leq t \leq 10 \text{ ms};$$

$$i(t) = -10 \text{ mA}, \quad 10 \text{ ms} \leq t \leq 14 \text{ ms}.$$

- ¿Cuál es la frecuencia fundamental en hercios?
  - ¿Es la función par?
  - ¿Es la función impar?
  - ¿Tiene la función simetría de media onda?
  - ¿Tiene la función simetría de cuarto de onda?
  - Proporcione las expresiones numéricas correspondientes a  $a_0$ ,  $a_k$  y  $b_k$ .
- 16.11.** Suponga que  $v(t) = 20 \sin \pi |t|$  V en el intervalo  $-1 \leq t \leq 1$  s. La función se repite constantemente.
- ¿Cuál es la frecuencia fundamental en radianes por segundo?
  - ¿Es par esta función?
  - ¿Es impar esta función?
  - ¿Tiene la función simetría de media onda?
- 16.12.** Determine la serie de Fourier de cada una de las funciones periódicas mostradas en la Figura P16.12.
- 16.13.** a) Determine la expansión en serie de Fourier para la tensión periódica mostrada en la Figura P16.13.  
b) Repita el apartado (a) si desplazamos el eje de referencia vertical  $T/2$  unidades a la izquierda.



(a)



(b)

Figura P16.12

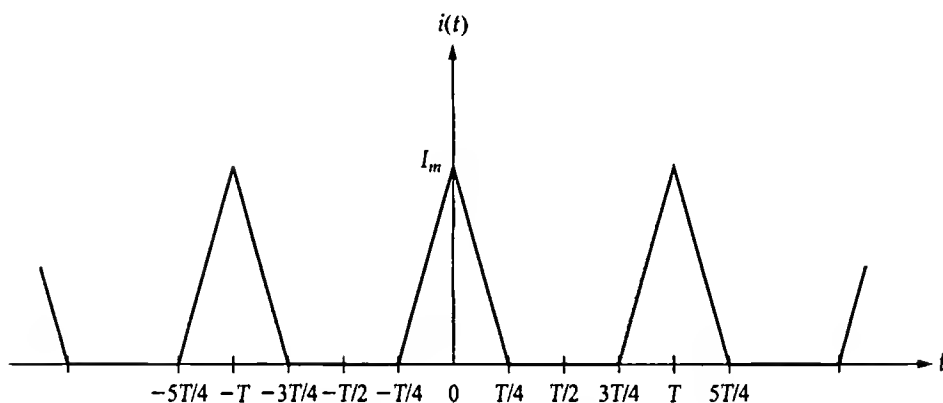


Figura P16.13

16.14. Suponga que  $f(t) = 4t^2$  en el intervalo  $-2 < t < 2$  s.

- Construya una función periódica que satisfaga esta definición de  $f(t)$  entre  $-2$  y  $+2$  s, que tenga un período de 8 s y que posea simetría de media onda.
- ¿Es la función par o impar?
- ¿Tiene la función simetría de cuarto de onda?
- Determine la expansión en serie de Fourier de  $f(t)$ .
- Escriba la serie de Fourier correspondiente a  $f(t)$  si se desplaza  $f(t)$  2 s hacia la derecha.

16.15. Repita el Problema 16.14 suponiendo que  $f(t) = t^3$  en el intervalo  $-2 < t < 2$  s.

16.16. La función periódica mostrada en la Figura P16.16 es par y tiene simetría tanto de media onda como de cuarto de onda.

- Dibuje el ciclo completo de la función a lo largo del intervalo  $-T/4 \leq t \leq 3T/4$ .
- Determine la expresión correspondiente a los coeficientes de Fourier  $a_k$ .



- c) Escriba los tres primeros términos distintos de cero en la expansión en serie de Fourier de  $f(t)$ .
- d) Utilice los tres primeros términos distintos de cero para estimar  $f(T/4)$ .

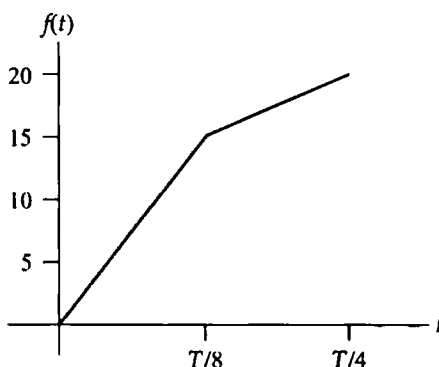


Figura P16.16

- 16.17. Algunas veces es posible utilizar consideraciones de simetría para hallar los coeficientes de Fourier, aun cuando la función original no sea simétrica. Teniendo esto presente, considere la función del Problema de evaluación 16.1. Observe que  $v(t)$  puede dividirse en las dos funciones ilustradas en las Figuras P16.17(a) y (b). Además, podemos hacer que  $v_2(t)$  sea una función par desplazándola  $T/8$  unidades hacia la izquierda, como se ilustra en la Figura P16.17(c). En este punto, podemos ver que  $v(t) = v_1(t) + v_2(t)$  y que la expansión en serie de Fourier de  $v_1(t)$  es una serie de un único término, que es  $V_m/2$ . Para hallar la serie de Fourier de  $v_2(t)$ , primero hallamos la expansión en serie de Fourier de  $v_2(t + T/8)$  y luego desplazamos esta serie  $T/8$  unidades hacia la derecha. Utilice la técnica que acabamos de esbozar para verificar que la serie de Fourier dada en la respuesta al Problema de evaluación 16.2(e) es correcta.
- 16.18. a) Determine la expansión en serie de Fourier de la función periódica mostrada en la Figura P16.18 cuando  $I_m = 5\pi^2$  A. Escriba la serie en la forma de la Ecuación 16.38.
- b) Utilice los cinco primeros términos distintos de cero para estimar  $i(T/4)$ .
- 16.19. Demuestre las Ecuaciones 16.69 y 16.70.
- 16.20. a) Demuestre la Ecuación 16.71. *Sugerencia:* observe que  $b_k = 4V_m/\pi k + k\omega_o R C a_k$ . Utilice esta expresión correspondiente a  $b_k$  para hallar  $a_k^2 + b_k^2$  en función de  $a_k$ . Después, utilice la expresión correspondiente a  $a_k$  para demostrar la Ecuación 16.71.
- b) Demuestre la Ecuación 16.72.
- 16.21. Demuestre que, cuando combinamos las Ecuaciones 16.71 y 16.72 con las Ecuaciones 16.38 y 16.39, el resultado es la Ecuación 16.58. *Sugerencia:* observe, en la definición de  $\beta_k$ , que

$$\frac{a_k}{b_k} = -\tan \beta_k,$$

y en la definición de  $\theta_k$ , que

$$\tan \theta_k = -\cot \beta_k.$$

Ahora, utilice la identidad trigonométrica

$$\tan x = \cot (90 - x)$$

para demostrar que  $\theta_k = (90 + \beta_k)$ .

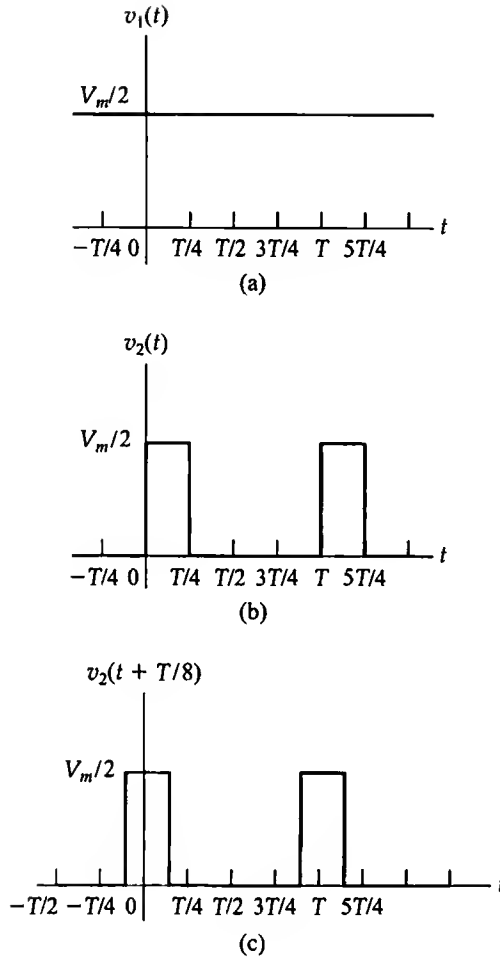


Figura P16.17

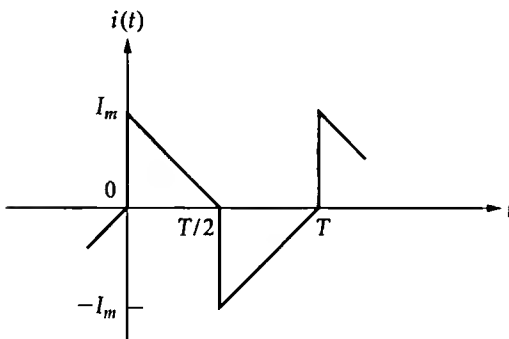


Figura P16.18

- 16.22. a) Demuestre que, para valores grandes de  $C$ , la Ecuación 16.67 puede aproximarse mediante la expresión

$$v_o(t) \approx \frac{-V_m T}{4RC} + \frac{V_m}{RC} t.$$

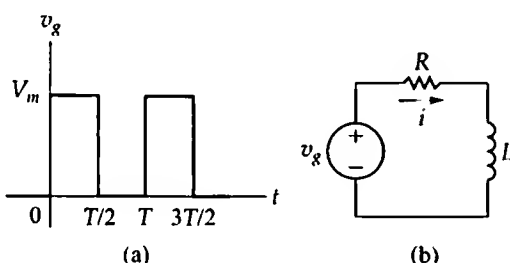
Observe que esta expresión es la ecuación de una onda triangular para  $0 \leq t \leq T/2$ .  
*Sugerencias:* (1) haga  $e^{-t/RC} \approx 1 - (t/RC)$  y  $e^{-T/2RC} \approx 1 - (T/2RC)$ ; (2) saque como común

denominador  $2 - (T/2RC)$  en la expresión resultante; (3) simplifique el numerador y (4) para un valor grande de  $C$ , suponga que  $T/2RC$  es mucho menor que 2.

- b) Sustituya el valor de pico de la forma de onda triangular en la función del Problema 16.12 [véase la Figura P16.12(b)] y demuestre que el resultado es la Ecuación 16.59.

**16.23.** Apliquemos la tensión de onda cuadrada mostrada en la Figura P16.23(a) al circuito mostrado en la Figura P16.23(b).

- a) Determine la representación mediante serie de Fourier de la corriente  $i$  de régimen permanente.
- b) Halle la expresión de régimen permanente correspondiente a  $i$  mediante análisis directo del circuito.

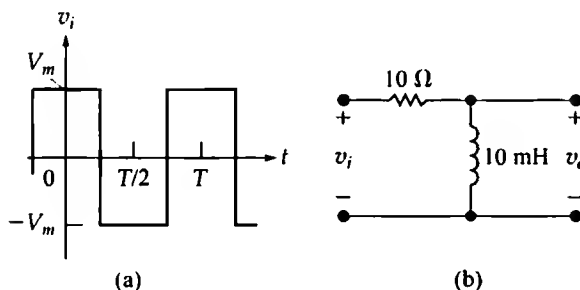


**Figura P16.23**

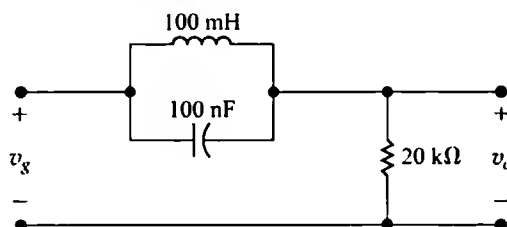
**16.24.** La tensión periódica de onda cuadrada mostrada en la Figura P16.24(a) se aplica al circuito que se ilustra en la Figura P16.24(b). Determine los tres primeros términos distintos de cero en la serie de Fourier que representa la tensión  $v_o$  de régimen permanente, si  $V_m = 15\pi$  V y el período de la tensión de entrada es de  $4\pi$  ms.

**16.25.** Aplicamos la tensión periódica de onda cuadrada descrita en el Problema de evaluación 16.6 al circuito que se muestra en la Figura P16.25.

- a) Halle los cuatro primeros términos distintos de cero en la serie de Fourier que representa la tensión  $v_o$  de régimen permanente.
- b) ¿Qué componente de frecuencia de la tensión de entrada se elimina de la tensión de salida? Explique su respuesta.



**Figura P16.24**

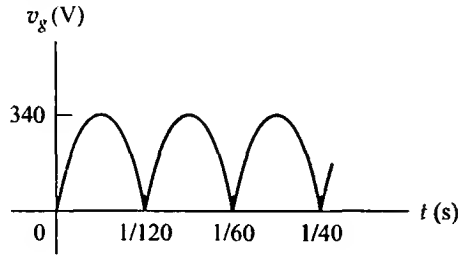


**Figura P16.25**

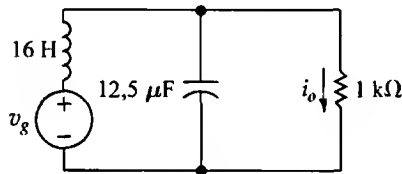
**16.26.** Aplicamos la tensión sinusoidal con rectificación de onda completa mostrada en la Figura P16.26(a) al circuito que se ilustra en la Figura P16.26(b).

- a) Determine los cuatro primeros términos distintos de cero en la expansión en serie de Fourier de  $i_o$ .

b) ¿Tiene sentido la solución obtenida para  $i_o$ ? Explique su respuesta.



(a)



(b)

Figura P16.26

16.27. Utilizamos la corriente periódica que se describe a continuación para excitar el circuito mostrado en la Figura P16.27. Escriba la expresión en el dominio del tiempo para la tensión  $v_o$  correspondiente al tercer armónico de la corriente.

$$i_g = 500t, \quad -2 \text{ ms} \leq t \leq 2 \text{ ms};$$

$$= 1 \text{ A}, \quad 2 \text{ ms} \leq t \leq 8 \text{ ms};$$

$$= 5 - 500t, \quad 8 \text{ ms} \leq t \leq 12 \text{ ms};$$

$$= -1 \text{ A}, \quad 12 \text{ ms} \leq t \leq 18 \text{ ms}.$$

16.28. Una tensión periódica con un periodo de  $10\pi \mu\text{s}$  está dada por la siguiente serie de Fourier:

$$v_g = 150 \sum_{n=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2} \cos n\omega_0 t \text{ V}.$$

Aplicamos esta tensión periódica al circuito que se muestra en la Figura P16.28. Determine la amplitud y el ángulo de fase de las componentes de  $v_o$  correspondientes a las frecuencias de 3 y 5 Mrad/s.

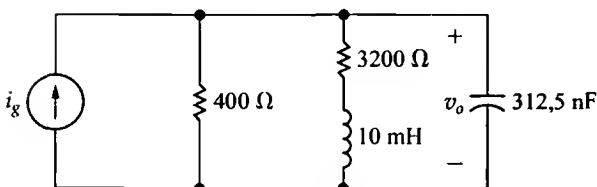


Figura P16.27

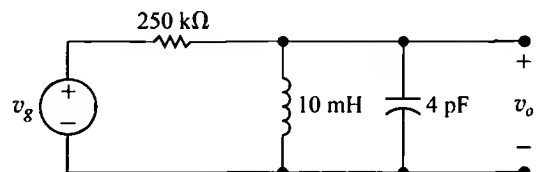
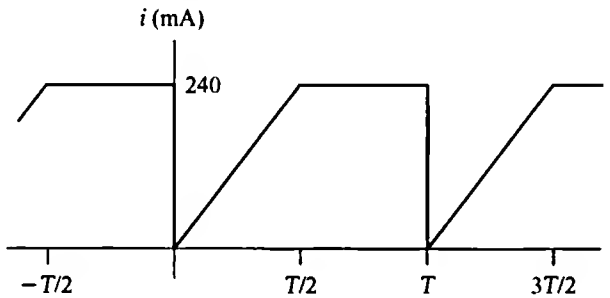


Figura P16.28

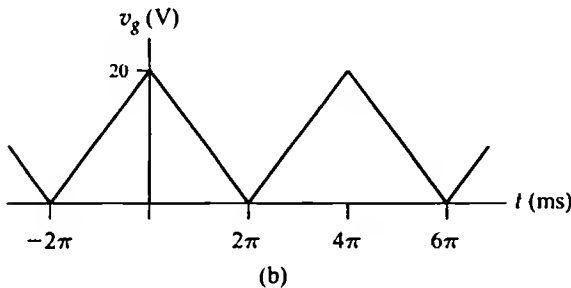
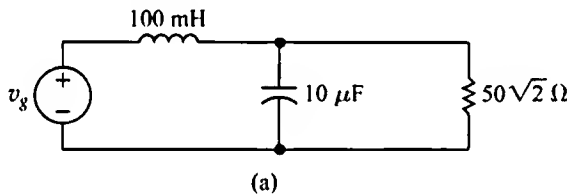
**16.29.** La Figura P16.29 muestra la corriente periódica que atraviesa una resistencia de  $1\text{ k}\Omega$ .

- Utilice los tres primeros términos distintos de cero en la representación en serie de Fourier de  $i(t)$  para estimar la potencia media disipada en la resistencia.
- Calcule el valor exacto de la potencia media disipada en la resistencia de  $1\text{ k}\Omega$ .
- ¿Cuál es el porcentaje de error en el valor estimado de la potencia media disipada?



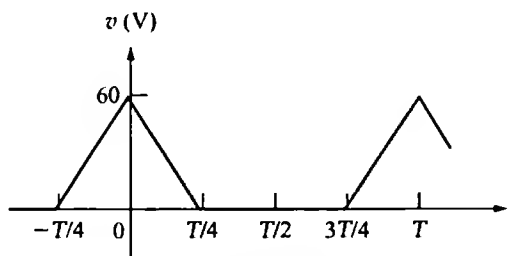
**Figura P16.29**

**16.30.** Aplicamos una fuente de tensión de forma de onda triangular al circuito de la Figura P16.30(a). La forma de onda triangular de la tensión se muestra en la Figura P16.30(b). Estime la potencia media entregada a la resistencia de  $50\sqrt{2}\text{ }\Omega$  cuando el circuito se encuentra en régimen permanente de operación.



**Figura P16.30**

**16.31.** Aplicamos la tensión periódica mostrada en la Figura P16.31 a una resistencia de  $10\text{ }\Omega$ .



**Figura P16.31**

- Utilice los tres primeros términos distintos de cero en la representación en serie de Fourier de  $v(t)$  para estimar la potencia media disipada en la resistencia de  $10\ \Omega$ .
- Calcule el valor exacto de la potencia media disipada en la resistencia de  $10\ \Omega$ .
- ¿Cuál es el porcentaje de error en el valor estimado de la potencia media?

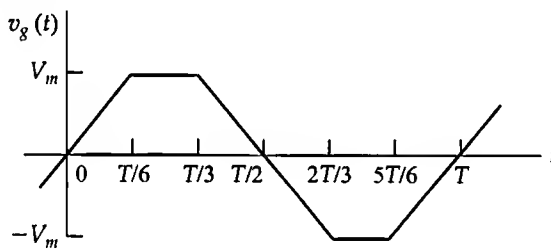
**16.32.** La tensión y la corriente en los terminales de una red son

$$v = 15 + 400 \cos 500t + 100 \sin 1500t \text{ V,}$$

$$i = 2 + 5 \sin (500t + 60^\circ) + 3 \cos (1500t - 15^\circ) \text{ A.}$$

La corriente va en la dirección de la caída de tensión en bornes de los terminales.

- ¿Cuál es la potencia media en los terminales?
  - ¿Cuál es el valor rms de la tensión?
  - ¿Cuál es el valor rms de la corriente?
- 16.33.** a) Calcule el valor rms de la tensión mostrada en la Figura P16.33 para  $V_m = 100 \text{ V}$ .  
 b) Estime el valor rms de la tensión, utilizando los tres primeros términos distintos de cero en la expansión en serie de Fourier de  $v_g(t)$ .

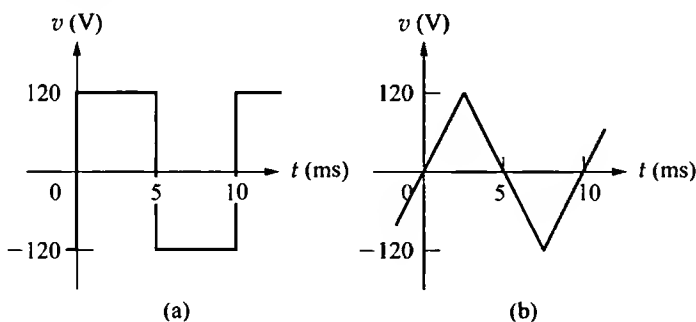


**Figura P16.33**

- 16.34.** a) Estime el valor rms de la tensión periódica de onda cuadrada mostrada en la Figura P16.34(a) utilizando los cinco primeros términos distintos de cero en la expansión en serie de Fourier de  $v(t)$ .  
 b) Calcule el porcentaje de error en la estimación si

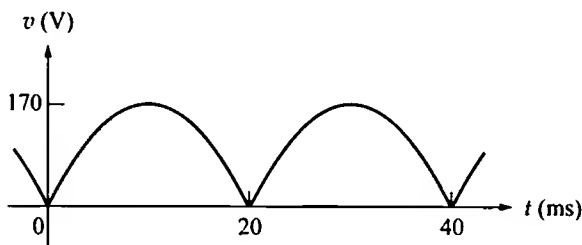
$$\% \text{ error} = \left[ \frac{\text{valor estimado}}{\text{valor exacto}} - 1 \right] \times 100.$$

- c) Repita los apartados (a) y (b) si sustituimos la tensión periódica de onda cuadrada por la tensión periódica triangular mostrada en la Figura P16.34(b).

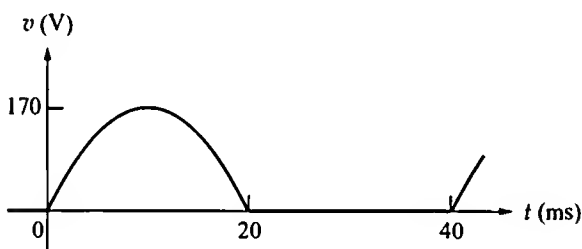


**Figura P16.34**

- 16.35.** a) Estime el valor rms de la tensión sinusoidal con rectificación de onda completa mostrada en la Figura P16.35(a) utilizando los tres primeros términos distintos de cero en la expansión en serie de Fourier de  $v(t)$ .
- b) Calcule el porcentaje de error en la estimación (véase el Problema 16.34).
- c) Repita los apartados (a) y (b) si sustituimos la tensión sinusoidal con rectificación de onda completa por la tensión sinusoidal con rectificación de media onda mostrada en la Figura P16.35(b).



(a)



(b)

Figura P16.35

- 16.36.** a) Determine las expresiones correspondientes a los coeficientes de Fourier de la corriente periódica mostrada en la Figura P16.36.

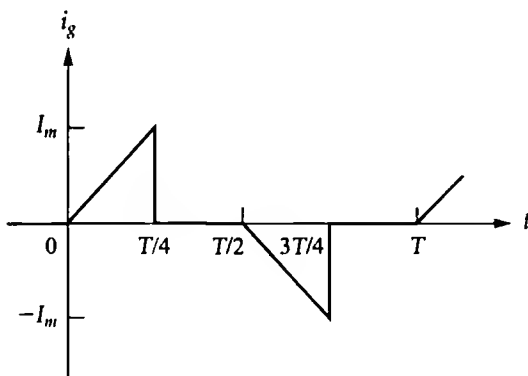


Figura P16.36

- b) Escriba los cuatro primeros términos distintos de cero de la serie utilizando la forma trigonométrica alternativa dada por la Ecuación 16.38.
- c) Utilice los cuatro primeros términos distintos de cero hallados en el apartado (b) para estimar el valor rms de  $i_g$ .
- d) Calcule el valor rms exacto de  $i_g$ .

e) Calcule el porcentaje de error en el valor rms estimado.

- 16.37. a) Utilice los cuatro primeros términos distintos de cero en la representación en serie de Fourier de la tensión periódica mostrada en la Figura P16.37 para estimar su valor rms.

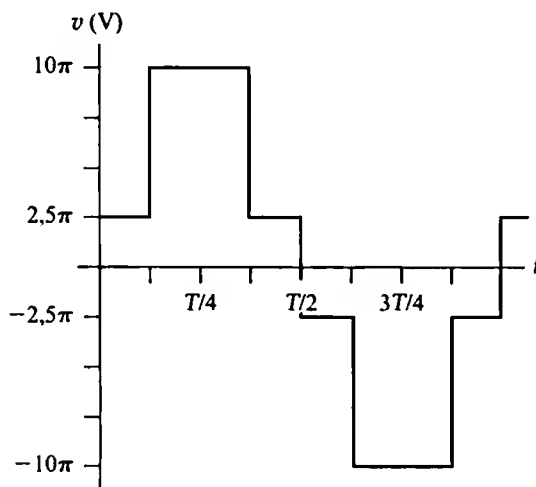


Figura P16.37

- b) Calcule el valor rms real de la tensión.  
 c) Calcule el porcentaje de error en el valor estimado.
- 16.38. Suponga que la función periódica descrita en el Problema 16.16 es una tensión con una amplitud de pico de 20 V.
- a) Determine el valor rms de la tensión.  
 b) Si aplicamos esta tensión a una resistencia de  $15\ \Omega$ , ¿cuál será la potencia media disipada en la resistencia?  
 c) Si aproximamos  $v_g$  mediante el término correspondiente a la frecuencia fundamental en su serie de Fourier, ¿cuál será la potencia media entregada a la resistencia de  $15\ \Omega$ ?  
 d) ¿Cuál es el porcentaje de error en la estimación de la potencia disipada?
- 16.39. El valor rms de cualquier onda triangular periódica que tenga la forma mostrada en la Figura P16.39(a) es independiente de  $t_a$  y  $t_b$ . Observe que, para que la función sea univaluada,  $t_a \leq t_b$ . El valor rms es igual a  $V_p / \sqrt{3}$ . Verifique este resultado hallando el valor rms de las tres formas de onda mostradas en la Figura P16.39(b)-(d).
- 16.40. Utilice la forma exponencial de la serie de Fourier para escribir una expresión para la tensión mostrada en la Figura P16.40.
- 16.41. Determine la expresión correspondiente a los coeficientes complejos de Fourier para la tensión periódica mostrada en la Figura P16.41.
- 16.42. a) Apliquemos la corriente periódica del Problema 16.41 a una resistencia de  $10\ \Omega$ . Si  $V_m = 120\text{ V}$ , ¿cuál es la potencia media entregada a la resistencia?  
 b) Suponga que aproximamos  $v(t)$  mediante una forma exponencial truncada de la serie de Fourier, compuesta por los siete primeros términos distintos de cero, es decir,  $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$  y 7. ¿Cuál es el valor rms de la tensión utilizando esta aproximación?



- c) Si utilizamos la aproximación del apartado (b) para representar  $v_g$ , ¿cuál es el porcentaje de error en la potencia calculada?

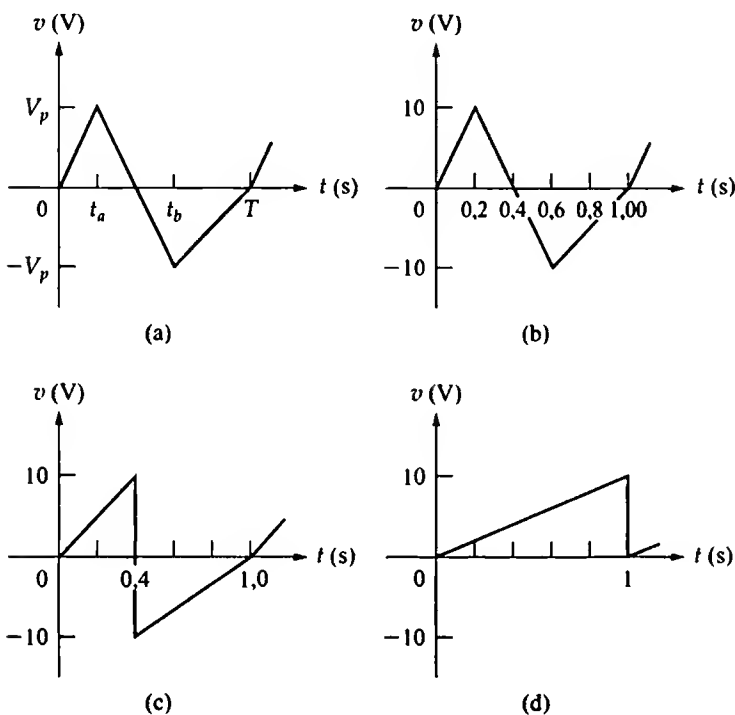


Figura P16.39

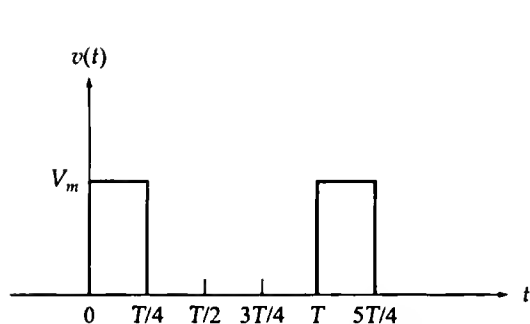


Figura P16.40

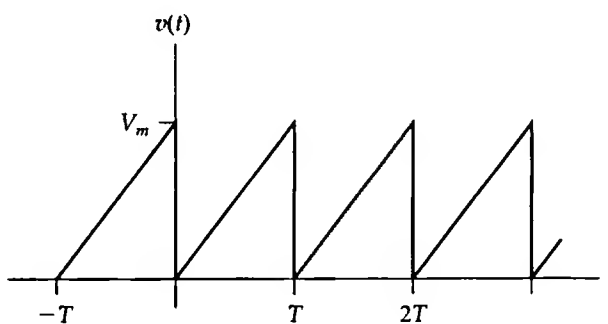


Figura P16.41

- 16.43.** La fuente de tensión periódica del circuito mostrado en la Figura P16.43(a) tiene la forma de onda que se ilustra en la Figura P16.43(b).

- Determine la expresión correspondiente a  $C_n$ .
- Halle los valores de los coeficientes complejos  $C_0$ ,  $C_{-1}$ ,  $C_1$ ,  $C_{-2}$ ,  $C_2$ ,  $C_{-3}$ ,  $C_3$ ,  $C_{-4}$  y  $C_4$  para la tensión de entrada  $v_g$  si  $V_m = 54 \text{ V}$  y  $T = 10\pi \mu\text{s}$ .
- Repita el apartado (b) para  $v_o$ .
- Utilice los coeficientes complejos hallados en el apartado (c) para estimar la potencia media entregada a la resistencia de  $250 \Omega$ .

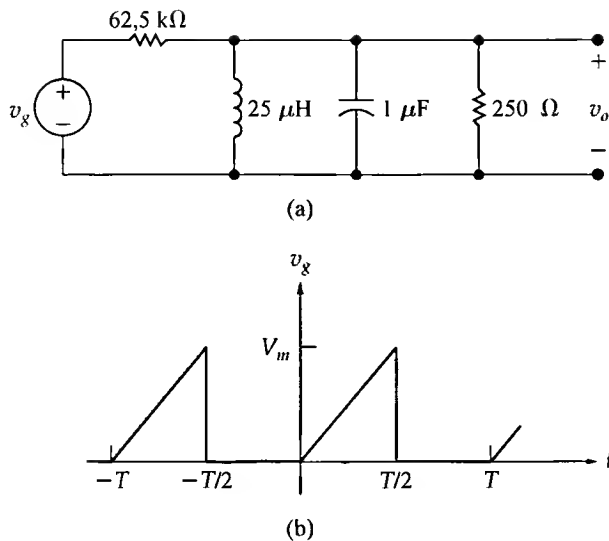


Figura P16.43

- 16.44. a) Halle el valor rms de la tensión periódica de la Figura P16.43(b).  
 b) Utilice los coeficientes complejos hallados en el Problema 16.43(b) para estimar el valor rms de  $v_g$ .  
 c) ¿Cuál es el porcentaje de error en el valor rms estimado para  $v_g$ ?
- 16.45. a) Haga un diagrama de amplitud y fase, basándose en la Ecuación 16.38, para la tensión periódica del Ejemplo 16.3. Suponga que  $V_m$  es 40 V. Dibuje tanto la amplitud como la fase en función de  $n\omega_0$ , donde  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ .  
 b) Repita el apartado (a), pero basando las gráficas en la Ecuación 16.82.
- 16.46. a) Haga un diagrama de la amplitud y la fase, basado en la Ecuación 16.38, para la tensión periódica del Problema 16.29. Dibuje tanto la amplitud como la fase en función de  $n\omega_0$ , donde  $n = 0, 1, 2, \dots$ .  
 b) Repita el apartado (a), pero basando las gráficas en la Ecuación 16.82.
- 16.47. Una tensión periódica está representada por una serie de Fourier truncada. Los espectros de amplitud y de fase se muestran en la Figura P16.47(a) y (b), respectivamente.  
 a) Escriba una expresión para la tensión periódica utilizando la forma dada por la Ecuación 16.38.  
 b) ¿Es la tensión una función par o impar de  $t$ ?  
 c) ¿Tiene la tensión simetría de media onda?  
 d) ¿Tiene la tensión simetría de cuarto de onda?
- 16.48. Una función periódica está representada por una serie de Fourier que tiene un número finito de términos. Los espectros de amplitud y de fase se muestran en la Figura P16.48(a) y (b), respectivamente.  
 a) Escriba una expresión correspondiente a la corriente periódica utilizando la forma dada por la Ecuación 16.38.  
 b) ¿Es la corriente una función par o impar de  $t$ ?  
 c) ¿Tiene la corriente simetría de media onda?

- d) Calcule el valor rms de la corriente en miliamperios.  
 e) Escriba la forma exponencial de la serie de Fourier.  
 f) Dibuje los espectros de amplitud y de fase basándose en la serie exponencial.

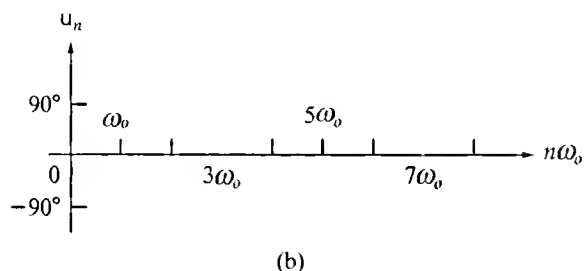
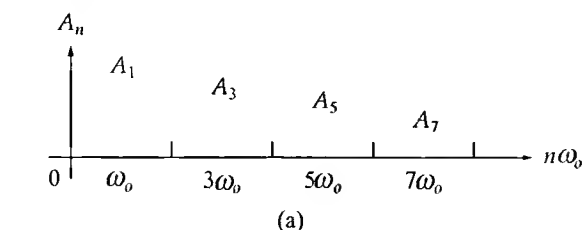


Figura P16.47

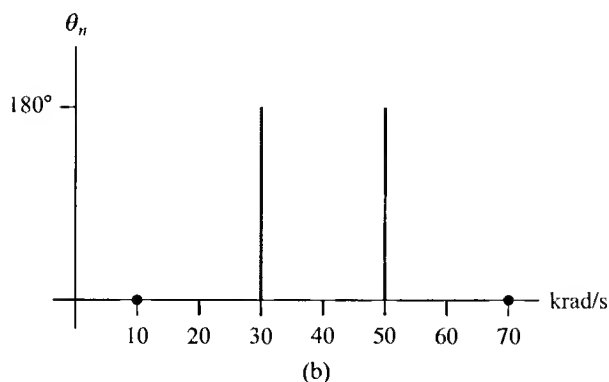
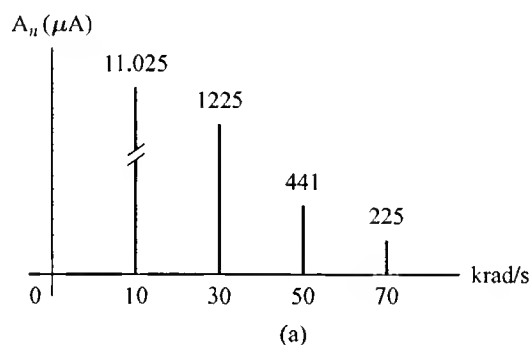


Figura P16.48

- 16.49. La señal de entrada a un filtro paso bajo de Butterworth de tercer orden es una tensión sinusoidal con rectificación de media onda. La frecuencia de corte del filtro es de 100 rad/s. La amplitud de la tensión sinusoidal es de  $54\pi$  V y su período es de  $5\pi$  ms. Escriba los tres primeros

términos de la serie de Fourier que representa la tensión de salida del filtro en régimen permanente.

- 16.50. La señal de entrada a un filtro paso bajo de Butterworth de segundo orden se muestra en la Figura P16.50. La frecuencia de corte del filtro es de 2 krad/s. Escriba los tres primeros términos de la serie de Fourier que representa la tensión de salida del filtro en régimen permanente.

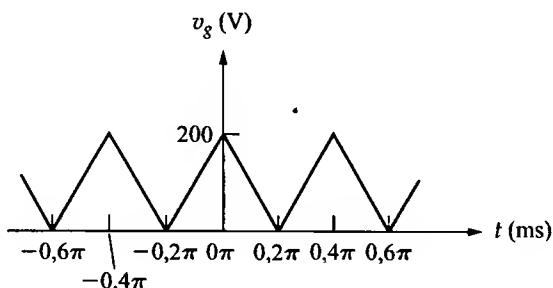


Figura P16.50

- 16.51. La función de transferencia ( $V_o/V_g$ ) para el circuito de filtro paso banda de banda estrecha de la Figura P16.51(a) es

$$H(s) = \frac{-K_o \beta s}{s^2 + \beta s + \omega_o^2}.$$

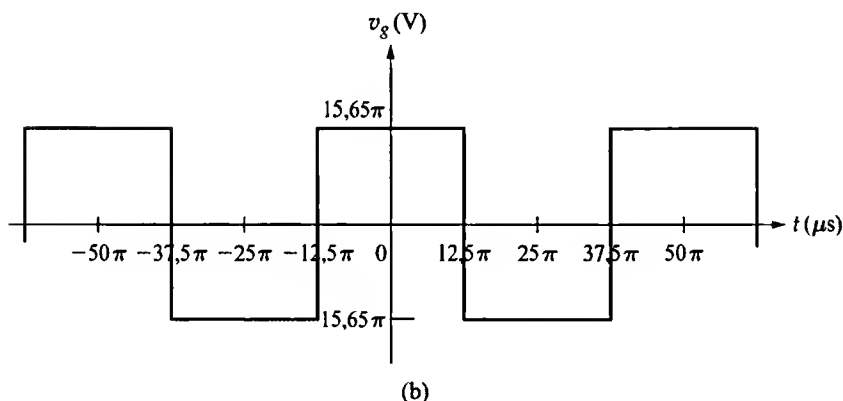
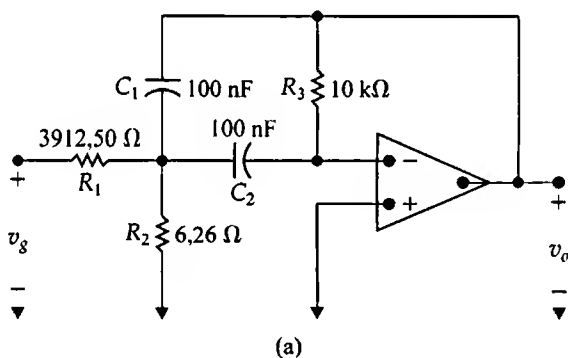


Figura P16.51

- a) Determine  $K_o$ ,  $\beta$  y  $\omega_o^2$  en función de los parámetros del circuito,  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ ,  $C_1$  y  $C_2$ .

- b) Escriba los tres primeros términos de la serie de Fourier que representa  $v_o$  si  $R_1 = 3912,50 \, \Omega$ ,  $R_2 = 6,26 \, \Omega$ ,  $R_3 = 10 \, \text{k}\Omega$ ,  $C_1 = C_2 = 100 \, \text{nF}$  y  $v_g$  es la tensión periódica de la Figura P16.51(b).

# CAPÍTULO

# 17

# La transformada de Fourier

## Contenido del capítulo

- 17.1. Definición de la transformada de Fourier
- 17.2. Convergencia de la integral de Fourier
- 17.3. Utilización de transformadas de Laplace para hallar transformadas de Fourier
- 17.4. Transformadas de Fourier en el límite
- 17.5. Algunas propiedades matemáticas
- 17.6. Transformadas operacionales
- 17.7. Aplicaciones a los circuitos
- 17.8. Teorema de Parseval

En el Capítulo 16, hemos analizado la representación de una función periódica por medio de series de Fourier. Esta representación mediante series nos permite describir la función periódica a partir de los atributos del dominio de la frecuencia: la amplitud y la fase. La transformada de Fourier extiende esta descripción en el dominio de la frecuencia a funciones que no son de naturaleza periódica. Ya hemos introducido, mediante la transformada de Laplace, la idea de transformar una función aperiódica del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia. El lector puede estar preguntándose, en consecuencia, por qué es necesario otro tipo más de transformación. Estrictamente hablando, la transformada de Fourier no es una nueva transformada, sino un caso especial de la transformada bilateral de Laplace, en el que la parte real de la frecuencia compleja se hace igual a cero. Sin embargo, por lo que se refiere a la interpretación física, la transformada de Fourier puede comprenderse mejor considerándola como un caso límite de serie de Fourier. Presentamos este punto de vista en la Sección 17.1, en la que calcularemos las ecuaciones correspondientes a la transformada de Fourier.

La transformada de Fourier es más útil que la transformada de Laplace en ciertas aplicaciones de teoría de la comunicación y de procesamiento de la señal. Aunque aquí no podemos analizar la transformada de Fourier en profundidad, sí resulta apropiado realizar una introducción a la misma mientras las ideas subyacentes a la transformada de Laplace y a las series de Fourier están todavía frescas en la mente del lector.

## **Objetivos del capítulo**

1. Ser capaz de calcular la transformada de Fourier de una función utilizando una o más de las técnicas siguientes:
  - definición de la transformada de Fourier;
  - transformadas de Laplace;
  - propiedades matemáticas de la transformada de Fourier;
  - transformadas operacionales.
2. Saber cómo utilizar la transformada de Fourier para hallar la respuesta de un circuito.
3. Comprender el teorema de Parseval y ser capaz de utilizarlo para responder a preguntas sobre la energía contenida dentro de bandas de frecuencia específicas.

## 17.1. Definición de la transformada de Fourier

Comenzamos el estudio de la transformada de Fourier, considerada como un caso límite de serie de Fourier, partiendo de la forma exponencial de una serie:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t}, \quad (17.1)$$

donde

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt. \quad (17.2)$$

En la Ecuación 17.2, hemos decidido arbitrariamente comenzar la integración en  $t_0 = -T/2$ .

Si permitimos que el período fundamental  $T$  se incremente sin límite, estaremos llevando a cabo la transición de una función periódica a otra aperiódica. En otras palabras, si  $T$  se hace infinita, la función nunca se repite, pasando por tanto a ser aperiódica. A medida que se incrementa  $T$ , la separación entre las frecuencias armónicas adyacentes se hace cada vez más pequeña. En concreto,

$$\Delta\omega = (n+1)\omega_0 - n\omega_0 = \omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad (17.3)$$

y a medida que  $T$  va creciendo, la separación incremental  $\Delta\omega$  se aproxima a una separación diferencial  $d\omega$ . A partir de la Ecuación 17.3,

$$\frac{1}{T} \rightarrow \frac{d\omega}{2\pi} \quad \text{cuando } T \rightarrow \infty. \quad (17.4)$$

A medida que se incrementa el período, la frecuencia pasa de ser una variable discreta a convertirse en una variable continua, es decir,

$$n\omega_0 \rightarrow \omega \quad \text{cuando } T \rightarrow \infty. \quad (17.5)$$

Según la Ecuación 17.2, a medida que se incrementa el período, los coeficientes de Fourier  $C_n$  se hacen cada vez más pequeños. En el límite,  $C_n \rightarrow 0$  cuando  $T \rightarrow \infty$ . Este resultado tiene sentido, porque parece razonable esperar que los coeficientes de Fourier desaparezcan a medida que la función pierde su periodicidad. Observe, sin embargo, el valor límite del producto  $C_n T$ ; es decir,

$$C_n T \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad \text{cuando } T \rightarrow \infty. \quad (17.6)$$

Al escribir la Ecuación 17.6, hemos aprovechado la relación expresada por la Ecuación 17.5. La integral de la Ecuación 17.6 es la **transformada de Fourier** de  $f(t)$ , que se denota de la forma siguiente:

$$\nabla \quad \text{TRANSFORMADA DE FOURIER} \quad F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (17.7)$$

Podemos obtener una expresión explícita para la transformada inversa de Fourier hallando el límite de la Ecuación 17.1 a medida que  $T \rightarrow \infty$ . Comenzamos multiplicando y dividiendo por  $T$ :



$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (C_n T) e^{jn\omega_0 t} \left( \frac{1}{T} \right). \quad (17.8)$$

A medida que  $T \rightarrow \infty$ , el sumatorio se va aproximando a una integral,  $C_n T \rightarrow F(\omega)$ ,  $n\omega_0 \rightarrow \omega$  y  $1/T \rightarrow d\omega/2\pi$ . Por tanto, en el límite, la Ecuación 17.8 se transforma en

$$\Rightarrow \text{TRANSFORMADA INVERSA DE FOURIER} \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (17.9)$$

Las Ecuaciones 17.7 y 17.9 definen la transformada de Fourier. La Ecuación 17.7 transforma la expresión  $f(t)$  en el dominio del tiempo a su correspondiente expresión  $F(\omega)$  en el dominio de la frecuencia. La Ecuación 17.9 define la operación inversa, la de transformar  $F(\omega)$  en  $f(t)$ .

Vamos ahora a calcular la transformada de Fourier del pulso mostrado en la Figura 17.1. Observe que este pulso corresponde a la tensión periódica del Ejemplo 16.6 si hacemos  $T \rightarrow \infty$ . La transformada de Fourier de  $v(t)$  puede hallarse directamente a partir de la Ecuación 17.7:

$$V(\omega) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} V_m e^{-j\omega t} dt = V_m \left. \frac{e^{-j\omega t}}{(-j\omega)} \right|_{-\tau/2}^{\tau/2} = \frac{V_m}{-j\omega} \left( -2j \sin \frac{\omega\tau}{2} \right), \quad (17.10)$$

que puede ponerse en la forma  $(\sin x)/x$  multiplicando el numerador y el denominador por  $\tau$ . Si lo hacemos así,

$$V(\omega) = V_m \tau \frac{\sin \omega\tau/2}{\omega\tau/2}. \quad (17.11)$$

Para el tren de pulsos periódicos de tensión del Ejemplo 16.6, la expresión correspondiente a los coeficientes de Fourier era

$$C_n = \frac{V_m \tau}{T} \frac{\sin n\omega_0 \tau/2}{n\omega_0 \tau/2}. \quad (17.12)$$

Comparando las Ecuaciones 17.11 y 17.12, vemos claramente que, a medida que la función en el dominio del tiempo pasa de ser periódica a ser aperiódica, el espectro de amplitud pasa de ser un espectro de líneas discretas a ser un espectro continuo. Además, la envolvente del espectro de líneas tiene la misma forma que el espectro continuo. Por tanto, a medida que se incrementa  $T$ , el espectro de líneas se va haciendo más y más denso y las amplitudes se vuelven más pequeñas, pero la envolvente no cambia de forma. La interpretación física de la transformada de Fourier  $V(\omega)$  es, por tanto, una medida del contenido en frecuencia de  $v(t)$ . La Figura 17.2 ilustra estas observaciones. El diagrama espectral de amplitud está basado en la suposición de que  $\tau$  es constante a medida que  $T$  se incrementa.

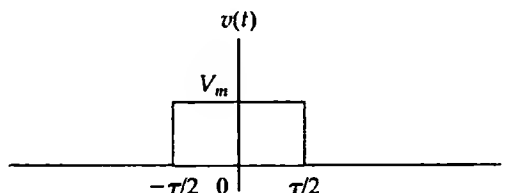
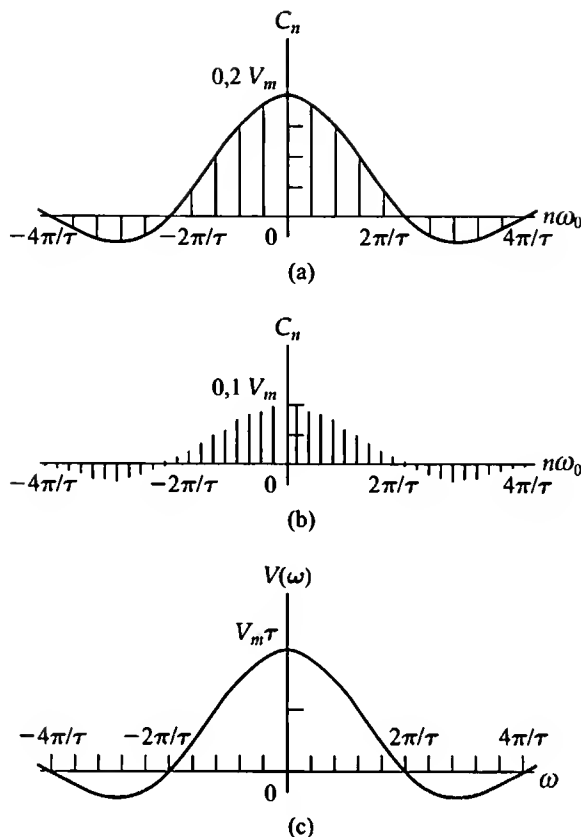


Figura 17.1. Un pulso de tensión.



**Figura 17.2.** Transición del espectro de amplitud a medida que  $f(t)$  pasa de ser periódica a ser aperiódica. (a)  $C_n$  en función de  $n\omega_0$ ,  $T/\tau = 5$ ; (b)  $C_n$  en función de  $n\omega_0$ ,  $T/\tau = 10$ ; (c)  $V(\omega)$  en función de  $\omega$ .

## 17.2. Convergencia de la integral de Fourier

Una función del tiempo  $f(t)$  tiene transformada de Fourier si la integral de la Ecuación 17.7 converge. Si  $f(t)$  es una función normal que difiere de cero en un intervalo finito de tiempo, la convergencia no representa un problema. De este tipo de funciones decimos que tienen un *comportamiento correcto*. La expresión comportamiento correcto implica que  $f(t)$  es univaluada y encierra un área finita a lo largo del rango de integración. En términos prácticos, todos los pulsos de duración finita que son de interés para nosotros son funciones de comportamiento correcto. La evaluación de la transformada de Fourier del pulso rectangular analizado en la Sección 17.1 ilustra este punto.

Si  $f(t)$  es diferente de cero en un intervalo infinito, la convergencia de la integral de Fourier dependerá del comportamiento de  $f(t)$  a medida que  $T \rightarrow \infty$ . Una función univaluada que sea distinta de cero en un intervalo infinito tiene transformada de Fourier si la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$$

existe y si cualquier posible discontinuidad de  $f(t)$  es finita. Un ejemplo es la función de decrecimiento exponencial ilustrada en la Figura 17.3. La transformada de Fourier de  $f(t)$  es

$$\begin{aligned}
 F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} Ke^{-at}e^{-j\omega t} dt \\
 &= \frac{Ke^{-(a+j\omega)t}}{-(a+j\omega)} \Big|_0^{\infty} = \frac{K}{-(a+j\omega)}(0-1) \\
 &= \frac{K}{a+j\omega}, \quad a > 0.
 \end{aligned} \tag{17.13}$$

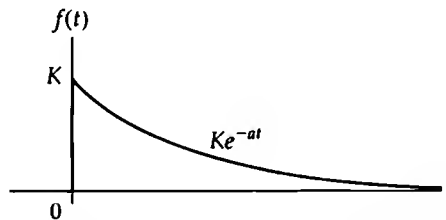
Un tercer grupo importante de funciones tiene un gran interés práctico, pero no poseen, en sentido estricto, transformada de Fourier. Por ejemplo, la integral de la Ecuación 17.7 no converge si  $f(t)$  es una constante. Lo mismo puede decirse si  $f(t)$  es una función sinusoidal,  $\cos \omega_0 t$ , o una función escalón,  $Ku(t)$ . Estas funciones tienen un gran interés en el análisis de circuitos, pero para poder incluirlas en el análisis de Fourier, debemos recurrir a algún tipo de subterfugio matemático. En primer lugar, creamos una función en el dominio del tiempo que tenga transformada de Fourier y al mismo tiempo pueda hacerse arbitrariamente próxima a la función que nos interesa. A continuación, hallamos la transformada de Fourier de la función de aproximación y luego evaluamos el límite de  $F(\omega)$  a medida que esta función se aproxima a  $f(t)$ . Por último, definimos como transformada de Fourier de  $f(t)$  el valor límite de  $F(\omega)$ .

Vamos a ilustrar esta técnica hallando la transformada de Fourier de una constante. Podemos aproximar una constante mediante la función exponencial

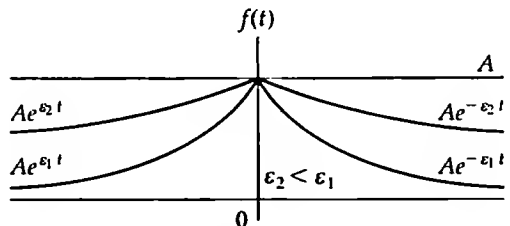
$$f(t) = Ae^{-\varepsilon|t|}, \quad \varepsilon > 0. \tag{17.14}$$

A medida que  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $f(t) \rightarrow A$ . La Figura 17.4 muestra gráficamente esta aproximación. La transformada de Fourier de  $f(t)$  es

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^0 Ae^{\varepsilon t}e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} Ae^{-\varepsilon t}e^{-j\omega t} dt. \tag{17.15}$$



**Figura 17.3.** Función de decaimiento exponencial  $Ke^{-at}u(t)$ .



**Figura 17.4.** Aproximación de una constante mediante una función exponencial.

Realizando la integración necesaria en la Ecuación 17.15, se obtiene

$$F(\omega) = \frac{A}{\varepsilon - j\omega} + \frac{A}{\varepsilon + j\omega} = \frac{2\varepsilon A}{\varepsilon^2 + \omega^2}. \quad (17.16)$$

La función dada en la Ecuación 17.16 genera una función impulsiva en  $\omega = 0$  a medida que  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Podemos verificar este resultado viendo que (1)  $F(\omega)$  se aproxima a infinito para  $\omega = 0$  a medida que  $\varepsilon \rightarrow 0$ ; (2) la duración de  $F(\omega)$  se aproxima a cero a medida que  $\varepsilon \rightarrow 0$ ; y (3) el área comprendida bajo  $F(\omega)$  es independiente de  $\varepsilon$ . El área comprendida bajo  $F(\omega)$  es la intensidad del impulso, que es igual a

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\varepsilon A}{\varepsilon^2 + \omega^2} d\omega = 4\varepsilon A \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{\varepsilon^2 + \omega^2} = 2\pi A. \quad (17.17)$$

En el límite,  $f(t)$  se aproxima a una constante  $A$  y  $F(\omega)$  se aproxima a una función impulsiva  $2\pi A\delta(\omega)$ . Por tanto, la transformada de Fourier de una constante  $A$  se define como  $2\pi A\delta(\omega)$ , o

$$\mathcal{F}\{A\} = 2\pi A\delta(\omega). \quad (17.18)$$

En la Sección 17.4 hablaremos más acerca de las transformadas de Fourier definidas mediante un proceso de paso al límite. Pero, antes de hacerlo, vamos a ver en la Sección 17.3 cómo aprovechar la transformada de Laplace para hallar la transformada de Fourier de funciones para las que la integral de Fourier converge.

### Evaluación del objetivo 1

- Ser capaz de calcular la transformada de Fourier de una función.

17.1. Utilice la integral de la definición para hallar la transformada de Fourier de las siguientes funciones:

- a)  $f(t) = -A, \quad -\pi/2 \leq t < 0;$   
 $f(t) = A, \quad 0 < t \leq \pi/2;$   
 $f(t) = 0, \quad \text{en todos los demás casos.}$   
 b)  $f(t) = 0, \quad t < 0;$   
 $f(t) = t e^{-at}, \quad t \geq 0, a > 0.$

#### RESPUESTA

- (a)  $-j\left(\frac{2A}{\omega}\right)\left(1 - \cos \frac{\omega\pi}{2}\right);$   
 (b)  $\frac{1}{(a + j\omega)^2}.$

17.2. La transformada de Fourier de  $f(t)$  está dada por

$$F(\omega) = 0, \quad -\infty \leq \omega < -3;$$

$$F(\omega) = 4, \quad -3 < \omega < -2;$$

$$F(\omega) = 1, \quad -2 < \omega < 2;$$

$$F(\omega) = 4, \quad 2 < \omega < 3;$$

$$F(\omega) = 0, \quad 3 < \omega \leq \infty.$$

Determine  $f(t)$ .

#### RESPUESTA

$$f(t) = \frac{1}{\pi t} (4 \sin 3t - 3 \sin 2t).$$

**NOTA** Trate también de resolver los Problemas 17.2 y 17.3 del capítulo.

## 17.3. Utilización de transformadas de Laplace para hallar transformadas de Fourier

Podemos utilizar una tabla de transformadas de Laplace unilaterales para hallar la transformada de Fourier de funciones para las que la integral de Fourier converja. La integral de Fourier converge cuando todos los polos de  $F(s)$  se encuentran en el semiplano izquierdo del plano  $s$ . Observe que, si  $F(s)$  tiene polos en el semiplano derecho del plano  $s$  o a lo largo del eje imaginario,  $f(t)$  no satisface la restricción de que  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$  exista.

Las siguientes reglas se aplican a la utilización de transformadas de Laplace para hallar las transformadas de Fourier de dichas funciones.

1. Si  $f(t)$  es cero para  $t \leq 0^-$ , obtenemos la transformada de Fourier de  $f(t)$  a partir de la transformada de Laplace de  $f(t)$  simplemente sustituyendo  $s$  por  $j\omega$ . Por tanto,

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}_{s=j\omega}. \quad (17.19)$$

Por ejemplo, supongamos que

$$f(t) = 0, \quad t \leq 0^-;$$

$$f(t) = e^{-at} \cos \omega_0 t, \quad t \geq 0^+.$$

Entonces

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_0^2} \Big|_{s=j\omega} = \frac{j\omega+a}{(j\omega+a)^2 + \omega_0^2}.$$

2. Puesto que el rango de integración en la integral de Fourier va de  $-\infty$  a  $+\infty$ , la transformada de Fourier para una función con tiempo negativo también existe. Una función con tiempo negativo es distinta de cero para valores negativos del tiempo y cero para valores de tiempo positivos. Para hallar la transformada de Fourier de dicha función, podemos proceder de la forma siguiente. En primer lugar, reflejamos la función de tiempo negativo hacia el dominio del tiempo positivo y luego calculamos su transformada de Laplace unilateral. Podemos obtener la transformada de Fourier de la función original sustituyendo  $s$  por  $-j\omega$ . Por tanto, cuando  $f(t) = 0$  para  $t \geq 0^+$ ,

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{f(-t)\}_{s=-j\omega}. \quad (17.20)$$

Por ejemplo, si

$$f(t) = 0, \quad (\text{para } t \geq 0^+);$$

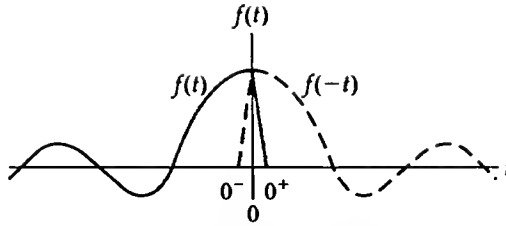
$$f(t) = e^{at} \cos \omega_0 t, \quad (\text{para } t \leq 0^-).$$

entonces

$$f(-t) = 0, \quad (\text{para } t \leq 0^-);$$

$$f(-t) = e^{-at} \cos \omega_0 t, \quad (\text{para } t \geq 0^+).$$

En la Figura 17.5 se muestran tanto  $f(t)$  como su imagen especular.



**Figura 17.5.** Reflexión de una función de tiempo negativo en el dominio del tiempo positivo.

La transformada de Fourier de  $f(t)$  es

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{f(-t)\}_{s=-j\omega} = \frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_0^2} \Big|_{s=-j\omega} = \frac{-j\omega + a}{(-j\omega + a)^2 + \omega_0^2}.$$

3. Las funciones que son distintas de cero en todo instante de tiempo pueden resolverse en sendas funciones de tiempo positivo y tiempo negativo. Utilizamos entonces las Ecuaciones 17.9 y 17.20 para hallar la transformada de Fourier de las funciones de tiempo positivo y tiempo negativo, respectivamente. La transformada de Fourier de la función original será la suma de las dos transformadas. Por tanto, si hacemos

$$f^+(t) = f(t) \quad (\text{para } t > 0),$$

$$f^-(t) = f(t) \quad (\text{para } t < 0),$$

entonces

$$f(t) = f^+(t) + f^-(t)$$

y

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(t)\} &= \mathcal{F}\{f^+(t)\} + \mathcal{F}\{f^-(t)\} \\ &= \mathcal{L}\{f^+(t)\}_{s=j\omega} + \mathcal{L}\{f^-(-t)\}_{s=-j\omega}. \end{aligned} \quad (17.21)$$

Un ejemplo de aplicación de la Ecuación 17.21 sería la determinación de la transformada de Fourier de  $e^{-a|t|}$ . Para la función original, las funciones de tiempo positivo y tiempo negativo son

$$f^+(t) = e^{-at} \quad \text{y} \quad f^-(t) = e^{at}.$$

Entonces

$$\mathcal{L}\{f^+(t)\} = \frac{1}{s+a},$$

$$\mathcal{L}\{f^-(-t)\} = \frac{1}{s+a}.$$

Por tanto, a partir de la Ecuación 17.21,

$$\mathcal{F}\{e^{-a|t|}\} = \frac{1}{s+a} \Big|_{s=j\omega} + \frac{1}{s+a} \Big|_{s=-j\omega} = \frac{1}{j\omega+a} + \frac{1}{-j\omega+a} = \frac{2a}{\omega^2 + a^2}.$$

Si  $f(t)$  es par, la Ecuación 17.21 se reduce a

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}_{s=j\omega} + \mathcal{L}\{f(t)\}_{s=-j\omega}. \quad (17.22)$$

Si  $f(t)$  es impar, la Ecuación 17.21 queda

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}_{s=j\omega} - \mathcal{L}\{f(t)\}_{s=-j\omega}. \quad (17.23)$$

### Evaluación del objetivo 1

- Ser capaz de calcular la transformada de Fourier de una función.

17.3. Determine la transformada de Fourier de cada una de estas funciones. En cada caso,  $a$  es una constante real positiva.

a)  $f(t) = 0, \quad t < 0,$   
 $f(t) = e^{-at} \sin \omega_0 t, \quad t \geq 0.$

b)  $f(t) = 0, \quad t > 0,$   
 $f(t) = -te^{at}, \quad t \leq 0.$

c)  $f(t) = te^{-at}, \quad t \geq 0,$   
 $f(t) = te^{at}, \quad t \leq 0.$

**RESPUESTA**

(a)  $\frac{\omega_0}{(a + j\omega)^2 + \omega_0^2}$ ; (b)  $\frac{1}{(a - j\omega)^2}$ ;

(c)  $\frac{-j4a\omega}{(a^2 + \omega^2)^2}.$

**NOTA** Trate también de resolver el Problema 17.4 del capítulo.

## 17.4. Transformadas de Fourier en el límite

Como hemos indicado en la Sección 17.2, las transformadas de Fourier de diversas funciones prácticas deben definirse mediante un proceso de paso al límite. Vamos a volver ahora a dichos tipos de funciones y a desarrollar sus transformadas.

### Transformada de Fourier de una función signo

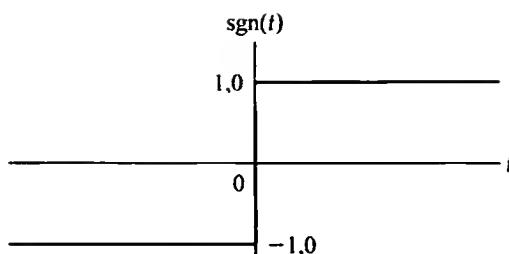
Ya hemos visto que la transformada de Fourier de una constante  $A$  es  $2\pi A\delta(\omega)$  en la Ecuación 17.18. La siguiente función que vamos a analizar es la función signo, definida como  $+1$  para  $t > 0$  y  $-1$  para  $t < 0$ . La función signo se denota mediante  $\text{sgn}(t)$  y puede expresarse en términos de funciones escalón unitarias:

$$\text{sgn}(t) = u(t) - u(-t). \quad (17.24)$$

La Figura 17.6 muestra la función gráficamente.

Para hallar la transformada de Fourier de la función signo, primero creamos una función que se aproxime a ésta en el límite:

$$\text{sgn}(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [e^{-\epsilon t} u(t) - e^{\epsilon t} u(-t)], \quad \epsilon > 0. \quad (17.25)$$



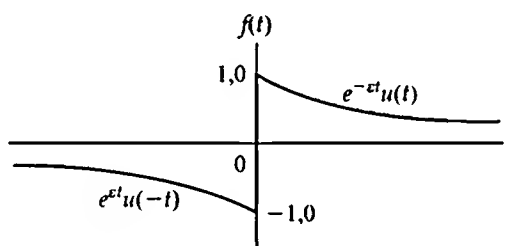
**Figura 17.6.** La función signo.

La función dentro de los corchetes (dibujada en la Figura 17.7) tiene transformada de Fourier, porque la integral de Fourier converge. Puesto que  $f(t)$  es una función impar, utilizamos la Ecuación 17.23 para hallar su transformada de Fourier:

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \frac{1}{s + \varepsilon} \Big|_{s=j\omega} - \frac{1}{s + \varepsilon} \Big|_{s=-j\omega} = \frac{1}{j\omega + \varepsilon} - \frac{1}{-j\omega + \varepsilon} = \frac{-2j\omega}{\omega^2 + \varepsilon^2}. \quad (17.26)$$

A medida que  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $f(t) \rightarrow \text{sgn}(t)$  y  $\mathcal{F}\{f(t)\} \rightarrow 2/j\omega$ . Por tanto,

$$\mathcal{F}\{\text{sgn}(t)\} = \frac{2}{j\omega}. \quad (17.27)$$



**Figura 17.7.** Una función que se aproxima a  $\text{sgn}(t)$  a medida que  $\varepsilon$  tiende a cero.

## Transformada de Fourier de una función escalón unitaria

Para hallar la transformada de Fourier de una función escalón unitaria, utilizamos las Ecuaciones 17.18 y 17.27. Podemos hacerlo observando que la función escalón unitaria puede expresarse como

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{sgn}(t). \quad (17.28)$$

Por tanto,

$$\mathcal{F}\{u(t)\} = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2}\right\} + \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2} \text{sgn}(t)\right\} = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}. \quad (17.29)$$

## Transformada de Fourier de una función coseno

Para hallar la transformada de Fourier de  $\cos \omega_0 t$ , volvamos a la integral de la transformada inversa, dada en la Ecuación 17.9, y observemos que si



$$F(\omega) = 2\pi \delta(\omega - \omega_0), \quad (17.30)$$

entonces

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [2\pi \delta(\omega - \omega_0)] e^{j\omega t} d\omega. \quad (17.31)$$

Utilizando la propiedad de desplazamiento de la función impulsiva, podemos reducir la Ecuación 17.31 a

$$f(t) = e^{j\omega_0 t}. \quad (17.32)$$

Entonces, a partir de las Ecuaciones 17.30 y 17.32,

$$\mathcal{F}\{e^{j\omega_0 t}\} = 2\pi \delta(\omega - \omega_0). \quad (17.33)$$

Podemos usar ahora la Ecuación 17.33 para hallar la transformada de Fourier de  $\cos \omega_0 t$ , porque

$$\cos \omega_0 t = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}. \quad (17.34)$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\cos \omega_0 t\} &= \frac{1}{2} (\mathcal{F}\{e^{j\omega_0 t}\} + \mathcal{F}\{e^{-j\omega_0 t}\}) \\ &= \frac{1}{2} [2\pi \delta(\omega - \omega_0) + 2\pi \delta(\omega + \omega_0)] = \pi \delta(\omega - \omega_0) + \pi \delta(\omega + \omega_0). \end{aligned} \quad (17.35)$$

La transformada de Fourier de  $\sin \omega_0 t$  implica unas operaciones similares, las cuales dejamos para el Problema 17.5. La Tabla 17.1 presenta un resumen de las parejas de transformadas para las funciones elementales más importantes.

Volvamos ahora nuestra atención a las propiedades de la transformada de Fourier que mejoran nuestra capacidad de describir el comportamiento aperiódico en el dominio del tiempo en función del comportamiento en el dominio de la frecuencia.

**Tabla 17.1.** Transformadas de Fourier de funciones elementales.

TIPO	$f(t)$	$F(\omega)$
impulso	$\delta(t)$	1
constante	$A$	$2\pi A \delta(\omega)$
signo	$\text{sgn}(t)$	$2/j\omega$
escalón	$u(t)$	$\pi \delta(\omega) + 1/j\omega$
exponencial de tiempo positivo	$e^{-at} u(t)$	$1/(a + j\omega), a > 0$
exponencial de tiempo negativo	$e^{at} u(-t)$	$1/(a - j\omega), a > 0$
exponencial de tiempo positivo y negativo	$e^{-a t }$	$2a/(a^2 + \omega^2), a > 0$
exponencial compleja	$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi \delta(\omega - \omega_0)$
coseno	$\cos \omega_0 t$	$\pi [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$
seno	$\sin \omega_0 t$	$j \pi [\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$

## 17.5. Algunas propiedades matemáticas

La primera propiedad matemática que queremos resaltar es que  $F(\omega)$  es un valor complejo y puede, por tanto, expresarse en forma rectangular o polar. Así, a partir de la integral de la definición,

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) (\cos \omega t - j \sin \omega t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt - j \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt. \end{aligned} \quad (17.36)$$

Hagamos ahora

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt \quad (17.37)$$

$$B(\omega) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt. \quad (17.38)$$

Así, utilizando las definiciones dadas por las Ecuaciones 17.37 y 17.38 en la Ecuación 17.36, obtenemos

$$F(\omega) = A(\omega) + jB(\omega) = |F(\omega)| e^{j\theta(\omega)}. \quad (17.39)$$

Resulta conveniente tener en cuenta las siguientes observaciones acerca de  $F(\omega)$ :

- La parte real de  $F(\omega)$  -es decir,  $A(\omega)$ - es una función par de  $\omega$ ; en otras palabras,  $A(\omega) = A(-\omega)$ .
- La parte imaginaria de  $F(\omega)$  -es decir,  $B(\omega)$ - es una función impar de  $\omega$ ; en otras palabras,  $B(\omega) = -B(-\omega)$ .
- El módulo de  $F(\omega)$  -es decir,  $\sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)}$ - es una función par de  $\omega$ .
- El ángulo de fase de  $F(\omega)$  -es decir,  $\theta(\omega) = \tan^{-1} B(\omega)/A(\omega)$ - es una función impar de  $\omega$ .
- Si se sustituye  $\omega$  por  $-\omega$ , se obtiene el conjugado de  $F(\omega)$ ; en otras palabras,  $F(-\omega) = F^*(\omega)$ .

Por tanto, si  $f(t)$  es una función par,  $F(\omega)$  es real, mientras que si  $f(t)$  es una función impar,  $F(\omega)$  es imaginaria. Si  $f(t)$  es par, a partir de las Ecuaciones 17.37 y 17.38,

$$A(\omega) = 2 \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt \quad (17.40)$$

y

$$B(\omega) = 0. \quad (17.41)$$

Si  $f(t)$  es una función impar,

$$A(\omega) = 0 \quad (17.42)$$

y

$$B(\omega) = -2 \int_0^{\infty} f(t) \operatorname{sen} \omega t \, dt. \quad (17.43)$$

Dejamos la demostración de las Ecuaciones 17.40-17.43 para que la efectúe el lector en los Problemas 17.10 y 17.11.

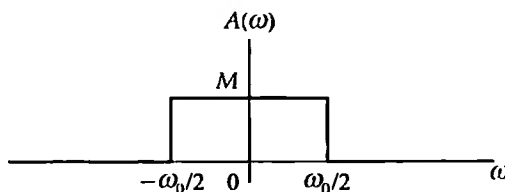
Si  $f(t)$  es una función par, su transformada de Fourier es una función par, mientras que si  $f(t)$  es una función impar, su transformada de Fourier es una función impar. Además, si  $f(t)$  es una función par, a partir de la integral inversa de Fourier,

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} \, d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) e^{j\omega t} \, d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) (\cos \omega t + j \operatorname{sen} \omega t) \, d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) \cos \omega t \, d\omega + 0 \\ &= \frac{2}{2\pi} \int_0^{\infty} A(\omega) \cos \omega t \, d\omega. \end{aligned} \quad (17.44)$$

Comparemos ahora la Ecuación 17.44 con la Ecuación 17.40. Observe que, a excepción de un factor de  $1/2\pi$ , estas dos ecuaciones tienen la misma forma. Por tanto, las formas de onda de  $A(\omega)$  y de  $f(t)$  son intercambiables si  $f(t)$  es una función par. Por ejemplo, ya hemos observado que un pulso rectangular en el dominio del tiempo produce un espectro de frecuencia de la forma  $(\operatorname{sen} \omega)/\omega$ . Específicamente, la Ecuación 17.11 expresa la transformada de Fourier del pulso de tensión mostrado en la Figura 17.1. Por tanto, un pulso rectangular en el dominio de la frecuencia deberá generarse mediante una función en el dominio del tiempo de la forma  $(\operatorname{sen} t)/t$ . Podemos ilustrar este requisito hallando la función en el dominio del tiempo  $f(t)$  correspondiente al espectro de frecuencia mostrado en la Figura 17.8. A partir de la Ecuación 17.44,

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{2}{2\pi} \int_0^{\omega_0/2} M \cos \omega t \, d\omega = \frac{2M}{2\pi} \left( \frac{\operatorname{sen} \omega t}{t} \right) \Big|_0^{\omega_0/2} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( M \frac{\operatorname{sen} \omega_0 t / 2}{t/2} \right) = \frac{1}{2\pi} \left( M \omega_0 \frac{\operatorname{sen} \omega_0 t / 2}{\omega_0 t / 2} \right). \end{aligned} \quad (17.45)$$

Analizaremos con más detalles el espectro de frecuencia de un pulso rectangular en el dominio del tiempo comparado con el espectro de frecuencia rectangular de  $(\operatorname{sen} t)/t$  después de presentar el teorema de Parseval.



**Figura 17.8.** Un espectro de frecuencia rectangular.

## 17.6. Transformadas operacionales

Las transformadas de Fourier, como las transformadas de Laplace, pueden clasificarse como funcionales y operacionales. Hasta aquí, nos hemos centrado en las transformadas funcionales; vamos a ver ahora algunas de las transformadas operacionales más importantes. Con respecto a la transformada de Laplace, estas transformadas operacionales son similares a las que hemos presentado en el Capítulo 12. Por ello, dejamos la demostración como ejercicio para el lector en los Problemas 17.12-17.19.

### Multiplicación por una constante

A partir de la integral de la definición, si

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\omega),$$

entonces

$$\mathcal{F}\{Kf(t)\} = KF(\omega). \quad (17.46)$$

Por tanto, la multiplicación de  $f(t)$  por una constante se corresponde con una multiplicación de  $F(\omega)$  por esa misma constante.

### Suma (resta)

La suma (resta) en el dominio del tiempo se traduce en una suma (resta) en el dominio de la frecuencia. Por tanto, si

$$\mathcal{F}\{f_1(t)\} = F_1(\omega),$$

$$\mathcal{F}\{f_2(t)\} = F_2(\omega),$$

$$\mathcal{F}\{f_3(t)\} = F_3(\omega),$$

entonces

$$\mathcal{F}\{f_1(t) - f_2(t) + f_3(t)\} = F_1(\omega) - F_2(\omega) + F_3(\omega), \quad (17.47)$$

lo que se puede demostrar introduciendo una suma algebraica de funciones en el dominio del tiempo dentro de la integral de la definición.

### Diferenciación

La transformada de Fourier de la primera derivada de  $f(t)$  es

$$\mathcal{F}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = j\omega F(\omega). \quad (17.48)$$

La transformada de la  $n$ -ésima derivada de  $f(t)$  es

$$\mathcal{F}\left\{\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right\} = (j\omega)^n F(\omega). \quad (17.49)$$

Las Ecuaciones 17.48 y 17.49 son válidas si  $f(t)$  es cero en  $\pm\infty$ .

## Integración

Si

$$g(t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx,$$

entonces

$$\mathcal{F}\{g(t)\} = \frac{F(\omega)}{j\omega}. \quad (17.50)$$

La Ecuación 17.50 es válida si

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 0.$$

## Cambio de escala

Dimensionalmente, el tiempo y la frecuencia son recíprocos. Por tanto, cuando el tiempo se alarga, la frecuencia se comprime (y viceversa), como se refleja en la transformada funcional

$$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right), \quad a > 0. \quad (17.51)$$

Observe que, cuando  $0 < a < 1$ , el tiempo se estira, mientras que cuando  $a > 1$ , el tiempo se comprime.

## Traslación en el dominio del tiempo

El efecto de desplazar una función en el dominio del tiempo es una alteración del espectro de fase, dejando el espectro de amplitud intacto. Por tanto,

$$\mathcal{F}\{f(t-a)\} = e^{-j\omega a} F(\omega). \quad (17.52)$$

Si  $a$  es positiva en la Ecuación 17.52, la función se retarda en el dominio del tiempo, mientras que si  $a$  es negativa, la función se adelanta en el dominio del tiempo.

## Traslación en el dominio de la frecuencia

La traslación en el dominio de la frecuencia se corresponde con una multiplicación por una exponencial compleja en el dominio del tiempo:

$$\mathcal{F}\{e^{j\omega_0 t} f(t)\} = F(\omega - \omega_0). \quad (17.53)$$

## Modulación

La modulación de amplitud es el proceso de variar la amplitud de una portadora sinusoidal. Si denotamos mediante  $f(t)$  la señal moduladora, la portadora modulada será  $f(t) \cos \omega_0 t$ . El espectro de amplitud de esta portadora es un medio del espectro de amplitud de  $f(t)$ , centrado en  $\pm \omega_0$ , es decir,

$$\mathcal{F}\{f(t) \cos \omega_0 t\} = \frac{1}{2} F(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} F(\omega + \omega_0). \quad (17.54)$$

## Convolución en el dominio del tiempo

La convolución en el dominio del tiempo se corresponde con una multiplicación en el dominio de la frecuencia. En otras palabras,

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)h(t-\lambda) d\lambda$$

se transforma en

$$\mathcal{F}\{y(t)\} = Y(\omega) = X(\omega)H(\omega). \quad (17.55)$$

La Ecuación 17.55 es importante en muchas aplicaciones de la transformada de Fourier, porque indica que la transformada de la función de respuesta  $Y(\omega)$  es el producto de la transformada de la entrada  $X(\omega)$  por la función del sistema  $H(\omega)$ . Trataremos otros aspectos de esta relación en la Sección 17.7.

## Convolución en el dominio de la frecuencia

La convolución en el dominio de la frecuencia se corresponde con la transformada de Fourier del producto de dos funciones en el dominio del tiempo. En otras palabras, si

$$f(t) = f_1(t)f_2(t),$$

entonces

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(u)F_2(\omega-u) du. \quad (17.56)$$

La Tabla 17.2 resume estas diez transformadas operacionales junto con otra transformada operacional que presentamos en el Problema 17.18.

**Tabla 17.2.** Transformadas operacionales.

$f(t)$	$F(\omega)$	$f(t)$	$F(\omega)$
$Kf(t)$	$KF(\omega)$	$e^{j\omega_0 t} f(t)$	$F(\omega - \omega_0)$
$f_1(t) + f_2(t) + f_3(t)$	$F_1(\omega) + F_2(\omega) + F_3(\omega)$	$f(t) \cos \omega_0 t$	$\frac{1}{2} F(\omega_0 - \omega) + \frac{1}{2} F(\omega + \omega_0)$
$d^n f(t)/dt^n$	$(j\omega)^n F(\omega)$	$\int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)h(t-\lambda) d\lambda$	$X(\omega)H(\omega)$
$\int_{-\infty}^t f(x) dx$	$F(\omega)/j\omega$	$f_1(t)f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(u)F_2(\omega-u) du$
$f(at)$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right), \quad a > 0$	$t^n f(t)$	$(j)^n \frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n}$
$f(t-a)$	$e^{-j\omega a} F(\omega)$		

**Evaluación del objetivo 1**

■ Ser capaz de calcular la transformada de Fourier de una función.

17.4. Suponga que definimos  $f(t)$  de la forma siguiente:

$$f(t) = \frac{2A}{\tau}t + A, \quad -\frac{\tau}{2} \leq t \leq 0,$$

$$f(t) = -\frac{2A}{\tau}t + A, \quad 0 \leq t \leq \frac{\tau}{2},$$

$$f(t) = 0, \quad \text{en todos los demás instantes.}$$

- Calcule la segunda derivada de  $f(t)$ .
- Calcule la transformada de Fourier de la segunda derivada.
- Utilice el resultado obtenido en el apartado (b) para hallar la transformada de Fourier de la función del apartado (a). (*Sugerencia:* utilice la transformada operacional de la diferenciación).

**RESPUESTA**

$$(a) \frac{d^2 f}{dt^2} = \frac{2A}{\tau} \delta\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - \frac{4A}{\tau} \delta(t) + \frac{2A}{\tau} \delta\left(t - \frac{\tau}{2}\right);$$

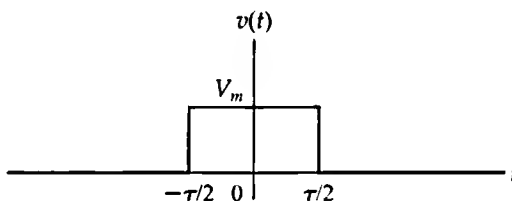
$$(b) \frac{4A}{\tau} \left( \cos \frac{\omega\tau}{2} - 1 \right);$$

$$(c) \frac{4A}{\omega^2 \tau} \left( 1 - \cos \frac{\omega\tau}{2} \right).$$

17.5. El pulso rectangular mostrado puede expresarse como la diferencia entre dos escalones de tensión, es decir,

$$v(t) = V_m u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - V_m u\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \text{ V.}$$

Utilice la transformada operacional correspondiente a la traslación en el dominio del tiempo para hallar la transformada de Fourier de  $v(t)$ .

**RESPUESTA**

$$V(\omega) = V_m \tau \frac{\sin(\omega\tau/2)}{(\omega\tau/2)}.$$

**NOTA** Trate también de resolver el Problema 17.19 del capítulo.

**17.7. Aplicaciones a los circuitos**

Normalmente, se utiliza con más frecuencia la transformada de Laplace que la transformada de Fourier para hallar la respuesta de un circuito, por dos razones: en primer lugar, la integral de la transformada de Laplace converge para un rango mayor de funciones de excitación, y, en segundo lugar, permite utilizar condiciones iniciales. Sin embargo, a pesar de las ventajas de la transformada de Laplace, también podemos utilizar la transformada de Fourier para hallar la respuesta. La relación fundamental en la que se basa el uso de la transformada de Fourier para el análisis transitorio es la Ecuación 17.55, que relaciona la transformada de la respuesta  $Y(\omega)$  con la transformada de la entrada  $X(\omega)$  y la función de transferencia  $H(\omega)$  del circuito. Observe que  $H(\omega)$  es la familiar función  $H(s)$ , sustituyendo  $s$  por  $j\omega$ .

El Ejemplo 17.1 ilustra cómo utilizar la transformada de Fourier para hallar la respuesta de un circuito.

### EJEMPLO 17.1 Utilización de la transformada de Fourier para hallar la respuesta transitoria

Utilice la transformada de Fourier para hallar  $i_o(t)$  en el circuito mostrado en la Figura 17.9. La fuente de corriente  $i_g(t)$  es la función signo  $20 \operatorname{sgn}(t)$  A.

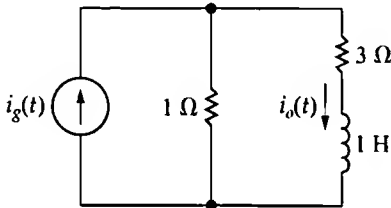


Figura 17.9. Circuito del Ejemplo 17.1.

#### SOLUCIÓN

La transformada de Fourier de la fuente de excitación es

$$I_g(\omega) = \mathcal{F}\{20 \operatorname{sgn}(t)\} = 20 \left( \frac{2}{j\omega} \right) = \frac{40}{j\omega}.$$

La función de transferencia del circuito es el cociente entre  $I_o$  e  $I_g$ ; por tanto,

$$H(\omega) = \frac{I_o}{I_g} = \frac{1}{4 + j\omega}.$$

La transformada de Fourier de  $i_o(t)$  es

$$I_o(\omega) = I_g(\omega)H(\omega) = \frac{40}{j\omega(4 + j\omega)}.$$

Expandiendo  $I_o(\omega)$  en una suma de fracciones parciales obtenemos

$$I_o(\omega) = \frac{K_1}{j\omega} + \frac{K_2}{4 + j\omega}.$$

La evaluación de  $K_1$  y  $K_2$  nos da

$$K_1 = \frac{40}{4} = 10,$$

$$K_2 = \frac{40}{-4} = -10.$$

Por tanto,

$$I_o(\omega) = \frac{10}{j\omega} - \frac{10}{4 + j\omega}.$$

La respuesta es

$$i_o(t) = \mathcal{F}^{-1}[I_o(\omega)] = 5 \operatorname{sgn}(t) - 10e^{-4t}u(t).$$

La Figura 17.10 muestra una gráfica de la respuesta. ¿Tiene sentido la solución por lo que se refiere al comportamiento conocido del circuito? La respuesta es afirmativa, por las siguientes razones. La fuente de corriente entrega  $-20$  A al circuito entre  $-\infty$  y  $0$ . La resistencia en cada rama es la que regula cómo se dividen esos  $-20$  A entre las dos ramas. En particular, una cuarta parte de los  $-20$  A atraviesa la rama  $i_o$ ; por tanto,  $i_o$  es  $-5$  para  $t < 0$ . Cuando la fuente de corriente salta de  $-20$  A a  $+20$  A en  $t = 0$ ,  $i_o$  se aproxima a su valor final de  $+5$  A exponencialmente, con una constante de relajación de  $\frac{1}{4}$  s.

Una característica importante de la transformada de Fourier es que proporciona directamente la respuesta de régimen permanente a una función de excitación sinusoidal. La razón es que la transformada de Fourier de  $\cos \omega_0 t$  está basada en la suposición de que la función existe a lo largo de todo el tiempo. El Ejemplo 17.2 ilustra esta característica.

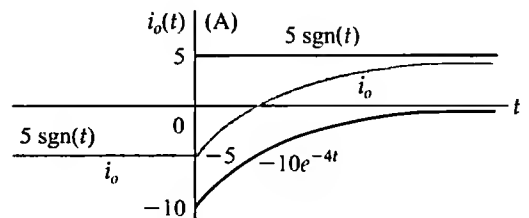


Figura 17.10. Gráfica de  $i_o(t)$  en función de  $t$ .



### EJEMPLO 17.2 Utilización de la transformada de Fourier para hallar la respuesta en régimen permanente sinusoidal

La fuente de corriente del circuito del Ejemplo 17.1 (Figura 17.9) se cambia por una fuente sinusoidal. La expresión de la corriente entregada por la fuente está dada por la ecuación

$$i_g(t) = 50 \cos 3t \text{ A.}$$

Utilice la transformada de Fourier para hallar  $i_o(t)$ .

#### SOLUCIÓN

La transformada de la función de excitación es

$$I_g(\omega) = 50\pi [\delta(\omega - 3) + \delta(\omega + 3)].$$

Como antes, la función de transferencia del circuito será

$$H(\omega) = \frac{1}{4 + j\omega}.$$

La transformada de la respuesta en corriente es, entonces,

$$I_o(\omega) = 50\pi \frac{\delta(\omega - 3) + \delta(\omega + 3)}{4 + j\omega}.$$

Debido a la propiedad de enmascaramiento de la función impulsiva, la forma más fácil de hallar la transformada inversa de  $I_o(\omega)$  es mediante la integral que define dicha transformada inversa:

$$\begin{aligned} i_o(t) &= \mathcal{F}^{-1}[I_o(\omega)] \\ &= \frac{50\pi}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{\delta(\omega - 3) + \delta(\omega + 3)}{4 + j\omega} \right] e^{j\omega t} d\omega \\ &= 25 \left( \frac{e^{j3t}}{4 + j3} + \frac{e^{-j3t}}{4 - j3} \right) \\ &= 25 \left( \frac{e^{j3t} e^{-j36.87^\circ}}{5} + \frac{e^{-j3t} e^{j36.87^\circ}}{5} \right) \\ &= 5[2 \cos(3t - 36.87^\circ)] \\ &= 10 \cos(3t - 36.87^\circ). \end{aligned}$$

Dejamos como ejercicio para el lector la verificación de que la solución correspondiente a  $i_o(t)$  es idéntica a la que se obtiene utilizando el análisis mediante fasores.

### Evaluación del objetivo 2

- Saber cómo utilizar la transformada de Fourier para hallar la respuesta de un circuito.

17.6. La fuente de corriente del circuito mostrado entrega una corriente igual a  $10 \operatorname{sgn}(t)$  A. La respuesta es la tensión en bornes de la bobina de 1 H. Calcule (a)  $I_g(\omega)$ ; (b)  $H(j\omega)$ ; (c)  $V_o(\omega)$ ; (d)  $v_o(t)$ ; (e)  $i_1(0^-)$ ; (f)  $i_1(0^+)$ ; (g)  $i_2(0^-)$ ; (h)  $i_2(0^+)$ ; (i)  $v_o(0^-)$ ; y (j)  $v_o(0^+)$ .

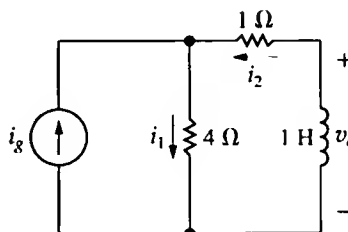
#### RESPUESTA

- (a)  $20/j\omega$ ; (b)  $4j\omega/(5 + j\omega)$ ;  
(c)  $80/(5 + j\omega)$ ; (d)  $80e^{-5t} u(t)$  V;

(e)  $-2$  A; (f)  $18$  A;

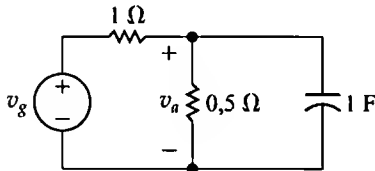
(g)  $8$  A; (h)  $8$  A;

(i)  $0$  V; (j)  $80$  V.



17.7. La fuente de tensión en el circuito mostrado está generando una tensión

$$v_g = e^t u(-t) + u(t) \text{ V.}$$



a) Utilice el método de la transformada de Fourier para hallar  $v_a$ .

b) Calcule  $v_a(0^-)$ ,  $v_a(0^+)$  y  $v_a(\infty)$ .

### RESPUESTA

$$(a) v_a = \frac{1}{4} e^t u(-t) - \frac{1}{12} e^{-3t} u(t) + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \operatorname{sgn}(t) \text{ V;}$$

$$(b) \frac{1}{4} \text{ V, } \frac{1}{4} \text{ V, } \frac{1}{3} \text{ V.}$$

**NOTA** Trate también de resolver los Problemas 17.22, 17.28 y 17.31 del capítulo.

## 17.8. Teorema de Parseval

El teorema de Parseval relaciona la energía asociada con una función de energía finita en el dominio del tiempo con la transformada de Fourier de la función. Imagine que la función  $f(t)$  en el dominio del tiempo es la tensión o la corriente en una resistencia de  $1 \Omega$ . La energía asociada con esta función será entonces

$$W_{1\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt. \quad (17.57)$$

El teorema de Parseval afirma que esta misma energía puede calcularse mediante una integración en el dominio de la frecuencia; específicamente,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega. \quad (17.58)$$

Por tanto, la energía para  $1 \Omega$  asociada con  $f(t)$  puede calcularse integrando el cuadrado de  $f(t)$  para todos los instantes de tiempo o integrando  $1/2\pi$  veces el cuadrado del módulo de la transformada de Fourier de  $f(t)$  para todas las frecuencias. El teorema de Parseval es válido siempre que existan ambas integrales.

La potencia media asociada con las señales de energía finita en el dominio del tiempo es cero cuando se realiza el promedio para todos los instantes de tiempo. Por tanto, cuando se comparan señales de este tipo, recurrimos al contenido de energía de las señales. Resulta cómodo emplear una resistencia de  $1 \Omega$  como base para los cálculos de energía a la hora de comparar el contenido de energía de una serie de señales de tensión y corriente.

Comenzamos la demostración de la Ecuación 17.58 reescribiendo el integrando de la parte izquierda como  $f(t)$  multiplicado por sí mismo y luego expresando uno de los factores  $f(t)$  en función de la integral correspondiente a la transformada inversa:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] dt. \end{aligned} \quad (17.59)$$

Podemos pasar  $f(t)$  al interior de la segunda integral, porque la integración se realiza con respecto a  $\omega$ , y luego sacar la constante  $1/2\pi$  fuera de ambas integrales. Con esto, la Ecuación 17.59 nos queda

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) f(t) e^{j\omega t} d\omega \right] dt. \quad (17.60)$$

Vamos a invertir el orden de integración, aprovechando el hecho de que  $F(\omega)$  puede sacarse de la integral con respecto a  $t$ . Así,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{j\omega t} dt \right] d\omega. \quad (17.61)$$

La integral entre corchetes es igual a  $F(-\omega)$ , por lo que la Ecuación 17.61 se reduce a

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) F(-\omega) d\omega. \quad (17.62)$$

En la Sección 17.6 vimos que  $F(-\omega) = F^*(\omega)$ . Por tanto, el producto  $F(\omega) F(-\omega)$  es, simplemente, el módulo de  $F(\omega)$  al cuadrado y la Ecuación 17.62 equivale a la Ecuación 17.58. También vimos que  $|F(\omega)|$  es una función par de  $\omega$ . Así, también podemos escribir la Ecuación 17.58 como

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega. \quad (17.63)$$

## Una ilustración del teorema de Parseval

La mejor ilustración de la validez de la Ecuación 17.63 se puede ofrecer mediante un ejemplo específico. Si

$$f(t) = e^{-a|t|},$$

el lado izquierdo de la Ecuación 17.63 queda

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2a|t|} dt &= \int_{-\infty}^0 e^{2at} dt + \int_0^{\infty} e^{-2at} dt \\ &= \frac{e^{2at}}{2a} \Big|_{-\infty}^0 + \frac{e^{-2at}}{-2a} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2a} + \frac{1}{2a} = \frac{1}{a}. \end{aligned} \quad (17.64)$$

La transformada de Fourier de  $f(t)$  es

$$F(\omega) = \frac{2a}{a^2 + \omega^2},$$

y, por tanto, el lado derecho de la Ecuación 17.63 queda

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{4a^2}{(a^2 + \omega^2)^2} d\omega &= \frac{4a^2}{\pi} \frac{1}{2a^2} \left( \frac{\omega}{\omega^2 + a^2} + \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{\omega}{a} \right) \Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{2}{\pi} (0 + \frac{\pi}{2a} - 0 - 0) = \frac{1}{a}. \end{aligned} \quad (17.65)$$

Observe que el resultado dado por la Ecuación 17.65 es igual al que nos daba la Ecuación 17.64.

## Interpretación del teorema de Parseval

El teorema de Parseval nos da una interpretación física del módulo de la transformada de Fourier. Dicho módulo al cuadrado,  $|F(\omega)|^2$ , es una densidad de energía (en julios por hercio). Para verlo, podemos escribir el lado derecho de la Ecuación 17.63 como

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |F(2\pi f)|^2 2\pi df = 2 \int_0^{\infty} |F(2\pi f)|^2 df, \quad (17.66)$$

donde  $|F(2\pi f)|^2 df$  es la energía en una banda infinitesimal de frecuencias ( $df$ ) y la energía total para 1  $\Omega$  asociada con  $f(t)$  es el sumatorio (integral) de  $|F(2\pi f)|^2 df$  para todas las frecuencias. Podemos asociar una parte de la energía total con una banda de frecuencias específica. En otras palabras, la energía para 1  $\Omega$  en la banda de frecuencias que va de  $\omega_1$  a  $\omega_2$  es

$$W_{1\Omega} = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} |F(\omega)|^2 d\omega. \quad (17.67)$$

Observe que expresar la integral en el dominio de la frecuencia como

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

en lugar de

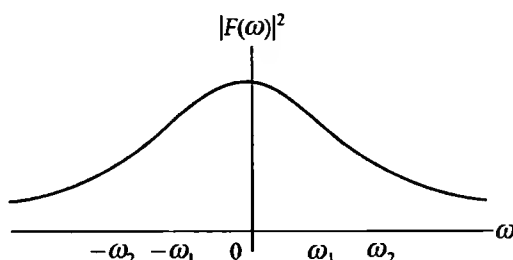
$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

permite escribir la Ecuación 17.67 en la forma

$$W_{1\Omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_1}^{-\omega_2} |F(\omega)|^2 d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} |F(\omega)|^2 d\omega. \quad (17.68)$$

La Figura 17.11 muestra la interpretación gráfica de la Ecuación 17.68.

Los Ejemplos 17.3-17.5 ilustran los cálculos relacionados con el teorema de Parseval.



**Figura 17.11.** Interpretación gráfica de la Ecuación 17.68.

**EJEMPLO 17.3** Aplicación del teorema de Parseval

La corriente en una resistencia de  $40 \Omega$  es

$$i = 20e^{-2t} u(t) \text{ A.}$$

¿Qué porcentaje de la energía total disipada en la resistencia puede asociarse con la banda de frecuencias  $0 \leq \omega \leq 2\sqrt{3}$  rad/s?

**SOLUCIÓN**

La energía total disipada en la resistencia de  $40 \Omega$  es

$$\begin{aligned} W_{40\Omega} &= 40 \int_0^{\infty} 400e^{-4t} dt \\ &= 16.000 \left. \frac{e^{-4t}}{-4} \right|_0^{\infty} = 4000 \text{ J.} \end{aligned}$$

Podemos comprobar este cálculo de energía total utilizando el teorema de Parseval:

$$F(\omega) = \frac{20}{2 + j\omega}.$$

De aquí,

$$|F(\omega)| = \frac{20}{\sqrt{4 + \omega^2}}$$

y

$$\begin{aligned} W_{40\Omega} &= \frac{40}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{400}{4 + \omega^2} d\omega \\ &= \frac{16.000}{\pi} \left( \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{\omega}{2} \right) \Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{8000}{\pi} \left( \frac{\pi}{2} \right) = 4000 \text{ J.} \end{aligned}$$

La energía asociada con la banda de frecuencias  $0 \leq \omega \leq 2\sqrt{3}$  rad/s es

$$\begin{aligned} W_{40\Omega} &= \frac{40}{\pi} \int_0^{2\sqrt{3}} \frac{400}{4 + \omega^2} d\omega \\ &= \frac{16.000}{\pi} \left( \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{\omega}{2} \right) \Big|_0^{2\sqrt{3}} \\ &= \frac{8000}{\pi} \left( \frac{\pi}{3} \right) = \frac{8000}{3} \text{ J.} \end{aligned}$$

Por tanto, el porcentaje de la energía total asociado con este rango de frecuencias es

$$\eta = \frac{8000/3}{4000} \times 100 = 66,67\%.$$

**EJEMPLO 17.4** Aplicación del teorema de Parseval a un filtro paso banda ideal

La tensión de entrada a un filtro paso banda ideal es

$$v(t) = 120e^{-24t} u(t) \text{ V.}$$

El filtro deja pasar todas las frecuencias comprendidas entre 24 y 48 rad/s, sin atenuación, y rechaza completamente todas las frecuencias situadas fuera de esta banda de paso.

a) Dibuje  $|V(\omega)|^2$  para la tensión de entrada del filtro.

b) Dibuje  $|V_o(\omega)|^2$  para la tensión de salida del filtro.

c) ¿Qué porcentaje del contenido de energía total para  $1 \Omega$  de la señal de entrada del filtro está disponible a la salida?

**SOLUCIÓN**

a) La transformada de Fourier de la tensión de entrada al filtro es

$$V(\omega) = \frac{120}{24 + j\omega}.$$

Por tanto,

$$|V(\omega)|^2 = \frac{14.400}{576 + \omega^2}.$$

La Figura 17.12 muestra la gráfica de  $|V(\omega)|^2$  en función de  $\omega$ .

- b) El filtro paso banda ideal rechaza todas las frecuencias situadas fuera de la banda de paso, por lo que la gráfica de  $|V_o(\omega)|^2$  en función de  $\omega$  será la que se muestra en la Figura 17.13.
- c) La energía total para  $1 \Omega$  disponible a la entrada del filtro es

$$\begin{aligned} W_i &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{14.400}{576 + \omega^2} d\omega \\ &= \frac{14.400}{\pi} \left( \frac{1}{24} \tan^{-1} \frac{\omega}{24} \right) \Big|_0^\infty \\ &= \frac{600}{\pi} \frac{\pi}{2} = 300 \text{ J.} \end{aligned}$$

La energía total para  $1 \Omega$  disponible a la salida del filtro es

$$W_o = \frac{1}{\pi} \int_{-48}^{48} \frac{14.400}{576 + \omega^2} d\omega = \frac{600}{\pi} \tan^{-1} \frac{\omega}{24} \Big|_{-48}^{48}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{600}{\pi} (\tan^{-1} 2 - \tan^{-1} 1) = \frac{600}{\pi} \left( \frac{\pi}{2,84} - \frac{\pi}{4} \right) \\ &= 61,45 \text{ J.} \end{aligned}$$

El porcentaje de la energía de entrada disponible a la salida es

$$\eta = \frac{61,45}{300} \times 100 = 20,48\%.$$

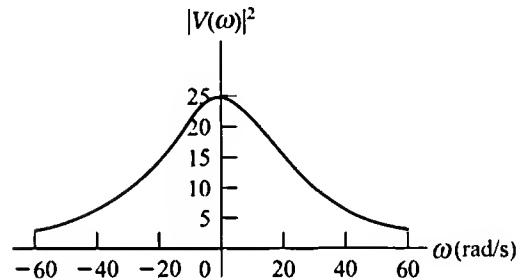


Figura 17.12.  $|V(\omega)|^2$  en función de  $\omega$  para el Ejemplo 17.4.

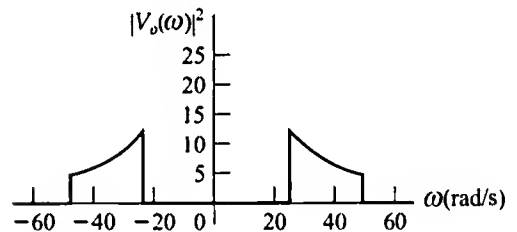


Figura 17.13.  $|V_o(\omega)|^2$  en función de  $\omega$  para el Ejemplo 17.4.

### EJEMPLO 17.5 Aplicación del teorema de Parseval a un filtro paso bajo

El teorema de Parseval hace posible calcular la energía disponible a la salida del filtro incluso cuando no conocemos la expresión en el dominio del tiempo correspondiente a  $v_o(t)$ . Suponga que la tensión de entrada al circuito  $RC$  paso bajo mostrado en la Figura 17.14 es

$$v_i(t) = 15e^{-5t} u(t) \text{ V.}$$

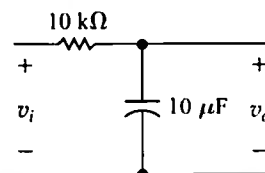


Figura 17.14. Filtro  $RC$  paso bajo para el Ejemplo 17.5.

- a) ¿Qué porcentaje de la energía para  $1 \Omega$  disponible en la señal de entrada está disponible en la señal de salida?
- b) ¿Qué porcentaje de la energía de salida está asociado con el rango de frecuencias  $0 \leq \omega \leq 10 \text{ rad/s}$ ?

### SOLUCIÓN

- a) La energía para  $1 \Omega$  en la señal de entrada al filtro es

$$W_i = \int_0^\infty (15e^{-5t})^2 dt = 225 \left. \frac{e^{-10t}}{10} \right|_0^\infty = 22,5 \text{ J.}$$

La transformada de Fourier de la tensión de salida es

$$V_o(\omega) = V_i(\omega) H(\omega),$$

donde

$$V_i(\omega) = \frac{15}{5 + j\omega}$$

$$H(\omega) = \frac{1/RC}{1/RC + j\omega} = \frac{10}{10 + j\omega}.$$

Por tanto,

$$V_o(\omega) = \frac{150}{(5 + j\omega)(10 + j\omega)}$$

$$|V_o(\omega)|^2 = \frac{22.500}{(25 + \omega^2)(100 + \omega^2)}.$$

La energía para  $1 \Omega$  disponible en la señal de salida del filtro es

$$W_o = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{22.500}{(25 + \omega^2)(100 + \omega^2)} d\omega.$$

Podemos evaluar fácilmente la integral expandiendo el integrando en una suma de fracciones parciales:

$$\frac{22.500}{(25 + \omega^2)(100 + \omega^2)} = \frac{300}{25 + \omega^2} - \frac{300}{100 + \omega^2}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} W_o &= \frac{300}{\pi} \left\{ \int_0^\infty \frac{d\omega}{25 + \omega^2} - \int_0^\infty \frac{d\omega}{100 + \omega^2} \right\} \\ &= \frac{300}{\pi} \left[ \frac{1}{5} \left( \frac{\pi}{2} \right) - \frac{1}{10} \left( \frac{\pi}{2} \right) \right] = 15 \text{ J.} \end{aligned}$$

La energía disponible en la señal de salida es, por tanto, un 66,67% de la energía disponible en la señal de entrada, es decir,

$$\eta = \frac{15}{22,5} (100) = 66,67\%.$$

- b) La energía de salida asociada con el rango de frecuencias  $0 \leq \omega \leq 10 \text{ rad/s}$  es

$$\begin{aligned} W_o' &= \frac{300}{\pi} \left\{ \int_0^{10} \frac{d\omega}{25 + \omega^2} - \int_0^{10} \frac{d\omega}{100 + \omega^2} \right\} \\ &= \frac{300}{\pi} \left[ \frac{1}{5} \tan^{-1} \frac{10}{5} - \frac{1}{10} \tan^{-1} \frac{10}{10} \right] \\ &= \frac{30}{\pi} \left( \frac{2\pi}{2,84} - \frac{\pi}{4} \right) \\ &= 13,64 \text{ J.} \end{aligned}$$

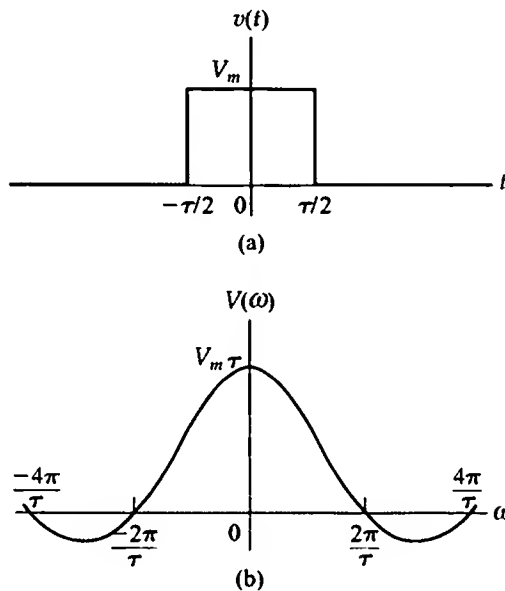
La energía total para  $1 \Omega$  en la señal de salida es 15 J, por lo que el porcentaje asociado con el rango de frecuencias que va de 0 a 10 rad/s es el 90,97%.

### Energía contenida en un pulso rectangular de tensión

Vamos a concluir nuestras explicaciones sobre el teorema de Parseval calculando la energía asociada con un pulso rectangular de tensión. En la Sección 17.1 hemos visto que la transformada de Fourier del pulso de tensión era

$$V(\omega) = V_m \tau \frac{\text{sen } \omega\tau/2}{\omega\tau/2}. \quad (17.69)$$

Para facilitar las explicaciones, hemos vuelto a dibujar el pulso de tensión y su transformada de Fourier en la Figura 17.15(a) y (b), respectivamente. Estas gráficas muestran que, a medida que se reduce la anchura del pulso de tensión ( $\tau$ ), la parte dominante del espectro de amplitud (es decir, el espectro que va de  $-2\pi/\tau$  a  $2\pi/\tau$ ) se distribuye a lo largo de un rango más amplio de frecuencias. Este resultado concuerda con nuestros anteriores comentarios acerca de la transformada operacional relacionada con el cambio de escala, es decir, con el hecho de que, al comprimir el tiempo, la frecuencia se estira, y viceversa. Para transmitir un único pulso rectangular con una fidelidad razonable, el ancho de banda del sistema debe ser lo suficientemente grande para aceptar la parte dominante del espectro de amplitud. Por tanto, la frecuencia de corte debe ser al menos de  $2\pi/\tau$  rad/s, es decir,  $1/\tau$  Hz.



**Figura 17.15.** Pulso rectangular de tensión y su transformada de Fourier.  
(a) Pulso rectangular de tensión. (b) Transformada de Fourier de  $v(t)$ .

Podemos utilizar el teorema de Parseval para calcular la fracción de la energía total asociada con  $v(t)$  que está comprendida en el rango de frecuencias  $0 \leq \omega \leq 2\pi/\tau$ . A partir de la Ecuación 17.69,

$$W = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi/\tau} V_m^2 \tau^2 \frac{\sin^2 \omega \tau / 2}{(\omega \tau / 2)^2} d\omega. \quad (17.70)$$

Para realizar la integral de la Ecuación 17.70, hacemos

$$x = \frac{\omega \tau}{2}, \quad (17.71)$$

teniendo en cuenta que

$$dx = \frac{\tau}{2} d\omega \quad (17.72)$$

y que

$$x = \pi \quad \text{cuando } \omega = 2\pi/\tau. \quad (17.73)$$



Si hacemos las sustituciones dadas por las Ecuaciones 17.71-17.73, la Ecuación 17.70 queda

$$W = \frac{2V_m^2 \tau}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin^2 x}{x^2} dx. \quad (17.74)$$

Podemos calcular la integral de la Ecuación 17.74 por partes. Si hacemos

$$u = \sin^2 x \quad (17.75)$$

$$dv = \frac{dx}{x^2}, \quad (17.76)$$

entonces

$$du = 2 \sin x \cos x dx = \sin 2x dx, \quad (17.77)$$

y

$$v = -\frac{1}{x}. \quad (17.78)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{\sin^2 x}{x^2} dx &= -\frac{\sin^2 x}{x^2} \Big|_0^\pi - \int_0^\pi -\frac{1}{x} \sin 2x dx \\ &= 0 + \int_0^\pi \frac{\sin 2x}{x} dx. \end{aligned} \quad (17.79)$$

Sustituyendo la Ecuación 17.79 en la Ecuación 17.74, se obtiene

$$W = \frac{4V_m^2 \tau}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin 2x}{x} dx. \quad (17.80)$$

Para evaluar la integral de la Ecuación 17.80, primero debemos ponerla en la forma  $\sin y/y$ . Podemos hacer esto definiendo  $y = 2x$  y observando que  $dy = 2 dx$  y que  $y = 2\pi$  cuando  $x = \pi$ . De este modo, la Ecuación 17.80 se transforma en

$$W = \frac{2V_m^2 \tau}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin y}{y} dy. \quad (17.81)$$

El valor de la integral de la Ecuación 17.81 puede encontrarse utilizando una tabla de integrales de funciones seno<sup>1</sup>. Su valor es 1,41815, por lo que

$$W = \frac{2V_m^2 \tau}{\pi} (1,41815). \quad (17.82)$$

La energía total para 1  $\Omega$  asociada con  $v(t)$  puede calcularse a partir de la integral en el dominio del tiempo o evaluando la Ecuación 17.81 con un límite superior igual a infinito. En cualquiera de los dos casos, la energía total es

---

<sup>1</sup> M. Abramowitz e I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions* (Nueva York: Dover, 1965), pág. 244.

$$W_t = V_m^2 \tau. \quad (17.83)$$

La fracción de la energía total asociada con la banda de frecuencias comprendida entre 0 y  $2\pi/\tau$  es

$$\eta = \frac{W}{W_t} = \frac{2V_m^2 \tau (1,41815)}{\pi(V_m^2 \tau)} = 0,9028. \quad (17.84)$$

Por tanto, aproximadamente el 90% de la energía asociada con  $v(t)$  está contenido en la parte dominante del espectro de amplitud.

### Evaluación del objetivo 3

- Comprender el teorema de Parseval y ser capaz de utilizarlo.

- 17.8. La tensión que cae en una resistencia de  $50 \Omega$  es

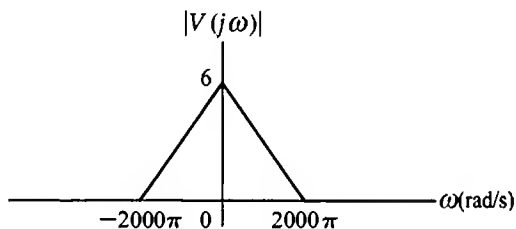
$$v = 4te^{-t} u(t) \text{ V.}$$

¿Qué porcentaje de la energía total disipada en la resistencia está asociado con la banda de frecuencias  $0 \leq \omega \leq \sqrt{3} \text{ rad/s}$ ?

**RESPUESTA** 94,23%.

- 17.9. Suponga que el módulo de la transformada de Fourier de  $v(t)$  es el que se muestra en la figura. Esta tensión se aplica a una resis-

tencia de  $6 \text{ k}\Omega$ . Calcule la energía total entregada a la resistencia.



**RESPUESTA** 4 J.

**NOTA** Trate también de resolver el Problema 17.38 del capítulo.

## RESUMEN

- La transformada de Fourier proporciona una descripción en el dominio de la frecuencia de una función aperiódica en el dominio del tiempo. Dependiendo de la naturaleza de la señal en el dominio del tiempo, podemos utilizar uno de tres posibles enfoques para hallar su transformada de Fourier:
  - Si la señal en el dominio del tiempo es un pulso con comportamiento correcto de duración finita, se utiliza la integral que define la transformada de Fourier.
  - Si existe la transformada de Laplace unilateral de  $f(t)$  y todos los polos de  $F(s)$  se encuentran en el semiplano izquierdo del plano  $s$ , puede utilizarse  $F(s)$  para hallar  $F(\omega)$ .
  - Si  $f(t)$  es una constante, una función signo, una función escalón o una función sinusoidal, la transformada de Fourier se calcula utilizando un proceso de paso al límite.
- En las Tablas 17.1 y 17.2 se proporciona una serie de transformadas de Fourier fun-

(Véase la página 848).

cionales y operacionales que resultan útiles para el análisis de circuitos (véanse las páginas 857 y 862).

- La transformada de Fourier de una señal de respuesta  $y(t)$  es

$$Y(\omega) = X(\omega) H(\omega),$$

donde  $X(\omega)$  es la transformada de Fourier de la señal de entrada  $x(t)$  y  $H(\omega)$  es la función de transferencia  $H(s)$  evaluada en  $s = j\omega$  (véase la página 862).

- La transformada de Fourier permite usar funciones de tiempo tanto positivo como negativo y resulta, por tanto, adecuada para problemas que estén escritos en tér-

minos de sucesos que den comienzo en  $t = -\infty$ . Por contraste, la transformada de Laplace unilateral resulta adecuada para aquellos problemas que estén descritos en términos de condiciones iniciales y de sucesos que tienen lugar para  $t > 0$ .

- El módulo de la transformada de Fourier elevado al cuadrado es una medida de la densidad de energía (julios por hercio) en el dominio de la frecuencia (teorema de Parseval). Por tanto, la transformada de Fourier nos permite asociar una fracción de la energía total contenida en  $f(t)$  con una banda específica de frecuencias (véase la página 866).

## PROBLEMAS

- 17.1. Utilice la integral de la definición para hallar la transformada de Fourier de las siguientes funciones:

a)  $f(t) = A \sin \frac{\pi}{2} t, \quad -2 \leq t \leq 2;$   
 $f(t) = 0,$  en todos los demás instantes.

b)  $f(t) = \frac{2A}{\tau} t + A, \quad -\frac{\tau}{2} \leq t \leq 0;$   
 $f(t) = -\frac{2A}{\tau} t + A, \quad 0 \leq t \leq \frac{\tau}{2};$   
 $f(t) = 0,$  en todos los demás instantes.

- 17.2. a) Determine la transformada de Fourier de la función mostrada en la Figura P17.2.  
 b) Determine  $F(\omega)$  para  $\omega = 0$ .  
 c) Dibuje  $|F(\omega)|$  en función de  $\omega$  cuando  $A = 1$  y  $\tau = 1$ . *Sugerencia:* evalúe  $|F(\omega)|$  para  $\omega = 0, 2, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14$  y  $15$ . Después, utilice el hecho de que  $|F(\omega)|$  es una función par de  $\omega$ .

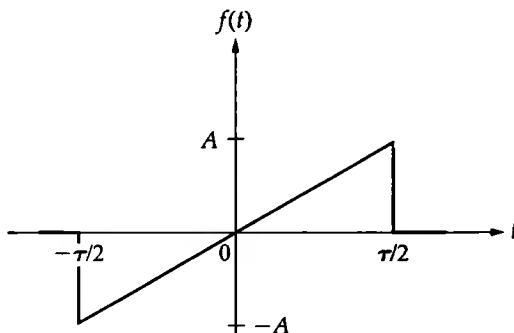


Figura P17.2

17.3. La transformada de Fourier de  $f(t)$  se muestra en la Figura P17.3.

a) Determine  $f(t)$ .

b) Evalúe  $f(0)$ .

c) Dibuje  $f(t)$  para  $-10 \leq t \leq 10$  s cuando  $A = 20\pi$  y  $\omega_0 = 2$  rad/s. *Sugerencia:* evalúe  $f(t)$  para  $t = 0, 1, 2, 3, \dots, 10$  s, y luego utilice el hecho de que  $f(t)$  es par.

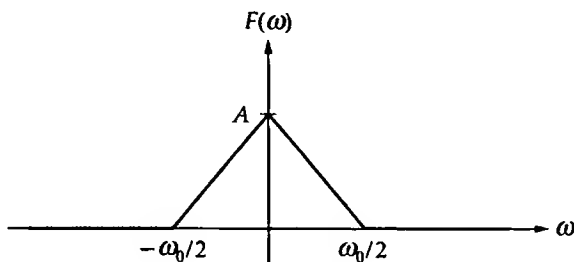


Figura P17.3

17.4. Determine la transformada de Fourier de cada una de las siguientes funciones. En todas las funciones,  $a$  es una constante real positiva y  $-\infty \leq t \leq \infty$ .

a)  $f(t) = |t|e^{-a|t|}$ ;

b)  $f(t) = t^3e^{-a|t|}$ ;

c)  $f(t) = e^{-a|t|} \cos \omega_0 t$ ;

d)  $f(t) = e^{-a|t|} \sin \omega_0 t$ ;

e)  $f(t) = \delta(t - t_0)$ .

17.5. Determine  $\mathcal{F}\{\sin \omega_0 t\}$ .

17.6. Si  $f(t)$  es una función real de  $t$ , demuestre que la integral de la transformada inversa se reduce a

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [A(\omega) \cos \omega t - B(\omega) \sin \omega t] d\omega.$$

17.7. Si  $f(t)$  es una función real e impar de  $t$ , demuestre que la integral de la transformada inversa se reduce a

$$f(t) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B(\omega) \sin \omega t d\omega.$$

17.8. Utilice la integral de la transformada inversa (Ecuación 17.9) para demostrar que  $\mathcal{F}^{-1}\{2/j\omega\} = \text{sgn}(t)$ . *Sugerencia:* utilice el Problema 17.7.

17.9. Determine  $\mathcal{F}\{\cos \omega_0 t\}$  utilizando la función de aproximación

$$f(t) = e^{-\varepsilon|t|} \cos \omega_0 t;$$

donde  $\varepsilon$  es una constante real positiva.

17.10. Demuestre que, si  $f(t)$  es una función par,

$$A(\omega) = 2 \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt,$$

$$B(\omega) = 0.$$

17.11. Demuestre que, si  $f(t)$  es una función impar,

$$A(\omega) = 0,$$

$$B(\omega) = -2 \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t \, dt.$$

17.12. a) Demuestre que  $\mathcal{F}\{df(t)/dt\} = j\omega F(\omega)$ , donde  $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$ . *Sugerencia:* utilice la integral de la definición y realice una integración por partes.

b) ¿Cuál es la restricción aplicable a  $f(t)$  si el resultado dado en el apartado (a) es válido?

c) Demuestre que  $\mathcal{F}\{d^n f(t)/dt^n\} = (j\omega)^n F(\omega)$ , donde  $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$ .

17.13. a) Demuestre que

$$\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^t f(x) \, dx\right\} = \frac{F(\omega)}{j\omega},$$

donde  $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(x)\}$ . *Sugerencia:* utilice la integral de la definición y realice una integración por partes.

b) ¿Cuál es la restricción aplicable a  $f(x)$  si el resultado dado en el apartado (a) es válido?

c) Si  $f(x) = e^{-ax} u(x)$ , ¿puede utilizarse la transformada operacional del apartado (a)? Explique su respuesta.

17.14. a) Demuestre que

$$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right), \quad a > 0.$$

b) Supuesto que  $f(at) = e^{-a|t|}$  para  $a > 0$ , dibuje  $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(at)\}$  para  $a = 0,5, 1,0$  y  $2,0$ .

¿Reflejan esas gráficas el hecho de que una *compresión* en el dominio del tiempo corresponde a un *alargamiento* en el dominio de la frecuencia?

17.15. Demuestre cada una de las siguientes transformadas operacionales:

a)  $\mathcal{F}\{f(t - a)\} = e^{-j\omega a} F(\omega);$

b)  $\mathcal{F}\{e^{j\omega_0 t} f(t)\} = F(\omega - \omega_0);$

c)  $\mathcal{F}\{f(t) \cos \omega_0 t\} = \frac{1}{2} F(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} F(\omega + \omega_0).$

17.16. Dada

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) h(t - \lambda) \, d\lambda,$$

demuestre que  $Y(\omega) = \mathcal{F}\{y(t)\} = X(\omega)H(\omega)$ , donde  $X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$  y  $H(\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\}$ . *Sugerencia:* utilice la integral de la definición para escribir

$$\mathcal{F}\{y(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) h(t - \lambda) \, d\lambda \right] e^{-j\omega t} \, dt.$$

A continuación, invierta el orden de integración y luego haga un cambio en la variable de integración, efectuando la sustitución  $u = t - \lambda$ .

- 17.17. Dada  $f(t) = f_1(t)f_2(t)$ , demuestre que  $F(\omega) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} F_1(u)F_2(\omega - u)du$ . *Sugerencia:* en primer lugar, utilice la integral de la definición para expresar  $F(\omega)$  como

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2(t)e^{-j\omega t} dt.$$

En segundo lugar, utilice la integral de la transformada inversa para escribir

$$f_1(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(u)e^{j\omega t} du.$$

A continuación, sustituya la expresión correspondiente a  $f_1(t)$  en la integral de la definición y luego cambie el orden de integración.

- 17.18. a) Demuestre que

$$(j)^n \left[ \frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n} \right] = \mathcal{F}\{t^n f(t)\}.$$

- b) Utilice el resultado del apartado (a) para hallar cada una de las siguientes transformadas de Fourier:

$$\mathcal{F}\{te^{-at}u(t)\},$$

$$\mathcal{F}\{|t|e^{-a|t|}\},$$

$$\mathcal{F}\{te^{-a|t|}\}.$$

- 17.19. Suponga que  $f(t) = f_1(t)f_2(t)$ , donde

$$f_1(t) = \cos \omega_0 t,$$

$$f_2(t) = 1, \quad -\tau/2 < t < \tau/2;$$

$$f_2(t) = 0, \quad \text{en todos los demás instantes.}$$

- a) Utilice una convolución en el dominio de la frecuencia para hallar  $F(\omega)$ .  
b) ¿Qué sucede con  $F(\omega)$  a medida que se incrementa la anchura de  $f_2(t)$ , de modo que  $f(t)$  incluye más y más ciclos de  $f_1(t)$ ?

- 17.20. a) Utilice el método de la transformada de Fourier para hallar  $v_o(t)$  en el circuito mostrado en la Figura P17.20. El valor inicial de  $v_o(t)$  es cero y la tensión de la fuente es  $100u(t)$  V.

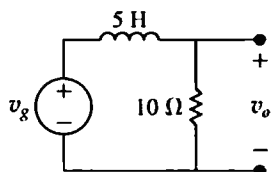


Figura P17.20

17.21. Repita el Problema 17.20 si la tensión de entrada ( $v_g$ ) se cambia a  $100 \operatorname{sgn}(t)$ .

☐

17.22. a) Utilice el método de la transformada de Fourier para hallar  $i_o(t)$  en el circuito mostrado en la Figura P17.22 si  $v_g = 36 \operatorname{sgn}(t)$  V.

☐

b) ¿Tiene sentido esa solución por lo que se refiere al comportamiento conocido del circuito? Explique su respuesta.

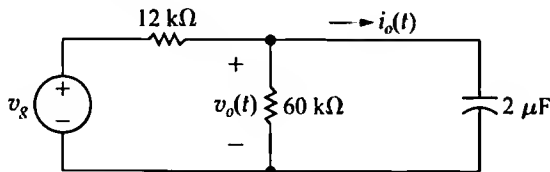


Figura P17.22

17.23. Repita el Problema 17.22, pero sustituyendo  $i_o(t)$  por  $v_o(t)$ .

☐

17.24. La fuente de tensión del circuito de la Figura P17.24 está dada por la expresión

☐

$$v_g = 3 \operatorname{sgn}(t) \text{ V.}$$

a) Calcule  $v_o(t)$ .

b) ¿Cuál es el valor de  $v_o(0^-)$ ?

c) ¿Cuál es el valor de  $v_o(0^+)$ ?

d) Utilice el método de la transformada de Laplace para hallar  $v_o(t)$  para  $t > 0^+$ .

e) ¿Concuerda la solución obtenida en el apartado (d) con la expresión correspondiente a  $v_o(t)$  para  $t > 0^+$  obtenida en el apartado (a)?

17.25. Repita el Problema 17.24, pero sustituyendo  $v_o(t)$  por  $i_o(t)$ .

☐

17.26. a) Utilice la transformada de Fourier para hallar  $i_o$  en el circuito de la Figura P17.26 si  $i_g = 200 \operatorname{sgn}(t) \mu\text{A}$ .

☐

b) ¿Tiene sentido esa solución en lo que se refiere al comportamiento conocido del circuito? Explique su respuesta.

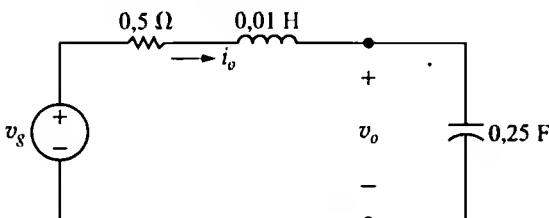


Figura P17.24

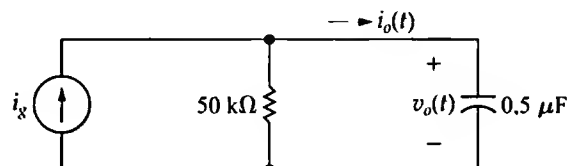


Figura P17.26

17.27. Repita el Problema 17.26, pero sustituyendo  $i_o$  por  $v_o$ .

☐

- 17.28.** ☐ a) Utilice la transformada de Fourier para hallar  $v_o$  en el circuito de la Figura P17.28 si  $i_g$  es igual a  $3e^{-5|t|}$  A.  
 b) Calcule  $v_o(0^-)$ .  
 c) Calcule  $v_o(0^+)$ .  
 d) Utilice el método de la transformada de Laplace para hallar  $v_o$  para  $t \geq 0$ .  
 e) ¿Concuerda la solución obtenida en el apartado (d) con la expresión correspondiente a  $v_o$  para  $t > 0^+$  obtenida en el apartado (a)?

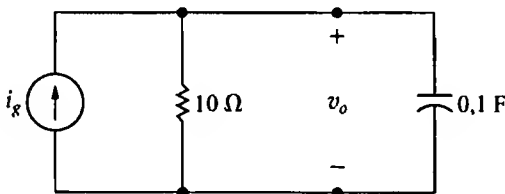


Figura P17.28

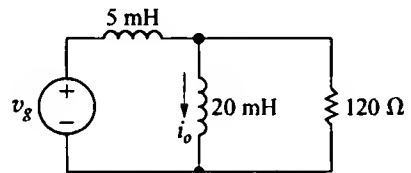


Figura P17.29

- 17.30.** ☐ a) Utilice el método de la transformada de Fourier para hallar  $v_o$  en el circuito de la Figura P17.30 cuando

$$i_g = -18e^{10t} u(-t) - 18e^{-10t} u(t) \text{ A.}$$

- b) Calcule  $v_o(0^-)$ .  
 c) Calcule  $v_o(0^+)$ .  
 d) ¿Tienen sentido las respuestas de los apartados (b) y (c) en cuanto al comportamiento conocido del circuito? Explique su respuesta.

- 17.31.** ☐ Utilice el método de la transformada de Fourier para hallar  $i_o$  en el circuito de la Figura P17.31 si  $v_g = 300 \cos 5000t$  V.

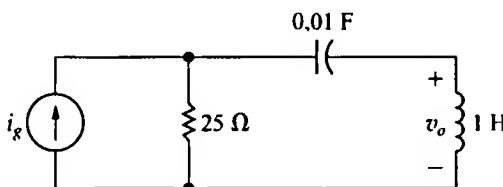


Figura P17.30

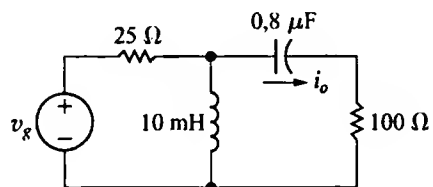


Figura P17.31

- 17.32.** ☐ La fuente de tensión del circuito de la Figura P17.32 está generando la señal

$$v_g = 5 \operatorname{sgn}(t) - 5 + 30e^{-5t} u(t) \text{ V.}$$

- a) Calcule  $v_o(0^-)$  y  $v_o(0^+)$ .  
 b) Calcule  $i_o(0^-)$  e  $i_o(0^+)$ .  
 c) Calcule  $v_o$ .



- 17.33. a) Utilice el método de la transformada de Fourier para hallar  $v_o$  en el circuito de la Figura P17.33. La fuente de tensión genera la tensión

$$v_g = 45e^{-500|t|} \text{ V.}$$

- b) Calcule  $v_o(0^-)$ ,  $v_o(0^+)$  y  $v_o(\infty)$ .  
 c) Determine  $i_L(0^-)$ ,  $i_L(0^+)$ ,  $v_C(0^-)$  y  $v_C(0^+)$ .  
 d) ¿Tienen sentido las respuestas de los apartados (b) y (c) en lo que se refiere al comportamiento conocido del circuito? Explique su respuesta.

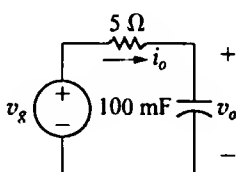


Figura P17.32

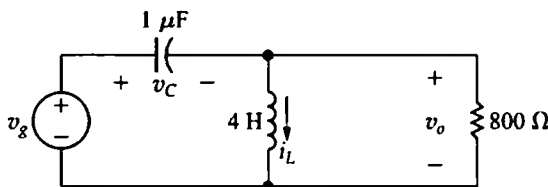


Figura P17.33

- 17.34. a) Utilice el método de la transformada de Fourier para hallar  $v_o$  en el circuito de la Figura P17.34 cuando

$$v_g = 36e^{4t} u(-t) - 36e^{-4t} u(t) \text{ V.}$$

- b) Calcule  $v_o(0^-)$ .  
 c) Calcule  $v_o(0^+)$ .

- 17.35. Cuando la tensión de entrada al sistema mostrado en la Figura P17.35 es  $15u(t)$  V, la tensión de salida es

$$v_o = [10 + 30e^{-20t} - 40e^{-30t}] u(t) \text{ V.}$$

¿Cuál es la tensión de salida si  $v_i = 15 \operatorname{sgn}(t)$  V?

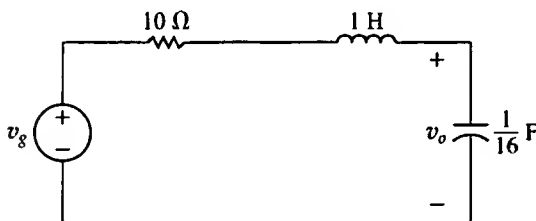


Figura P17.34

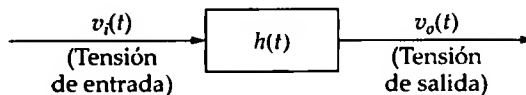


Figura P17.35

- 17.36. Suponga que  $F(\omega) = e^\omega u(-\omega) + e^{-\omega} u(\omega)$ .

- a) Calcule  $f(t)$ .  
 b) Calcule la energía para  $1 \Omega$  asociada con  $f(t)$  mediante una integración en el dominio del tiempo.  
 c) Repita el apartado (b) utilizando una integración en el dominio de la frecuencia.  
 d) Calcule el valor de  $\omega_1$  si  $f(t)$  tiene un 90% de la energía en la banda de frecuencias  $0 \leq \omega \leq \omega_1$ .

17.37. La corriente de entrada en el circuito mostrado en la Figura P17.37 es

$$i_g = 30e^{-2t} \mu\text{A}, \quad t \geq 0^+.$$

¿Qué porcentaje del contenido total de energía para  $1 \Omega$  en la señal de salida está comprendido en el rango de frecuencias que va de 0 a 4 rad/s?

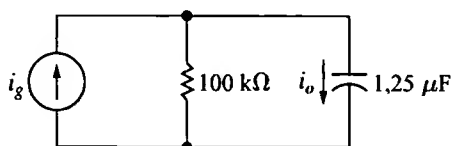


Figura P17.37

17.38. La tensión de entrada en el circuito de la Figura P17.38 es  $v_g = 30e^{-|t|}$  V.

- Calcule  $v_o(t)$ .
- Dibuje  $|V_g(\omega)|$  para  $-5 \leq \omega \leq 5$  rad/s.
- Dibuje  $|V_o(\omega)|$  para  $-5 \leq \omega \leq 5$  rad/s.
- Calcule el contenido de energía para  $1 \Omega$  de  $v_g$ .
- Calcule el contenido de energía para  $1 \Omega$  de  $v_o$ .
- ¿Qué porcentaje del contenido total de energía para  $1 \Omega$  en  $v_g$  cae en el rango de frecuencias  $0 \leq \omega \leq 2$  rad/s?
- Repita el apartado (f) para  $v_o$ .

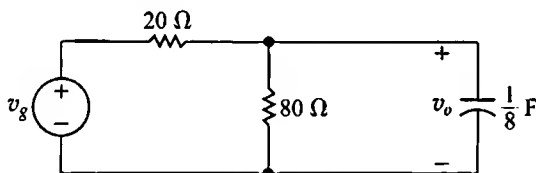


Figura P17.38

17.39. El circuito mostrado en la Figura P17.39 está excitado por una corriente

$$i_g = 12e^{-10t} u(t) \text{ A}.$$

¿Qué porcentaje del contenido de energía total para  $1 \Omega$  en la corriente de salida  $i_o$  cae en el rango de frecuencias  $0 \leq \omega \leq 100$  rad/s?

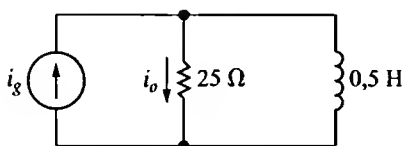


Figura P17.39

17.40. El espectro de amplitud de la tensión de entrada al filtro RC paso alto de la Figura P17.40 es

$$V_i(\omega) = \frac{200}{|\omega|}, \quad -100 \leq \omega \leq 200 \text{ rad/s};$$

$$V_i(\omega) = 0, \quad \text{para todas las demás frecuencias.}$$

- Dibuje  $|V_i(\omega)|^2$  para  $-300 \leq \omega \leq 300$  rad/s.
- Dibuje  $|V_o(\omega)|^2$  para  $-300 \leq \omega \leq 300$  rad/s.
- Calcule la energía para  $1 \Omega$  en la señal de entrada del filtro.
- Calcule la energía para  $1 \Omega$  en la señal de salida del filtro.

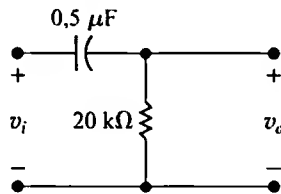


Figura P17.40

**17.41.** La tensión de entrada al filtro  $RC$  paso alto de la Figura P17.41 es

$$v_i(t) = Ae^{-at} u(t).$$

Sea  $\alpha$  la frecuencia de corte del filtro, es decir  $\alpha = 1/RC$ .

- ¿Qué porcentaje de la energía de la señal a la salida del filtro está asociado con la banda de frecuencias  $0 \leq \omega \leq \alpha$  si  $\alpha = a$ ?
- Repita el apartado (a), supuesto que  $\alpha = \sqrt{3}a$ .
- Repita el apartado (a), supuesto que  $\alpha = a/\sqrt{3}$ .

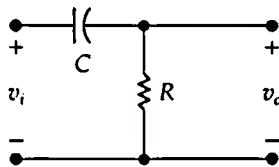


Figura P17.41

# CAPÍTULO

# 18

## Cuadripolos

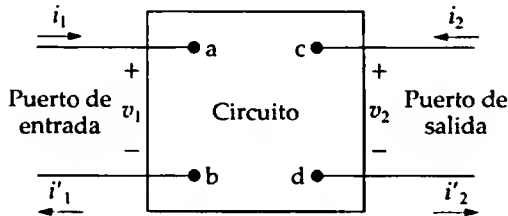
### Contenido del capítulo

- 18.1. Ecuaciones de los terminales
- 18.2. Parámetros de un cuadripolo
- 18.3. Análisis de un cuadripolo con terminación
- 18.4. Cuadripolos interconectados

Hasta el momento nos hemos centrado especialmente en el comportamiento de los circuitos en una pareja de terminales especificada. Recuerde cómo introdujimos los circuitos equivalentes de Thévenin y de Norton con el fin exclusivo de simplificar el análisis de circuitos en relación con una pareja de terminales dada. Al analizar algunos sistemas eléctricos, resulta conveniente también centrarse en dos parejas de terminales distintos. En particular, esto resulta útil cuando se introduce una señal a través de una pareja de terminales y a continuación, después de que el sistema procese la señal, se la extrae a través de una segunda pareja de terminales. Puesto que las parejas de terminales representan los puntos a través de los cuales se introducen o extraen señales en el sistema, se las suele denominar **puertos** del sistema. En este capítulo, vamos a limitar nuestro análisis a circuitos que tengan un puerto de entrada y un puerto de salida. La Figura 18.1 ilustra un circuito básico de doble puerto o **cuadripolo**. La utilización de este bloque componente está sujeta a diversas restricciones. En primer lugar, no puede haber energía almacenada en el circuito. En segundo lugar, tampoco puede haber dentro del circuito fuentes independientes; sin embargo, sí está permitido que existan fuentes dependientes. En tercer lugar, la corriente que entra a través de un puerto debe ser igual a la corriente que sale del mismo, es decir,  $i_1 = i_1'$  e  $i_2 = i_2'$ . En cuarto lugar, todas las conexiones externas deben realizarse o bien con el puerto de entrada o bien con el puerto de salida; no está permitido realizar conexiones entre los puertos, es decir, entre los terminales a y c, a y d, b y c o b y d. Estas restricciones simplemente limitan el rango de los problemas de circuitos a los que son aplicables las fórmulas relativas a los cuadripolos.

El principio fundamental que subyace al modelado de un sistema como un cuadripolo es que sólo nos interesan las

variables en los terminales ( $i_1$ ,  $v_1$ ,  $i_2$  y  $v_2$ ). No nos interesa calcular las corrientes y tensiones internas al circuito. Ya hemos señalado la importancia del comportamiento en los terminales a la hora de analizar circuitos basados en amplificador operacional. En este capítulo, vamos a formalizar dicho enfoque introduciendo los parámetros de los cuadripolos.



**Figura 18.1.** Circuito básico de doble puerto o cuadripolo.

## Objetivos del capítulo

1. Ser capaz de calcular cualquier conjunto de parámetros de un cuadripolo mediante alguno de los siguientes métodos.
  - análisis de circuitos;
  - medidas realizadas en un circuito;
  - conversión a partir de otro conjunto de parámetros del cuadripolo utilizando la Tabla 18.1.
2. Ser capaz de analizar un cuadripolo con terminación para hallar las corrientes, las tensiones, las impedancias y los cocientes de interés utilizando la Tabla 18.2.
3. Saber cómo analizar una interconexión en cascada de cuadripolos.

## 18.1. Ecuaciones de los terminales

Al considerar un circuito como una red de doble puerto o cuadripolo, lo que nos interesa es relacionar la corriente y la tensión en uno de los puertos con la corriente y la tensión en el otro. La Figura 18.1 muestra las polaridades de referencia para las tensiones en los terminales y las direcciones de referencia para las corrientes que pasan a través de los terminales. Las referencias en ambos puertos son simétricas; es decir, en cada puerto la corriente entra por el terminal superior y la tensión de cada puerto representa un incremento desde el terminal inferior al terminal superior. Esta simetría hace que resulte más fácil generalizar el análisis de un cuadripolo y es la razón de que se la utilice con carácter general en toda la literatura técnica.

La descripción más general de un cuadripolo es la que puede realizarse en el dominio de  $s$ . Para redes puramente resistivas, el análisis se reduce a la resolución de una serie de circuitos resistivos. Los problemas de régimen permanente sinusoidal pueden resolverse encontrando primero las apropiadas expresiones en el dominio de  $s$  y luego sustituyendo  $s$  por  $j\omega$ , o mediante análisis directo en el dominio de la frecuencia. Aquí, escribiremos todas las ecuaciones en el dominio de  $s$ ; las redes resistivas y el análisis en régimen permanente sinusoidal serán simplemente casos especiales. La Figura 18.2 muestra el bloque componente básico en función de las variables en el dominio de  $s$ , es decir,  $I_1$ ,  $V_1$ ,  $I_2$  y  $V_2$ .

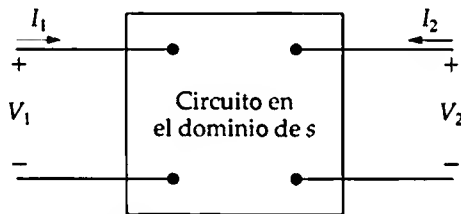


Figura 18.2. Bloque componente básico que representa un cuadripolo en el dominio de  $s$ .

De estas cuatro variables de los terminales, sólo dos de ellas son independientes. Así, para cualquier circuito, una vez que especifiquemos dos de las variables, podremos encontrar las dos incógnitas restantes. Por ejemplo, conociendo  $V_1$  y  $V_2$  y el circuito contenido dentro de la caja, podremos determinar  $I_1$  e  $I_2$ . Por tanto, podemos describir un cuadripolo mediante un sistema de sólo dos ecuaciones. Sin embargo, hay seis formas distintas en las que combinar las cuatro variables:

$$\begin{aligned} V_1 &= z_{11}I_1 + z_{12}I_2, \\ V_2 &= z_{21}I_1 + z_{22}I_2; \end{aligned} \quad (18.1)$$

$$\begin{aligned} I_1 &= y_{11}V_1 + y_{12}V_2, \\ I_2 &= y_{21}V_1 + y_{22}V_2; \end{aligned} \quad (18.2)$$

$$\begin{aligned} V_1 &= a_{11}V_2 - a_{12}I_2, \\ I_1 &= a_{21}V_2 - a_{22}I_2; \end{aligned} \quad (18.3)$$

$$\begin{aligned} V_2 &= b_{11}V_1 - b_{12}I_1, \\ I_2 &= b_{21}V_1 - b_{22}I_1; \end{aligned} \quad (18.4)$$

$$\begin{aligned} V_1 &= h_{11}I_1 + h_{12}V_2, \\ I_2 &= h_{21}I_1 + h_{22}V_2; \end{aligned} \quad (18.5)$$

$$\begin{aligned} I_1 &= g_{11}V_1 + g_{12}I_2, \\ V_2 &= g_{21}V_1 + g_{22}I_2. \end{aligned} \quad (18.6)$$

Estos seis conjuntos de ecuaciones pueden también considerarse como tres parejas de relaciones mutuamente inversas. La primera pareja, las Ecuaciones 18.1, proporciona las tensiones de entrada y de salida en función de las corrientes de entrada y de salida. El segundo conjunto, las Ecuaciones 18.2, nos da la relación inversa, es decir, las corrientes de entrada y de salida en función de las tensiones de entrada y de salida. Las Ecuaciones 18.3 y 18.4 también representan relaciones inversas, al igual que las Ecuaciones 18.5 y 18.6.

Los coeficientes de las variables de corriente y/o tensión en el lado derecho de las Ecuaciones 18.1–18.6 se denominan **parámetros** del cuadripolo. Así, cuando utilicemos las Ecuaciones 18.1, nos referiremos a los parámetros  $z$  del circuito. De forma similar, haremos referencia en cada caso a los parámetros  $y$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $h$  y  $g$  de la red.

## 18.2. Parámetros de un cuadripolo

Podemos determinar los parámetros de cualquier circuito aplicando técnicas de análisis o mediante medidas realizadas en el circuito. Los cálculos o medidas que haya que realizar se deducen directamente de las ecuaciones de los parámetros. Por ejemplo, suponga que el problema consiste en hallar los parámetros  $z$  de un circuito. A partir de las Ecuaciones 18.1,

$$z_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_2=0} \Omega, \quad (18.7)$$

$$z_{12} = \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{I_1=0} \Omega, \quad (18.8)$$

$$z_{21} = \left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{I_2=0} \Omega, \quad (18.9)$$

$$z_{22} = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{I_1=0} \Omega. \quad (18.10)$$

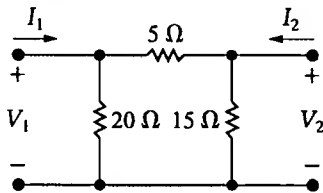
Las Ecuaciones 18.7-18.10 revelan que los cuatro parámetros  $z$  pueden describirse de la forma siguiente:

- $z_{11}$  es la impedancia vista al mirar en el puerto 1 cuando el puerto 2 está abierto;
- $z_{12}$  es una impedancia de transferencia que es igual al cociente entre la tensión del puerto 1 y la corriente del puerto 2 cuando el puerto 1 está abierto;
- $z_{21}$  es una impedancia de transferencia que es igual al cociente entre la tensión del puerto 2 y la corriente del puerto 1 cuando el puerto 2 está abierto;
- $z_{22}$  es la impedancia vista al mirar en el puerto 2 cuando el puerto 1 está abierto.

Por tanto, los parámetros de impedancia pueden calcularse o medirse abriendo primero el puerto 2 y determinando los cocientes  $V_1/I_1$  y  $V_2/I_1$ , y luego abriendo el puerto 1 y determinando los cocientes  $V_1/I_2$  y  $V_2/I_2$ . El Ejemplo 18.1 ilustra la determinación de los parámetros  $z$  para un circuito resistivo.

**EJEMPLO 18.1** Determinación de los parámetros  $z$  en un cuadripolo

Calcule los parámetros  $z$  para el circuito mostrado en la Figura 18.3.



**Figura 18.3.** Circuito del Ejemplo 18.1.

**SOLUCIÓN**

El circuito es puramente resistivo, por lo que el circuito equivalente en el dominio de  $s$  también será puramente resistivo. Con el puerto 2 abierto, es decir, con  $I_2 = 0$ , la resistencia que se ve al mirar hacia el puerto 1 es la resistencia de  $20\ \Omega$  en paralelo con la combinación en serie de las resistencias de  $5$  y  $15\ \Omega$ . Por tanto,

$$z_{11} = \frac{V_1}{I_1} \Big|_{I_2=0} = \frac{(20)(20)}{40} = 10\ \Omega.$$

Cuando  $I_2$  es cero,  $V_2$  es

$$V_2 = \frac{V_1}{15+5}(15) = 0,75V_1,$$

por lo que

$$z_{21} = \frac{V_2}{I_1} \Big|_{I_2=0} = \frac{0,75V_1}{V_1/10} = 7,5\ \Omega.$$

Cuando  $I_1$  es cero, la resistencia que se ve al mirar hacia el puerto 2 es la resistencia de  $15\ \Omega$  en paralelo con la combinación en serie de las resistencias de  $5$  y  $20\ \Omega$ . Por tanto,

$$z_{22} = \frac{V_2}{I_2} \Big|_{I_1=0} = \frac{(15)(25)}{40} = 9,375\ \Omega.$$

Cuando el puerto 1 está abierto,  $I_1$  es cero y la tensión  $V_1$  es

$$V_1 = \frac{V_2}{5+20}(20) = 0,8V_2.$$

Con el puerto 1 abierto, la corriente que entra por el puerto 2 es

$$I_2 = \frac{V_2}{9,375}.$$

Por tanto,

$$z_{12} = \frac{V_1}{I_2} \Big|_{I_1=0} = \frac{0,8V_2}{V_2/9,375} = 7,5\ \Omega.$$

Las Ecuaciones 18.7-18.10 y el Ejemplo 18.1 muestran por qué los parámetros de las Ecuaciones 18.1 se denominan parámetros  $z$ . Cada parámetro es el cociente entre una tensión y una corriente, por lo que se trata de una impedancia y tiene como dimensión los ohmios.

Podemos utilizar el mismo proceso para determinar los restantes parámetros de los puertos, los cuales pueden calcularse o medirse. Cada parámetro de un puerto se obtiene abriendo o cortocircuitando un puerto. Además, cada parámetro de puerto será una impedancia, una admitancia o un cociente adimensional. El cociente adimensional es el cociente de dos tensiones o de dos corrientes. Las Ecuaciones 18.11-18.15 resumen estas observaciones.

$$\begin{aligned} y_{11} &= \frac{I_1}{V_1} \Big|_{V_2=0} \text{ S}, & y_{12} &= \frac{I_1}{V_2} \Big|_{V_1=0} \text{ S}, \\ y_{21} &= \frac{I_2}{V_1} \Big|_{V_2=0} \text{ S}, & y_{22} &= \frac{I_2}{V_2} \Big|_{V_1=0} \text{ S}. \end{aligned} \quad (18.11)$$



$$\begin{aligned} a_{11} &= \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_2=0}, & a_{12} &= -\left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{V_2=0} \Omega, \\ a_{21} &= \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{I_2=0} S, & a_{22} &= -\left. \frac{I_1}{I_2} \right|_{V_2=0}. \end{aligned} \quad (18.12)$$

$$\begin{aligned} b_{11} &= \left. \frac{V_2}{V_1} \right|_{I_1=0}, & b_{12} &= -\left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{V_1=0} \Omega, \\ b_{21} &= \left. \frac{I_2}{V_1} \right|_{I_1=0} S, & b_{22} &= -\left. \frac{I_2}{I_1} \right|_{V_1=0}. \end{aligned} \quad (18.13)$$

$$\begin{aligned} h_{11} &= \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{V_2=0} \Omega, & h_{12} &= \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_1=0}, \\ h_{21} &= \left. \frac{I_2}{I_1} \right|_{V_2=0}, & h_{22} &= \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{I_1=0} S. \end{aligned} \quad (18.14)$$

$$\begin{aligned} g_{11} &= \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{I_2=0} S, & g_{12} &= \left. \frac{I_1}{I_2} \right|_{V_1=0}, \\ g_{21} &= \left. \frac{V_2}{V_1} \right|_{I_2=0}, & g_{22} &= \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{V_1=0} \Omega. \end{aligned} \quad (18.15)$$

Los parámetros de los cuadripolos también pueden describirse en relación con los conjuntos recíprocos de ecuaciones. Los parámetros de impedancia y admitancia están agrupados en los denominados parámetros de inmitancia. El término **inmitancia** denota un valor que puede ser o una impedancia o una admitancia. Los parámetros  $a$  y  $b$  se denominan parámetros de **transmisión**, porque describen la tensión y la corriente en uno de los extremos de la red de doble puerto en función de la tensión y la corriente en el otro extremo. Los parámetros de inmitancia y de transmisión son las elecciones más normales a la hora de relacionar las variables de ambos puertos. En otras palabras, permite relacionar las variables de tensión con las de corriente o las variables de entrada con las de salida. Los parámetros  $h$  y  $g$  relacionan variables cruzadas, es decir, una tensión de entrada y una corriente de salida con una tensión de salida y una corriente de entrada. Es por eso por lo que los parámetros  $h$  y  $g$  se denominan parámetros **híbridos**.

El Ejemplo 18.2 ilustra cómo puede emplearse un conjunto de medidas realizadas en los terminales de un cuadripolo para calcular los parámetros  $a$ .

### EJEMPLO 18.2 Determinación de los parámetros $a$ a partir de una serie de medidas

Las siguientes medidas se refieren a un cuadripolo operando en régimen permanente sinusoidal. Con el puerto 2 abierto, se aplica una tensión igual a  $150 \cos 4000t$  V al puerto 1. La corriente que entra a través del puerto 1 es  $25 \cos$

$(4000t - 45^\circ)$  A y la tensión en el puerto 2 es  $100 \cos (4000t + 15^\circ)$  V. Con el puerto 2 cortocircuitado, se aplica al puerto 1 una tensión igual a  $30 \cos 4000t$  V. La corriente que entra a través del puerto 1 es  $1,5 \cos (4000t + 30^\circ)$  A y la corrien-

te que entra a través del puerto 2 es  $0,25 \cos(4000t + 150^\circ)$  A. Calcule los parámetros  $a$  que permiten describir el comportamiento del circuito en régimen permanente sinusoidal.

### SOLUCIÓN

El primer conjunto de medidas nos da

$$V_1 = 150 \angle 0^\circ \text{ V}, \quad I_1 = 150 \angle -45^\circ \text{ A},$$

$$V_2 = 100 \angle 15^\circ \text{ V}, \quad I_2 = 0 \text{ A}.$$

A partir de las Ecuaciones 18.12,

$$a_{11} = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_2=0} = \frac{150 \angle 0^\circ}{100 \angle 15^\circ} = 1,5 \angle -15^\circ,$$

$$a_{21} = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{I_2=0} = \frac{25 \angle -45^\circ}{100 \angle 15^\circ} = 0,25 \angle -60^\circ \text{ S}.$$

El segundo conjunto de medidas nos da

$$V_1 = 30 \angle 0^\circ \text{ V}, \quad I_1 = 1,5 \angle 30^\circ \text{ A},$$

$$V_2 = 0 \text{ V}, \quad I_2 = 0,25 \angle 150^\circ \text{ A}.$$

Por tanto,

$$a_{12} = -\left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{V_2=0} = \frac{-30 \angle 0^\circ}{0,25 \angle 150^\circ} = 120 \angle 30^\circ \Omega,$$

$$a_{21} = -\left. \frac{I_1}{I_2} \right|_{V_2=0} = \frac{-1,5 \angle 30^\circ}{0,25 \angle 150^\circ} = 6 \angle 60^\circ.$$

### Evaluación del objetivo 1

■ Ser capaz de calcular cualquier conjunto de parámetros de un cuadripolo.

18.1. Calcule los parámetros  $y$  para el circuito de la Figura 18.3.

#### RESPUESTA

$$y_{11} = 0,25 \text{ S}, \quad y_{12} = y_{21} = -0,2 \text{ S},$$

$$y_{22} = \frac{4}{15} \text{ S}.$$

18.2. Calcule los parámetros  $g$  y  $h$  para el circuito de la Figura 18.3.

#### RESPUESTA

$$g_{11} = 0,1 \text{ S}; \quad g_{12} = -0,75; \quad g_{21} = 0,75;$$

$$g_{22} = 3,75 \Omega; \quad h_{11} = 4 \Omega; \quad h_{12} = 0,8;$$

$$h_{21} = -0,8; \quad h_{22} = 0,1067 \text{ S}.$$

18.3. Las siguientes medidas han sido realizadas en un circuito resistivo de doble puerto. Aplicando 50 mV al puerto 1 y con el puerto 2 abierto, la corriente que entra por el puerto 1 es de  $5 \mu\text{A}$  y la tensión en bornes del puerto 2 es de 200 mV. Con el puerto 1 cortocircuitado y aplicando 10 mV al puerto 2, la corriente que entra por el puerto 1 es de  $2 \mu\text{A}$  y la corriente que entra por el puerto 2 es de  $0,5 \mu\text{A}$ . Calcule los parámetros  $g$  de la red.

#### RESPUESTA

$$g_{11} = 0,1 \text{ mS}; \quad g_{12} = 4; \quad g_{21} = 4;$$

$$g_{22} = 20 \text{ k}\Omega.$$

**NOTA** Trate también de resolver los Problemas 18.2, 18.4 y 18.5 del capítulo.

### Relaciones entre los parámetros de los cuadripolos

Puesto que los seis conjuntos de ecuaciones relacionan las mismas variables, los parámetros asociados con cualquier pareja de ecuaciones deben estar relacionados con los parámetros de todas las demás parejas. En otras palabras, si conocemos uno de los conjuntos de parámetros, podemos hallar todos los

demás conjuntos a partir de él. Debido a la cantidad de operaciones algebraicas implicadas en estas deducciones, nos limitaremos a enumerar los resultados en la Tabla 18.1.

Aunque no vamos a demostrar todas las relaciones indicadas en la Tabla 18.1, sí demostraremos las relaciones existentes entre los parámetros  $z$  y  $y$  y entre los parámetros  $z$  y  $a$ . Estas demostraciones ilustran el proceso general que se sigue para poner en relación un conjunto de parámetros con otro. Para hallar los parámetros  $z$  en función de los parámetros  $y$ , resolvemos primero las Ecuaciones 18.2 para hallar los valores correspondientes a  $V_1$  y  $V_2$ . Después, comparamos los coeficientes de  $I_1$  e  $I_2$  en las expresiones resultantes con los coeficientes de  $I_1$  e  $I_2$  de las Ecuaciones 18.1. A partir de las Ecuaciones 18.2,

$$V_1 = \frac{\begin{vmatrix} I_1 & y_{12} \\ I_2 & y_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{vmatrix}} = \frac{y_{22}}{\Delta y} I_1 - \frac{y_{12}}{\Delta y} I_2, \quad (18.16)$$

$$V_2 = \frac{\begin{vmatrix} y_{11} & I_1 \\ y_{21} & I_2 \end{vmatrix}}{\Delta y} = -\frac{y_{21}}{\Delta y} I_1 + \frac{y_{11}}{\Delta y} I_2. \quad (18.17)$$

**Tabla 18.1.** Tabla de conversión de parámetros.

$$z_{11} = \frac{y_{22}}{\Delta y} = \frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{b_{22}}{b_{21}} = \frac{\Delta h}{h_{22}} = \frac{1}{g_{11}}$$

$$y_{22} = \frac{z_{11}}{\Delta z} = \frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{b_{22}}{b_{12}} = \frac{\Delta h}{h_{11}} = \frac{1}{g_{22}}$$

$$z_{12} = -\frac{y_{12}}{\Delta y} = -\frac{\Delta a}{a_{21}} = -\frac{1}{b_{21}} = -\frac{h_{12}}{h_{22}} = -\frac{g_{12}}{g_{11}}$$

$$a_{11} = \frac{z_{11}}{z_{21}} = -\frac{y_{22}}{y_{21}} = \frac{b_{22}}{\Delta b} = -\frac{\Delta h}{h_{21}} = \frac{1}{g_{21}}$$

$$z_{21} = \frac{-y_{21}}{\Delta y} = \frac{1}{a_{21}} = \frac{\Delta b}{b_{21}} = -\frac{h_{21}}{h_{22}} = \frac{g_{21}}{g_{11}}$$

$$a_{12} = \frac{\Delta z}{z_{21}} = -\frac{1}{y_{21}} = \frac{b_{12}}{\Delta b} = \frac{-h_{11}}{h_{21}} = \frac{g_{22}}{g_{21}}$$

$$z_{22} = \frac{y_{11}}{\Delta y} = \frac{a_{22}}{a_{21}} = \frac{b_{11}}{b_{21}} = \frac{1}{h_{22}} = \frac{\Delta g}{g_{11}}$$

$$a_{21} = \frac{1}{z_{21}} = -\frac{\Delta y}{y_{21}} = \frac{b_{21}}{\Delta b} = -\frac{h_{22}}{h_{21}} = \frac{g_{11}}{g_{21}}$$

$$y_{11} = \frac{z_{22}}{\Delta z} = \frac{a_{22}}{a_{12}} = \frac{b_{11}}{b_{12}} = \frac{1}{h_{11}} = \frac{\Delta g}{g_{22}}$$

$$a_{22} = \frac{z_{22}}{z_{21}} = -\frac{y_{11}}{y_{21}} = \frac{b_{11}}{\Delta b} = -\frac{1}{h_{21}} = \frac{\Delta g}{g_{21}}$$

$$y_{12} = -\frac{z_{12}}{\Delta z} = -\frac{\Delta a}{a_{12}} = -\frac{1}{b_{12}} = -\frac{h_{12}}{h_{11}} = \frac{g_{12}}{g_{22}}$$

$$b_{11} = \frac{z_{22}}{z_{12}} = -\frac{y_{11}}{y_{12}} = \frac{a_{22}}{\Delta a} = \frac{1}{h_{12}} = -\frac{\Delta g}{g_{12}}$$

$$y_{21} = -\frac{z_{21}}{\Delta z} = -\frac{1}{a_{12}} = -\frac{\Delta b}{b_{12}} = \frac{h_{21}}{h_{11}} = -\frac{g_{21}}{g_{22}}$$

$$b_{12} = \frac{\Delta z}{z_{12}} = -\frac{1}{y_{12}} = \frac{a_{12}}{a} = \frac{h_{11}}{h_{12}} = -\frac{g_{22}}{g_{12}}$$

(Continúa)

**Tabla 18.1.** Tabla de conversión de parámetros. (Cont.)

$$b_{21} = \frac{1}{z_{12}} = -\frac{\Delta y}{y_{12}} = \frac{a_{21}}{\Delta a} = \frac{h_{22}}{h_{12}} = -\frac{g_{11}}{g_{12}}$$

$$g_{21} = \frac{z_{21}}{z_{11}} = -\frac{y_{21}}{y_{22}} = \frac{1}{a_{11}} = \frac{\Delta b}{b_{22}} = -\frac{h_{21}}{\Delta h}$$

$$b_{22} = \frac{z_{11}}{z_{12}} = \frac{y_{22}}{y_{12}} = \frac{a_{11}}{\Delta a} = \frac{\Delta h}{h_{12}} = -\frac{1}{g_{12}}$$

$$g_{22} = \frac{\Delta z}{z_{11}} = \frac{1}{y_{22}} = \frac{a_{12}}{a_{11}} = \frac{b_{12}}{b_{22}} = \frac{h_{11}}{\Delta h}$$

$$h_{11} = \frac{\Delta z}{z_{22}} = \frac{1}{y_{11}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{b_{12}}{b_{11}} = \frac{g_{22}}{\Delta g}$$

$$\Delta z = z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}$$

$$h_{12} = \frac{z_{12}}{z_{22}} = -\frac{y_{12}}{y_{11}} = \frac{\Delta a}{a_{22}} = \frac{1}{b_{11}} = -\frac{g_{12}}{\Delta g}$$

$$\Delta y = y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21}$$

$$h_{21} = -\frac{z_{21}}{z_{22}} = \frac{y_{21}}{y_{11}} = -\frac{1}{a_{22}} = -\frac{\Delta b}{b_{11}} = -\frac{g_{21}}{\Delta g}$$

$$\Delta a = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$h_{22} = \frac{1}{z_{22}} = \frac{\Delta y}{y_{11}} = \frac{a_{21}}{a_{22}} = \frac{b_{21}}{b_{11}} = \frac{g_{11}}{\Delta g}$$

$$\Delta b = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}$$

$$g_{11} = \frac{1}{z_{11}} = \frac{\Delta y}{y_{22}} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{b_{21}}{b_{22}} = \frac{h_{22}}{\Delta h}$$

$$\Delta h = h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21}$$

$$g_{12} = -\frac{z_{12}}{z_{11}} = \frac{y_{12}}{y_{22}} = -\frac{\Delta a}{a_{11}} = -\frac{1}{b_{22}} = -\frac{h_{12}}{\Delta h}$$

$$\Delta g = g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}$$

Comparando las Ecuaciones 18.16 y 18.17 con las Ecuaciones 18.1, vemos que

$$z_{11} = \frac{y_{22}}{\Delta y}, \quad (18.18)$$

$$z_{12} = -\frac{y_{12}}{\Delta y}, \quad (18.19)$$

$$z_{21} = -\frac{y_{21}}{\Delta y}, \quad (18.20)$$

$$z_{22} = \frac{y_{11}}{\Delta y}. \quad (18.21)$$

Para hallar los parámetros  $z$  en función de los parámetros  $a$ , reordenamos las Ecuaciones 18.3 en la forma de las Ecuaciones 18.1 y luego comparamos los coeficientes. A partir de la segunda ecuación del conjunto de Ecuaciones 18.3,

$$V_2 = \frac{1}{a_{21}} I_1 + \frac{a_{22}}{a_{21}} I_2. \quad (18.22)$$

Por tanto, sustituyendo la Ecuación 18.22 en la primera ecuación del conjunto de Ecuaciones 18.3 obtenemos

$$V_1 = \frac{a_{11}}{a_{21}} I_1 + \left( \frac{a_{11}a_{22}}{a_{21}} - a_{12} \right) I_2. \quad (18.23)$$

A partir de la Ecuación 18.23,

$$z_{11} = \frac{a_{11}}{a_{21}}, \quad (18.24)$$

$$z_{12} = \frac{\Delta a}{a_{21}}. \quad (18.25)$$

A partir de la Ecuación 18.22,

$$z_{21} = \frac{1}{a_{21}}, \quad (18.26)$$

$$z_{22} = \frac{a_{22}}{a_{21}}. \quad (18.27)$$

El Ejemplo 18.3 demuestra la utilidad de la tabla de conversión de parámetros.

### EJEMPLO 18.3 Cálculo de los parámetros $h$ a partir de una serie de medidas y de la Tabla 18.1

Realizamos dos conjuntos de medidas en un circuito resistivo de doble puerto. El primer conjunto se realiza con el puerto 2 abierto y el segundo conjunto con el puerto 2 cortocircuitado. Los resultados son los siguientes:

Puerto 2 abierto	Puerto 2 cortocircuitado
$V_1 = 10 \text{ mV}$	$V_1 = 24 \text{ mV}$
$I_1 = 10 \text{ } \mu\text{A}$	$I_1 = 20 \text{ } \mu\text{A}$
$V_2 = -40 \text{ V}$	$I_2 = 1 \text{ mA}$

Calcule los parámetros  $h$  del circuito.

### SOLUCIÓN

Podemos hallar  $h_{11}$  y  $h_{21}$  directamente a partir de la prueba de cortocircuito:

$$h_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{V_2=0} = \frac{24 \times 10^{-3}}{20 \times 10^{-6}} = 1,2 \text{ k}\Omega.$$

$$h_{21} = \left. \frac{I_2}{I_1} \right|_{V_2=0} = \frac{10^{-3}}{20 \times 10^{-6}} = 50.$$

Los parámetros  $h_{12}$  y  $h_{22}$  no pueden obtenerse directamente a partir de la prueba de circuito abierto. Sin embargo, comprobando las Ecuacio-

nes 18.7-18.15, vemos que sí se pueden calcular los cuatro parámetros  $a$  a partir de los datos de prueba. Por tanto, podemos obtener  $h_{12}$  y  $h_{22}$  consultando la tabla de conversión. Específicamente,

$$h_{12} = \frac{\Delta a}{a_{22}}$$

$$h_{22} = \frac{a_{21}}{a_{22}}.$$

Los parámetros  $a$  son

$$a_{11} = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_2=0} = \frac{10 \times 10^{-3}}{-40} = -0,25 \times 10^{-3},$$

$$a_{21} = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{I_2=0} = \frac{10 \times 10^{-6}}{-40} = -0,25 \times 10^{-6} \text{ S},$$

$$a_{12} = - \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{V_1=0} = - \frac{24 \times 10^{-3}}{10^{-3}} = -24 \Omega,$$

$$a_{22} = - \left. \frac{I_1}{I_2} \right|_{V_1=0} = - \frac{20 \times 10^{-6}}{10^{-3}} = -20 \times 10^{-3}.$$

El valor numérico de  $\Delta a$  es

$$\begin{aligned} \Delta a &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\ &= 5 \times 10^{-6} - 6 \times 10^{-6} = -10^{-6}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$h_{12} = \frac{\Delta a}{a_{22}} = \frac{-10^{-6}}{-20 \times 10^{-3}} = 5 \times 10^{-5},$$

$$h_{22} = \frac{a_{21}}{a_{22}} = \frac{-0,25 \times 10^{-6}}{-20 \times 10^{-3}} = 12,5 \mu\text{S}.$$

### Evaluación del objetivo 1

- Ser capaz de calcular cualquier conjunto de parámetros de doble puerto.

18.4. Se han realizado las siguientes medidas en un circuito resistivo de doble puerto. Con el puerto 1 abierto,  $V_2 = 15 \text{ V}$ ,  $V_1 = 10 \text{ V}$  e  $I_2 = 30 \text{ A}$ ; con el puerto 1 cortocircuitado,  $V_2 = 10 \text{ V}$ ,  $I_2 = 4 \text{ A}$  e  $I_1 = -5 \text{ A}$ . Calcule los parámetros  $z$ .

### RESPUESTA

$$z_{11} = (4/15) \Omega; z_{12} = (1/3) \Omega;$$

$$z_{21} = -1,6 \Omega; z_{22} = 0,5 \Omega.$$

**NOTA** Trate también de resolver el Problema 18.11 del capítulo.

### Cuadripolos recíprocos

Si un cuadripolo es **recíproco**, se cumplen las siguientes relaciones entre los parámetros de los puertos:

$$z_{12} = z_{21}, \quad (18.28)$$

$$y_{12} = y_{21}, \quad (18.29)$$

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \Delta a = 1, \quad (18.30)$$

$$b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} = \Delta b = 1, \quad (18.31)$$

$$h_{12} = -h_{21}, \quad (18.32)$$

$$g_{12} = -g_{21}. \quad (18.33)$$

Un cuadripolo es recíproco si al intercambiar una fuente ideal de tensión situada en un puerto por un amperímetro ideal situado en el otro puerto se obtiene la misma lectura en el amperímetro. Considere, por ejemplo, el circuito resistivo mostrado en la Figura 18.4. Cuando se aplica una fuente de tensión de 15 V al puerto ad, se genera una corriente de 1,75 A a través del amperímetro situado en el puerto cd. La corriente en el amperímetro puede determinarse fácilmente una vez que conocemos la tensión  $V_{bd}$ . Así,

$$\frac{V_{bd}}{60} + \frac{V_{bd} - 15}{30} + \frac{V_{bd}}{20} = 0, \quad (18.34)$$

y  $V_{bd} = 5$  V. Por tanto,

$$I = \frac{5}{20} + \frac{15}{10} = 1,75 \text{ A}. \quad (18.35)$$

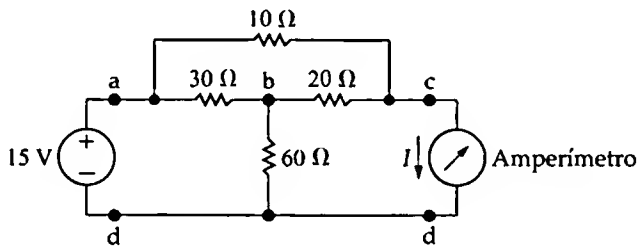


Figura 18.4. Un cuadripolo recíproco.

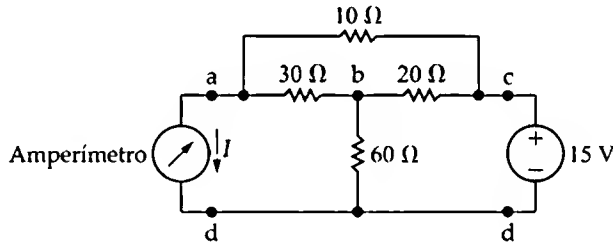


Figura 18.5. El circuito mostrado en la Figura 18.4, después de intercambiar la fuente de tensión y el amperímetro.

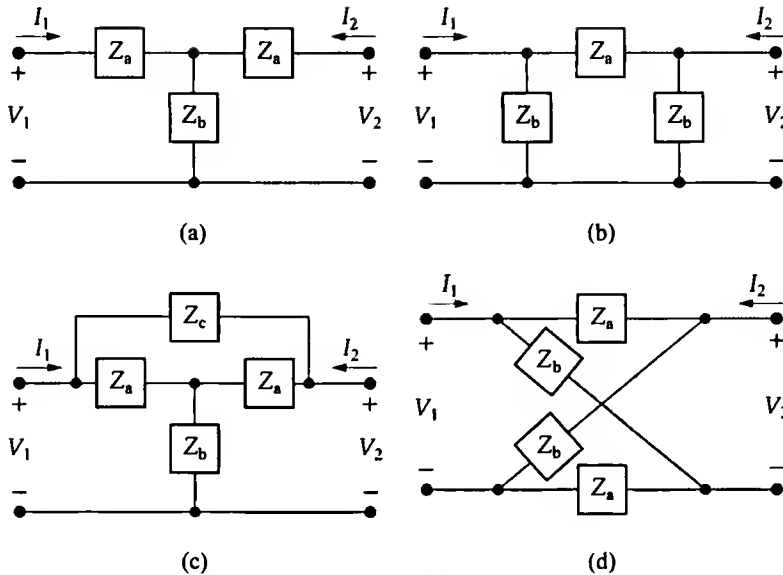
Si intercambiamos la fuente de tensión y el amperímetro, el amperímetro seguirá mostrando el resultado de 1,75 A. Podemos verificar esto resolviendo el circuito mostrado en la Figura 18.5:

$$\frac{V_{bd}}{60} + \frac{V_{bd}}{30} + \frac{V_{bd} - 15}{20} = 0. \quad (18.36)$$

A partir de la Ecuación 18.36,  $V_{bd} = 7,5$  V. La corriente  $I_{ad}$  es igual a

$$I_{ad} = \frac{7,5}{30} + \frac{15}{10} = 1,75 \text{ A}. \quad (18.37)$$

Un cuadripolo también es recíproco si al intercambiar una fuente de corriente ideal situada en un puerto y un voltímetro ideal situado en el otro puerto se obtiene la misma lectura en el voltímetro. Para un cuadripolo recíproco, sólo hacen falta tres cálculos o medidas para determinar un conjunto de parámetros.



**Figura 18.6.** Cuatro ejemplos de cuadripolos simétricos. (a) Una T simétrica. (b) Una  $\pi$  simétrica. (c) Una T puenteada simétrica. (d) Una celosía simétrica.

Un cuadripolo recíproco es **simétrico** si sus puertos pueden intercambiarse sin perturbar los valores de las corrientes y tensiones en los terminales. La Figura 18.6 muestra cuatro ejemplos de cuadripolos simétricos. En dichos circuitos, se cumplen las siguientes relaciones adicionales entre los parámetros de los puertos:

$$z_{11} = z_{22}, \quad (18.38)$$

$$y_{11} = y_{22}, \quad (18.39)$$

$$a_{11} = a_{22}, \quad (18.40)$$

$$b_{11} = b_{22}, \quad (18.41)$$

$$h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21} = \Delta h = 1, \quad (18.42)$$

$$g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} = \Delta g = 1. \quad (18.43)$$

Para una red recíproca simétrica, sólo hacen falta dos cálculos o medidas para determinar todos los parámetros del cuadripolo.

### Evaluación del objetivo 1

■ Ser capaz de calcular cualquier conjunto de parámetros de un cuadripolo.

**18.5.** Se han realizado las siguientes medidas en un cuadripolo resistivo que es simétrico y recíproco. Con el puerto 2 abierto,  $V_1 = 95$  V e  $I_1 = 5$  A; cortocircuitando el puerto 2,

$V_1 = 11,52$  V e  $I_2 = -2,72$  A. Calcule los parámetros  $z$  del cuadripolo.

**RESPUESTA**

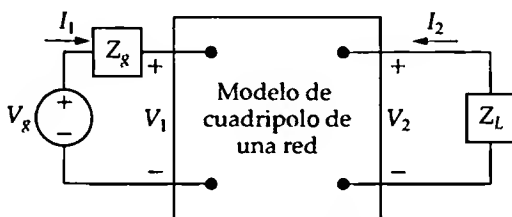
$$z_{11} = z_{22} = 19 \, \Omega, \quad z_{12} = z_{21} = 17 \, \Omega.$$

**NOTA** Trate también de resolver el Problema 18.12 del capítulo.



## 18.3. Análisis de un cuadripolo con terminación

En la típica aplicación de un modelo de cuadripolo, el circuito se excita a través del puerto 1, conectándose una carga al puerto 2. La Figura 18.7 muestra el diagrama de circuito en el dominio de  $s$  para un modelo de cuadripolo con una terminación típica. Aquí,  $Z_g$  representa la impedancia interna de la fuente,  $V_g$  es la tensión interna de la fuente y  $Z_L$  es la impedancia de carga. El análisis de este circuito requiere expresar las corrientes y tensiones en los terminales en función de los parámetros del cuadripolo, de  $V_g$ , de  $Z_g$  y de  $Z_L$ .



**Figura 18.7.** Un modelo de cuadripolo con terminación.

Son seis las características del cuadripolo con terminación que definen el comportamiento en sus terminales:

- la impedancia de entrada  $Z_{in} = V_1/I_1$ , o la admitancia  $Y_{in} = I_1/V_1$ ;
- la corriente de salida  $I_2$ ;
- la tensión y la impedancia de Thévenin ( $V_{Th}$ ,  $Z_{Th}$ ) con respecto al puerto 2;
- la ganancia de corriente  $I_2/I_1$ ;
- la ganancia de tensión  $V_2/V_1$ ;
- la ganancia de tensión  $V_2/V_g$ .

### Las seis características en función de los parámetros $z$

Para ilustrar el modo en que pueden determinarse estas seis características, vamos a desarrollar las expresiones utilizando los parámetros  $z$  para modelar el circuito del cuadripolo. La Tabla 18.2 resume las expresiones relativas a los parámetros  $y$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $h$  y  $g$ .

La deducción de cualquiera de las expresiones deseadas implica la manipulación algebraica de las ecuaciones del cuadripolo, junto con las dos ecuaciones de restricción impuestas por las terminaciones. Si utilizamos las ecuaciones de los parámetros  $z$ , las cuatro que describen el circuito de la Figura 18.7 son

$$V_1 = z_{11}I_1 + z_{12}I_2, \quad (18.44)$$

$$V_2 = z_{21}I_1 + z_{22}I_2, \quad (18.45)$$

$$V_1 = V_g - I_1Z_g, \quad (18.46)$$

$$V_2 = -I_2Z_L. \quad (18.47)$$

Las Ecuaciones 18.46 y 18.47 describen las restricciones impuestas por las terminaciones.

Tabla 18.2. Ecuaciones de los cuadripolos con terminación.

PARÁMETROS  $z$ 

$$Z_{in} = z_{11} - \frac{z_{12}z_{21}}{z_{22} + Z_L}$$

$$I_2 = \frac{-z_{21}V_g}{(z_{11} + Z_g)(z_{22} + Z_L) - z_{12}z_{21}}$$

$$V_{Th} = \frac{z_{21}}{z_{11} + Z_g} V_g$$

$$Z_{Th} = z_{22} - \frac{z_{12}z_{21}}{z_{11} + Z_g}$$

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{-z_{21}}{z_{22} + Z_L}$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{z_{21}Z_L}{z_{11}Z_L + \Delta z}$$

$$\frac{V_2}{V_g} = \frac{z_{21}Z_L}{(z_{11} + Z_g)(z_{22} + Z_L) - z_{12}z_{21}}$$

PARÁMETROS  $y$ 

$$Y_{in} = y_{11} - \frac{y_{12}y_{21}Z_L}{1 + y_{22}Z_L}$$

$$I_2 = \frac{y_{21}V_g}{1 + y_{22}Z_L + y_{11}Z_g + \Delta y Z_g Z_L}$$

$$V_{Th} = \frac{-y_{21}V_g}{y_{22} + \Delta y Z_g}$$

$$Z_{Th} = \frac{1 + y_{11}Z_g}{y_{22} + \Delta y Z_g}$$

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{y_{21}}{y_{11} + \Delta y Z_L}$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{-y_{21}Z_L}{1 + y_{22}Z_L}$$

$$\frac{V_2}{V_g} = \frac{y_{21}Z_L}{y_{12}y_{21}Z_g Z_L - (1 + y_{11}Z_g)(1 + y_{22}Z_L)}$$

PARÁMETROS  $a$ 

$$Z_{in} = \frac{a_{11}Z_L + a_{12}}{a_{21}Z_L + a_{22}}$$

$$I_2 = \frac{-V_g}{a_{11}Z_L + a_{12} + a_{21}Z_g Z_L + a_{22}Z_g}$$

$$V_{Th} = \frac{V_g}{a_{11} + a_{21}Z_g}$$

$$Z_{Th} = \frac{a_{12} + a_{22}Z_g}{a_{11} + a_{21}Z_g}$$

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{-1}{a_{21}Z_L + a_{22}}$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{Z_L}{a_{11}Z_L + a_{12}}$$

$$\frac{V_2}{V_g} = \frac{Z_L}{(a_{11} + a_{21}Z_g)Z_L + a_{12} + a_{22}Z_g}$$

PARÁMETROS  $b$ 

$$Z_{in} = \frac{b_{22}Z_L + b_{12}}{b_{21}Z_L + b_{11}}$$

$$I_2 = \frac{-V_g \Delta b}{b_{11}Z_g + b_{21}Z_g Z_L + b_{22}Z_L + b_{12}}$$

$$V_{Th} = \frac{V_g \Delta b}{b_{22} + b_{21}Z_g}$$

$$Z_{Th} = \frac{b_{11}Z_g + b_{12}}{b_{21}Z_g + b_{22}}$$

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{-\Delta b}{b_{11} + b_{21}Z_L}$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\Delta b Z_L}{b_{12} + b_{22}Z_L}$$

$$\frac{V_2}{V_g} = \frac{\Delta b Z_L}{b_{12} + b_{11}Z_g + b_{22}Z_L + b_{21}Z_g Z_L}$$

PARÁMETROS  $h$ 

$$Z_{in} = h_{11} - \frac{h_{12}h_{21}Z_L}{1 + h_{22}Z_L}$$

$$I_2 = \frac{h_{21}V_g}{(1 + h_{22}Z_L)(h_{11} + Z_g) - h_{12}h_{21}Z_L}$$

$$V_{Th} = \frac{-h_{21}V_g}{h_{22}Z_g + \Delta h}$$

$$Z_{Th} = \frac{Z_g + h_{11}}{h_{22}Z_g + \Delta h}$$

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{h_{21}}{1 + h_{22}Z_L}$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{-h_{21}Z_L}{\Delta h Z_L + h_{11}}$$

$$\frac{V_2}{V_g} = \frac{-h_{21}Z_L}{(h_{11} + Z_g)(1 + h_{22}Z_L) - h_{12}h_{21}Z_L}$$

PARÁMETROS  $g$ 

$$Y_{in} = g_{11} - \frac{g_{12}g_{21}}{g_{22} + Z_L}$$

$$I_2 = \frac{-g_{21}V_g}{(1 + g_{11}Z_g)(g_{22} + Z_L) - g_{12}g_{21}Z_g}$$

$$V_{Th} = \frac{g_{21}V_g}{1 + g_{11}Z_g}$$

$$Z_{Th} = g_{22} - \frac{g_{12}g_{21}Z_g}{1 + g_{11}Z_g}$$

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{-g_{21}}{g_{11}Z_L + \Delta g}$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{g_{21}Z_L}{g_{22} + Z_L}$$

$$\frac{V_2}{V_g} = \frac{g_{21}Z_L}{(1 + g_{11}Z_g)(g_{22} + Z_L) - g_{12}g_{21}Z_g}$$

Para hallar la impedancia que se ve al mirar hacia el puerto 1, es decir,  $Z_{in} = V_1/I_1$ , tenemos que realizar lo siguiente. En la Ecuación 18.45, sustituimos  $V_2$  por  $-I_2 Z_L$  y despejamos  $I_2$  en la expresión resultante:

$$I_2 = \frac{-z_{21} I_1}{Z_L + z_{22}}. \quad (18.48)$$

Después sustituimos esta ecuación en la Ecuación 18.44 y despejamos  $Z_{in}$ :

$$Z_{in} = z_{11} - \frac{z_{12} z_{21}}{z_{22} + Z_L}. \quad (18.49)$$

Para hallar la corriente  $I_2$ , despejamos primero  $I_1$  en la Ecuación 18.44 después de sustituir  $V_1$  por el lado derecho de la Ecuación 18.46. El resultado es

$$I_1 = \frac{V_g - z_{12} I_2}{z_{11} + Z_g}. \quad (18.50)$$

Ahora sustituimos la Ecuación 18.50 en la Ecuación 18.48 y despejamos  $I_2$  en la ecuación resultante:

$$I_2 = \frac{-z_{21} V_g}{(z_{11} + Z_g)(z_{22} + Z_L) - z_{12} z_{21}}. \quad (18.51)$$

La tensión de Thévenin con respecto al puerto 2 es igual a  $V_2$  cuando  $I_2 = 0$ . Con  $I_2 = 0$ , las Ecuaciones 18.44 y 18.45 se combinan para dar

$$V_2|_{I_2=0} = z_{12} I_1 = z_{21} \frac{V_1}{z_{11}}. \quad (18.52)$$

Pero  $V_1 = V_g - I_1 Z_g$  e  $I_1 = V_g/(Z_g + z_{11})$ ; por tanto, sustituyendo los resultados en la Ecuación 18.52, obtenemos el valor de circuito abierto de  $V_2$ :

$$V_2|_{I_2=0} = V_{Th} = \frac{z_{21}}{Z_g + z_{11}} V_g. \quad (18.53)$$

La impedancia de Thévenin o de salida es el cociente  $V_2/I_2$  cuando se sustituye  $V_g$  por un cortocircuito. Cuando  $V_g$  es cero, la Ecuación 18.46 se reduce a

$$V_1 = -I_1 Z_g. \quad (18.54)$$

Sustituyendo la Ecuación 18.54 en la Ecuación 18.44 se obtiene

$$I_1 = \frac{-z_{12} I_2}{z_{11} + Z_g}. \quad (18.55)$$

Ahora utilizamos la Ecuación 18.55 para sustituir  $I_1$  en la Ecuación 18.45, resultando que

$$\left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{V_g=0} = Z_{Th} = z_{22} - \frac{z_{12} z_{21}}{z_{11} + Z_g}. \quad (18.56)$$

La ganancia de corriente  $I_2/I_1$  puede obtenerse directamente a partir de la Ecuación 18.48:

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{-z_{21}}{Z_L + z_{22}}. \quad (18.57)$$

Para hallar la expresión correspondiente a la ganancia de tensión  $V_2/V_1$ , comenzamos sustituyendo  $I_2$  en la Ecuación 18.45 por su valor dado en la Ecuación 18.47; si hacemos esto,

$$V_2 = z_{12}I_1 + z_{22}\left(\frac{-V_2}{Z_L}\right). \quad (18.58)$$

A continuación despejamos  $I_1$  en la Ecuación 18.44 en función de  $V_1$  y  $V_2$ :

$$z_{11}I_1 = V_1 - z_{12}\left(\frac{-V_2}{Z_L}\right)$$

es decir,

$$I_1 = \frac{V_1}{z_{11}} + \frac{z_{12}V_2}{z_{11}Z_L}. \quad (18.59)$$

Ahora sustituimos  $I_1$  en la Ecuación 18.58 por la Ecuación 18.59 y despejamos  $V_2/V_1$  en la expresión resultante:

$$\begin{aligned} \frac{V_2}{V_1} &= \frac{z_{21}Z_L}{z_{11}Z_L + z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}} \\ &= \frac{z_{21}Z_L}{z_{11}Z_L + \Delta z}. \end{aligned} \quad (18.60)$$

Para hallar el cociente de tensiones  $V_2/V_g$ , combinamos primero las Ecuaciones 18.44, 18.46 y 18.47 para hallar  $I_1$  en función de  $V_2$  y  $V_g$ :

$$I_1 = \frac{z_{12}V_2}{Z_L(z_{11} + Z_g)} + \frac{V_g}{z_{11} + Z_g}. \quad (18.61)$$

Ahora utilizamos las Ecuaciones 18.61 y 18.47 conjuntamente con la Ecuación 18.45 para obtener una expresión donde sólo aparezcan  $V_2$  y  $V_g$ , es decir,

$$V_2 = \frac{z_{21}z_{12}V_2}{Z_L(z_{11} + Z_g)} + \frac{z_{21}V_g}{z_{11} + Z_g} - \frac{z_{22}}{Z_L}V_2, \quad (18.62)$$

que podemos manipular para obtener el cociente de tensiones deseado:

$$\frac{V_2}{V_g} = \frac{z_{21}Z_L}{(z_{11} + Z_g)(z_{22} + Z_L) - z_{12}z_{21}}. \quad (18.63)$$

El primer conjunto de entradas de la Tabla 18.2 resume las expresiones correspondientes a estos seis atributos del cuadripolo con terminación. También se indican en la tabla las expresiones correspondientes en función de los parámetros  $y$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $h$  y  $g$ .

El Ejemplo 18.4 demuestra la utilidad de las relaciones enumeradas en la Tabla 18.2.

**EJEMPLO 18.4** Análisis de un cuadripolo con terminación

El cuadripolo mostrado en la Figura 18.8 está descrito en términos de sus parámetros  $b$ , cuyos valores son:

$$b_{11} = -20, \quad b_{12} = -3000 \, \Omega,$$

$$b_{21} = -2 \text{ mS}, \quad b_{22} = -0,2.$$

- Calcule el fasor de tensión  $V_2$ .
- Determine la potencia media entregada a la carga de  $5 \text{ k}\Omega$ .
- Calcule la potencia media entregada al puerto de entrada.
- Calcule la impedancia de carga necesaria para conseguir una máxima transferencia de potencia.
- Calcule la máxima potencia media entregada a la carga determinada en el apartado (d).

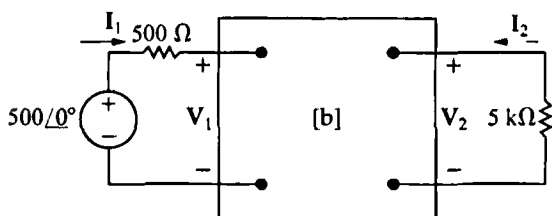


Figura 18.8. Circuito para el Ejemplo 18.4.

**SOLUCIÓN**

- Para hallar  $V_2$ , tenemos dos posibilidades teniendo en cuenta las entradas de la Tabla 18.2. Podemos determinar  $I_2$  y luego hallar  $V_2$  a partir de la relación  $V_2 = -I_2 Z_L$ , o podemos calcular la ganancia de tensión  $V_2/V_g$  y luego hallar  $V_2$  a partir de dicha ganancia. Vamos a utilizar esta última técnica. Para los valores dados de los parámetros  $b$ , tenemos

$$\Delta b = (-20)(-0,2) - (-3000)(-2 \times 10^{-3}) \\ = 4 - 6 = -2.$$

Según la Tabla 18.2,

$$\frac{V_2}{V_g} = \frac{\Delta b Z_L}{b_{12} + b_{11} Z_g + b_{22} Z_L + b_{21} Z_g Z_L} \\ = \frac{(-2)(5000)}{-3000 + (-20)500 + (-0,2)5000 + [-2 \times 10^{-3}(500)(5000)]} = \frac{10}{19}.$$

Entonces,

$$V_2 = \left(\frac{10}{19}\right) 500 = 263,16 \angle 0^\circ \text{ V}.$$

- La potencia media entregada a la carga de  $5000 \, \Omega$  es

$$P_2 = \frac{263,16^2}{2(5000)} = 6,93 \text{ W}.$$

- Para hallar la potencia media suministrada al puerto de entrada, calculamos primero la impedancia de entrada  $Z_{in}$ . Según la Tabla 18.2,

$$Z_{in} = \frac{b_{22} Z_L + b_{12}}{b_{21} Z_L + b_{11}} \\ = \frac{(-0,2)(5000) - 3000}{-2 \times 10^{-3}(5000) - 20} \\ = \frac{400}{3} = 133,33 \, \Omega.$$

Ahora,  $I_1$  puede calcularse directamente:

$$I_1 = \frac{500}{500 + 133,33} = 789,47 \text{ mA}.$$

La potencia media entregada al puerto de entrada será

$$P_1 = \frac{0,78947^2}{2} (133,33) = 41,55 \text{ W}.$$

- La impedancia de carga necesaria para conseguir una máxima transferencia de potencia es igual al conjugado de la impe-

dancia de Thévenin que se ve al mirar hacia el puerto 2. Según la Tabla 18.2,

$$\begin{aligned} Z_{Th} &= \frac{b_{11}Z_g + b_{12}}{b_{21}Z_g + b_{22}} \\ &= \frac{(-20)(500) - 3000}{(-2 \times 10^{-3})(500) - 0,2} \\ &= \frac{13.000}{1,2} = 10.833,33 \, \Omega. \end{aligned}$$

Por tanto,  $Z_L = Z_{Th}^* = 10.833,33 \, \Omega$ .

- e) Para hallar el valor máximo de la potencia media entregada a  $Z_L$ , calculamos primero

$V_2$  a partir de la ganancia de tensión  $V_2/V_g$ . Cuando  $Z_L$  es  $10.833,33 \, \Omega$ , dicha ganancia es

$$\frac{V_2}{V_g} = 0,8333.$$

Por tanto,

$$V_2 = (0,8333)(500) = 416,67 \, \text{V},$$

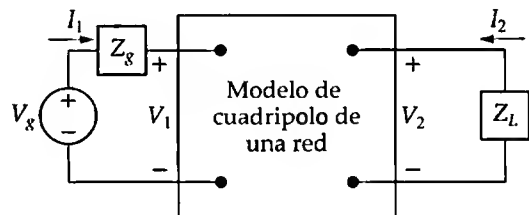
y

$$\begin{aligned} P_2(\text{máxima}) &= \frac{1}{2} \frac{416,67^2}{10.833,33} \\ &= 8,01 \, \text{W}. \end{aligned}$$

## Evaluación del objetivo 2

- Ser capaz de analizar un cuadripolo con terminación para hallar las corrientes, las tensiones y los cocientes de interés.

- 18.6. Los parámetros  $a$  del cuadripolo mostrado son  $a_{11} = 5 \times 10^{-4}$ ,  $a_{12} = 10 \, \Omega$ ,  $a_{21} = 10^{-6} \, \text{S}$  y  $a_{22} = -3 \times 10^{-2}$ . La red está excitada por una fuente de tensión sinusoidal que tiene una amplitud máxima de  $50 \, \text{mV}$  y una impedancia interna de  $100 + j0 \, \Omega$ . La red está terminada por una carga resistiva de  $5 \, \text{k}\Omega$ .



- Calcule la potencia media entregada a la resistencia de carga.
- Calcule la resistencia de carga necesaria para conseguir una máxima potencia media.
- Calcule la máxima potencia media entregada a la resistencia hallada en el apartado (b).

### RESPUESTA

- 62,5 mW; (b) 70/6 k $\Omega$ ;
- 74,4 mW.

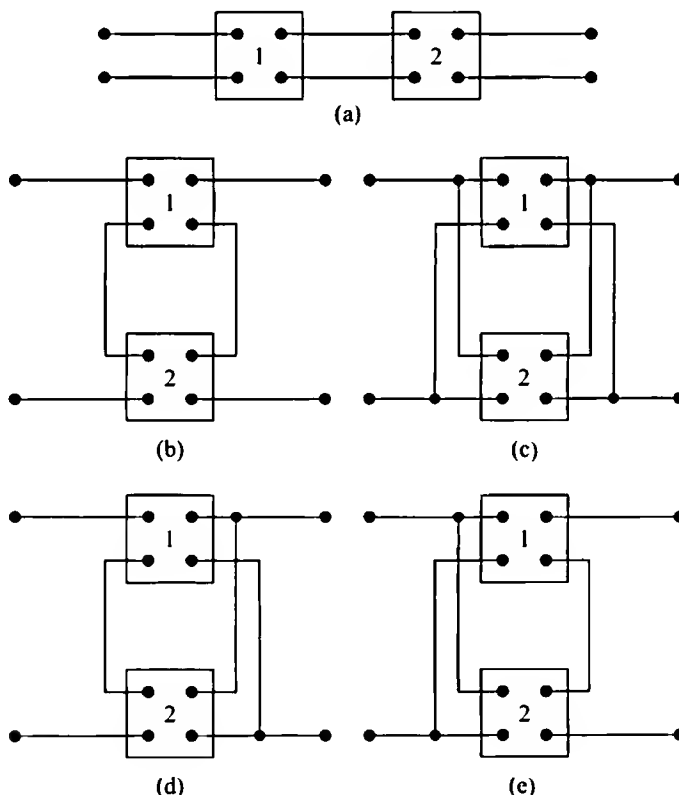
**NOTA** Trate también de resolver los Problemas 18.30, 18.32 y 18.37 del capítulo.

## 18.4. Cuadripolos interconectados

La síntesis de un sistema complejo y de gran tamaño suele resultar más sencilla si primero se diseñan una serie de subsecciones del sistema. Después, el sistema puede completarse interconectando estas unidades más simples y fáciles de diseñar. Si se modelan las subsecciones mediante cuadripolos, el procedimiento de síntesis implicará analizar una serie de cuadripolos interconectados.

Los cuadripolos pueden interconectarse de cinco formas distintas: (1) en cascada, (2) en serie, (3) en paralelo, (4) mediante conexión serie-paralelo y (5) mediante conexión paralelo-serie. La Figura 18.9 muestra estas cinco formas básicas de interconexión.

Vamos a analizar e ilustrar en esta sección únicamente la conexión en cascada. Sin embargo, si las otras cuatro conexiones cumplen ciertos requisitos, podemos obtener los parámetros que describen los circuitos interconectados simplemente sumando los parámetros individuales de cada red. En particular, los parámetros  $z$  describen la conexión en serie, los parámetros  $y$  la conexión en paralelo, los parámetros  $h$  la conexión serie-paralelo y los parámetros  $g$  la conexión paralelo-serie<sup>1</sup>.



**Figura 18.9.** Las cinco formas básicas de interconexión de cuadripolos. (a) En cascada. (b) En serie. (c) En paralelo. (d) Con conexión serie-paralelo. (e) Con conexión paralelo-serie.

<sup>1</sup> El lector interesado puede encontrar una explicación detallada de estas cuatro interconexiones en el libro de Henry Ruston y Joseph Bordogna, *Electric Networks: Functions, Filters, Analysis* (Nueva York: McGraw-Hill, 1966), Capítulo 4.

La conexión en cascada es importante porque aparece con frecuencia en el modelado de sistemas de gran tamaño. A diferencia de las otras cuatro interconexiones básicas, no existe ninguna restricción en lo que respecta a la utilización de los parámetros de los cuadripolos individuales para obtener los parámetros de los circuitos interconectados. Los parámetros más adecuados para describir la conexión en cascada son los parámetros  $a$ .

Podemos analizar la conexión en cascada utilizando el circuito mostrado en la Figura 18.10, donde un único símbolo de prima denota los parámetros  $a$  del primer circuito y un símbolo de doble prima denota los parámetros  $a$  del segundo circuito. La tensión y la corriente de salida del primer circuito están etiquetadas como  $V_2'$  e  $I_2'$  y la tensión y la corriente de entrada del segundo circuito están representadas por  $V_1'$  e  $I_1'$ . El problema consiste en deducir las ecuaciones de los parámetros  $a$  que permiten relacionar  $V_2$  e  $I_2$  con  $V_1$  e  $I_1$ . En otras palabras, queremos determinar la pareja de ecuaciones

$$V_1 = a_{11}V_2 - a_{12}I_2 \quad (18.64)$$

$$I_1 = a_{21}V_2 - a_{22}I_2, \quad (18.65)$$

donde los parámetros  $a$  estarán dados explícitamente en términos de los parámetros  $a$  de los circuitos individuales.

Comenzamos el proceso observando, en la Figura 18.10, que

$$V_1 = a'_{11}V_2' - a'_{12}I_2', \quad (18.66)$$

$$I_1 = a'_{21}V_2' - a'_{22}I_2'. \quad (18.67)$$

La interconexión de los dos circuitos implica que  $V_2' = V_1'$  y que  $I_2' = -I_1'$ . Sustituyendo estas restricciones en las Ecuaciones 18.66 y 18.67 obtenemos

$$V_1 = a'_{11}V_1' + a'_{12}I_1', \quad (18.68)$$

$$I_1 = a'_{21}V_1' + a'_{22}I_1'. \quad (18.69)$$

La tensión  $V_1'$  y la corriente  $I_1'$  están relacionadas con  $V_2$  e  $I_2$  mediante los parámetros  $a$  del segundo circuito:

$$V_1' = a''_{11}V_2 - a''_{12}I_2, \quad (18.70)$$

$$I_1' = a''_{21}V_2 - a''_{22}I_2. \quad (18.71)$$

Podemos sustituir las Ecuaciones 18.70 y 18.71 en las Ecuaciones 18.68 y 18.69 para generar las relaciones entre  $V_1$ ,  $I_1$  y  $V_2$ ,  $I_2$ :

$$V_1 = (a'_{11}a''_{11} + a'_{12}a''_{21})V_2 - (a'_{11}a''_{12} + a'_{12}a''_{22})I_2, \quad (18.72)$$

$$I_1 = (a'_{21}a''_{11} + a'_{22}a''_{21})V_2 - (a'_{21}a''_{12} + a'_{22}a''_{22})I_2. \quad (18.73)$$

Comparando las Ecuaciones 18.72 y 18.73 con las Ecuaciones 18.64 y 18.65, obtenemos las expresiones deseadas para los parámetros  $a$  de las redes interconectadas, que son

$$a_{11} = a'_{11}a''_{11} + a'_{12}a''_{21}, \quad (18.74)$$

$$a_{12} = a'_{11}a''_{12} + a'_{12}a''_{22}, \quad (18.75)$$

$$a_{21} = a'_{21}a''_{11} + a'_{22}a''_{21}, \quad (18.76)$$

$$a_{22} = a'_{21}a''_{12} + a'_{22}a''_{22}. \quad (18.77)$$



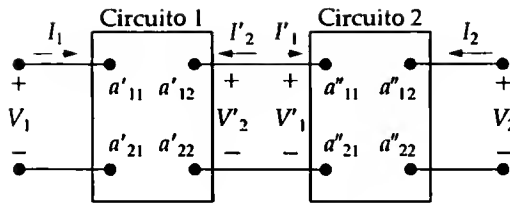


Figura 18.10. Una conexión en cascada.

Si hay más de dos unidades conectadas en cascada, los parámetros  $a$  del circuito de doble puerto equivalente pueden determinarse reduciendo sucesivamente el conjunto original de cuadripolos, aplicando las ecuaciones anteriores a una pareja de circuitos cada vez.

El Ejemplo 18.5 ilustra el modo de utilizar las Ecuaciones 18.74–18.77 para analizar una conexión en cascada de dos circuitos amplificadores.

### EJEMPLO 18.5 Análisis de cuadripolos conectados en cascada

Suponga que conectamos en cascada dos amplificadores idénticos, como se muestra en la Figura 18.11. Cada amplificador está descrito en función de sus parámetros  $h$ . Los valores son  $h_{11} = 1000 \, \Omega$ ,  $h_{12} = 0,0015$ ,  $h_{21} = 100$  y  $h_{22} = 100 \, \mu\text{S}$ . Calcule la ganancia de tensión  $V_2/V_g$ .

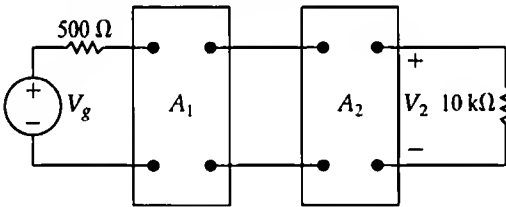


Figura 18.11. Circuito para el Ejemplo 18.5.

### SOLUCIÓN

El primer paso en la determinación de  $V_2/V_g$  consiste en convertir los parámetros  $h$  en parámetros  $a$ . Los dos amplificadores son idénticos, por lo que un único conjunto de parámetros  $a$  nos permitirá describirlos a los dos:

$$a'_{11} = \frac{-\Delta h}{h_{21}} = \frac{+0,05}{100} = 5 \times 10^{-4},$$

$$a'_{12} = \frac{-h_{11}}{h_{21}} = \frac{-1000}{100} = -10 \, \Omega,$$

$$a'_{21} = \frac{-h_{22}}{h_{21}} = \frac{-100 \times 10^{-6}}{100} = -10^{-6} \, \text{S},$$

$$a'_{22} = \frac{-1}{h_{21}} = \frac{-1}{100} = -10^{-2}.$$

A continuación, utilizamos las Ecuaciones 18.74–18.77 para calcular los parámetros  $a$  de los amplificadores conectados en cascada:

$$\begin{aligned} a_{11} &= a'_{11}a'_{11} + a'_{12}a'_{21} \\ &= 25 \times 10^{-8} + (-10)(-10^{-6}) \\ &= 10,25 \times 10^{-6}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{12} &= a'_{11}a'_{12} + a'_{12}a'_{22} \\ &= (5 \times 10^{-4})(-10) + (-10)(-10^{-2}) \\ &= 0,095 \, \Omega, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{21} &= a'_{21}a'_{11} + a'_{22}a'_{21} \\ &= (-10^{-6})(5 \times 10^{-4}) + (-0,01)(-10^{-6}) \\ &= 9,5 \times 10^{-9} \, \text{S}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{22} &= a'_{21}a'_{12} + a'_{22}a'_{22} \\ &= (-10^{-6})(-10) + (-10^{-2})^2 = 1,1 \times 10^{-4}. \end{aligned}$$

Según la Tabla 18.2,

$$\begin{aligned}\frac{V_2}{V_g} &= \frac{Z_L}{(a_{11} + a_{21}Z_g)Z_L + a_{12} + a_{22}Z_g} \\ &= \frac{10^4}{[10,25 \times 10^{-6} + 9,5 \times 10^{-9}(500)]10^4 + 0,095 + 1,1 \times 10^{-4}(500)} \\ &= \frac{10^4}{0,15 + 0,095 + 0,055} \\ &= \frac{10^5}{3} \\ &= 33.333,33.\end{aligned}$$

Por tanto, una señal de entrada de  $150 \mu\text{V}$  se verá amplificada para dar una señal de salida de 5 V. En el Problema 18.41 se presenta un método

alternativo de determinación de la ganancia de tensión  $V_2/V_g$ .

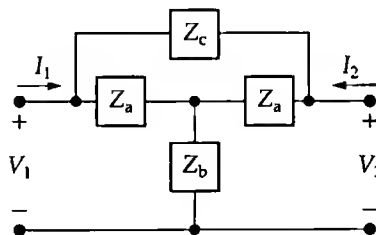
### Evaluación del objetivo 3

- Saber cómo analizar una interconexión en cascada de cuadripolos.

18.7. Cada uno de los elementos del circuito en T puenteadas simétricas mostrado es una resistencia de  $15 \Omega$ . Conectamos en cascada dos de estos circuitos en T puenteadas, insertando la combinación entre una fuente de tensión continua y una carga resistiva. La fuente de tensión continua tiene una tensión sin carga de 100 V y una resistencia interna de  $8 \Omega$ . La resistencia de carga se ajusta hasta conseguir que se entregue una potencia máxima a la carga. Calcule (a) la resistencia de carga, (b) la tensión en la carga y (c) la potencia entregada a la carga.

#### RESPUESTA

- (a)  $14,44 \Omega$ ; (b) 16 V;  
(c) 17,73 W.



**NOTA** Trate también de resolver el Problema 18.38 del capítulo.

## RESUMEN

- El **modelo de cuadripolo** se utiliza para describir las prestaciones de un circuito en términos de la tensión y la corriente en sus puertos de entrada y salida (véase la página 884).
- El modelo está limitado a circuitos en los que:
  - no hay fuentes independientes dentro del circuito contenido entre ambos puertos;
  - no hay energía almacenada dentro del circuito contenido entre ambos puertos;
  - la corriente que entra por cada puerto es igual a la corriente que sale por ese mismo puerto; y
  - no existen conexiones externas entre los puertos de entrada y de salida.
 (Véase la página 884).
- Dos de las cuatro variables de los terminales ( $V_1$ ,  $I_1$ ,  $V_2$ ,  $I_2$ ) son independientes; por tanto, sólo son necesarias dos ecuaciones que relacionen esas cuatro variables para describir el circuito (véase la página 886).
- Los seis posibles sistemas de ecuaciones en los que intervienen las cuatro variables de los terminales son denominados ecuaciones de los parámetros  $z$ ,  $y$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $h$  y  $g$ . Véanse las Ecuaciones 18.1-18.6 (véase la página 886).
- Las ecuaciones de los parámetros se escriben en el dominio de  $s$ . Los valores de continua de los parámetros se obtienen haciendo  $s = 0$  y los valores en régimen permanente sinusoidal se obtienen haciendo  $s = j\omega$  (véase la página 886).
- Cualquiera de los conjuntos de parámetros puede calcularse o medirse provocando las apropiadas condiciones de cortocircuito o de circuito abierto en los puertos de entrada o de salida. Véanse las Ecuaciones 18.7-18.15 (véanse las páginas 887 y 889).
- Las relaciones entre los seis conjuntos de parámetros se indican en la Tabla 18.1 (véase la página 891).
- Un cuadripolo es **recíproco** si al intercambiar una fuente ideal de tensión situada en un puerto por un amperímetro ideal situado en el otro puerto se obtiene la misma lectura en el amperímetro. El efecto de la reciprocidad sobre los parámetros de los cuadripolos se indica en las Ecuaciones 18.28-18.33 (véase la página 894).
- Un cuadripolo recíproco es **simétrico** si pueden intercambiarse sus puertos sin perturbar los valores de las corrientes y tensiones en los terminales. El efecto añadido de la simetría sobre los parámetros del cuadripolo se indica en las Ecuaciones 18.38-18.43 (véase la página 896).
- El comportamiento de un cuadripolo conectado a una fuente y una carga equivalentes de Thévenin se resume mediante las relaciones enumeradas en la Tabla 18.2 (véase la página 898).
- Algunas redes de gran tamaño pueden dividirse en subredes mediante un conjunto de modelos de cuadripolo interconectados. En este capítulo se ha utilizado la conexión en cascada para ilustrar el análisis de una serie de cuadripolos interconectados (véase la página 903).

## PROBLEMAS

- 18.1. Calcule los parámetros  $h$  y  $g$  para el circuito del Ejemplo 18.1.
- 18.2. Calcule los parámetros  $z$  para el circuito de la Figura P18.2.

- 18.3. Utilice los resultados obtenidos en el Problema 18.2 para calcular los parámetros  $y$  para el circuito de la Figura P18.2.
- 18.4. Calcule los parámetros  $b$  para el circuito mostrado en la Figura P18.4.

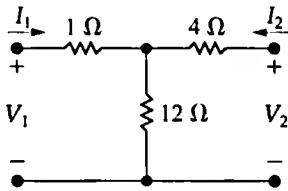


Figura P18.2

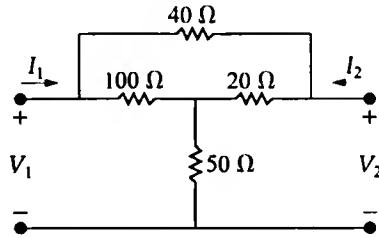


Figura P18.4

- 18.5. Calcule los parámetros  $a$  para el circuito mostrado en la Figura P18.5.

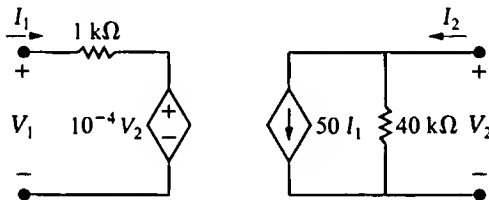


Figura P18.5

- 18.6. Utilice los resultados obtenidos en el Problema 18.5 para calcular los parámetros  $g$  del circuito de la Figura P18.5.
- 18.7. Calcule los parámetros  $g$  para el circuito mostrado en la Figura P18.7.
- 18.8. Calcule los parámetros  $y$  para el circuito mostrado en la Figura P18.8.

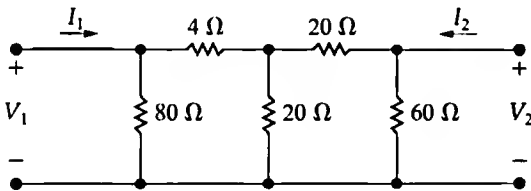


Figura P18.7

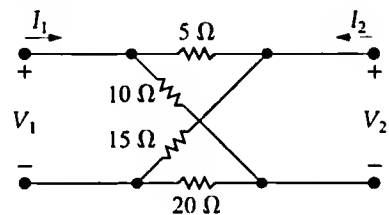


Figura P18.8

- 18.9. Seleccione los valores de  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$  en el circuito de la Figura P18.9 de modo que  $h_{11} = 4 \Omega$ ,  $h_{12} = 0,8$ ,  $h_{21} = -0,8$  y  $h_{22} = 0,14 \text{ S}$ .

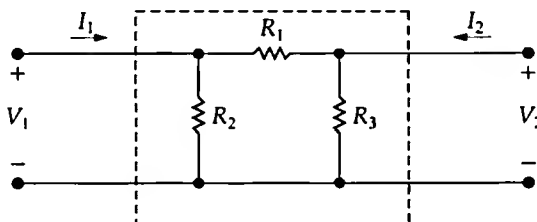


Figura P18.9

18.10. Calcule los parámetros  $h$  del cuadripolo mostrado en la Figura P18.10.

18.11. Realizamos las siguientes medidas de continua en el cuadripolo mostrado en la Figura P18.11.

**Puerto 2 abierto**

$$V_1 = 20 \text{ mV}$$

$$V_2 = -5 \text{ V}$$

$$I_1 = 0,25 \mu\text{A}$$

**Puerto 2 cortocircuitado**

$$I_1 = 200 \mu\text{A}$$

$$I_2 = 50 \mu\text{A}$$

$$V_1 = 10 \text{ V}$$

Calcule los parámetros  $g$  de la red.

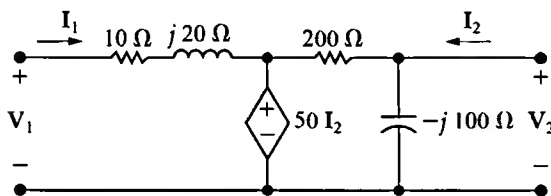


Figura P18.10

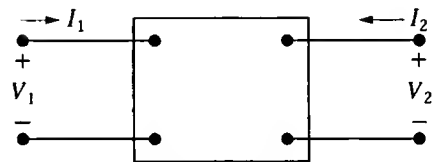


Figura P18.11

18.12. a) Utilice las medidas proporcionadas en el Problema 18.11 para hallar los parámetros  $y$  para la red.

b) Compruebe los cálculos hallando los parámetros  $y$  directamente a partir de los parámetros  $g$  determinados en el Problema 18.11.

18.13. Determine los valores de los parámetros  $a$  en el dominio de la frecuencia para el cuadripolo mostrado en la Figura P18.13.

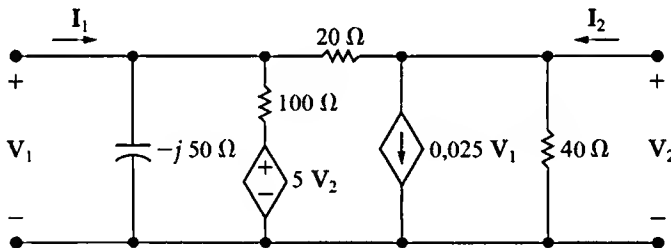


Figura P18.13

18.14. Calcule los parámetros  $h$  para el cuadripolo mostrado en la Figura P18.13.

18.15. Calcule los parámetros  $g$  para el circuito amplificador operacional mostrado en la Figura P18.15.

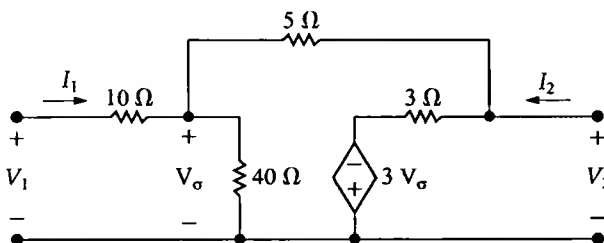


Figura P18.15

18.16. Determine las expresiones que proporcionan el valor de los parámetros  $h$  en función de los parámetros  $g$ .

- 18.17. Determine las expresiones que proporcionan el valor de los parámetros  $b$  en función de los parámetros  $h$ .
- 18.18. Determine las expresiones que proporcionan el valor de los parámetros  $g$  en función de los parámetros  $z$ .
- 18.19. El amplificador operacional del circuito mostrado en la Figura P18.19 es ideal. Calcule los parámetros  $h$  del circuito.

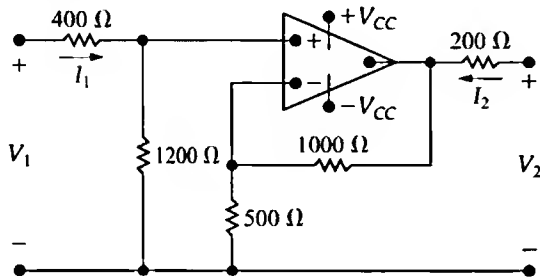


Figura P18.19

- 18.20. Calcule las expresiones de los parámetros  $a$  en el dominio de  $s$  para el cuadripolo mostrado en la Figura P18.20.
- 18.21. Calcule las expresiones de los parámetros  $z$  en el dominio de  $s$  para el cuadripolo mostrado en la Figura P18.21.

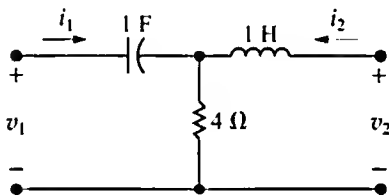


Figura P18.20

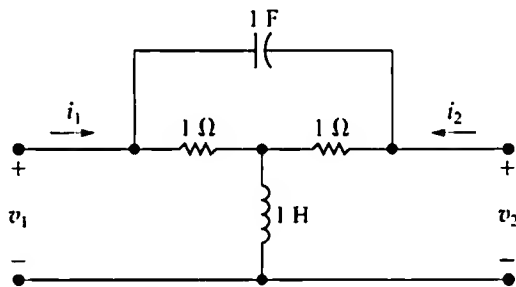


Figura P18.21

- 18.22. ¿Es simétrico el cuadripolo mostrado en la Figura P18.22? Justifique su respuesta.

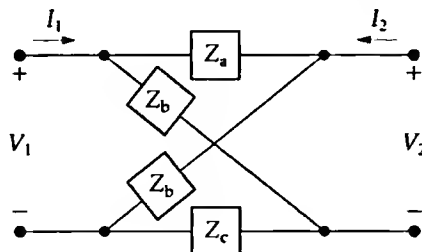


Figura P18.22

- 18.23. a) Utilice las ecuaciones de definición para hallar las expresiones de los parámetros  $h$  en el dominio de  $s$  para el circuito de la Figura P18.23.
- b) Demuestre que los resultados obtenidos en el apartado (a) concuerdan con las relaciones correspondientes a los parámetros  $h$  para una red simétrica y recíproca.

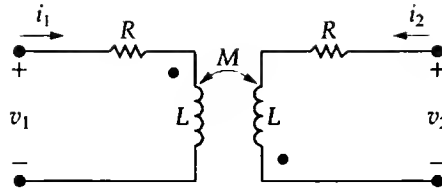


Figura P18.23

- 18.24. Determine la expresión que nos da la impedancia de entrada ( $Z_{in} = V_1/I_1$ ) del circuito de la Figura 18.7 en términos de los parámetros  $b$ .
- 18.25. Determine la expresión que nos da la ganancia de corriente  $I_2/I_1$  del circuito de la Figura 18.7 en términos de los parámetros  $g$ .
- 18.26. Determine la expresión que nos da la ganancia de tensión  $V_2/V_1$  del circuito de la Figura 18.7 en términos de los parámetros  $y$ .
- 18.27. Determine la expresión que nos da la ganancia de tensión  $V_2/V_g$  del circuito de la Figura 18.7 en términos de los parámetros  $h$ .
- 18.28. Calcule el circuito equivalente de Thévenin con respecto al puerto 2 para el cuadripolo de la Figura 18.7 en términos de los parámetros  $z$ .
- 18.29. El transformador lineal del circuito mostrado en la Figura P18.29 tiene un coeficiente de acoplamiento de 0,75. El transformador está excitado por una fuente de tensión sinusoidal cuya tensión interna es  $v_g = 260 \cos 4000t$  V. La impedancia interna de la fuente es  $25 + j0 \Omega$ .
- Calcule los parámetros  $a$  en el dominio de la frecuencia para el transformador lineal.
  - Utilice los parámetros  $a$  para hallar el circuito equivalente de Thévenin con respecto a los terminales a los que se conecta la carga.
  - Determine la expresión de régimen permanente en el dominio del tiempo para  $v_2$ .

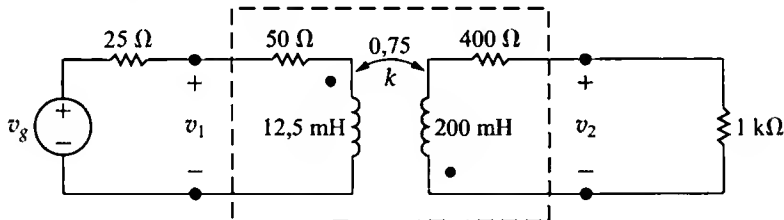


Figura P18.29

- 18.30. Los parámetros  $b$  del amplificador del circuito mostrado en la Figura P18.30 son

$$\begin{aligned} b_{11} &= 25; & b_{12} &= 1000 \Omega; \\ b_{21} &= -1,25 \text{ S}; & b_{22} &= -40. \end{aligned}$$

Calcule el cociente entre la potencia de salida y la suministrada por la fuente ideal de tensión.

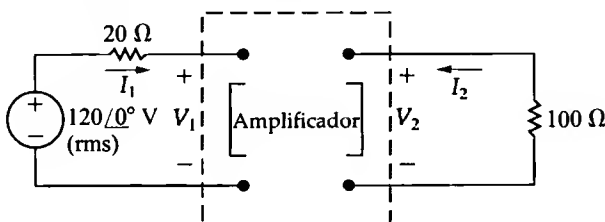


Figura P18.30

18.31. Los parámetros  $b$  para el cuadripolo de la Figura P18.31 son

$$b_{11} = 1 + j\frac{1}{3}; \quad b_{12} = -1 + j4 \, \Omega;$$

$$b_{21} = \frac{1}{3} \, \text{S}; \quad b_{22} = 1 + j1.$$

Ajustamos la impedancia de carga  $Z_L$  hasta conseguir una transferencia máxima de potencia media hacia  $Z_L$ . La fuente ideal de tensión está generando una tensión sinusoidal de valor

$$v_g = 90 \cos 8000t \, \text{V}.$$

- Calcule el valor rms de  $V_2$ .
- Calcule la potencia media entregada a  $Z_L$ .
- ¿Qué porcentaje de la potencia media generada por la fuente ideal de tensión se entrega a  $Z_L$ ?

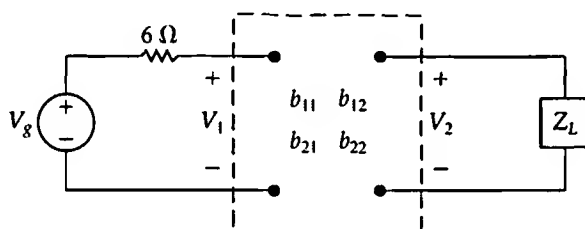


Figura P18.31

18.32. Los parámetros  $h$  para el cuadripolo amplificador de potencia de la Figura P18.32 son

$$h_{11} = 500 \, \Omega; \quad h_{12} = 10^{-3};$$

$$h_{21} = 50; \quad h_{22} = 50 \, \mu\text{S}.$$

La impedancia interna de la fuente es  $1500 + j0 \, \Omega$ , y la impedancia de carga es  $10.000 + j0 \, \Omega$ . La fuente ideal de tensión está generando una tensión de valor

$$v_g = 250 \cos 40.000t \, \text{mV}.$$

- Calcule el valor rms de  $V_2$ .
- Calcule la potencia media entregada a  $Z_L$ .
- Calcule la potencia media generada por la fuente ideal de tensión.

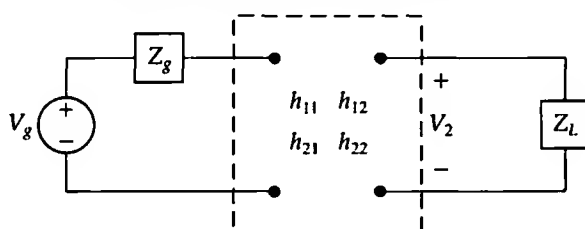


Figura P18.32

18.33. Para el cuadripolo amplificador con terminación de la Figura P18.32, calcule:

- El valor de  $Z_L$  que permite transferir una potencia media máxima hacia  $Z_L$ .
- La potencia media máxima entregada a  $Z_L$ .



- c) La potencia media generada por la fuente ideal de tensión cuando se está entregando una potencia máxima a  $Z_L$ .

- 18.34. a) Calcule las expresiones de los parámetros  $h$  en el dominio de  $s$  para el circuito de la Figura P18.34.  
 b) El puerto 2 en la Figura P18.34 está terminado en una resistencia de  $400\ \Omega$  y el puerto 1 está excitado por una fuente de tensión que genera un escalón  $v_1(t) = 30u(t)$ . Calcule  $v_2(t)$  para  $t > 0$  si  $C = 0,2\ \mu\text{F}$  y  $L = 200\ \text{mH}$ .
- 18.35. a) Calcule los parámetros  $z$  para el cuadripolo de la Figura P18.35.  
 b) Calcule  $v_2$  para  $t > 0$  cuando  $v_g = 50u(t)\ \text{V}$ .

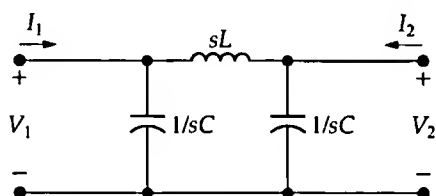


Figura P18.34

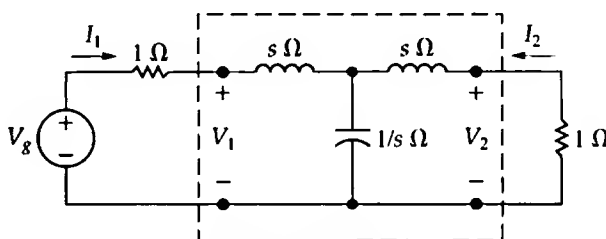


Figura P18.35

- 18.36. Realizamos las siguientes medidas en un cuadripolo resistivo. Aplicando un cortocircuito al puerto 2 y una tensión de  $20\ \text{V}$  al puerto 1, la corriente que entra por el puerto 1 es de  $1\ \text{A}$  y la corriente en el puerto 2 es de  $-1\ \text{A}$ . Con el puerto 1 abierto y aplicando  $80\ \text{V}$  al puerto 2, la tensión en el puerto 1 es de  $400\ \text{V}$  y la corriente en el puerto 2 es de  $3\ \text{A}$ . Calcule la potencia máxima (en milivatios) que este cuadripolo puede entregar a una carga resistiva conectada al puerto 2 cuando se excita el puerto 1 mediante una fuente de corriente continua de  $4\ \text{A}$  que tiene una resistencia interna de  $60\ \Omega$ .
- 18.37. Realizamos las siguientes medidas de continua en la red resistiva mostrada en la Figura P18.37.

**Medida 1**

$V_1 = 4\ \text{V}$

$I_1 = 5\ \text{mA}$

$V_2 = 0\ \text{V}$

$I_2 = -200\ \text{mA}$

**Medida 2**

$V_1 = 20\ \text{mV}$

$I_1 = 20\ \mu\text{A}$

$V_2 = 40\ \text{V}$

$I_2 = 0\ \text{A}$

Conectamos una resistencia variable  $R_o$  al puerto 2 y la ajustamos hasta conseguir transferir una cantidad máxima de potencia a  $R_o$ . Determine la potencia máxima.

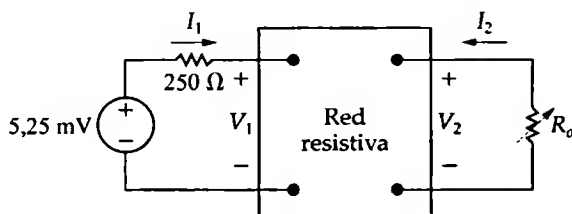


Figura P18.37

- 18.38. Los parámetros  $g$  y  $h$  para los cuadripolos resistivos de la Figura P18.38 son

$$\begin{aligned}
 g_{11} &= \frac{3}{35} \text{ S}; & h_{11} &= 5 \text{ k}\Omega; \\
 g_{12} &= \frac{20}{7}; & h_{12} &= -0,20; \\
 g_{21} &= \frac{800}{7}; & h_{21} &= -4,0; \\
 g_{22} &= \frac{50}{7} \text{ k}\Omega; & h_{22} &= 200 \mu\text{S};
 \end{aligned}$$

Calcule  $i_1$  si  $v_g = 30 \text{ V cc}$ .

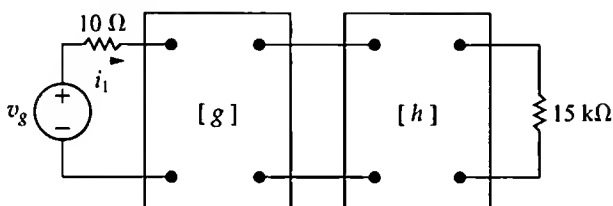
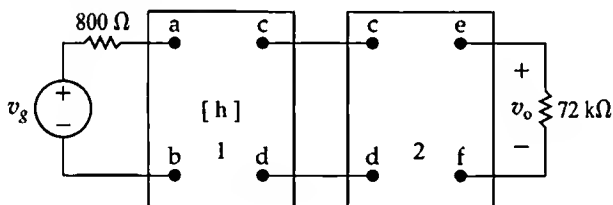


Figura P18.38

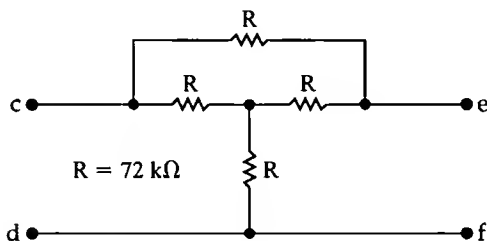
18.39. Los parámetros  $h$  del primero de los cuadripolos de la Figura P18.39(a) son

$$\begin{aligned}
 h_{11} &= 1000 \Omega; & h_{12} &= 5 \times 10^{-4}; \\
 h_{21} &= 40; & h_{22} &= 25 \mu\text{S}.
 \end{aligned}$$

El circuito que forma el segundo cuadripolo se muestra en la Figura P18.39(b), siendo  $R = 72 \text{ k}\Omega$ . Calcule  $v_o$  si  $v_g = 9 \text{ mV cc}$ .



(a)



(b)

Figura P18.39

18.40. Las redes A y B en el circuito de la Figura P18.40 son recíprocas y simétricas. Para la red A, sabemos que  $a'_{11} = 2$  y que  $a'_{12} = 1 \Omega$ .

a) Calcule los parámetros  $a$  de la red B.

b) Calcule  $V_2$  cuando  $V_g = 75 \angle 0^\circ \text{ V}$ ,  $Z_g = 1 \angle 0^\circ \Omega$  y  $Z_L = 14 \angle 0^\circ \Omega$ .

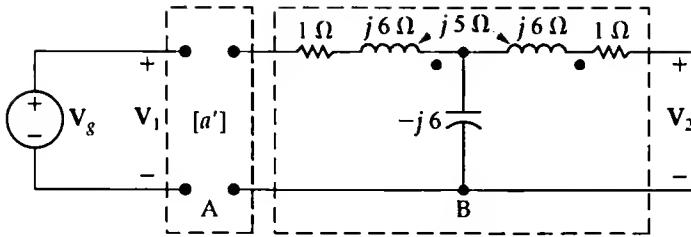


Figura P18.40

- 18.41. a) Demuestre que el circuito de la Figura P18.41 es un circuito equivalente que cumple las ecuaciones de los parámetros  $h$ .
- b) Utilice el circuito equivalente de parámetros  $h$  del apartado (a) para hallar la ganancia de tensión  $V_2/V_g$  en el circuito de la Figura 18.11.

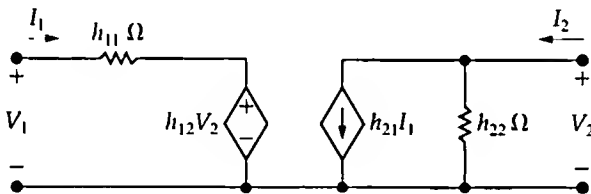


Figura P18.41

- 18.42. a) Demuestre que el circuito de la Figura P18.42 es un circuito equivalente que cumple las ecuaciones de los parámetros  $z$ .
- b) Suponga que excitamos el circuito equivalente de la Figura P18.42 con una fuente de tensión que tiene una impedancia interna de  $Z_g$  ohmios. Calcule el circuito equivalente de Thévenin con respecto al puerto 2. Compruebe los resultados consultando las entradas apropiadas de la Tabla 18.2.

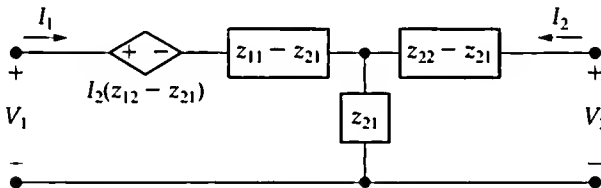


Figura P18.42

- 18.43. a) Demuestre que el circuito de la Figura P18.43 es también un circuito equivalente que satisface las ecuaciones de los parámetros  $z$ .
- b) Suponga que terminamos el circuito equivalente de la Figura P18.43 mediante una impedancia de  $Z_L$  ohmios conectada al puerto 2. Calcule la impedancia de entrada  $V_1/I_1$ . Compruebe los resultados consultando la entrada apropiada de la Tabla 18.2.

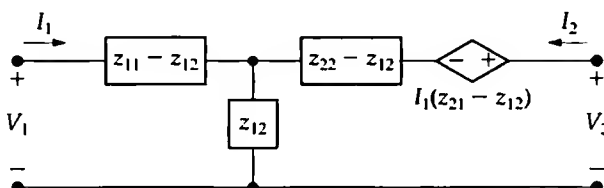


Figura P18.43

- 18.44.** a) Determine dos circuitos equivalentes que satisfagan las ecuaciones de los parámetros  $y$ . *Sugerencia:* comience partiendo de las Ecuaciones 18.2. Sume y reste  $y_{21}V_2$  a la primera ecuación del sistema. Construya un circuito que satisfaga el sistema de ecuaciones resultante, pensando en términos de las tensiones de nodo. Determine un circuito equivalente alternativo modificando primero la segunda de las ecuaciones del sistema de Ecuaciones 18.2.
- b) Suponga que excitamos el puerto 1 mediante una fuente de tensión que tiene una impedancia interna  $Z_g$  y que cargamos el puerto 2 con una impedancia  $Z_L$ . Determine la ganancia de corriente  $I_2/I_1$ . Compruebe los resultados consultando la entrada apropiada de la Tabla 18.2.
- 18.45.** a) Determine el circuito equivalente que satisface las ecuaciones de los parámetros  $g$ .
- b) Utilice el circuito equivalente basado en los parámetros  $g$  que hemos diseñado en el apartado (a) para hallar la tensión de salida en el Problema 18.39. *Sugerencia:* utilice el Problema 3.64 para simplificar el segundo cuadripolo del Problema 18.39.

# APÉNDICE

# A

# Resolución de sistemas de ecuaciones lineales

El análisis de circuitos requiere frecuentemente la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Nuestro propósito aquí es repasar el uso de determinantes para resolver dichos sistemas de ecuaciones. La teoría de determinantes (y sus aplicaciones) se trata en la mayoría de los libros de álgebra de nivel intermedio (una referencia particularmente buena para los estudiantes de ingeniería es el Capítulo 1 del libro *The Mathematics of Circuit Analysis* de E. A. Guillemin [Nueva York: Wiley, 1949]). En nuestro repaso, vamos a limitar las explicaciones a la mecánica de resolución de sistemas de ecuaciones con determinantes.

## A.1. Pasos preliminares

El primer paso a la hora de resolver un sistema de ecuaciones mediante determinantes es escribir las ecuaciones en formato rectangular. En otras palabras, dispondremos las ecuaciones de forma vertical de modo que cada variable ocupe la misma posición horizontal en cada ecuación. Por ejemplo, en las Ecuaciones A.1, las variables  $i_1$ ,  $i_2$  e  $i_3$  ocupan la primera, segunda y tercera posición, respectivamente, en el lado izquierdo de cada ecuación:

$$\begin{aligned}21i_1 - 9i_2 - 12i_3 &= -33, \\-3i_1 + 6i_2 - 2i_3 &= 3, \\-8i_1 - 4i_2 + 22i_3 &= 50.\end{aligned}\tag{A.1}$$

Alternativamente, podemos describir este conjunto de ecuaciones diciendo que  $i_1$  ocupa la primera columna de la matriz,  $i_2$  la segunda columna e  $i_3$  la tercera columna.

Si faltan una o más variables en alguna ecuación, puede insertárselas asignándoles simplemente un coeficiente igual a cero. Así, las Ecuaciones A.2 pueden normalizarse de la forma en que se muestra en las Ecuaciones A.3:

$$\begin{aligned}2v_1 - v_2 &= 4, \\4v_2 + 3v_3 &= 16, \\7v_1 + 2v_3 &= 5;\end{aligned}\tag{A.2}$$

$$\begin{aligned}
 2v_1 - v_2 + 0v_3 &= 4, \\
 0v_1 + 4v_2 + 3v_3 &= 16, \\
 7v_1 + 0v_2 + 2v_3 &= 5.
 \end{aligned}
 \tag{A.3}$$

## A.2. Método de Cramer

El valor de cada incógnita del conjunto de ecuaciones se expresa como el cociente de dos determinantes. Si designamos mediante  $N$ , con un subíndice apropiado, el determinante del numerador y mediante  $\Delta$  el determinante del denominador, entonces la  $k$ -ésima incógnita  $x_k$  será

$$x_k = \frac{N_k}{\Delta}. \tag{A.4}$$

El determinante del denominador,  $\Delta$ , es el mismo para todas las incógnitas y se denomina **determinante característico** del conjunto de ecuaciones. El determinante del numerador,  $N_k$ , es diferente para cada incógnita. La Ecuación A.4 se denomina **método de Cramer** para la resolución de sistemas de ecuaciones.

## A.3. Determinante característico

Una vez organizado el sistema de ecuaciones en una matriz ordenada, como se ilustra en las Ecuaciones A.1 y A.3, resulta bastante simple formar el determinante característico. Este determinante es la matriz cuadrada formada por los coeficientes de las incógnitas. Por ejemplo, los determinantes característicos de las Ecuaciones A.1 y A.3 son

$$\Delta = \begin{vmatrix} 21 & -9 & -12 \\ -3 & 6 & -2 \\ -8 & -4 & 22 \end{vmatrix} \tag{A.5}$$

y

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 7 & 0 & 2 \end{vmatrix}, \tag{A.6}$$

respectivamente.

## A.4. Determinante del numerador

El determinante del numerador,  $N_k$ , se forma a partir del determinante característico sustituyendo la  $k$ -ésima columna del determinante característico por la columna de valores que aparece en el lado derecho de las ecuaciones. Por ejemplo, los determinantes del numerador para evaluar  $i_1$ ,  $i_2$  e  $i_3$  en las Ecuaciones A.1 son

$$N_1 = \begin{vmatrix} -33 & -9 & -12 \\ 3 & 6 & -2 \\ 50 & -4 & 22 \end{vmatrix}, \quad (\text{A.7})$$

$$N_2 = \begin{vmatrix} 21 & -33 & -12 \\ -3 & 3 & -2 \\ -8 & 50 & 22 \end{vmatrix}, \quad (\text{A.8})$$

y

$$N_3 = \begin{vmatrix} 21 & -9 & -33 \\ -3 & 6 & 3 \\ -8 & -4 & 50 \end{vmatrix}. \quad (\text{A.9})$$

Los determinantes del numerador para la evaluación de  $v_1$ ,  $v_2$  y  $v_3$  en las Ecuaciones A.3 son

$$N_1 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 16 & 4 & 3 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix}, \quad (\text{A.10})$$

$$N_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 16 & 3 \\ 7 & 5 & 2 \end{vmatrix}, \quad (\text{A.11})$$

y

$$N_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 4 & 16 \\ 7 & 0 & 5 \end{vmatrix}. \quad (\text{A.12})$$

## A.5. Evaluación de un determinante

El valor de un determinante se calcula expandiendo el determinante en sus correspondientes menores. El **menor** de un elemento de un determinante es el determinante que queda después de borrar la fila y la columna ocupadas por el elemento. Por ejemplo, el menor del elemento 6 en la Ecuación A.7 es

$$\begin{vmatrix} -33 & -12 \\ 50 & 22 \end{vmatrix},$$

mientras que el menor del elemento 22 en la Ecuación A.7 es

$$\begin{vmatrix} -33 & -9 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}.$$

El **cofactor** de un elemento es igual a su menor multiplicado por el factor de control de signo

$$-1^{(i+j)},$$

donde  $i$  y  $j$  denotan la fila y la columna, respectivamente, que ocupa el elemento. Así, el cofactor del elemento 6 en la Ecuación A.7 es

$$-1^{(2+2)} \begin{vmatrix} -33 & -12 \\ 50 & 22 \end{vmatrix},$$

mientras que el cofactor del elemento 22 es

$$-1^{(3+3)} \begin{vmatrix} -33 & -9 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}.$$

El cofactor de un elemento también se denomina en ocasiones **menor con signo** del elemento.

El factor de signo  $-1^{(i+j)}$  será igual a  $+1$  o  $-1$  dependiendo de que  $i+j$  sea un entero par o impar. Por tanto, el signo algebraico de los cofactores alterna entre  $+1$  y  $-1$  a medida que nos movemos a lo largo de una fila o columna. Para un determinante  $3 \times 3$ , los signos más y menos forman el patrón ajedrezado que se muestra a continuación:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

Un determinante puede expandirse a lo largo de cualquier fila o columna. De este modo, el primer paso a la hora de realizar la expansión consiste en seleccionar una fila  $i$  o una columna  $j$ . Una vez seleccionada una fila o columna, cada elemento de dicha fila o columna se multiplica por su cofactor. El valor del determinante es la suma de estos productos. Como ejemplo, vamos a evaluar el determinante de la Ecuación A.5 expandiéndolo según la primera columna. Si seguimos las reglas que acabamos de mencionar, podemos escribir la expansión de la forma siguiente:

$$\Delta = 21(1) \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -4 & 22 \end{vmatrix} - 3(-1) \begin{vmatrix} -9 & -12 \\ -4 & 22 \end{vmatrix} - 8(1) \begin{vmatrix} -9 & -12 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} \quad (\text{A.13})$$

Los determinantes  $2 \times 2$  de la Ecuación A.13 también pueden expandirse en sus correspondientes menores. El menor de cualquier elemento en un determinante  $2 \times 2$  es un elemento único. Por tanto, la expansión de dicho determinante se reduce a multiplicar el elemento superior izquierdo por el elemento inferior derecho y luego restar de este producto el producto del elemento inferior izquierdo y el elemento superior derecho. De este modo, podemos evaluar la Ecuación A.13 de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \Delta &= 21(132 - 8) + 3(-198 - 48) - 8(18 + 72) \\ &= 2604 - 738 - 720 = 1146. \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Si hubiéramos decidido expandir el determinante a lo largo de la segunda fila de elementos, habríamos escrito

$$\begin{aligned} \Delta &= -3(-1) \begin{vmatrix} -9 & -12 \\ -4 & 22 \end{vmatrix} + 6(+1) \begin{vmatrix} 21 & -12 \\ -8 & 22 \end{vmatrix} - 2(-1) \begin{vmatrix} 21 & -9 \\ -8 & -4 \end{vmatrix} \\ &= 3(-198 - 48) + 6(462 - 96) - 2(-84 - 72) \\ &= -738 + 2196 - 312 = 1146. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$



Los valores numéricos de los determinantes  $N_1$ ,  $N_2$  y  $N_3$  dados por las Ecuaciones A.7, A.8 y A.9 son

$$N_1 = 1146, \quad (\text{A.16})$$

$$N_2 = 2292, \quad (\text{A.17})$$

y

$$N_3 = 3438. \quad (\text{A.18})$$

De las Ecuaciones A.15 a A.18 se sigue que las soluciones correspondientes a  $i_1$ ,  $i_2$  e  $i_3$  en la ecuaciones A.1 son

$$i_1 = \frac{N_1}{\Delta} = 1 \text{ A},$$

$$i_2 = \frac{N_2}{\Delta} = 2 \text{ A}, \quad (\text{A.19})$$

e

$$i_3 = \frac{N_3}{\Delta} = 3 \text{ A}.$$

Dejamos como ejercicio para el lector la verificación de que las soluciones correspondientes a  $v_1$ ,  $v_2$  y  $v_3$  en las ecuaciones A.3 son

$$v_1 = \frac{49}{-5} = -9,8 \text{ V},$$

$$v_2 = \frac{118}{-5} = -23,6 \text{ V}, \quad (\text{A.20})$$

y

$$v_3 = \frac{-184}{-5} = 36,8 \text{ V}.$$

## A.6. Matrices

Un sistema de ecuaciones lineales también puede resolverse utilizando matrices. En las explicaciones siguientes, vamos a repasar brevemente la notación, el álgebra y la terminología de las matrices<sup>1</sup>.

Una **matriz** es, por definición, una disposición rectangular de elementos; así,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (\text{A.21})$$

<sup>1</sup> Un excelente texto de nivel introductorio a las aplicaciones de las matrices en el análisis de circuitos es el libro de Lawrence P. Huelsman, *Circuits, Matrices, and Linear Vector Spaces* (Nueva York: McGraw-Hill, 1963).

es una matriz con  $m$  filas y  $n$  columnas. Decimos entonces que  $A$  es una matriz de  $m$  por  $n$ , o  $m \times n$ , donde  $m$  es igual al número de filas y  $n$  es igual al número de columnas. Siempre se especifican primero las filas y luego las columnas. Los elementos de la matriz  $(a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots)$  pueden ser números reales, números complejos o funciones. Las matrices se denotan mediante una letra mayúscula negrita. La matriz de la Ecuación A.21 suele abreviarse escribiendo

$$\mathbf{A} = [a_{ij}]_{mn}, \quad (\text{A.22})$$

donde  $a_{ij}$  es el elemento situado en la  $i$ -ésima fila y en la  $j$ -ésima columna.

Si  $m = 1$ ,  $\mathbf{A}$  se denomina **matriz fila**, es decir,

$$\mathbf{A} = [a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13} \quad \cdots \quad a_{1n}]. \quad (\text{A.23})$$

Si  $n = 1$ ,  $\mathbf{A}$  se denomina **matriz columna**, es decir,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.24})$$

Si  $m = n$ ,  $\mathbf{A}$  se denomina **matriz cuadrada**. Por ejemplo, si  $m = n = 3$ , la matriz cuadrada 3 por 3 es

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.25})$$

Observe también que utilizamos corchetes  $[ ]$  para denotar una matriz, mientras que para denotar un determinante utilizamos líneas verticales  $| |$ . Es importante entender la diferencia. Una matriz es una disposición rectangular de elementos. Un **determinante** es una función de una matriz cuadrada de elementos. Por tanto, si una matriz  $\mathbf{A}$  es cuadrada, podemos definir el determinante de  $\mathbf{A}$ . Por ejemplo, si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 15 \end{bmatrix},$$

entonces

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 15 \end{vmatrix} = 30 - 6 = 24.$$

## A.7. Álgebra matricial

La igualdad, suma y resta de matrices se aplican sólo a las matrices del mismo orden. Dos matrices son iguales si y sólo si sus correspondientes elementos son iguales. En otras palabras,  $\mathbf{A} = \mathbf{B}$  si y sólo si  $a_{ij} = b_{ij}$  para todo  $i$  y  $j$ . Por ejemplo, las dos matrices de las Ecuaciones A.26 y A.27 son iguales, porque  $a_{11} = b_{11}$ ,  $a_{12} = b_{12}$ ,  $a_{21} = b_{21}$  y  $a_{22} = b_{22}$ :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 36 & -20 \\ 4 & 16 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.26})$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 36 & -20 \\ 4 & 16 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.27})$$

Si  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  son del mismo orden, entonces

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} \quad (\text{A.28})$$

implica que

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}. \quad (\text{A.29})$$

Por ejemplo, si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -6 & 10 \\ 8 & 12 & -4 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.30})$$

y

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 16 & 10 & -30 \\ -20 & 8 & 15 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.31})$$

entonces

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 20 & 4 & -20 \\ -12 & 20 & 11 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.32})$$

La ecuación

$$\mathbf{D} = \mathbf{A} - \mathbf{B} \quad (\text{A.33})$$

implica que

$$d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}. \quad (\text{A.34})$$

Para las matrices de las Ecuaciones A.30 y A.31, tendríamos

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -12 & -16 & 40 \\ 28 & 4 & -19 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.35})$$

De las matrices del mismo orden se dice que son **conformes** para la suma y la resta.

Multiplicar una matriz por un escalar  $k$  es equivalente a multiplicar cada elemento por el escalar. Así,  $\mathbf{A} = k\mathbf{B}$  si y sólo si  $a_{ij} = kb_{ij}$ . Tenga en cuenta que  $k$  puede ser un número real o complejo. Como ejemplo, vamos a multiplicar la matriz  $\mathbf{D}$  de la Ecuación A.35 por 5. El resultado es

$$5\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -60 & -80 & 200 \\ 140 & 20 & -95 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.36})$$

La multiplicación de matrices sólo puede realizarse si el número de columnas de la primera matriz es igual al número de filas de la segunda matriz. En otras palabras, el producto  $\mathbf{AB}$  requiere que el número de columnas de  $\mathbf{A}$  sea igual al número de filas de  $\mathbf{B}$ . El orden de la matriz resultante será igual

al número de filas de **A** por el número de columnas de **B**. Así, si  $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ , donde **A** es de orden  $m \times p$  y **B** es de orden  $p \times n$ , entonces **C** será una matriz de orden  $m \times n$ . Cuando el número de columnas de **A** es igual al número de filas de **B**, decimos que **A** es conforme con **B** para la multiplicación.

Cada elemento de **C** estará dado por la fórmula

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}. \quad (\text{A.37})$$

La fórmula dada en la Ecuación A.37 resulta fácil de recordar si se tiene presente que la multiplicación de matrices es una operación entre una fila de la primera matriz y una columna de la segunda. Por tanto, para obtener el término  $i, j$  de **C**, se multiplica cada elemento de la  $i$ -ésima fila de **A** por el correspondiente elemento de la  $j$ -ésima columna de **B** y los productos resultantes se suman. El siguiente ejemplo ilustra el procedimiento necesario. Suponga que queremos calcular la matriz **C**, siendo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix} \quad (\text{A.38})$$

y

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.39})$$

En primer lugar, observe que **C** será una matriz  $2 \times 2$  y que cada elemento de **C** requerirá que sumemos tres productos.

Para hallar  $C_{11}$  multiplicamos los correspondientes elementos de la fila 1 de la matriz **A** por los elementos de la columna 1 de la matriz **B** y luego sumamos los productos. Podemos visualizar este proceso de multiplicación y suma extrayendo las correspondientes fila y columna de cada matriz y luego alineándolas elemento por elemento. Por tanto, para hallar  $C_{11}$ , tendremos que

$$\begin{array}{lcl} \text{Fila 1 de A} & 6 & 3 & 2 \\ \text{Columna 1 de B} & 4 & 0 & 1 \end{array};$$

por lo que

$$C_{11} = 6 \times 4 + 3 \times 0 + 2 \times 1 = 26.$$

Para hallar  $C_{12}$ , escribiríamos

$$\begin{array}{lcl} \text{Fila 1 de A} & 6 & 3 & 2 \\ \text{Columna 2 de B} & 2 & 3 & -2 \end{array};$$

de donde

$$C_{12} = 6 \times 2 + 3 \times 3 + 2 \times (-2) = 17.$$

Para  $C_{21}$ , tendríamos

$$\begin{array}{lcl} \text{Fila 2 de A} & 1 & 4 & 6 \\ \text{Columna 1 de B} & 4 & 0 & 1 \end{array};$$

y

$$C_{21} = 1 \times 4 + 4 \times 0 + 6 \times 1 = 10.$$

Finalmente, para  $C_{22}$  tendremos

$$\begin{array}{l} \text{Fila 2 de A} \\ \text{Columna 2 de B} \end{array} \quad \begin{array}{c|c|c} 1 & 4 & 6 \\ \hline 2 & 3 & -2 \end{array};$$

de donde

$$C_{22} = 1 \times 2 + 4 \times 3 + 6 \times (-2) = 2.$$

De aquí se sigue que

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 26 & 17 \\ 10 & 2 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.40})$$

En general, la multiplicación de matrices no es conmutativa, es decir,  $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ . Por ejemplo, considere el producto  $\mathbf{BA}$  para las matrices de las ecuaciones A.38 y A.39. La matriz generada por esta multiplicación es de orden  $3 \times 3$  y cada uno de los términos de la matriz resultante requiere sumar dos productos. Por tanto, si  $\mathbf{D} = \mathbf{BA}$ , tendremos

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 26 & 20 & 20 \\ 3 & 12 & 18 \\ 4 & -5 & -10 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.41})$$

Obviamente,  $\mathbf{C} \neq \mathbf{D}$ . Dejamos como ejercicio para el lector la verificación de los elementos mostrados en la Ecuación A.41.

La multiplicación de matrices es asociativa y distributiva. Es decir,

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC}), \quad (\text{A.42})$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}, \quad (\text{A.43})$$

y

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}. \quad (\text{A.44})$$

En las ecuaciones A.42, A.43 y A.44, estamos suponiendo que las matrices son conformes para las operaciones de suma y multiplicación.

Ya hemos indicado que la multiplicación de matrices no es conmutativa. Hay otras dos propiedades de la multiplicación del álgebra escalar que tampoco se cumplen en el álgebra matricial. En primer lugar, el producto matricial  $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$  no implica que  $\mathbf{A} = \mathbf{0}$  o  $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ . (Nota: una matriz es igual a cero cuando todos sus elementos son cero). Por ejemplo, si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 8 \end{bmatrix},$$

entonces

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

Por tanto, el producto es cero, pero ni  $\mathbf{A}$  ni  $\mathbf{B}$  son cero.

En segundo lugar, la ecuación matricial  $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$  no implica que  $\mathbf{B} = \mathbf{C}$ . Por ejemplo, si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix},$$

entonces,

$$\mathbf{AB} = \mathbf{AC} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}, \quad \text{pero } \mathbf{B} \neq \mathbf{C}.$$

La **transpuesta** de una matriz se forma intercambiando sus filas y columnas. Por ejemplo, si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \quad \text{entonces } \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}.$$

La transpuesta de la suma de dos matrices es igual a la suma de las transpuestas, es decir,

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T. \quad (\text{A.45})$$

La transposición del producto de dos matrices es igual al producto de la transpuestas tomado en orden inverso. En otras palabras,

$$[\mathbf{AB}]^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T. \quad (\text{A.46})$$

La Ecuación A.46 puede extenderse al producto de un número arbitrario de matrices. Por ejemplo,

$$[\mathbf{ABCD}]^T = \mathbf{D}^T \mathbf{C}^T \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T. \quad (\text{A.47})$$

Si  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ , decimos que la matriz es **simétrica**. Sólo las matrices cuadradas pueden ser simétricas.

## A.8. Matriz identidad, adjunta e inversa

Una **matriz identidad** es una matriz cuadrada en la que  $a_{ij} = 0$  para  $i \neq j$ , y  $a_{ij} = 1$  para  $i = j$ . En otras palabras, todos los elementos de una matriz identidad son cero, excepto los situados en la diagonal principal, que son iguales a 1. Por tanto,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

son matrices identidad. Observe que las matrices identidad son siempre cuadradas. Utilizaremos el símbolo  $\mathbf{U}$  para denotar una matriz identidad.

La **adjunta** de una matriz  $\mathbf{A}$  de orden  $n \times n$  se define como

$$\text{adj } \mathbf{A} = [\Delta_{ij}]_{n \times n}, \quad (\text{A.48})$$

donde  $\Delta_{ij}$  es el cofactor de  $a_{ij}$  (véase la definición de cofactor en la Sección A.5). De la Ecuación A.48 se sigue que el proceso de cálculo de la adjunta de una matriz cuadrada consta de dos pasos. En primer

lugar, hay que construir una matriz formada por los cofactores de  $\mathbf{A}$  y luego transponer la matriz de cofactores. Como ejemplo, vamos a hallar la adjunta de la matriz  $3 \times 3$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Los cofactores de los elementos de  $\mathbf{A}$  son

$$\Delta_{11} = 1(10 - 1) = 9,$$

$$\Delta_{12} = -1(15 + 1) = -16,$$

$$\Delta_{13} = 1(3 + 2) = 5,$$

$$\Delta_{21} = -1(10 - 3) = -7,$$

$$\Delta_{22} = 1(5 + 3) = 8,$$

$$\Delta_{23} = -1(1 + 2) = -3,$$

$$\Delta_{31} = 1(2 - 6) = -4,$$

$$\Delta_{32} = -1(1 - 9) = 8,$$

$$\Delta_{33} = 1(2 - 6) = -4.$$

La matriz de cofactores será

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 9 & -16 & 5 \\ -7 & 8 & -3 \\ -4 & 8 & -4 \end{bmatrix}.$$

De aquí se sigue que la adjunta de  $\mathbf{A}$  es

$$\text{adj } \mathbf{A} = \mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 9 & -7 & -4 \\ -16 & 8 & 8 \\ 5 & -3 & -4 \end{bmatrix}.$$

Podemos comprobar las operaciones aritméticas implicadas en la determinación de la adjunta de una matriz utilizando el teorema

$$\text{adj } \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \det \mathbf{A} \cdot \mathbf{U}. \quad (\text{A.49})$$

La Ecuación A.49 nos dice que la adjunta de  $\mathbf{A}$  multiplicada por  $\mathbf{A}$  es igual al determinante de  $\mathbf{A}$  multiplicado por la matriz identidad; en nuestro ejemplo,

$$\det \mathbf{A} = 1(9) + 3(-7) - 1(-4) = -8.$$

Si hacemos  $\mathbf{C} = \text{adj } \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$  y utilizamos la técnica ilustrada en la Sección A.7, vemos que los elementos de  $\mathbf{C}$  son

$$c_{11} = 9 - 21 + 4 = -8,$$

$$c_{12} = 18 - 14 - 4 = 0,$$

$$c_{13} = 27 - 7 - 20 = 0,$$

$$c_{21} = -16 + 24 - 8 = 0,$$

$$c_{22} = -32 + 16 + 8 = -8,$$

$$c_{23} = -48 + 8 + 40 = 0,$$

$$c_{31} = 5 - 9 + 4 = 0,$$

$$c_{32} = 10 - 6 - 4 = 0,$$

$$c_{33} = 15 - 3 - 20 = -8.$$

Por tanto,

$$C = \begin{bmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix} = -8 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \det A \cdot U.$$

Una matriz cuadrada  $A$  tiene una **inversa**, que se denota como  $A^{-1}$ , si

$$A^{-1}A = AA^{-1} = U. \quad (A.50)$$

La Ecuación A.50 nos dice que una matriz premultiplicada o postmultiplicada por su inversa es igual a la matriz identidad  $U$ . Para que la matriz inversa exista, es necesario que el determinante de  $A$  sea distinto de cero. Sólo las matrices cuadradas tienen inversas y la matriz inversa es también cuadrada.

Una fórmula para hallar la inversa de una matriz es

$$A^{-1} = \frac{\text{adj } A}{\det A}. \quad (A.51)$$

La fórmula de la Ecuación A.51 puede resultar bastante engorrosa si  $A$  tiene un orden superior a 3 por 3<sup>2</sup>. Hoy en día, las computadoras digitales nos ahorran el trabajo de calcular la inversa de una matriz en las aplicaciones numéricas del álgebra matricial.

De la Ecuación A.51 se sigue que la inversa de la matriz  $A$  del ejemplo anterior es

$$A^{-1} = -1/8 \begin{bmatrix} 9 & -7 & -4 \\ -16 & 8 & 8 \\ 5 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1,125 & 0,875 & 0,5 \\ 2 & -1 & -1 \\ -0,625 & 0,375 & 0,5 \end{bmatrix}.$$

Puede verificar que  $A^{-1}A = AA^{-1} = U$ .

---

<sup>2</sup> Puede encontrar métodos alternativos de cálculo de la inversa en cualquier texto introductorio sobre teoría de matrices. Consulte, por ejemplo, el libro de Franz E. Hohn, *Elementary Matrix Algebra* (Nueva York: Macmillan, 1973).



## A.9. Matrices particionadas

A menudo resulta conveniente, durante la manipulación de matrices, particionar una matriz dada en una serie de submatrices. Las operaciones algebraicas originales pueden entonces llevarse a cabo con las submatrices. Al particionar una matriz, la colocación de las particiones es completamente arbitraria, con la única restricción de que las particiones deben cubrir la matriz completa. Al seleccionar las particiones, también es necesario asegurarse de que las submatrices sean conformes con las operaciones matemáticas en las que se vean involucradas.

Por ejemplo, vamos a ver cómo podríamos utilizar submatrices para calcular el producto  $C = AB$ , donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

y

$$B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Suponga que decidimos partir  $B$  en dos submatrices  $B_{11}$  y  $B_{21}$ , de modo que

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{bmatrix}.$$

Ahora, puesto que hemos particionado  $B$  en una matriz columna de dos filas, deberemos particionar  $A$  en una matriz de al menos dos columnas; de otro modo, la multiplicación no podría llevarse a cabo. La ubicación de las particiones verticales de la matriz  $A$  dependerá de cómo definamos  $B_{11}$  y  $B_{21}$ . Por ejemplo, si

$$B_{11} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B_{21} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix},$$

entonces  $A_{11}$  debe contener tres columnas y  $A_{12}$  deberá contener dos columnas. Así, el particionamiento mostrado en la Ecuación A.52 sería aceptable para calcular el producto  $AB$ :

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & | & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & | & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & | & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ \dots \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.52})$$

Por el contrario, si particionamos la matriz  $\mathbf{B}$  de modo que

$$\mathbf{B}_{11} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B}_{21} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix},$$

entonces  $\mathbf{A}_{11}$  deberá contener dos columnas y  $\mathbf{A}_{12}$  deberá contener tres columnas. En este caso, el particionamiento mostrado en la Ecuación A.53 sería aceptable para calcular el producto  $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ :

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & | & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & | & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & | & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & | & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ \dots \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.53})$$

En nuestras explicaciones, vamos a centrarnos en el particionamiento dado en la Ecuación A.52 y dejaremos como ejercicio para el lector verificar que el particionamiento de la Ecuación A.53 conduce a los mismos resultados.

A partir de la Ecuación A.52, podemos escribir

$$\mathbf{C} = [\mathbf{A}_{11} \quad \mathbf{A}_{12}] \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} \\ \mathbf{B}_{21} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{11} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{21}. \quad (\text{A.54})$$

De las Ecuaciones A.52 y A.54 se sigue que

$$\mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \\ -4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{21} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \\ -3 & 1 \\ 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 6 \\ -9 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix},$$

y

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 11 \\ 13 \\ -13 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

La matriz  $A$  podría también particionarse horizontalmente, después de realizar el particionamiento vertical de modo coherente con la partición de multiplicación. En este problema simple, las particiones horizontales pueden hacerse a discreción del analista. Por tanto,  $C$  podría también evaluarse utilizando el particionamiento mostrado en la Ecuación A.55:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & | & 2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 0 & 2 & | & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & | & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ \dots \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.55})$$

A partir de la Ecuación A.55 se sigue que

$$C = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{21} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.56})$$

donde

$$C_{11} = A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21},$$

$$C_{21} = A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21}.$$

Puede verificarse que

$$\begin{aligned} C_{11} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 13 \end{bmatrix}, \\ C_{21} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -9 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

y

$$C = \begin{bmatrix} 11 \\ 13 \\ -13 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

Resaltemos asimismo que los particionamientos de las Ecuaciones A.52 y A.55 también son conformes en lo que respecta a la suma.

## A.10. Aplicaciones

Los siguientes ejemplos ilustran algunas aplicaciones del álgebra matricial en el análisis de circuitos.

### EJEMPLO A.1

Utilice el método matricial para hallar las tensiones de nodo  $v_1$  y  $v_2$  en las Ecuaciones 4.5 y 4.6.

#### SOLUCIÓN

El primer paso consiste en reescribir las Ecuaciones 4.5 y 4.6 en notación matricial. Agrupando los coeficientes de  $v_1$  y  $v_2$  y desplazando al mismo tiempo los términos constantes al lado derecho obtenemos

$$1,7v_1 - 0,5v_2 = 10, \quad (\text{A.57})$$

$$-0,5v_1 + 0,6v_2 = 2.$$

De aquí se sigue que, en notación matricial, la Ecuación A.57 es

$$\begin{bmatrix} 1,7 & -0,5 \\ -0,5 & 0,6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.58})$$

o

$$\mathbf{AV} = \mathbf{I}, \quad (\text{A.59})$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1,7 & -0,5 \\ -0,5 & 0,6 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Para hallar los elementos de la matriz  $\mathbf{V}$ , premultiplicamos ambos lados de la Ecuación A.59 por la inversa de  $\mathbf{A}$ ,

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{AV} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{I}. \quad (\text{A.60})$$

La Ecuación A.60 se reduce a

$$\mathbf{UV} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{I}, \quad (\text{A.61})$$

o

$$\mathbf{V} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{I}. \quad (\text{A.62})$$

De la Ecuación A.62 se sigue que las soluciones correspondientes a  $v_1$  y  $v_2$  se obtienen calculando el producto de matrices  $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{I}$ .

Para hallar la inversa de  $\mathbf{A}$ , calculamos primero los cofactores de  $\mathbf{A}$ :

$$\begin{aligned} \Delta_{11} &= (-1)^2(0,6) = 0,6, \\ \Delta_{12} &= (-1)^3(-0,5) = 0,5, \\ \Delta_{21} &= (-1)^3(-0,5) = 0,5, \\ \Delta_{22} &= (-1)^4(1,7) = 1,7. \end{aligned} \quad (\text{A.63})$$

La matriz de cofactores es

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,5 \\ 0,5 & 1,7 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.64})$$

y la adjunta de  $\mathbf{A}$  es

$$\text{adj } \mathbf{A} = \mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,5 \\ 0,5 & 1,7 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.65})$$

El determinante de  $\mathbf{A}$  es

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &= \begin{vmatrix} 1,7 & -0,5 \\ -0,5 & 0,6 \end{vmatrix} \\ &= (1,7)(0,6) - (0,25) = 0,77. \end{aligned} \quad (\text{A.66})$$

A partir de las Ecuaciones A.65 y A.66, podemos escribir la inversa de la matriz de coeficientes, que será

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{0,77} \begin{bmatrix} 0,6 & 0,5 \\ 0,5 & 1,7 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.67})$$

Y con ello podemos hallar el producto  $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{I}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{-1}\mathbf{I} &= \frac{100}{77} \begin{bmatrix} 0,6 & 0,5 \\ 0,5 & 1,7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{100}{77} \begin{bmatrix} 7 \\ 8,4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9,09 \\ 10,91 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.68}) \end{aligned}$$

De aquí se sigue directamente que

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9,09 \\ 10,91 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.69})$$

es decir,  $v_1 = 9,09 \text{ V}$  y  $v_2 = 10,91 \text{ V}$ .

## EJEMPLO A.2

Utilice el método matricial para hallar las tres corrientes de malla en el circuito de la Figura 4.24.

### SOLUCIÓN

Las ecuaciones de corrientes de malla que describen el circuito de la Figura 4.24 son las indicadas en la Ecuación 4.34. La ecuación de restricción impuesta por la fuente de tensión controlada por corriente se indica en la Ecuación 4.35. Si sustituimos la Ecuación 4.35 en la Ecuación 4.34, nos queda el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 25i_1 - 5i_2 - 20i_3 &= 50, \\ -5i_1 + 10i_2 - 4i_3 &= 0, \quad (\text{A.70}) \\ -5i_1 - 4i_2 + 9i_3 &= 0. \end{aligned}$$

En notación matricial, la Ecuación A.70 se reduce a

$$\mathbf{AI} = \mathbf{V}, \quad (\text{A.71})$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 25 & -5 & -20 \\ -5 & 10 & -4 \\ -5 & -4 & 9 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix},$$

y

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 50 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

De la Ecuación A.71 se sigue que la solución correspondiente a  $\mathbf{I}$  es

$$\mathbf{I} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{V}. \quad (\text{A.72})$$

Podemos hallar la inversa de  $\mathbf{A}$  utilizando la relación

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\text{adj } \mathbf{A}}{\det \mathbf{A}}. \quad (\text{A.73})$$

Para hallar la adjunta de  $\mathbf{A}$ , calculamos primero los cofactores de  $\mathbf{A}$ :

$$\begin{aligned} \Delta_{11} &= (-1)^2(90 - 16) = 74, \\ \Delta_{12} &= (-1)^3(-45 - 20) = 65, \\ \Delta_{13} &= (-1)^4(20 + 50) = 70, \\ \Delta_{21} &= (-1)^3(-45 - 80) = 125, \\ \Delta_{22} &= (-1)^4(225 - 100) = 125, \\ \Delta_{23} &= (-1)^5(-100 - 25) = 125, \\ \Delta_{31} &= (-1)^4(20 + 200) = 220, \\ \Delta_{32} &= (-1)^5(-100 - 100) = 200, \\ \Delta_{33} &= (-1)^6(250 - 25) = 225. \end{aligned}$$

La matriz de cofactores será

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 74 & 65 & 70 \\ 125 & 125 & 125 \\ 220 & 200 & 225 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.74})$$

a partir de la cual podemos escribir la adjunta de  $\mathbf{A}$ :

$$\text{adj } \mathbf{A} = \mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 74 & 125 & 220 \\ 65 & 125 & 200 \\ 70 & 125 & 225 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.75})$$

El determinante de  $\mathbf{A}$  es:

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &= \begin{vmatrix} 25 & -5 & -20 \\ -5 & 10 & -4 \\ -5 & -4 & 9 \end{vmatrix} \\ &= 25(90 - 16) + 5(-45 - 80) \\ &\quad - 5(20 + 200) = 125. \end{aligned}$$

De la Ecuación A.73 se sigue que

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{125} \begin{bmatrix} 74 & 125 & 220 \\ 65 & 125 & 200 \\ 70 & 125 & 225 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.76})$$

### EJEMPLO A.3

Utilice el método matricial para hallar los fasores de corrientes de malla  $\mathbf{I}_1$  e  $\mathbf{I}_2$  en el circuito de la Figura 9.37.

#### SOLUCIÓN

Sumando las tensiones alrededor de la malla 1 se genera la ecuación

$$\begin{aligned} (1 + j2)\mathbf{I}_1 \\ + (12 - j16)(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2) = 150\angle 0^\circ. \end{aligned} \quad (\text{A.79})$$

Sumando las tensiones alrededor de la malla 2, la ecuación que se obtiene es

$$\begin{aligned} (12 - j16)(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_1) \\ + (1 + j3)\mathbf{I}_2 + 39\mathbf{I}_x = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.80})$$

La corriente que controla la fuente de tensión dependiente es

$$\mathbf{I}_x = (\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2). \quad (\text{A.81})$$

Después de sustituir la Ecuación A.81 en la Ecuación A.80, ponemos las ecuaciones en for-

La solución correspondiente a  $\mathbf{I}$  es

$$\mathbf{I} = \frac{1}{125} \begin{bmatrix} 74 & 125 & 220 \\ 65 & 125 & 200 \\ 70 & 125 & 225 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 50 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29,60 \\ 26,00 \\ 28,00 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.77})$$

Las corrientes de malla se deducen directamente de la Ecuación A.77; así,

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29,60 \\ 26,00 \\ 28,00 \end{bmatrix} \quad (\text{A.78})$$

es decir,  $i_1 = 29,6 \text{ A}$ ,  $i_2 = 26 \text{ A}$  e  $i_3 = 28 \text{ A}$ . El Ejemplo A.3 ilustra la aplicación del método matricial cuando los elementos de la matriz son números complejos.

mato matricial agrupando primero en cada ecuación los coeficientes de  $\mathbf{I}_1$  e  $\mathbf{I}_2$ , con lo que queda

$$\begin{aligned} (13 - j14)\mathbf{I}_1 - (12 - j16)\mathbf{I}_2 &= 150\angle 0^\circ, \\ (27 + j16)\mathbf{I}_1 - (26 + j13)\mathbf{I}_2 &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.82})$$

Ahora, utilizando notación matricial, escribiremos la Ecuación A.82 de la forma siguiente:

$$\mathbf{A}\mathbf{I} = \mathbf{V}, \quad (\text{A.83})$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 13 - j14 & -(12 - j16) \\ 27 + j16 & -(26 + j13) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 150\angle 0^\circ \\ 0 \end{bmatrix}.$$

De la Ecuación A.83 se sigue que

$$\mathbf{I} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{V}. \quad (\text{A.84})$$

La inversa de la matriz de coeficientes  $\mathbf{A}$  se calcula utilizando la Ecuación A.73. En este caso,

los cofactores de  $\mathbf{A}$  son

$$\Delta_{11} = (-1)^2(-26 - j13) = -26 - j13,$$

$$\Delta_{12} = (-1)^3(27 + j16) = -27 - j16,$$

$$\Delta_{21} = (-1)^3(-12 + j16) = 12 - j16,$$

$$\Delta_{22} = (-1)^4(13 - j14) = 13 - j14.$$

La matriz  $\mathbf{B}$  de cofactores es

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} (-26 - j13) & (-27 - j16) \\ (12 - j16) & (13 - j14) \end{bmatrix}. \quad (\text{A.85})$$

La adjunta de  $\mathbf{A}$  es

$$\text{adj } \mathbf{A} = \mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} (-26 - j13) & (12 - j16) \\ (-27 - j16) & (13 - j14) \end{bmatrix}. \quad (\text{A.86})$$

El determinante de  $\mathbf{A}$  es

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &= \begin{vmatrix} 13 - j14 & -(12 - j16) \\ 27 + j16 & -(26 + j13) \end{vmatrix} \\ &= -(13 - j14)(26 + j13) \\ &\quad + (12 - j16)(27 + j16) \\ &= 60 - j45. \end{aligned} \quad (\text{A.87})$$

La inversa de la matriz de coeficientes es

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} (-26 - j13) & (12 - j16) \\ (-27 - j16) & (13 - j14) \end{bmatrix}}{(60 - j45)}. \quad (\text{A.88})$$

La Ecuación A.88 puede simplificarse para obtener

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{-1} &= \frac{(60 + j45)}{5625} \begin{bmatrix} (-26 - j13) & (12 - j16) \\ (-27 - j16) & (13 - j14) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{375} \begin{bmatrix} -65 - j130 & 96 - j28 \\ -60 - j145 & 94 - j17 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.89})$$

Sustituyendo la Ecuación A.89 en la Ecuación A.84, nos queda

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} &= \frac{1}{375} \begin{bmatrix} (-65 - j130) & (96 - j28) \\ (-60 - j145) & (94 - j17) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 150 \angle 0^\circ \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (-26 - j52) \\ (-24 - j58) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.90})$$

De la Ecuación A.90 se sigue que

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_1 &= (-26 - j52) = 58,14 \angle -116,57^\circ \text{ A}, \\ \mathbf{I}_2 &= (-24 - j58) = 62,77 \angle -122,48^\circ \text{ A}. \end{aligned} \quad (\text{A.91})$$

En los tres primeros ejemplos, los elementos de la matriz eran números: números reales en los Ejemplos A.1 y A.2 y números complejos en el Ejemplo A.3. Pero también es posible que los elementos sean funciones. El Ejemplo A.4 ilustra el uso del álgebra matricial en un problema de circuitos en el que los elementos de la matriz de coeficientes son funciones.

## EJEMPLO A.4

Utilice el método matricial para hallar las expresiones de las tensiones de nodo  $V_1$  y  $V_2$  en el circuito de la Figura A.1.

### SOLUCIÓN

Sumando las corrientes que salen de los nodos 1 y 2 se genera el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\frac{V_1 - V_g}{R} + V_1 sC + (V_1 - V_2) sC = 0,$$

$$\frac{V_2}{R} + (V_2 - V_1) sC + (V_2 - V_g) sC = 0. \quad (\text{A.92})$$

Haciendo  $G = 1/R$  y agrupando los coeficientes de  $V_1$  y  $V_2$ , obtenemos

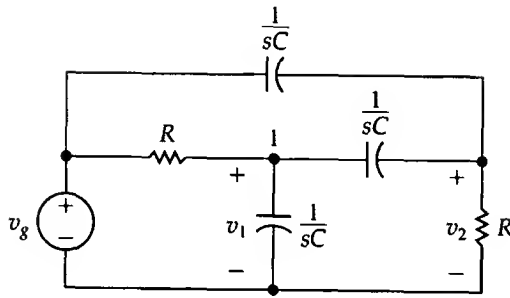


Figura A.1. Circuito para el Ejemplo A.4.

$$\begin{aligned}(G + 2sC)V_1 - sCV_2 &= GV_g, \\ -sCV_1 + (G + 2sC)V_2 &= sCV_g.\end{aligned}\quad (\text{A.93})$$

Escribiendo la Ecuación A.93 en notación matricial tendríamos

$$\mathbf{A}\mathbf{V} = \mathbf{I}, \quad (\text{A.94})$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} G + 2sC & -sC \\ -sC & G + 2sC \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} GV_g \\ sCV_g \end{bmatrix}.$$

De la Ecuación A.94 se sigue que

$$\mathbf{V} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{I}. \quad (\text{A.95})$$

Como antes, hallamos la inversa de la matriz de coeficientes calculando primero la adjunta de  $\mathbf{A}$  y el determinante de  $\mathbf{A}$ . Los cofactores de  $\mathbf{A}$  son

$$\Delta_{11} = (-1)^2[G + 2sC] = G + 2sC,$$

$$\Delta_{12} = (-1)^3(-sC) = sC,$$

$$\Delta_{21} = (-1)^3(-sC) = sC,$$

$$\Delta_{22} = (-1)^4[G + 2sC] = G + 2sC.$$

La matriz de cofactores es

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} G + 2sC & sC \\ sC & G + 2sC \end{bmatrix}, \quad (\text{A.96})$$

y por tanto la adjunta de la matriz de coeficientes será

$$\text{adj } \mathbf{A} = \mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} G + 2sC & sC \\ sC & G + 2sC \end{bmatrix}. \quad (\text{A.97})$$

El determinante de  $\mathbf{A}$  es

$$\begin{aligned}\det \mathbf{A} &= \begin{vmatrix} G + 2sC & sC \\ sC & G + 2sC \end{vmatrix} \\ &= G^2 + 4sCG + 3s^2C^2.\end{aligned}\quad (\text{A.98})$$

La inversa de la matriz de coeficientes es

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} G + 2sC & sC \\ sC & G + 2sC \end{bmatrix}}{(G^2 + 4sCG + 3s^2C^2)}. \quad (\text{A.99})$$

De la Ecuación A.95 se sigue que

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} G + 2sC & sC \\ sC & G + 2sC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} GV_g \\ sCV_g \end{bmatrix}}{(G^2 + 4sCG + 3s^2C^2)}. \quad (\text{A.100})$$

Realizando la multiplicación de matrices de la Ecuación A.100, se obtiene

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{(G^2 + 4sCG + 3s^2C^2)} \begin{bmatrix} (G^2 + 2sCG + s^2C^2)V_g \\ (2sCG + 2s^2C^2)V_g \end{bmatrix}. \quad (\text{A.101})$$

Ahora, podemos escribir las expresiones correspondientes a  $V_1$  y  $V_2$  directamente a partir de la Ecuación A.101:

$$V_1 = \frac{(G^2 + 2sCG + s^2C^2)V_g}{(G^2 + 4sCG + 3s^2C^2)} \quad (\text{A.102})$$

y

$$V_2 = \frac{2(sCG + s^2C^2)V_g}{(G^2 + 4sCG + 3s^2C^2)} \quad (\text{A.103})$$

En nuestro ejemplo final, vamos a ilustrar el modo en que puede emplearse el álgebra matricial para analizar la conexión en cascada de dos cuadripolos.



### EJEMPLO A.5

Muestre, por medio del álgebra matricial, cómo pueden describirse las variables de entrada  $V_1$  e  $I_1$  en función de las variables de salida  $V_2$  e  $I_2$  en la conexión en cascada mostrada en la Figura 18.10.

### SOLUCIÓN

Comenzamos expresando en notación matricial la relación entre las variables de entrada y de salida de cada cuadripolo. Así,

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a'_{11} & -a'_{12} \\ a'_{21} & -a'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.104})$$

y

$$\begin{bmatrix} V_1' \\ I_1' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a''_{11} & -a''_{12} \\ a''_{21} & -a''_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.105})$$

Ahora, la conexión en cascada impone las restricciones

$$V_2' = V_1' \quad \text{e} \quad I_2' = -I_1'. \quad (\text{A.106})$$

Estas relaciones de restricción se sustituyen en la Ecuación A.104, con lo que nos queda

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a'_{11} & -a'_{12} \\ a'_{21} & -a'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1' \\ -I_1' \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1' \\ I_1' \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.107})$$

La relación entre las variables de entrada ( $V_1, I_1$ ) y las variables de salida ( $V_2, I_2$ ) se obtiene sustituyendo la Ecuación A.105 en la Ecuación A.107. El resultado es

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a''_{11} & -a''_{12} \\ a''_{21} & -a''_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.108})$$

Después de multiplicar las matrices de coeficientes, tendremos

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a'_{11}a''_{11} + a'_{12}a''_{21}) & -(a'_{11}a''_{12} + a'_{12}a''_{22}) \\ (a'_{21}a''_{11} + a'_{22}a''_{21}) & -(a'_{21}a''_{12} + a'_{22}a''_{22}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.109})$$

Observe que la Ecuación A.109 es la que se obtendría escribiendo las Ecuaciones 18.72 y 18.73 en forma matricial.



# APÉNDICE

# B

# Números complejos

Los números complejos se inventaron para permitir la extracción de las raíces cuadradas de los números negativos. Los números complejos simplifican la resolución de problemas que, si no dispusiéramos de ellos, resultarían muy difíciles. La ecuación  $x^2 + 8x + 41 = 0$ , por ejemplo, no tiene solución en ningún sistema de numeración que excluya los números complejos. Estos números, y la capacidad de manipularlos algebraicamente, son sumamente útiles en el análisis de circuitos.

## B.1. Notación

Hay dos formas de expresar un número complejo: en forma rectangular o cartesiana, o en forma polar o trigonométrica. En la **forma rectangular**, el número complejo se escribe en función de sus componentes real e imaginaria, de la forma siguiente:

$$n = a + jb, \quad (\text{B.1})$$

donde  $a$  es la componente real,  $b$  es la componente imaginaria y  $j$  es, por definición,  $\sqrt{-1}$ <sup>1</sup>.

En la **forma polar**, el número complejo se escribe en función de su módulo (o magnitud) y su ángulo (o argumento):

$$n = ce^{j\theta}, \quad (\text{B.2})$$

donde  $c$  es el módulo,  $\theta$  es el ángulo,  $e$  es la base de los logaritmos naturales y, como antes,  $j = \sqrt{-1}$ . En la literatura, se utiliza frecuentemente el símbolo  $\angle\theta^\circ$  en lugar de  $e^{j\theta}$ ; es decir, el número complejo en forma polar se escribe en ocasiones:

$$n = c \angle \theta^\circ. \quad (\text{B.3})$$

Aunque la Ecuación B.3 resulta más cómoda a la hora de imprimir libros de texto, la Ecuación B.2 tiene una gran importancia en las operaciones matemáticas, debido a que las reglas de manipulación de magnitudes exponenciales son bien conocidas. Por ejemplo, como  $(y^x)^n = y^{xn}$ , entonces  $(e^{j\theta})^n = e^{jn\theta}$ ; como  $y^{-x} = 1/y^x$ , entonces  $e^{-j\theta} = 1/e^{j\theta}$ ; y así sucesivamente.

Puesto que hay dos formas de expresar el mismo número complejo, es necesario saber poner en relación cada una de ellas con las demás. La transformación de la forma polar a la forma rectangular hace uso de la identidad de Euler:

---

<sup>1</sup> Es posible que el lector esté más familiarizado con la notación  $i = \sqrt{-1}$ . En ingeniería eléctrica, la letra  $i$  se utiliza como símbolo de la corriente, por lo que en la literatura relacionada con la ingeniería eléctrica, se utiliza en su lugar  $j$  para referirse a  $\sqrt{-1}$ .

$$e^{\pm j\theta} = \cos \theta \pm j \sin \theta. \quad (\text{B.4})$$

Un número complejo en forma polar puede expresarse en forma rectangular escribiendo

$$\begin{aligned} ce^{j\theta} &= c(\cos \theta + j \sin \theta) \\ &= c \cos \theta + jc \sin \theta \\ &= a + jb. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

La transformación de la forma rectangular a la polar hace uso de la geometría de los triángulos rectángulos:

$$\begin{aligned} a + jb &= (\sqrt{a^2 + b^2})e^{j\theta} \\ &= ce^{j\theta}, \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

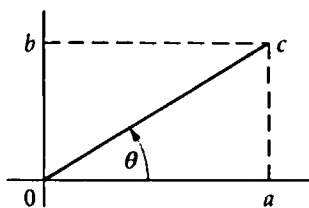
donde

$$\tan \theta = b/a. \quad (\text{B.7})$$

No resulta obvio, a partir de la Ecuación B.7, en qué cuadrante se encuentra el ángulo  $\theta$ . La ambigüedad puede resolverse representando gráficamente el número complejo.

## B.2. Representación gráfica de un número complejo

Un número complejo se representa gráficamente en el denominado plano de los números complejos, que utiliza el eje horizontal para expresar la componente real y el eje vertical para indicar la componente imaginaria. El ángulo del número complejo se mide en sentido contrario al de las agujas del reloj a partir del eje real positivo. La representación gráfica del número complejo  $n = a + jb = c \angle \theta^\circ$ , si suponemos que tanto  $a$  como  $b$  son positivas, se muestra en la Figura B.1.



**Figura B.1.** Representación gráfica de  $a + jb$  cuando  $a$  y  $b$  son positivas.

Esta gráfica expresa muy claramente la relación entre las formas rectangular y polar. Cada punto del plano de los números complejos puede identificarse de forma unívoca dando su distancia con respecto a cada eje (es decir,  $a$  y  $b$ ) o su distancia radial a partir del origen ( $c$ ) y el ángulo  $\theta$  de la línea que conecta el punto con el origen.

De la Figura B.1 se sigue que  $\theta$  está en el primer cuadrante cuando  $a$  y  $b$  son positivas; en el segundo cuadrante cuando  $a$  es negativa y  $b$  es positiva; en el tercer cuadrante cuando  $a$  y  $b$  son negativas; y en el cuarto cuadrante cuando  $a$  es positiva y  $b$  es negativa. Estas observaciones se ilustran en la Figura B.2, en la que hemos dibujado los números complejos  $4 + j3$ ,  $-4 + j3$ ,  $-4 - j3$  y  $4 - j3$ .

Observe que también podemos especificar  $\theta$  como un ángulo en el sentido de las agujas del reloj a partir del eje real positivo. Así, en la Figura B.2(c), también podríamos representar  $-4 - j3$  como

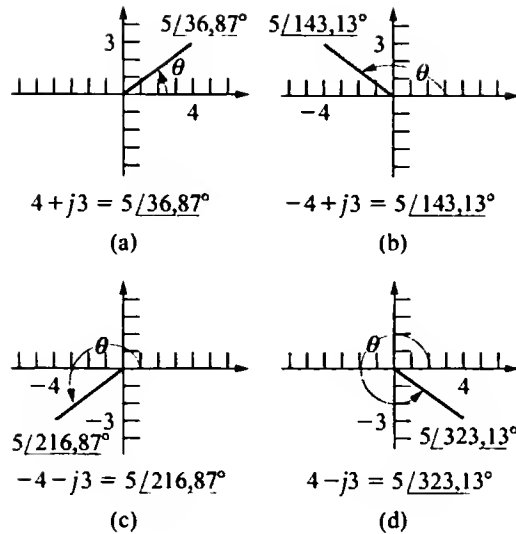


Figura B.2. Representación gráfica de cuatro números complejos.

$5 \angle -143.13^\circ$ . En la Figura B.2(d), podemos observar que  $5 \angle 323.13^\circ = 5 \angle -36.87^\circ$ . Resulta bastante común expresar  $\theta$  como un valor negativo cuando  $\theta$  se encuentra en el tercer o cuarto cuadrantes.

La interpretación gráfica de un número complejo también muestra la relación entre el número complejo y su conjugado. El **conjugado de un número complejo** se forma invirtiendo el signo de su componente imaginaria. Así, el conjugado de  $a + jb$  es  $a - jb$  y el conjugado de  $-a + jb$  es  $-a - jb$ . Cuando escribimos un número complejo en forma polar, podemos formar su conjugado simplemente invirtiendo el signo del ángulo  $\theta$ . Así, el conjugado de  $c \angle \theta$  es  $c \angle -\theta$ . El conjugado de un número complejo se designa con un asterisco. En otras palabras,  $n^*$  representa el conjugado de  $n$ . La Figura B.3 muestra dos números complejos y sus conjugados en el plano de los números complejos.

Observe que la conjugación simplemente consiste en reflejar los números complejos con respecto al eje real.

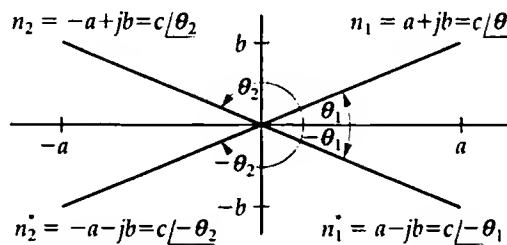


Figura B.3. Los números complejos  $n_1$  y  $n_2$  y sus conjugados  $n_1^*$  y  $n_2^*$

## B.3. Operaciones aritméticas

### Suma (resta)

Para sumar o restar números complejos, debemos expresar dichos números en forma rectangular. La suma implica sumar las partes reales del número complejo para formar la parte real de la suma y las partes imaginarias para formar la parte imaginaria de la suma. Así, si partimos de los números

$$n_1 = 8 + j16$$

y

$$n_2 = 12 - j3,$$

entonces

$$n_1 + n_2 = (8 + 12) + j(16 - 3) = 20 + j13.$$

La resta sigue las mismas reglas. Por tanto,

$$n_2 - n_1 = (12 - 8) + j(-3 - 16) = 4 - j19.$$

Si los números que hay que sumar o restar se nos proporcionan en forma polar, primero es preciso convertirlos a forma rectangular. Por ejemplo, si

$$n_1 = 10 \angle 53,13^\circ$$

y

$$n_2 = 5 \angle -135^\circ,$$

entonces

$$\begin{aligned} n_1 + n_2 &= 6 + j8 - 3,535 - j3,535 \\ &= (6 - 3,535) + j(8 - 3,535) \\ &= 2,465 + j4,465 = 5,10 \angle 61,10^\circ, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} n_1 - n_2 &= 6 + j8 - (-3,535 - j3,535) \\ &= 9,535 + j11,535 \\ &= 14,966 \angle 50,42^\circ. \end{aligned}$$

## Multiplicación (división)

La multiplicación o división de números complejos puede realizarse expresando los números en forma tanto rectangular como polar. Sin embargo, en la mayoría de los casos resulta más cómoda la forma polar. Como ejemplo, vamos a hallar el producto  $n_1 n_2$  cuando  $n_1 = 8 + j10$  y  $n_2 = 5 - j4$ . Utilizando la forma rectangular, tendremos

$$\begin{aligned} n_1 n_2 &= (8 + j10)(5 - j4) = 40 - j32 + j50 + 40 \\ &= 80 + j18 \\ &= 82 \angle 12,68^\circ. \end{aligned}$$

Si utilizamos la forma polar, el producto  $n_1 n_2$  será

$$\begin{aligned} n_1 n_2 &= (12,81 \angle 51,34^\circ)(6,40 \angle -38,66^\circ) \\ &= 82 \angle 12,68^\circ \\ &= 80 + j18. \end{aligned}$$

El primer paso para dividir dos números complejos en forma rectangular consiste en multiplicar el numerador y el denominador por el conjugado del denominador. Esto hace que el denominador se reduzca a un número real. Después, dividimos el nuevo numerador por dicho número real. Como ejemplo, vamos a hallar el valor de  $n_1/n_2$ , donde  $n_1 = 6 + j3$  y  $n_2 = 3 - j1$ :

$$\begin{aligned}\frac{n_1}{n_2} &= \frac{6 + j3}{3 - j1} = \frac{(6 + j3)(3 + j1)}{(3 - j1)(3 + j1)} \\ &= \frac{18 + j6 + j9 - 3}{9 + 1} \\ &= \frac{15 + j5}{10} = 1,5 + j1,5 \\ &= 2,12 \angle 45^\circ.\end{aligned}$$

En forma polar, la división de  $n_1$  por  $n_2$  es

$$\begin{aligned}\frac{n_1}{n_2} &= \frac{6,71 \angle 26,57^\circ}{3,16 \angle -18,43^\circ} = 2,12 \angle 45^\circ \\ &= 1,5 + j1,5.\end{aligned}$$

## B.4. Identidades útiles

A la hora de trabajar con números y magnitudes complejos, resultan muy útiles las siguientes identidades:

$$\pm j^2 = \mp 1, \quad (\text{B.8})$$

$$(-j)(j) = 1, \quad (\text{B.9})$$

$$j = \frac{1}{-j}, \quad (\text{B.10})$$

$$e^{\pm j\pi} = -1, \quad (\text{B.11})$$

$$e^{\pm j\pi/2} = \pm j. \quad (\text{B.12})$$

Si  $n = a + jb = c \angle \theta^\circ$ , entonces tendremos que

$$nn^* = a^2 + b^2 = c^2, \quad (\text{B.13})$$

$$n + n^* = 2a, \quad (\text{B.14})$$

$$n - n^* = j2b, \quad (\text{B.15})$$

$$n/n^* = 1 \angle 2\theta^\circ. \quad (\text{B.16})$$

## B.5. Potencias enteras de un número complejo

Para elevar un número complejo a una potencia entera  $k$ , lo más fácil es escribir primero el número complejo en forma polar. Así,

$$\begin{aligned} n^k &= (a + jb)^k \\ &= (ce^{j\theta})^k = c^k e^{jk\theta} \\ &= c^k (\cos k\theta + j \sin k\theta). \end{aligned}$$

Por ejemplo,

$$\begin{aligned} (2e^{j12^\circ})^5 &= 2^5 e^{j60^\circ} = 32e^{j60^\circ} \\ &= 16 + j27.71, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} (3 + j4)^4 &= (5e^{j53.13^\circ})^4 = 5^4 e^{j212.52^\circ} \\ &= 625e^{j212.52^\circ} \\ &= -527 - j336. \end{aligned}$$

## B.6. Raíces de un número complejo

Para hallar la raíz  $k$ -ésima de un número complejo, debemos tener en cuenta que estaremos resolviendo la ecuación

$$x^k - ce^{j\theta} = 0, \quad (\text{B.17})$$

que es una ecuación de grado  $k$  y tiene, por tanto,  $k$  raíces.

Para hallar las  $k$  raíces, observemos primero que

$$ce^{j\theta} = ce^{j(\theta+2\pi)} = ce^{j(\theta+4\pi)} = \dots, \quad (\text{B.18})$$

De las Ecuaciones B.17 y B.18 se sigue que

$$x_1 = (ce^{j\theta})^{1/k} = c^{1/k} e^{j\theta/k}, \quad (\text{B.19})$$

$$x_2 = [ce^{j(\theta+2\pi)}]^{1/k} = c^{1/k} e^{j(\theta+2\pi)/k}, \quad (\text{B.20})$$

$$x_3 = [ce^{j(\theta+4\pi)}]^{1/k} = c^{1/k} e^{j(\theta+4\pi)/k}, \quad (\text{B.21})$$

$\vdots$

Podemos continuar el proceso indicado por las Ecuaciones B.19, B.20 y B.21 hasta que las raíces comiencen a repetirse. Esto sucederá cuando el factor que multiplica a  $\pi$  sea igual a  $2k$ . Por ejemplo, vamos a hallar las cuatro raíces de  $81e^{j60^\circ}$ . En este caso, tendremos



$$x_1 = 81^{1/4} e^{j60/4} = 3e^{j15^\circ},$$

$$x_2 = 81^{1/4} e^{j(60+360)/4} = 3e^{j105^\circ},$$

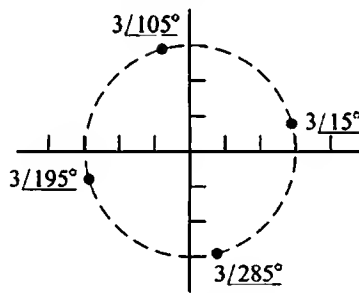
$$x_3 = 81^{1/4} e^{j(60+720)/4} = 3e^{j195^\circ},$$

$$x_4 = 81^{1/4} e^{j(60+1080)/4} = 3e^{j285^\circ},$$

$$x_5 = 81^{1/4} e^{j(60+1440)/4} = 3e^{j375^\circ} = 3e^{j15^\circ}.$$

Aquí,  $x_5$  es igual a  $x_1$ , por lo que las raíces han comenzado a repetirse. Por tanto, sabemos que las cuatro raíces de  $81e^{j60^\circ}$  son los valores dados por  $x_1, x_2, x_3$  y  $x_4$ .

Conviene resaltar que las raíces de un número complejo están situadas en un círculo dentro del plano de los números complejos. El radio de dicho círculo es igual a  $c^{1/k}$ . Las raíces están distribuidas uniformemente alrededor del círculo, siendo el ángulo entre raíces adyacentes igual a  $2\pi/k$  radianes, o  $360/k$  grados. En la Figura B.4 se muestran las cuatro raíces de  $81e^{j60^\circ}$ .



**Figura B.4.** Las cuatro raíces de  $81e^{j60^\circ}$ .



# APÉNDICE **C** Información adicional sobre bobinas magnéticamente acopladas y transformadores ideales

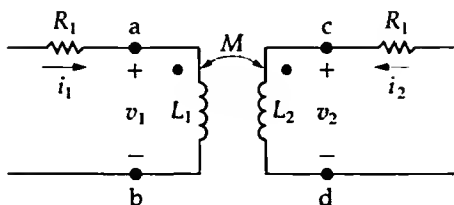
## C.1. Circuitos equivalentes para bobinas magnéticamente acopladas

A veces, resulta conveniente modelar las bobinas magnéticamente acopladas mediante un circuito equivalente en el que no exista ningún acoplamiento magnético. Considere las dos bobinas magnéticamente acopladas que se muestran en la Figura C.1. Las resistencias  $R_1$  y  $R_2$  representan la resistencia del devanado de cada bobina. El objetivo consiste en sustituir las bobinas magnéticamente acopladas situadas dentro del área sombreada por una serie de bobinas que no estén acopladas magnéticamente. Antes de hallar los circuitos equivalentes, debemos señalar una restricción importante: la tensión entre los terminales b y d debe ser cero. En otras palabras, si se pueden cortocircuitar los terminales b y d sin perturbar las tensiones y corrientes del circuito original, podremos utilizar los circuitos equivalentes que se muestran en este apéndice para modelar las bobinas. Esta restricción se debe a que, aunque los circuitos equivalentes que vamos a desarrollar tienen cuatro terminales, dos de esos cuatro terminales están cortocircuitados. Debido a ello, imponemos el mismo requisito a los circuitos originales.

Comenzaremos a desarrollar los modelos de circuitos escribiendo las dos ecuaciones que relacionan las tensiones en los terminales,  $v_1$  y  $v_2$ , con las corrientes en los terminales  $i_1$  e  $i_2$ . Para las referencias y marcas de polaridad indicadas,

$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad (\text{C.1})$$

$$v_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}. \quad (\text{C.2})$$



**Figura C.1.** Disposición utilizada para desarrollar un circuito equivalente para bobinas magnéticamente acopladas.

## Circuito equivalente en T

Para obtener un circuito equivalente para estas dos bobinas magnéticamente acopladas, vamos a buscar una disposición de bobinas que pueda describirse mediante un conjunto de ecuaciones equivalente a las Ecuaciones C.1 y C.2. La clave para hallar dicha disposición de bobinas consiste en considerar las Ecuaciones C.1 y C.2 como ecuaciones de corrientes de malla, siendo  $i_1$  e  $i_2$  las variables de malla. En estas condiciones, necesitaremos una malla con una inductancia total igual a  $L_1$  H y una segunda malla con una inductancia total igual a  $L_2$  H. Además, las dos mallas deben compartir una inductancia común de valor  $M$  H. La estructura de bobinas en T mostrada en la Figura C.2 satisface estos requisitos.

El lector puede verificar que las ecuaciones que relacionan  $v_1$  y  $v_2$  con  $i_1$  e  $i_2$  se reducen a las Ecuaciones C.1 y C.2. Observe la ausencia de acoplamiento magnético entre las bobinas y la tensión de valor cero existente entre b y d.

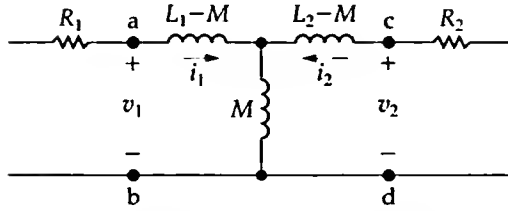
## Circuito equivalente en $\pi$

También podemos hallar un circuito equivalente en  $\pi$  para las bobinas magnéticamente acopladas de la Figura C.1. Para hallarlo, calculamos a partir de las Ecuaciones C.1 y C.2 las derivadas  $di_1/dt$  y  $di_2/dt$  y luego consideramos las expresiones resultantes como un par de ecuaciones de tensión de nodo. Utilizando el método de Cramer para la resolución de sistemas de ecuaciones, podemos obtener las expresiones correspondientes a  $di_1/dt$  y  $di_2/dt$ :

$$\frac{di_1}{dt} = \frac{\begin{vmatrix} v_1 & M \\ v_2 & L_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{vmatrix}} = \frac{L_2}{L_1 L_2 - M^2} v_1 - \frac{M}{L_1 L_2 - M^2} v_2; \quad (\text{C.3})$$

$$\frac{di_2}{dt} = \frac{\begin{vmatrix} L_1 & v_1 \\ M & v_2 \end{vmatrix}}{L_1 L_2 - M^2} = \frac{-M}{L_1 L_2 - M^2} v_1 + \frac{L_1}{L_1 L_2 - M^2} v_2. \quad (\text{C.4})$$

Ahora podemos hallar los valores de  $i_1$  e  $i_2$  multiplicando ambos lados de las Ecuaciones C.3 y C.4 por  $dt$  y luego integrando:



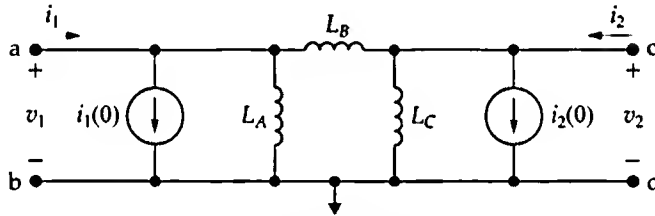
**Figura C.2.** Circuito equivalente en T para las bobinas magnéticamente acopladas de la Figura C.1.

$$i_1 = i_1(0) + \frac{L_2}{L_1 L_2 - M^2} \int_0^t v_1 d\tau - \frac{M}{L_1 L_2 - M^2} \int_0^t v_2 d\tau \quad (C.5)$$

y, por otro lado,

$$i_2 = i_2(0) - \frac{M}{L_1 L_2 - M^2} \int_0^t v_1 d\tau + \frac{L_1}{L_1 L_2 - M^2} \int_0^t v_2 d\tau \quad (C.6)$$

Si consideramos  $v_1$  y  $v_2$  como tensiones de nodo, las Ecuaciones C.5 y C.6 describen un circuito de la forma mostrada en la Figura C.3.



**Figura C.3.** Disposición utilizada para hallar el circuito equivalente en  $\pi$  para las bobinas magnéticamente acopladas.

Lo único que nos queda por hacer para hallar el circuito equivalente en  $\pi$  es calcular  $L_A$ ,  $L_B$  y  $L_C$  en función de  $L_1$ ,  $L_2$  y  $M$ . Podemos hacer esto fácilmente escribiendo las ecuaciones correspondientes a  $i_1$  e  $i_2$  en la Figura C.3 y luego comparándolas con las Ecuaciones C.5 y C.6. Así,

$$\begin{aligned} i_1 &= i_1(0) + \frac{1}{L_A} \int_0^t v_1 d\tau + \frac{1}{L_B} \int_0^t (v_1 - v_2) d\tau \\ &= i_1(0) + \left( \frac{1}{L_A} + \frac{1}{L_B} \right) \int_0^t v_1 d\tau - \frac{1}{L_B} \int_0^t v_2 d\tau \end{aligned} \quad (C.7)$$

y también

$$\begin{aligned} i_2 &= i_2(0) + \frac{1}{L_C} \int_0^t v_2 d\tau + \frac{1}{L_B} \int_0^t (v_2 - v_1) d\tau \\ &= i_2(0) - \frac{1}{L_B} \int_0^t v_1 d\tau + \left( \frac{1}{L_B} + \frac{1}{L_C} \right) \int_0^t v_2 d\tau. \end{aligned} \quad (C.8)$$

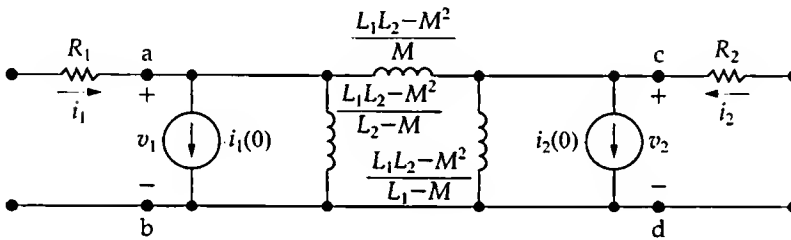
Entonces,

$$\frac{1}{L_B} = \frac{M}{L_1 L_2 - M^2}, \quad (\text{C.9})$$

$$\frac{1}{L_A} = \frac{L_2 - M}{L_1 L_2 - M^2}, \quad (\text{C.10})$$

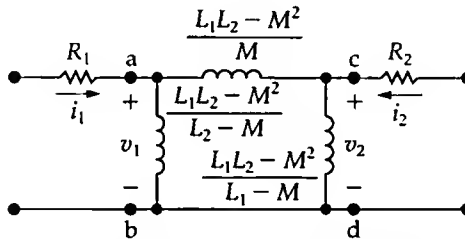
$$\frac{1}{L_C} = \frac{L_1 - M}{L_1 L_2 - M^2}. \quad (\text{C.11})$$

Cuando incorporamos las Ecuaciones C.9-C.11 en el circuito mostrado en la Figura C.3, el circuito equivalente en  $\pi$  para las bobinas magnéticamente acopladas de la Figura C.1 es el que se muestra en la Figura C.4.



**Figura C.4.** Circuito equivalente en  $\pi$  para las bobinas magnéticamente acopladas de la Figura C.1.

Observe que los valores iniciales de  $i_1$  e  $i_2$  son explícitos en el circuito equivalente en  $\pi$ , pero implícitos en el circuito equivalente en T. Como nos estamos centrando en el comportamiento en régimen permanente sinusoidal de los circuitos que contienen inductancia mutua, podemos suponer que los valores iniciales de  $i_1$  e  $i_2$  son cero. Por tanto, podemos eliminar las fuentes de corriente en el circuito equivalente en  $\pi$ , de modo que el circuito mostrado en la Figura C.4 se simplifica para dar el que se ilustra en la Figura C.5.



**Figura C.5.** Circuito equivalente en  $\pi$  utilizado para el análisis en régimen permanente sinusoidal.

La inductancia mutua lleva aparejado su propio signo algebraico en los circuitos equivalentes en T y en  $\pi$ . En otras palabras, si se invierte la polaridad magnética de las bobinas acopladas con respecto a la que se indica en la Figura C.1, el signo algebraico de  $M$  también se invierte. Una inversión de la polaridad magnética requiere cambiar una de las marcas de polaridad sin modificar las polaridades de referencia de las corrientes y tensiones en los terminales.

El Ejemplo C.1 ilustra la aplicación del circuito equivalente en T.

**EJEMPLO C.1**

- a) Utilice el circuito equivalente en T para las bobinas magnéticamente acopladas mostradas en la Figura C.6 con el fin de hallar los fasores de corriente  $I_1$  e  $I_2$ . La frecuencia de la fuente es de 400 rad/s.
- b) Repita el apartado (a), pero moviendo la marca de polaridad del devanado secundario al terminal inferior.

**SOLUCIÓN**

- a) Para las marcas de polaridad mostradas en la Figura C.6,  $M$  tiene un valor de +3 H en el circuito equivalente en T. Por tanto, las tres inductancias en el circuito equivalente son

$$L_1 - M = 9 - 3 = 6 \text{ H};$$

$$L_1 - M = 4 - 3 = 1 \text{ H};$$

$$M = 3 \text{ H}.$$

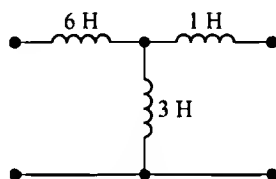
La Figura C.7 muestra el circuito equivalente en T y la Figura C.8 muestra el circuito equivalente en el dominio de la frecuencia para una frecuencia de 400 rad/s.

La Figura C.9 muestra el circuito en el dominio de la frecuencia para el sistema original.

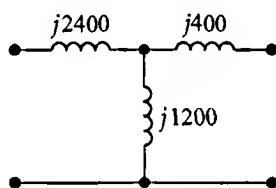
Aquí, las bobinas magnéticamente acopladas están modeladas por el circuito que se muestra en la Figura C.8. Para hallar los fasores de corriente  $I_1$  e  $I_2$ , calculamos primero la tensión de nodo en bornes de la reactancia inductiva de 1200  $\Omega$ . Si utiliza-

mos el nodo inferior como referencia, la única ecuación de tensión de nodo será

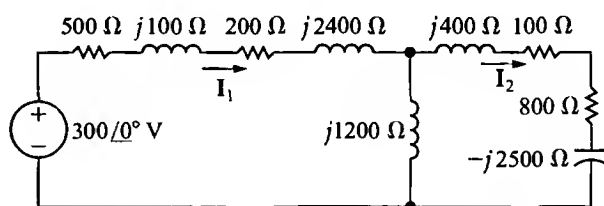
$$\frac{V-300}{700+j2500} + \frac{V}{j1200} + \frac{V}{900-j2100} = 0.$$



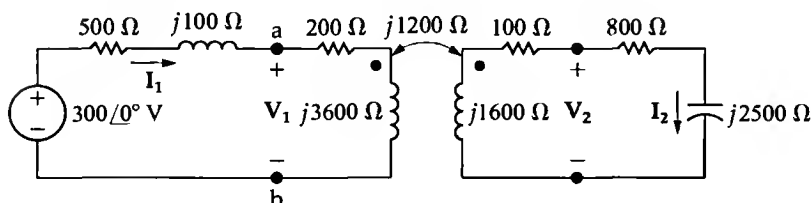
**Figura C.7.** Circuito equivalente en T para las bobinas magnéticamente acopladas del Ejemplo C.1.



**Figura C.8.** Modelo del circuito equivalente en el dominio de la frecuencia a 400 rad/s.



**Figura C.9.** El circuito de la Figura C.6, habiendo sustituido las bobinas magnéticamente acopladas por su circuito equivalente en T.



**Figura C.6.** Circuito equivalente en el dominio de la frecuencia para el Ejemplo C.1.

Despejando  $V$  se obtiene

$$V = 136 - j8 = 136,24 \angle -3,37^\circ \text{ V (rms)}.$$

Entonces

$$I_1 = \frac{300 - (136 - j8)}{700 + j2500} = 63,25 \angle -71,57^\circ \text{ mA (rms)}$$

y, por su parte,

$$I_2 = \frac{136 - j8}{900 - j2100} = 59,63 \angle 63,43^\circ \text{ mA (rms)}.$$

- b) Cuando movamos la marca de polaridad al terminal inferior de la bobina secundaria,  $M$  tendrá un valor de  $-3$  H en el circuito equivalente en T. Antes de hallar la solución con el nuevo circuito equivalente en T, observemos que invertir el signo algebraico de  $M$  no tiene ningún efecto en la solución correspondiente a  $I_1$ , mientras que desplaza  $I_2$   $180^\circ$ . Por tanto, podemos anticipar que

$$I_1 = 63,25 \angle -71,57^\circ \text{ mA (rms)}$$

mientras que

$$I_2 = 59,63 \angle -116,57^\circ \text{ mA (rms)}.$$

Procedamos ahora a hallar estas soluciones utilizando el nuevo circuito equivalente en T. Con  $M = -3$  H, las tres inductancias en el circuito equivalente son

$$L_1 - M = 9 - (-3) = 12 \text{ H};$$

$$L_2 - M = 4 - (-3) = 7 \text{ H};$$

$$M = -3 \text{ H}.$$

Para una frecuencia de operación de 400 rad/s, el circuito equivalente en el dominio de la frecuencia requiere dos bobinas y un condensador, como se muestra en la Figura C.10.

El circuito resultante en el dominio de la frecuencia para el sistema original es el que se ilustra en la Figura C.11.

Como antes, hallamos primero la tensión de nodo en bornes de la rama central, que

en este caso es una reactancia capacitiva de  $-j1200 \Omega$ . Si utilizamos el nodo inferior como referencia, la ecuación de tensión de nodo será

$$\frac{V - 300}{700 + j4900} + \frac{V}{-j1200} + \frac{V}{900 + j300} = 0.$$

Despejando  $V$  se obtiene

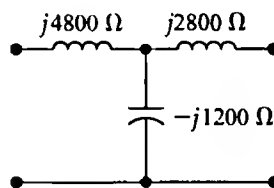
$$\begin{aligned} V &= -8 - j56 \\ &= 56,57 \angle -98,13^\circ \text{ V (rms)}. \end{aligned}$$

Entonces

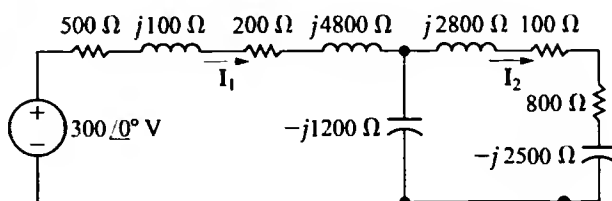
$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{300 - (-8 - j56)}{700 + j4900} \\ &= 63,25 \angle -71,57^\circ \text{ mA (rms)} \end{aligned}$$

y el segundo fasor de corriente será

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{-8 - j56}{900 + j300} \\ &= 59,63 \angle -116,57^\circ \text{ mA (rms)}. \end{aligned}$$



**Figura C.10.** Circuito equivalente en el dominio de la frecuencia para  $M = -3$  H y  $\omega = 400$  rad/s.



**Figura C.11.** Circuito equivalente en el dominio de la frecuencia para el Ejemplo C.1(b).



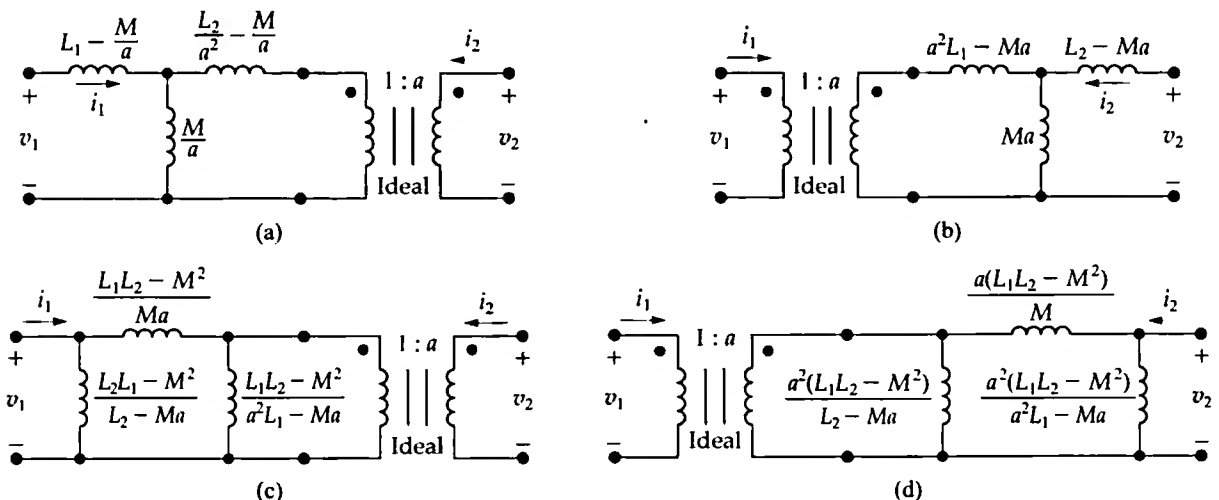
## C.2. La necesidad de transformadores ideales en los circuitos equivalentes

Las bobinas en los circuitos equivalentes en T y en  $\pi$  para bobinas magnéticamente acopladas pueden tener valores negativos. Por ejemplo, si  $L_1 = 3$  mH,  $L_2 = 12$  mH y  $M = 5$  mH, el circuito equivalente en T requiere una bobina de  $-2$  mH y el circuito equivalente en  $\pi$  requerirá una bobina de  $-5,5$  mH. Estos valores negativos de inductancia no presentan ningún problema si lo que estamos haciendo es utilizar los circuitos equivalentes para realizar cálculos. Sin embargo, si tenemos que construir los circuitos equivalentes mediante componentes de circuito, las bobinas negativas pueden representar un obstáculo. La razón es que, cada vez que cambie la frecuencia de la fuente sinusoidal, será necesario cambiar el condensador utilizado para simular la reactancia negativa. Por ejemplo, para una frecuencia de 50 krad/s, una bobina de  $-2$  mH tiene una impedancia de  $-j100 \Omega$ . Esta impedancia puede modelarse con un condensador que tenga una capacidad de  $0,2 \mu\text{F}$ . Si la frecuencia cambia a 25 krad/s, la impedancia de la bobina de  $-2$  mH pasa a ser de  $-j50 \Omega$ . A 25 krad/s, esto requiere un condensador con una capacidad de  $0,8 \mu\text{F}$ . Obviamente, si nos encontramos en una situación en la que se haga variar la frecuencia de modo continuo, el uso de un condensador para simular la inductancia negativa es prácticamente imposible.

Podemos resolver el problema de las inductancias negativas introduciendo un transformador ideal en el circuito equivalente. Esto no resuelve completamente el problema del modelado, porque los transformadores ideales sólo pueden ser aproximadamente ideales. Sin embargo, en algunas situaciones la aproximación es lo suficientemente buena para que merezca la pena explicar cómo se utiliza un transformador ideal en los circuitos equivalentes en T y en  $\pi$  para bobinas magnéticamente acopladas.

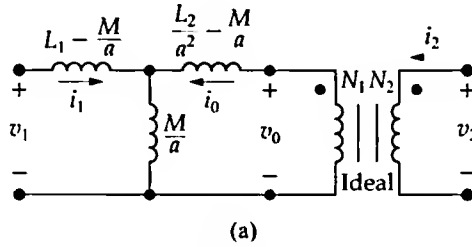
Un transformador ideal puede utilizarse de dos formas distintas tanto en el circuito equivalente en T como en el circuito equivalente en  $\pi$ . La Figura C.12 muestra las dos disposiciones para cada tipo de circuito equivalente.

Para verificar que cualquiera de los circuitos equivalentes de la Figura C.12 resulta adecuado, nos basta con demostrar que las ecuaciones que relacionan  $v_1$  y  $v_2$  con  $di_1/dt$  y  $di_2/dt$  son idénticas a las



**Figura C.12.** Las cuatro formas de utilizar un transformador ideal en los circuitos equivalentes en T y en  $\pi$  para bobinas magnéticamente acopladas.

Ecuaciones C.1 y C.2. Aquí, vamos a verificar el circuito mostrado en la Figura C.12(a); dejamos como ejercicio para el lector la verificación de los circuitos de las Figuras C.12(b), (c) y (d). Para facilitar el análisis, hemos vuelto a dibujar en la Figura C.13 el circuito de la Figura C.12(a), añadiendo las variables  $i_0$  y  $v_0$ .



**Figura C.13.** El circuito de la Figura C.12(a), con  $i_0$  y  $v_0$  definidas.

A partir de este circuito,

$$v_1 = \left(L_1 - \frac{M}{a}\right) \frac{di_1}{dt} + \frac{M}{a} \frac{d}{dt}(i_1 + i_0) \quad (\text{C.12})$$

y

$$v_0 = \left(\frac{L_2}{a^2} - \frac{M}{a}\right) \frac{di_0}{dt} + \frac{M}{a} \frac{d}{dt}(i_0 + i_1). \quad (\text{C.13})$$

El transformador ideal impone una serie de restricciones a  $v_0$  e  $i_0$ :

$$v_0 = \frac{v_2}{a}; \quad (\text{C.14})$$

$$i_0 = ai_2. \quad (\text{C.15})$$

Sustituyendo las Ecuaciones C.14 y C.15 en las Ecuaciones C.12 y C.13, se obtiene

$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + \frac{M}{a} \frac{d}{dt}(ai_2) \quad (\text{C.16})$$

y

$$\frac{v_2}{a} = \frac{L_2}{a^2} \frac{d}{dt}(ai_2) + \frac{M}{a} \frac{di_1}{dt}. \quad (\text{C.17})$$

A partir de las Ecuaciones C.16 y C.17,

$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad (\text{C.18})$$

y

$$v_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}. \quad (\text{C.19})$$

Las Ecuaciones C.18 y C.19 son idénticas a las Ecuaciones C.1 y C.2; por tanto, en lo que se refiere al comportamiento en los terminales, el circuito mostrado en la Figura C.13 es equivalente a las bobinas magnéticamente acopladas que se muestran dentro del recuadro en la Figura C.1.

Al demostrar que el circuito de la Figura C.13 era equivalente a las bobinas magnéticamente acopladas de la Figura C.1, no hemos impuesto ninguna restricción a la relación de vueltas  $a$ . Por tanto, hay un número infinito de circuitos equivalentes. Además, siempre podemos encontrar una relación de vueltas adecuada que haga que todas las inductancias sean positivas. Son tres los valores de  $a$  que resultan de particular interés:

$$a = \frac{M}{L_1}, \quad (\text{C.20})$$

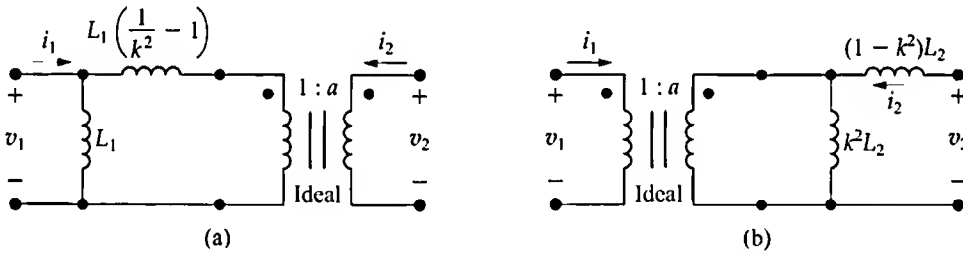
$$a = \frac{L_2}{M}, \quad (\text{C.21})$$

y

$$a = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}. \quad (\text{C.22})$$

El valor de  $a$  dado por la Ecuación C.20 elimina las inductancias  $L_1 - M/a$  y  $a^2 L_1 - aM$  de los circuitos equivalentes en T y las inductancias  $(L_1 L_2 - M^2)/(a^2 L_1 - aM)$  y  $a^2(L_1 L_2 - M^2)/(a^2 L_1 - aM)$  de los circuitos equivalentes en  $\pi$ . El valor de  $a$  dado por la Ecuación C.21 elimina las inductancias  $(L_2/a^2) - (M/a)$  y  $L_2 - aM$  de los circuitos equivalentes en T y las inductancias  $(L_1 L_2 - M^2)/(L_2 - aM)$  y  $a^2(L_1 L_2 - M^2)/(L_2 - aM)$  de los circuitos equivalentes en  $\pi$ .

Observe también que, cuando  $a = M/L_1$ , los circuitos de las Figuras C.12(a) y (c) pasan a ser idénticos, mientras que cuando  $a = L_2/M$ , los circuitos de las Figuras C.12(b) y (d) son los que pasan a ser iguales. Las Figuras C.14. y C.15 resumen estas observaciones.



**Figura C.14.** Dos circuitos equivalentes cuando  $a = M/L_1$ .

Al hallar las expresiones correspondientes a las inductancias en esas figuras, hemos utilizado la relación  $M = k\sqrt{L_1 L_2}$ . Expresar las inductancias en función de las autoinductancias  $L_1$  y  $L_2$  y del coeficiente de acoplamiento  $k$  permite que los valores de  $a$  dados por las Ecuaciones C.20 y C.21 no sólo reduzcan el número de bobinas necesarias en el circuito equivalente, sino que también garantizan que todas las inductancias sean positivas. Dejamos como ejercicio para el lector investigar las consecuencias de seleccionar el valor de  $a$  dado por la Ecuación C.22.

Los valores de  $a$  dados por las Ecuaciones C.20-C.22 pueden determinarse experimentalmente. El cociente  $M/L_1$  se obtiene excitando mediante una fuente de tensión sinusoidal la bobina que hemos supuesto que tiene  $N_1$  vueltas. La frecuencia de la fuente se establece lo suficientemente alta para que  $\omega L_1 \gg R_1$  y la bobina  $N_2$  se deja abierta. La Figura C.16 muestra esta disposición.

Con la bobina  $N_2$  abierta,

$$V_2 = j\omega M I_1. \quad (\text{C.23})$$

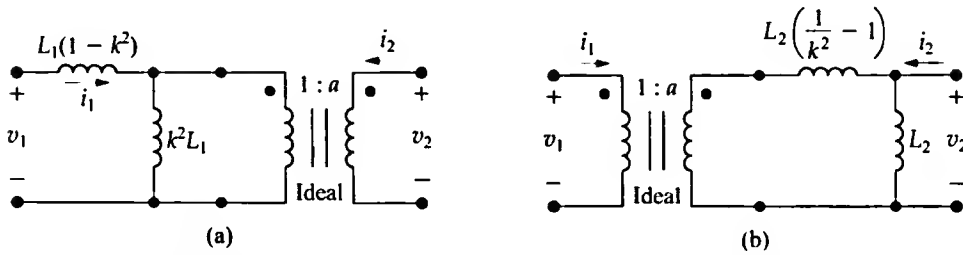


Figura C.15. Dos circuitos equivalentes cuando  $a = L_2/M$ .

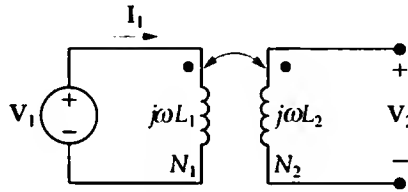


Figura C.16. Determinación experimental del cociente  $M/L_1$ .

Ahora, como  $j\omega L_1 \gg R_1$ , la corriente  $I_1$  será

$$I_1 = \frac{V_1}{j\omega L_1}. \quad (\text{C.24})$$

Sustituyendo la Ecuación C.24 en la Ecuación C.23, se obtiene

$$\left( \frac{V_2}{V_1} \right)_{I_2=0} = \frac{M}{L_1}, \quad (\text{C.25})$$

donde el cociente  $M/L_1$  es igual al cociente entre las tensiones de los terminales cuando la bobina 2 está abierta, es decir, cuando  $I_2 = 0$ .

Podemos obtener el cociente  $L_2/M$  invirtiendo el procedimiento, es decir, excitando la bobina 2 y dejando la bobina 1 abierta. Entonces

$$\frac{L_2}{M} = \left( \frac{V_2}{V_1} \right)_{I_1=0}. \quad (\text{C.26})$$

Observemos que el valor de  $a$  dado en la Ecuación C.22 es la media geométrica de estos dos cocientes de tensiones; así,

$$\sqrt{\left( \frac{V_2}{V_1} \right)_{I_2=0} \left( \frac{V_2}{V_1} \right)_{I_1=0}} = \sqrt{\frac{M}{L_1} \frac{L_2}{M}} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}. \quad (\text{C.27})$$

Para las bobinas arrolladas sobre núcleos no magnéticos, el cociente de tensiones no es igual al cociente de vueltas, a diferencia de lo que sucede en las bobinas arrolladas sobre núcleos ferromagnéticos, para las que ambos valores se aproximan bastante. Puesto que las autoinductancias varían según el cuadrado del número de vueltas, la Ecuación C.27 revela que el cociente de vueltas es aproximadamente igual a la media geométrica de los dos cocientes de tensiones, es decir,

$$\sqrt{\frac{L_2}{L_1}} = \frac{N_2}{N_1} = \sqrt{\left( \frac{V_2}{V_1} \right)_{I_2=0} \left( \frac{V_2}{V_1} \right)_{I_1=0}}. \quad (\text{C.28})$$

# APÉNDICE

# D

## El decibelio

Los ingenieros de sistemas telefónicos a los que preocupaba la pérdida de potencia en los circuitos en cascada que se utilizaban para transmitir señales telefónicas introdujeron la medida denominada decibelio. La Figura D.1 define cuál es el problema.

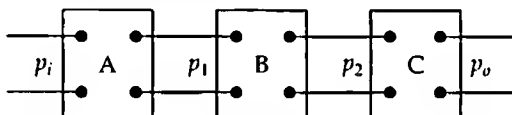


Figura D.1. Tres circuitos conectados en cascada.

En la figura,  $p_i$  es la potencia de entrada al sistema,  $p_1$  es la potencia de salida del circuito A,  $p_2$  es la potencia de salida del circuito B y  $p_o$  es la potencia de salida del sistema. La ganancia de potencia de cada circuito es el cociente entre la potencia de salida y la potencia de entrada. Por tanto,

$$\sigma_A = \frac{p_1}{p_i}, \quad \sigma_B = \frac{p_2}{p_1} \quad \text{y} \quad \sigma_C = \frac{p_o}{p_2}.$$

La ganancia de potencia total del sistema es, simplemente, el producto de las ganancias individuales, es decir,

$$\frac{p_o}{p_i} = \frac{p_1}{p_i} \frac{p_2}{p_1} \frac{p_o}{p_2} = \sigma_A \sigma_B \sigma_C.$$

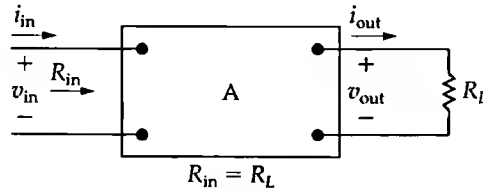
La multiplicación de estos cocientes de potencias puede convertirse en una suma por medio del logaritmo, es decir,

$$\log_{10} \frac{p_o}{p_i} = \log_{10} \sigma_A + \log_{10} \sigma_B + \log_{10} \sigma_C.$$

El cociente logarítmico de las potencias fue denominado **belio**, en honor de Alexander Graham Bell. Así, calculamos la ganancia de potencia total en belios simplemente sumando las ganancias de potencia, también en belios, de cada segmento del sistema de transmisión. En la práctica, el belio es una magnitud inconvenientemente grande. Una medida más útil de la ganancia de potencia es el décimo de belio, denominado **decibelio**. El número de decibelios es igual a 10 veces el número de belios, por lo que

$$\text{Número de decibelios} = 10 \log_{10} \frac{p_o}{p_i}.$$

Cuando utilizamos el decibelio como medida de los cocientes de potencia, en algunas situaciones la resistencia que se ve al mirar hacia el circuito es igual a la resistencia de carga del circuito, como se ilustra en la Figura D.2.



**Figura D.2.** Un circuito en el que la resistencia de entrada es igual a la resistencia de carga.

Cuando la resistencia de entrada es igual a la resistencia de carga, podemos convertir el cociente de potencias en un cociente de tensiones o de corriente:

$$\frac{p_o}{p_i} = \frac{v_{\text{out}}^2 / R_L}{v_{\text{in}}^2 / R_{\text{in}}} = \left( \frac{v_{\text{out}}}{v_{\text{in}}} \right)^2$$

o bien

$$\frac{p_o}{p_i} = \frac{i_{\text{out}}^2 R_L}{i_{\text{in}}^2 R_L} = \left( \frac{i_{\text{out}}}{i_{\text{in}}} \right)^2.$$

Estas ecuaciones muestran que el número de decibelios puede calcularse de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \text{Número de decibelios} &= 20 \log_{10} \frac{v_{\text{out}}}{v_{\text{in}}} \\ &= 20 \log_{10} \frac{i_{\text{out}}}{i_{\text{in}}}. \end{aligned} \tag{D.1}$$

La definición del decibelio usada en los diagramas de Bode (véase el Apéndice E) está tomada de los resultados expresados en la Ecuación D.1, ya que estos resultados se aplican a cualquier función de transferencia que implique un cociente de tensiones, un cociente de corrientes, un cociente entre tensión y corriente o un cociente entre corriente y tensión. Es preciso tener bien presente la definición original del decibelio, porque resulta de importancia crucial en muchas aplicaciones de ingeniería.

Cuando se trabaja con amplitudes de la función de transferencia expresadas en decibelios, suele resultar útil disponer de una tabla que permita traducir el valor en decibelios al valor real del cociente entre la entrada y la salida. En la Tabla D.1 se proporcionan algunas correspondencias útiles. El cociente correspondiente a un valor en decibelios negativo es el recíproco del correspondiente cociente positivo. Por ejemplo,  $-3$  dB corresponde a un cociente entrada/salida de  $1/1,41$ , es decir,  $0,707$ . Recuerde que  $-3$  dB corresponde a las frecuencias de potencia mitad de los circuitos de filtrado analizados en los Capítulos 14 y 15.

El decibelio también se utiliza como unidad de potencia, cuando expresa el cociente entre una potencia conocida y una potencia de referencia. Usualmente, la potencia de referencia es un milivatio y la unidad de potencia se denota dBm, que quiere decir «decibelios con respecto a un milivatio». Por ejemplo, una potencia de  $20$  mW corresponde a  $\pm 13$  dBm.

Los voltímetros AC suelen proporcionar lecturas en dBm que suponen no sólo una potencia de referencia de  $1$  mW, sino también una resistencia de referencia de  $600 \Omega$  (un valor comúnmente usado en

**Tabla D.1.** Algunas correspondencias dB-cociente.

dB	COCIENTE	dB	COCIENTE
0	1,00	30	31,62
3	1,41	40	100,00
6	2,00	60	$10^3$
10	3,16	80	$10^4$
15	5,62	100	$10^5$
20	10,00	120	$10^6$

sistemas telefónicos). Puesto que una potencia de 1 mW sobre 600  $\Omega$  corresponde a 0,7746 V (rms), dicha tensión se lee como 0 dBm en el medidor. En los medidores analógicos, suele existir una diferencia de exactamente 10 dB entre rangos adyacentes. Aunque las escalas puedan estar marcadas como 0,1, 0,3, 1, 3, 10, etc., de hecho 3,16 V en la escala de 3 V está alineado con 1 V en la escala de 1 V.

Algunos voltímetros proporcionan un conmutador para seleccionar la resistencia de referencia (50, 135, 600 o 900  $\Omega$ ) o para seleccionar dBm o dBV (decibelios con relación a un voltio).





# APÉNDICE

# E

# Diagramas de Bode

Como hemos visto, el diagrama de respuesta en frecuencia es una componente muy importante para el análisis del comportamiento de un circuito. Hasta este punto, sin embargo, sólo hemos mostrado diagramas cualitativos de la respuesta en frecuencia, sin explicar cómo se pueden crear dichos diagramas. El método más eficiente para generar y dibujar los datos referidos a la amplitud y la fase consiste en utilizar una computadora digital. Podemos confiar en ella para que nos proporcione gráficas numéricamente precisas de  $|H(j\omega)|$  y  $\theta(j\omega)$  en función de  $\omega$ . Sin embargo, en algunas situaciones, una gráfica preliminar que emplea diagramas de Bode nos puede ayudar a utilizar de forma más inteligente la computadora.

Un diagrama de Bode es una técnica gráfica que nos proporciona pistas sobre la respuesta en frecuencia de un circuito. Estos diagramas reciben su nombre como reconocimiento a los trabajos pioneros realizados por H. W. Bode<sup>1</sup>. Donde son más útiles es en aquellos circuitos en los que los polos y ceros de  $H(s)$  estén suficientemente separados.

Al igual que las gráficas cualitativas de respuesta en frecuencia que hemos visto hasta ahora, un diagrama de Bode está compuesto por dos gráficas separadas: una de ellas muestra la forma en que varía la amplitud de  $H(j\omega)$  con la frecuencia, mientras que la otra nos indica cómo varía con la frecuencia el ángulo de fase de  $H(j\omega)$ . En los diagramas de Bode, las gráficas se realizan sobre papel semilogarítmico, para tener una mayor precisión a la hora de representar un amplio rango de valores de frecuencia. Tanto en la gráfica de amplitud como en la de fase, la frecuencia se muestra en la escala logarítmica horizontal, mientras que la amplitud y el ángulo de fase se indican en la escala lineal vertical.

## E.1. Polos y ceros reales de primer orden

Para simplificar las explicaciones sobre los diagramas de Bode, vamos a comenzar considerando únicamente aquellos casos en los que todos los polos y ceros de  $H(s)$  son reales y de primer orden. Posteriormente presentaremos casos con polos y ceros complejos y repetidos. Para nuestro análisis, resultará útil partir de una expresión de  $H(s)$  de ejemplo. Por tanto, vamos a basar el análisis en

$$H(s) = \frac{K(s + z_1)}{s(s + p_1)}, \quad (\text{E.1})$$

de donde

---

<sup>1</sup> Véase H. W. Bode, *Network Analysis and Feedback Design* (Nueva York: Van Nostrand, 1945).

$$H(j\omega) = \frac{K(j\omega + z_1)}{j\omega(j\omega + p_1)}. \quad (\text{E.2})$$

El primer paso para realizar un diagrama de Bode consiste en poner la expresión correspondiente  $H(j\omega)$  en **forma estándar**, lo que podemos hacer simplemente sacando como factores los polos y ceros:

$$H(j\omega) = \frac{Kz_1(1 + j\omega/z_1)}{p_1(j\omega)(1 + j\omega/p_1)}. \quad (\text{E.3})$$

A continuación, vamos a representar mediante  $K_o$  el valor constante  $Kz_1/p_1$  y, al mismo tiempo, vamos a expresar  $H(j\omega)$  en forma polar:

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= \frac{K_o |1 + j\omega/z_1| \angle \psi_1}{|\omega| \angle 90^\circ |1 + j\omega/p_1| \angle \beta_1} \\ &= \frac{K_o |1 + j\omega/z_1|}{|\omega| |1 + j\omega/p_1|} \angle (\psi_1 - 90^\circ - \beta_1). \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

Teniendo en cuenta la Ecuación E.4,

$$H(j\omega) = \frac{K_o |1 + j\omega/z_1|}{\omega |1 + j\omega/p_1|}, \quad (\text{E.5})$$

$$\theta(\omega) = \psi_1 - 90^\circ - \beta_1. \quad (\text{E.6})$$

Por definición, los ángulos de fase  $\psi_1$  y  $\beta_1$  son

$$\psi_1 = \tan^{-1} \omega/z_1; \quad (\text{E.7})$$

$$\beta_1 = \tan^{-1} \omega/p_1. \quad (\text{E.8})$$

Los diagramas de Bode se construyen dibujando la Ecuación E.5 (amplitud) y la Ecuación E.6 (fase) en función de  $\omega$ .

## E.2. Diagramas de amplitud de líneas rectas

El diagrama de amplitud requiere la multiplicación y división de los factores asociados con los polos y ceros de  $H(s)$ . Podemos reducir estas operaciones de multiplicación y división a sendas operaciones de suma y resta expresando la amplitud de  $H(j\omega)$  en términos de un valor logarítmico: el decibelio (dB)<sup>2</sup>. La amplitud de  $H(j\omega)$  en decibelios es

$$A_{\text{dB}} = 20 \log_{10} |H(j\omega)|. \quad (\text{E.9})$$

Para comprender de forma más intuitiva las unidades de decibelios, la Tabla E.1 proporciona una traducción entre distintos valores reales de amplitud y sus correspondientes valores en decibelios. Expresando la Ecuación E.5 en decibelios, se obtiene

<sup>2</sup> En el Apéndice D podrá encontrar más información respecto al decibelio.

Tabla E.1. Valores reales de amplitud y sus valores en decibelios

$A_{dB}$	$A$	$A_{dB}$	$A$
0	1,00	30	31,62
3	1,41	40	100,00
6	2,00	60	$10^3$
10	3,16	80	$10^4$
15	5,62	100	$10^5$
20	10,00	120	$10^6$

$$A_{dB} = 20 \log_{10} \frac{K_o |1 + j\omega/z_1|}{\omega |1 + j\omega/p_1|}$$

$$= 20 \log_{10} K_o + 20 \log_{10} |1 + j\omega/z_1| - 20 \log_{10} \omega - 20 \log_{10} |1 + j\omega/p_1|. \quad (E.10)$$

La clave para dibujar la Ecuación E.10 consiste en dibujar cada término de la ecuación por separado y luego combinar gráficamente los distintos términos. Los factores individuales son fáciles de dibujar, porque pueden aproximarse en todos los casos mediante líneas rectas.

La gráfica de  $20 \log_{10} K_o$  es una línea recta horizontal, porque  $K_o$  no está en función de la frecuencia. El valor de este término es positivo para  $K_o > 1$ , cero para  $K_o = 1$  y negativo para  $K_o < 1$ .

Dos líneas rectas nos permiten aproximar la gráfica de  $20 \log_{10} |1 + j\omega/z_1|$ . Para pequeños valores de  $\omega$ , el valor  $|1 + j\omega/z_1|$  es aproximadamente 1 y, por tanto,

$$20 \log_{10} |1 + j\omega/z_1| \rightarrow 0 \quad \text{cuando } \omega \rightarrow 0. \quad (E.11)$$

Para valores grandes de  $\omega$ , el valor  $|1 + j\omega/z_1|$  es aproximadamente  $\omega/z_1$  y, por tanto,

$$20 \log_{10} |1 + j\omega/z_1| \rightarrow 20 \log_{10} (\omega/z_1) \quad \text{cuando } \omega \rightarrow \infty. \quad (E.12)$$

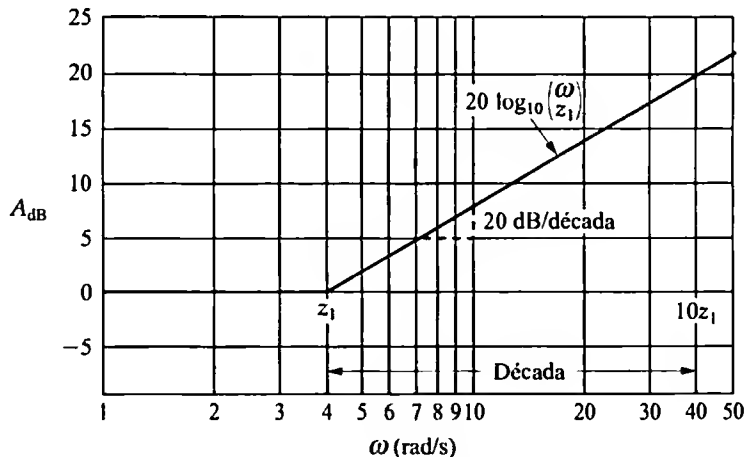
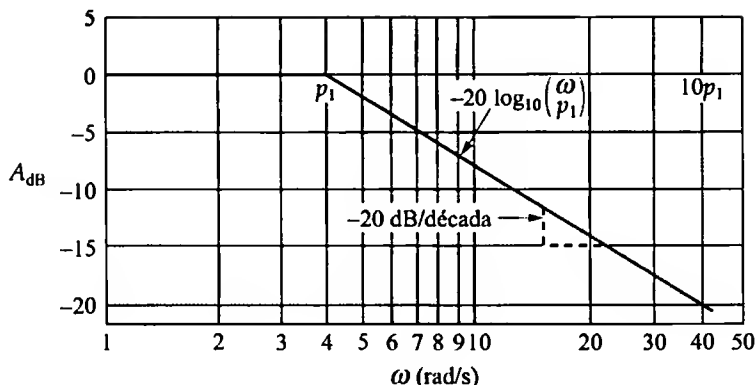


Figura E.1. Aproximación mediante líneas rectas de la gráfica de amplitud de un cero de primer orden.

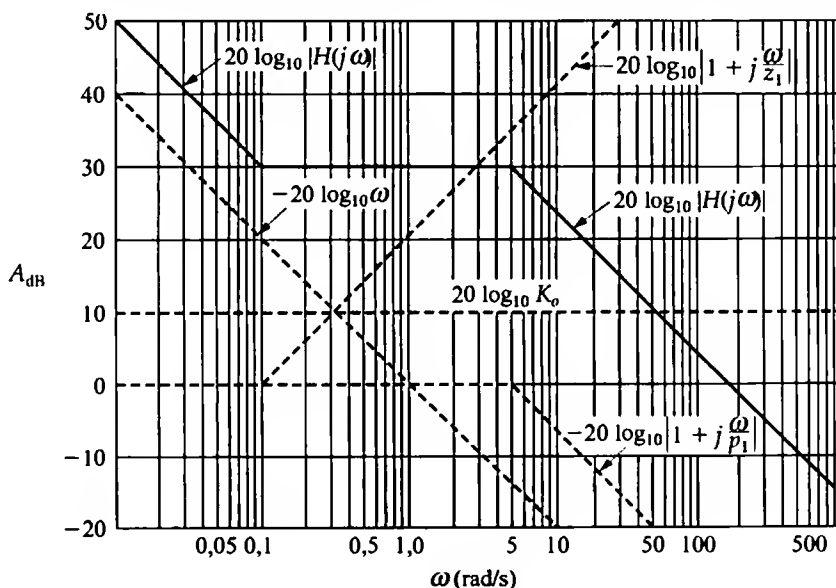


**Figura E.2.** Aproximación mediante líneas rectas de la gráfica de amplitud de un polo de primer orden.

En una escala de frecuencia logarítmica,  $20 \log_{10} (\omega/z_1)$  es una línea recta con una pendiente de 20 dB/década (una década es un cambio de frecuencia según un factor de 10). Esta línea recta corta al eje de 0 dB en  $\omega = z_1$ . Este valor de  $\omega$  se denomina **frecuencia de codo**. Por tanto, basándonos en las Ecuaciones E.11 y E.12, dos líneas rectas nos permiten aproximar la gráfica de amplitud de un cero de primer orden, como se muestra en la Figura E.1.

La gráfica de  $-20 \log_{10} \omega$  es una gráfica que tiene una pendiente de  $-20$  dB/década y corta al eje de 0 dB en  $\omega = 1$ . Mediante dos líneas rectas podemos aproximar la gráfica de  $-20 \log_{10} |1 + j\omega/p_1|$ . Aquí, las dos líneas rectas se cruzan sobre el eje de 0 dB en  $\omega = p_1$ . Para valores grandes de  $\omega$ , la línea recta  $20 \log_{10} (\omega/p_1)$  tiene una pendiente de  $-20$  dB/década. La Figura E.2 muestra la aproximación mediante líneas rectas de la gráfica de amplitud de un polo de primer orden.

La Figura E.3 muestra una gráfica de la Ecuación E.10 para  $K_o = \sqrt{10}$ ,  $z_1 = 0,1$  rad/s y  $p_1 = 5$  rad/s. Cada término de la Ecuación E.10 está etiquetado en la Figura E.3, para que el lector verifique que los términos individuales se suman para crear la gráfica resultante, etiquetada como  $20 \log_{10} |H(j\omega)|$ .



**Figura E.3.** Aproximación mediante líneas rectas de la gráfica de amplitud de la Ecuación E.10.

El Ejemplo E.1 ilustra la construcción de una gráfica de amplitud mediante líneas rectas para una función de transferencia caracterizada por polos y ceros de primer orden.

### EJEMPLO E.1

Para el circuito de la Figura E.4:

- Calcule la función de transferencia,  $H(s)$ .
- Construya una aproximación mediante líneas rectas del diagrama de amplitud de Bode.
- Calcule  $20 \log_{10} |H(j\omega)|$  para  $\omega = 50 \text{ rad/s}$  y  $\omega = 1000 \text{ rad/s}$ .
- Dibuje los valores calculados en el apartado (c) sobre la gráfica de líneas rectas.
- Suponga que  $v_i(t) = 5 \cos(500t + 15^\circ) \text{ V}$  y utilice el diagrama de Bode que ha construido para predecir la amplitud de  $v_o(t)$  en régimen permanente.

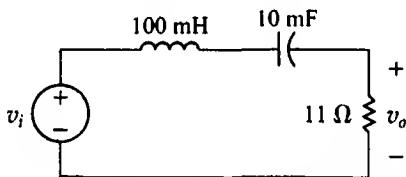


Figura E.4. Circuito para el Ejemplo E.1.

### SOLUCIÓN

- Transformando el circuito de la Figura E.4 al dominio de  $s$  y luego utilizando una división de tensiones en el dominio de  $s$ , se obtiene

$$H(s) = \frac{(R/L)s}{s^2 + (R/L)s + \frac{1}{LC}}$$

Sustituyendo los valores numéricos correspondientes al circuito, obtenemos

$$H(s) = \frac{110s}{s^2 + 110s + 1000} = \frac{110s}{(s+10)(s+100)}$$

- Comenzamos escribiendo  $H(j\omega)$  en forma estándar:

$$H(j\omega) = \frac{0,11j\omega}{[1 + j(\omega/10)][1 + j(\omega/100)]}$$

La expresión correspondiente a la amplitud de  $H(j\omega)$  en decibelios es

$$\begin{aligned} A_{dB} &= 20 \log_{10} |H(j\omega)| \\ &= 20 \log_{10} 0,11 + 20 \log_{10} |j\omega| \\ &\quad - 20 \log_{10} \left| 1 + j \frac{\omega}{10} \right| - 20 \log_{10} \left| 1 + j \frac{\omega}{100} \right|. \end{aligned}$$

La Figura E.5 muestra la gráfica de líneas rectas. En ella se identifica cada uno de los términos que contribuyen a la amplitud total.

- Tenemos que

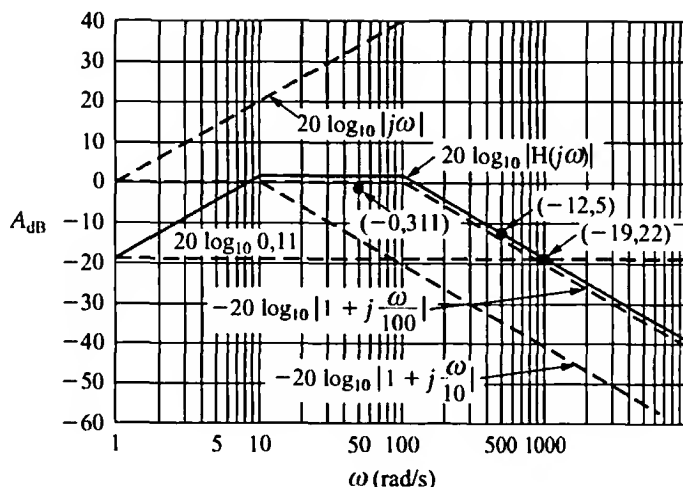
$$\begin{aligned} H(j50) &= \frac{0,11(j50)}{(1 + j5)(1 + j0,5)} \\ &= 0,9648 \angle -15,25^\circ, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 20 \log_{10} |H(j50)| &= 20 \log_{10} 0,9648 \\ &= -0,311 \text{ dB}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(j1000) &= \frac{0,11(j1000)}{(1 + j100)(1 + j10)} \\ &= 0,1094 \angle -83,72^\circ; \end{aligned}$$

$$20 \log_{10} 0,1094 = -19,22 \text{ dB}.$$

- Véase la Figura E.5.
- Como podemos ver en el diagrama de Bode de la Figura E.5, el valor de  $A_{dB}$  para



**Figura E.5.** Diagrama de amplitud basado en líneas rectas para la función de transferencia del circuito de la Figura E.4.

$\omega = 500 \text{ rad/s}$  es aproximadamente  $-12,5$  dB. Por tanto,

$$|A| = 10^{(-12,5/20)} = 0,24$$

y

$$V_{mo} = |A| V_{mi} = (0,24)(5) = 1,19 \text{ V.}$$

Podemos calcular el valor real de  $H(j\omega)$  sustituyendo  $\omega = 500$  en la ecuación correspondiente a  $|H(j\omega)|$ :

$$\begin{aligned} H(j500) &= \frac{0,11(j500)}{(1+j50)(1+j5)} \\ &= 0,22 \angle -77,54^\circ. \end{aligned}$$

Por tanto, el módulo real de la tensión de salida para la fuente de señal especificada a una frecuencia de 500 rad/s es

$$V_{mo} = |A| V_{mi} = (0,22)(5) = 1,1 \text{ V.}$$

### E.3. Gráficas de amplitud más precisas

Podemos hacer más precisas las gráficas de líneas rectas para polos y ceros de primer orden corrigiendo los valores de amplitud a la frecuencia de codo, a un medio de la frecuencia de codo y a dos veces la frecuencia de codo. Para la frecuencia de codo, el valor real en decibelios es

$$\begin{aligned} A_{dB_c} &= \pm 20 \log_{10} |1 + j1| \\ &= \pm 20 \log_{10} \sqrt{2} \approx \pm 3 \text{ dB.} \end{aligned} \quad (\text{E.13})$$

El valor real para una frecuencia igual a un medio de la frecuencia de codo es

$$\begin{aligned} A_{dB_{oz}} &= \pm 20 \log_{10} \left| 1 + j \frac{1}{2} \right| \\ &= \pm 20 \log_{10} \sqrt{5/4} \approx \pm 1 \text{ dB.} \end{aligned} \quad (\text{E.14})$$

Para una frecuencia igual a dos veces la frecuencia de codo, el valor real en decibelios es

$$\begin{aligned} A_{dB_z} &= \pm 20 \log_{10} |1 + j2| \\ &= \pm 20 \log_{10} \sqrt{5} \approx \pm 7 \text{ dB.} \end{aligned} \quad (\text{E.15})$$

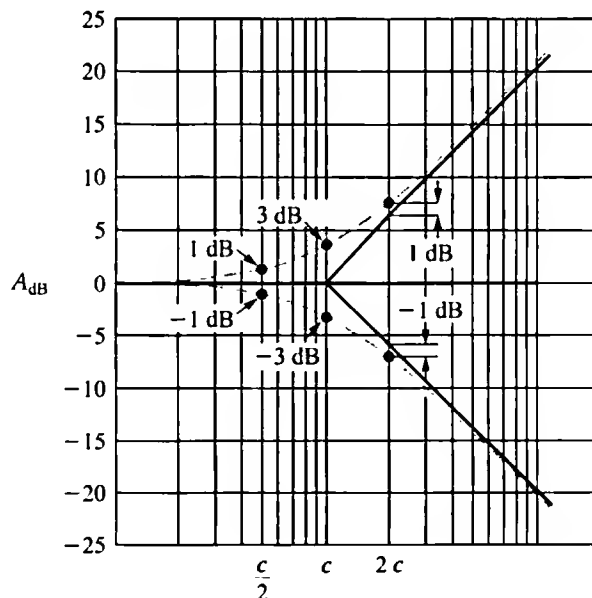
En las Ecuaciones E.13-E.15, el signo más se aplica a un cero de primer orden y el signo menos se aplica a un polo de primer orden. La aproximación mediante líneas rectas de la gráfica de amplitud proporciona 0 dB para la frecuencia de codo y para una frecuencia igual a un medio de la frecuencia de codo y  $\pm 6$  dB para una frecuencia igual a dos veces la frecuencia de codo.

Por tanto, las correcciones son  $\pm 3$  dB para la frecuencia de codo y  $\pm 1$  dB para las frecuencias correspondientes a un medio de la frecuencia de codo y a dos veces la frecuencia de codo. La Figura E.6 resume estas correcciones.

Un cambio de la frecuencia según un factor de dos se denomina una **octava**. Una pendiente de 20 dB/década es equivalente a 6,02 dB/octava, lo que a efectos gráficos es equivalente a 6 dB/octava. Por tanto, las correcciones indicadas corresponden a una octava por debajo y por encima de la frecuencia de codo.

Si los polos y ceros de  $H(s)$  están suficientemente separados, resulta relativamente fácil introducir estas correcciones en la gráfica global de amplitud y conseguir una curva razonablemente precisa.

Sin embargo, si los polos y ceros están próximos, las correcciones se solapan unas con otras y resultan difíciles de evaluar, por lo que casi conviene más utilizar la aproximación de líneas rectas como primera estimación de la característica de amplitud. Después, puede usarse una computadora para refinar los cálculos en el rango de frecuencias de interés.



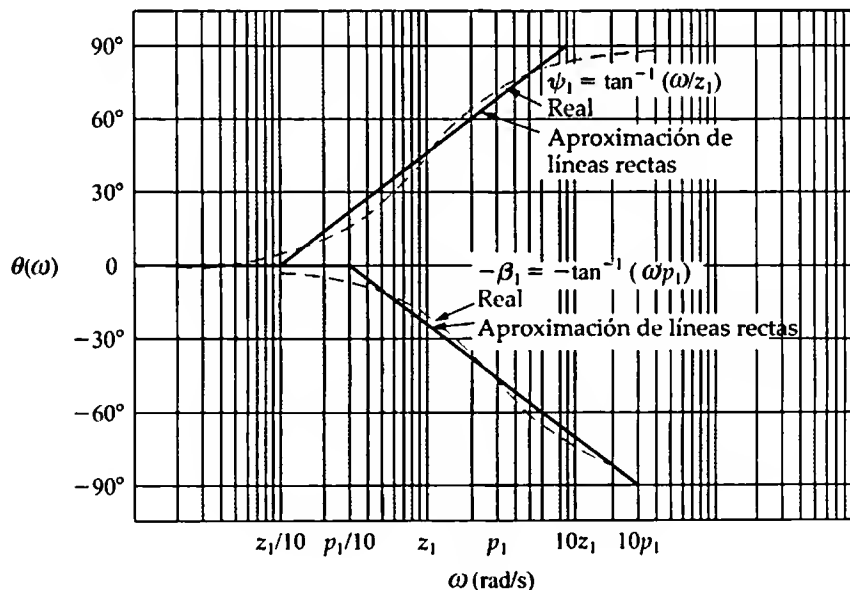
**Figura E.6.** Gráficas de amplitud corregidas para un cero y un polo de primer orden.

## E.4. Gráficas del ángulo de fase mediante líneas rectas

También podemos hacer gráficas del ángulo de fase utilizando aproximaciones basadas en líneas rectas. El ángulo de fase asociado con la constante  $K_o$  es cero y el ángulo de fase asociado con un cero o un polo de primer orden en el origen es una fase constante de valor  $\pm 90^\circ$ . Para un cero o polo de primer orden que no esté situado en el origen, las aproximaciones mediante líneas rectas se llevan a cabo de la forma siguiente:

- Para frecuencias inferiores a un décimo de la frecuencia de codo, suponemos que el ángulo de fase es cero.
- Para frecuencias superiores a diez veces la frecuencia de codo, suponemos que el ángulo de fase es  $\pm 90^\circ$ .
- Para el rango de frecuencias comprendido entre un décimo de la frecuencia de codo y diez veces la frecuencia de codo, la gráfica del ángulo de fase es una línea recta que pasa por  $0^\circ$  para un décimo de la frecuencia de codo, por  $\pm 45^\circ$  para la frecuencia de codo y por  $\pm 90^\circ$  para diez veces la frecuencia de codo.

En todos estos casos, el signo más se aplica a los ceros de primer orden y el signo menos a los polos de primer orden. La Figura E.7 muestra la aproximación basada en líneas rectas para un cero y un polo de primer orden. Las curvas discontinuas muestran la variación exacta del ángulo de fase según la frecuencia. Observe que la gráfica basada en líneas rectas se aproxima bastante bien a la variación real del ángulo de fase. La desviación máxima entre la gráfica de líneas rectas y la gráfica real es de unos  $6^\circ$ .



**Figura E.7.** Gráficas del ángulo de fase para un cero y un polo de primer orden.

La Figura E.8 muestra la aproximación basada en líneas rectas del ángulo de fase para la función de transferencia dada por la Ecuación B.1. La Ecuación B.6 nos da la ecuación del ángulo de fase; la gráfica se corresponde con  $z_1 = 0,1$  rad/s y  $p_1 = 5$  rad/s.

El Ejemplo E.2 ilustra la generación de una gráfica del ángulo de fase mediante una aproximación de líneas rectas.



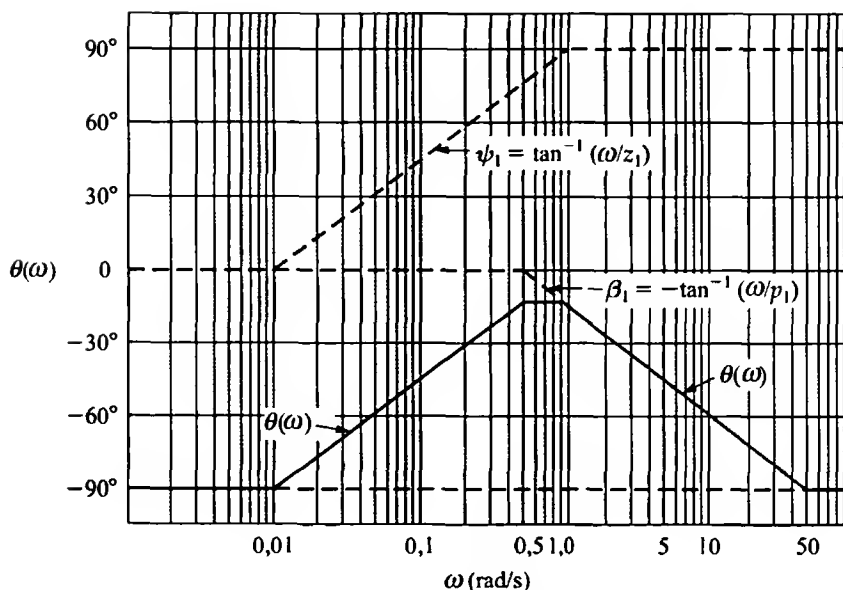


Figura E.8. Aproximación de líneas rectas para la gráfica del ángulo de fase de la Ecuación B.1.

## EJEMPLO E.2

- Realice una gráfica del ángulo de fase basada en líneas rectas para la función de transferencia del Ejemplo E.1.
- Calcule el ángulo de fase  $\theta(\omega)$  para  $\omega = 50, 500$  y  $1000$  rad/s.
- Sitúe los valores hallados en el apartado (b) sobre el diagrama creado en el apartado (a).
- Utilizando los resultados del Ejemplo E.1(e) y del apartado (b) de este ejemplo, calcule la tensión de salida en régimen permanente si la tensión de la fuente está dada por  $v_f(t) = 10 \cos(500t - 25^\circ)$  V.

## SOLUCIÓN

- A partir del Ejemplo E.1,

$$H(j\omega) = \frac{0,11(j\omega)}{[1 + j(\omega/10)][1 + j(\omega/100)]}$$

$$= \frac{0,11|j\omega|}{|1 + j(\omega/10)||1 + j(\omega/100)|} \angle(\psi_1 - \beta_1 - \beta_2).$$

Por tanto,

$$\theta(\omega) = \psi_1 - \beta_1 - \beta_2,$$

donde  $\psi_1 = 90^\circ$ ,  $\beta_1 = \tan^{-1}(\omega/10)$  y  $\beta_2 = \tan^{-1}(\omega/100)$ . La Figura E.9 muestra la aproximación de  $\theta(\omega)$  basada en líneas rectas.

- Tenemos que

$$H(j50) = 0,96 \angle -15,25^\circ,$$

$$H(j500) = 0,22 \angle -77,54^\circ,$$

$$H(j1000) = 0,11 \angle -83,72^\circ.$$

Por tanto,

$$\theta(j50) = -15,25^\circ,$$

$$\theta(j500) = -77,54^\circ,$$

y

$$\theta(j1000) = -83,72^\circ.$$

- Véase la Figura E.9.

d) Tenemos

$$\theta_o = \theta(\omega) + \theta_i = -77,54^\circ - 25^\circ = -102,54^\circ.$$

$$V_{mo} = |H(j500)| V_{mi} = (0,22)(10) = 2,2 \text{ V},$$

Por tanto,

$$y \quad v_o(t) = 2,2 \cos(500t - 102,54^\circ) \text{ V}.$$

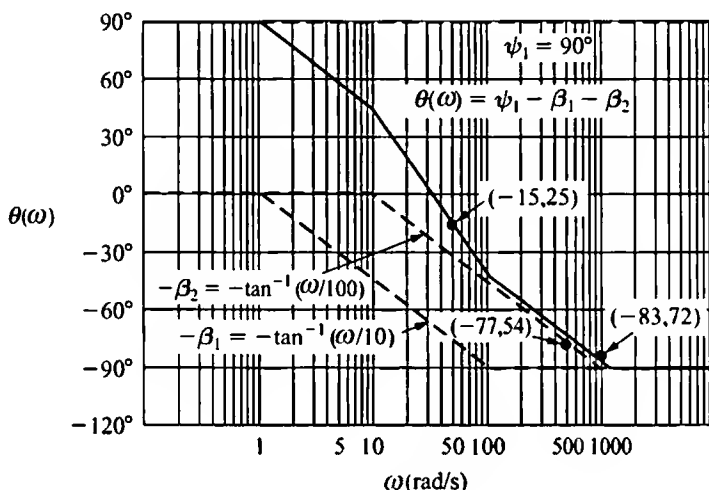


Figura E.9. Aproximación mediante líneas rectas de  $\theta(\omega)$  para el Ejemplo E.2.

## E.5. Diagramas de Bode: polos y ceros complejos

Los polos y ceros complejos en la expresión correspondiente a  $H(s)$  requieren una atención especial a la hora de realizar gráficas de amplitud y de ángulo de fase. Centrémonos en la contribución que una pareja de polos complejos realiza a las gráficas de amplitud y de ángulo de fase. Una vez que se comprenden las reglas para tratar los polos complejos, su aplicación a una pareja de ceros complejos resulta obvia.

Los polos y ceros complejos de  $H(s)$  siempre aparecen en pares conjugados. El primer paso a la hora de realizar una gráfica de amplitud o de ángulo de fase para una función de transferencia que contenga polos complejos consiste en combinar el par de polos conjugados en un único término cuadrático. Así, para

$$H(s) = \frac{K}{(s + \alpha - j\beta)(s + \alpha + j\beta)}, \quad (\text{E.16})$$

primero reescribimos el producto  $(s + \alpha - j\beta)(s + \alpha + j\beta)$  como

$$(s + \alpha)^2 + \beta^2 = s^2 + 2\alpha s + \alpha^2 + \beta^2. \quad (\text{E.17})$$

A la hora de realizar diagramas de Bode, escribimos el término cuadrático en una forma más conveniente:

$$s^2 + 2\alpha s + \alpha^2 + \beta^2 = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2. \quad (\text{E.18})$$

Una comparación directa de las dos formas muestra que

$$\omega_n^2 = \alpha^2 + \beta^2 \quad (\text{E.19})$$

y

$$\zeta \omega_n = \alpha. \quad (\text{E.20})$$

El término  $\omega_n$  es la frecuencia de codo del factor cuadrático y  $\zeta$  es el coeficiente de amortiguamiento del término cuadrático. El valor crítico de  $\zeta$  es 1. Si  $\zeta < 1$ , las raíces del factor cuadrático son complejas y utilizamos la Ecuación E.18 para representar los polos complejos. Si  $\zeta \geq 1$ , descomponemos el factor cuadrático en  $(s + p_1)(s + p_2)$  y luego dibujamos la amplitud y la fase de acuerdo con el procedimiento que ya hemos explicado antes. Suponiendo que  $\zeta < 1$ , reescribimos la Ecuación E.16 como

$$H(s) = \frac{K}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}. \quad (\text{E.21})$$

Después expresamos la Ecuación E.21 en forma estándar sacando como factor los polos y ceros. Para el término cuadrático, dividimos por  $\omega_n^2$  de modo que

$$H(s) = \frac{K}{\omega_n^2} \frac{1}{1 + (s/\omega_n)^2 + 2\zeta(s/\omega_n)}, \quad (\text{E.22})$$

de donde

$$H(j\omega) = \frac{K_o}{1 - (\omega^2/\omega_n^2) + j(2\zeta\omega/\omega_n)}, \quad (\text{E.23})$$

siendo

$$K_o = \frac{K}{\omega_n^2}.$$

Antes de analizar los diagramas de amplitud y de ángulo de fase asociados con la Ecuación E.23, vamos a sustituir por comodidad el cociente  $\omega/\omega_n$  por una nueva variable,  $u$ . Entonces,

$$H(j\omega) = \frac{K_o}{1 - u^2 + j2\zeta u}. \quad (\text{E.24})$$

Ahora escribimos  $H(j\omega)$  en forma polar:

$$H(j\omega) = \frac{K_o}{|(1 - u^2) + j2\zeta u| \angle \beta_1}, \quad (\text{E.25})$$

de donde

$$\begin{aligned} A_{dB} &= 20 \log_{10} |H(j\omega)| \\ &= 20 \log_{10} K_o - 20 \log_{10} |(1 - u^2) + j2\zeta u|, \end{aligned} \quad (\text{E.26})$$

y

$$\theta(\omega) = -\beta_1 = -\tan^{-1} \frac{2\zeta u}{1 - u^2}. \quad (\text{E.27})$$

## E.6. Gráficas de amplitud

El factor cuadrático contribuye a la amplitud de  $H(j\omega)$  por medio del término  $-20 \log_{10} |1 - u^2 + j2\zeta u|$ . Dado que  $u = \omega/\omega_n$ ,  $u \rightarrow 0$  cuando  $\omega \rightarrow 0$  y  $u \rightarrow \infty$  cuando  $\omega \rightarrow \infty$ . Para ver cómo se comporta el término a medida que  $\omega$  varía entre 0 e  $\infty$ , observemos que

$$\begin{aligned} 20 \log_{10} |(1 - u^2) + j2\zeta u| &= -20 \log_{10} \sqrt{(1 - u^2)^2 + 4\zeta^2 u^2} \\ &= -10 \log_{10} [u^4 + 2u^2(2\zeta^2 - 1) + 1], \end{aligned} \quad (\text{E.28})$$

Cuando  $u \rightarrow 0$ ,

$$-10 \log_{10} [u^4 + 2u^2(2\zeta^2 - 1) + 1] \rightarrow 0, \quad (\text{E.29})$$

Y cuando  $u \rightarrow \infty$ ,

$$-10 \log_{10} [u^4 + 2u^2(2\zeta^2 - 1) + 1] \rightarrow -40 \log_{10} u. \quad (\text{E.30})$$

A partir de las Ecuaciones E.29 y E.30, podemos concluir que la gráfica aproximada de amplitud está compuesta por dos líneas rectas. Para  $\omega < \omega_n$ , la línea recta está situada sobre el eje de 0 dB y para  $\omega > \omega_n$ , la línea recta tiene una pendiente de  $-40$  dB/década. Estas dos líneas rectas se unen sobre el eje de 0 dB para  $u = 1$ , es decir, para  $\omega = \omega_n$ . La Figura E.10 muestra la aproximación mediante líneas rectas para un factor cuadrático con  $\zeta < 1$ .

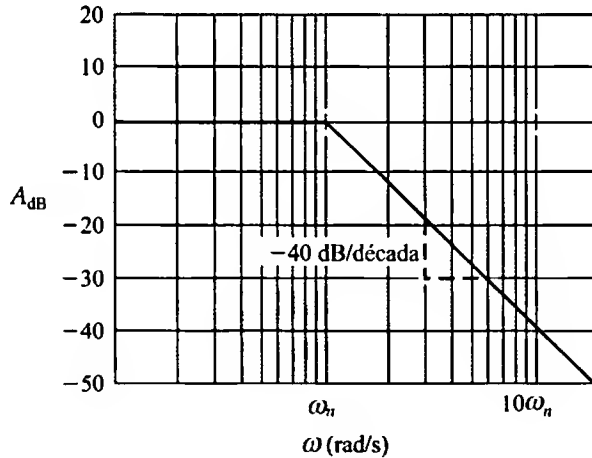
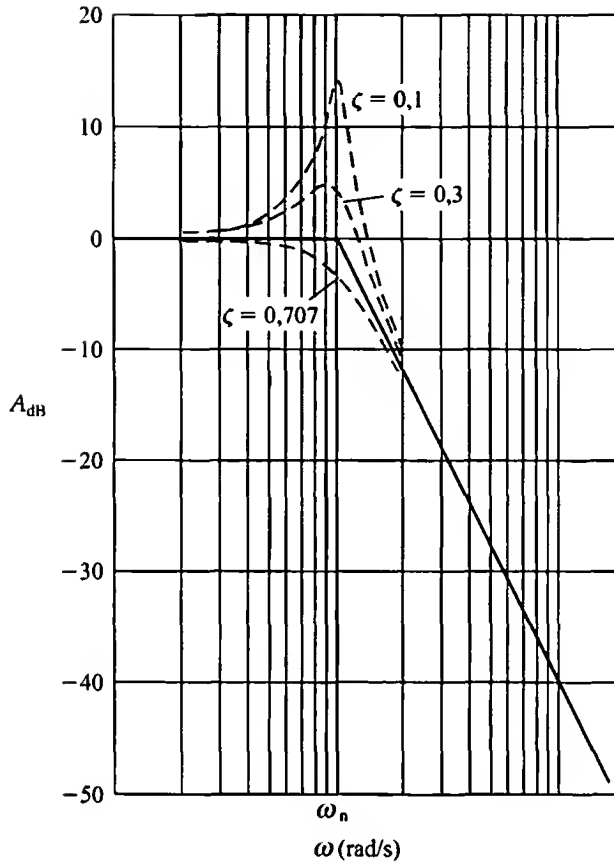


Figura E.10. Gráfica de amplitud para una pareja de polos complejos.

## E.7. Corrección de las gráficas de amplitud basadas en líneas rectas

La corrección de las gráficas de amplitud basadas en líneas rectas para una pareja de polos complejos no es tan sencilla como corregir un polo real de primer orden, porque las correcciones dependen del coeficiente de amortiguamiento  $\zeta$ . La Figura E.11 muestra el efecto de  $\zeta$  sobre la gráfica de amplitud.



**Figura E.11.** Efecto de  $\zeta$  sobre la gráfica de amplitud.

Observe que, cuando  $\zeta$  es muy pequeño, aparece un pico de gran magnitud en la gráfica de la amplitud, en las vecindades de la frecuencia de codo  $\omega_n$  ( $u = 1$ ). Cuando  $\zeta \geq 1/\sqrt{2}$ , la gráfica de amplitud corregida está en todos los puntos por debajo de la aproximación basada en líneas rectas. A efectos del dibujo de la gráfica, la gráfica de amplitud basada en líneas rectas puede corregirse localizando cuatro puntos de la curva real. Estos cuatro puntos se corresponden con (1) un medio de la frecuencia de codo, (2) la frecuencia para la que la amplitud alcanza su valor de pico, (3) la frecuencia de codo y (4) la frecuencia para la que la amplitud es cero. La Figura E.12 muestra estos cuatro puntos.

Para un medio de la frecuencia de codo (punto 1), la amplitud real es

$$A_{dB}(\omega_n/2) = -10 \log_{10}(\zeta^2 + 0,5625). \quad (E.31)$$

La amplitud alcanza su máximo (punto 2) para una frecuencia igual a

$$\omega_p = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}, \quad (E.32)$$

y tiene una amplitud de pico de

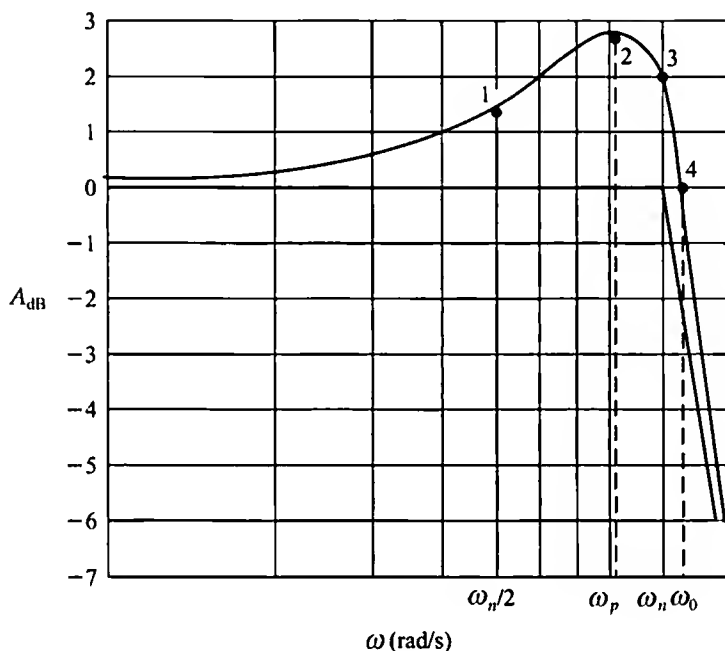
$$A_{dB}(\omega_p) = -10 \log_{10}[4\zeta^2(1 - \zeta^2)]. \quad (E.33)$$

Para la frecuencia de codo (punto 3) la amplitud real es

$$A_{dB}(\omega_n) = -20 \log_{10} 2\zeta. \quad (\text{E.34})$$

La gráfica de amplitud corregida cruza el eje de 0 dB (punto 4) para

$$\omega_o = \omega_n \sqrt{2(1 - 2\zeta^2)} = \sqrt{2}\omega_p. \quad (\text{E.35})$$



**Figura E.12.** Cuatro puntos en la gráfica de amplitud corregida para una pareja de polos complejos.

La demostración de las Ecuaciones E.31, E.34 y E.35 puede hacerse a partir de la Ecuación E.28. Evaluando la Ecuación E.28 para  $u = 0,5$  y  $u = 1,0$ , respectivamente, obtenemos las Ecuaciones E.31 y E.34. La Ecuación E.35 se obtiene al tratar de hallar el valor de  $u$  que hace  $u^4 + 2u^2(2\zeta^2 - 1) + 1 = 1$ . La demostración de la Ecuación E.32 requiere diferenciar la Ecuación E.28 con respecto a  $u$  y luego hallar el valor de  $u$  para el que la derivada es cero. La Ecuación E.33 es la evaluación de la Ecuación E.28 para el valor de  $u$  hallado mediante la Ecuación E.32.

El Ejemplo E.3 ilustra la creación de la gráfica de amplitud para una función de transferencia que contenga una pareja de polos complejos.

### EJEMPLO E.3

Halle la función de transferencia para el circuito mostrado en la Figura E.13.

- ¿Cuál es el valor de la frecuencia de codo en radianes por segundo?
- ¿Cuál es el valor de  $K_o$ ?
- ¿Cuál es el valor del coeficiente de amortiguamiento?
- Construya una gráfica de amplitud basada

en líneas rectas que vaya de 10 a 500 rad/s.

- e) Calcule y dibuje la amplitud real en decibelios para  $\omega_n/2$ ,  $\omega_p$ ,  $\omega_n$  y  $\omega_o$ .
- f) A partir de la gráfica de amplitud basada en líneas rectas, describa el tipo de filtro representado por el circuito que se muestra en la Figura E.13 y estime su frecuencia de corte,  $\omega_c$ .

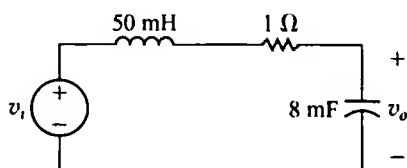


Figura E.13. Circuito para el Ejemplo E.3.

### SOLUCIÓN

Transformando el circuito de la Figura E.13 al dominio de  $s$  y utilizando luego la técnica de división de tensión en el dominio de  $s$ , obtenemos

$$H(s) = \frac{\frac{1}{sC}}{s^2 + \left(\frac{R}{L}\right)s + \frac{1}{LC}}.$$

Sustituyendo los valores de los componentes,

$$H(s) = \frac{2500}{s^2 + 20s + 2500}.$$

- a) A partir de la expresión correspondiente a  $H(s)$ ,  $\omega_n^2 = 2500$ ; por tanto,  $\omega_n = 50$  rad/s.
- b) Por definición,  $K_o$  es  $2500/\omega_n^2$ , es decir, 1.
- c) El coeficiente de  $s$  es igual a  $2\zeta\omega_n$ ; por tanto,

$$\zeta = \frac{20}{2\omega_n} = 0,20.$$

- d) Véase la Figura E.14.
- e) Las amplitudes reales son

$$A_{dB}(\omega_n/2) = -10 \log_{10}(0,6025) = 2,2 \text{ dB};$$

$$\omega_p = 50\sqrt{0,92} = 47,96 \text{ rad/s},$$

$$A_{dB}(\omega_p) = -10 \log_{10}(0,16)(0,96) = 8,14 \text{ dB},$$

$$A_{dB}(\omega_n) = -20 \log_{10}(0,4) = 7,96 \text{ dB},$$

$$\omega_o = \sqrt{2}\omega_p = 67,82 \text{ rad/s},$$

$$A_{dB}(\omega_o) = 0 \text{ dB}.$$

La Figura E.14 muestra la gráfica corregida.

- f) Resulta claro, a partir de la gráfica de amplitud de la Figura E.14, que este circuito actúa como un filtro paso bajo. Para la frecuencia de corte, el módulo de la función de transferencia,  $|H(j\omega_c)|$  es 3 dB inferior a la amplitud máxima. A partir de la gráfica corregida, la frecuencia de corte está situada en torno a 55 rad/s, que es un valor casi idéntico al que predice el diagrama de Bode basado en líneas rectas.

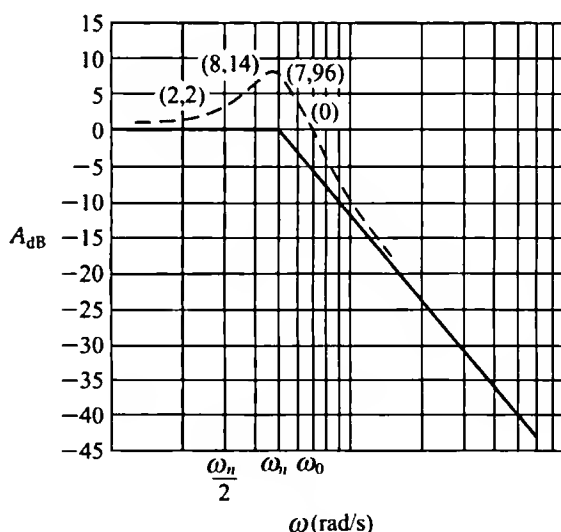


Figura E.14. Gráfica de amplitud para el Ejemplo E.3.

## E.8. Gráficas del ángulo de fase

La gráfica del ángulo de fase para una pareja de polos complejos es una gráfica de la Ecuación E.27. El ángulo de fase es cero para una frecuencia cero y es  $-90^\circ$  para la frecuencia de codo. A medida que  $\omega(u)$  crece, el ángulo se aproxima a  $-180^\circ$ . Como en el caso de la gráfica de amplitud,  $\zeta$  resulta muy importante a la hora de determinar la forma exacta de la gráfica del ángulo de fase. Para pequeños valores de  $\zeta$ , el ángulo de fase cambia rápidamente en la vecindad de la frecuencia de codo. La Figura E.15 muestra el efecto de  $\zeta$  sobre la gráfica del ángulo de fase.

También podemos realizar una aproximación basada en líneas rectas de la gráfica del ángulo de fase para una pareja de polos complejos. Para hacerlo, dibujamos una línea tangente a la curva del ángulo de fase a la frecuencia de codo y alargamos esta línea hasta que se cruce con las líneas correspondientes a  $0^\circ$  y  $-180^\circ$ . La línea tangente a la curva del ángulo de fase en  $-90^\circ$  tiene una pendiente de  $-2,3/\zeta$  rad/década ( $-132/\zeta$  grados/década) y corta a las líneas de  $0^\circ$  y  $-180^\circ$  en  $u_1 = 4,81^{-\zeta}$  y  $u_2 = 4,81^\zeta$ , respectivamente. La Figura E.16 muestra la aproximación basada en líneas rectas para  $\zeta = 0,3$  junto con la gráfica real del ángulo de fase. Comparando la aproximación basada en líneas rectas con la curva real, vemos que la aproximación resulta razonable en la vecindad de la frecuencia de codo. Sin embargo, en la vecindad de  $i_1$  e  $i_2$ , el error es bastante grande. En el Ejemplo E.4, vamos a resumir nuestras explicaciones sobre los diagramas de Bode.

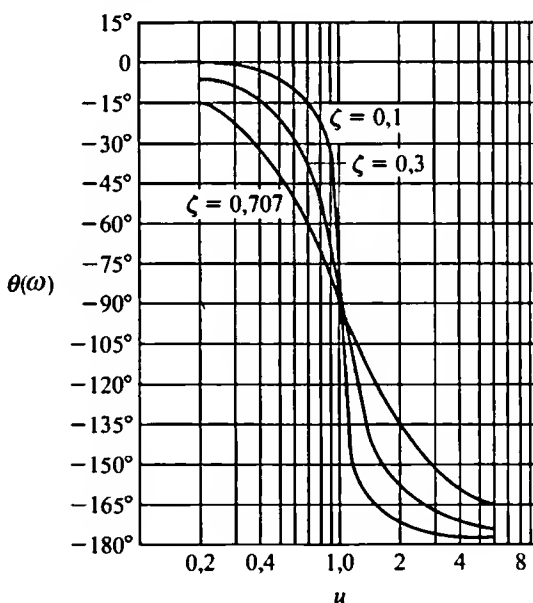
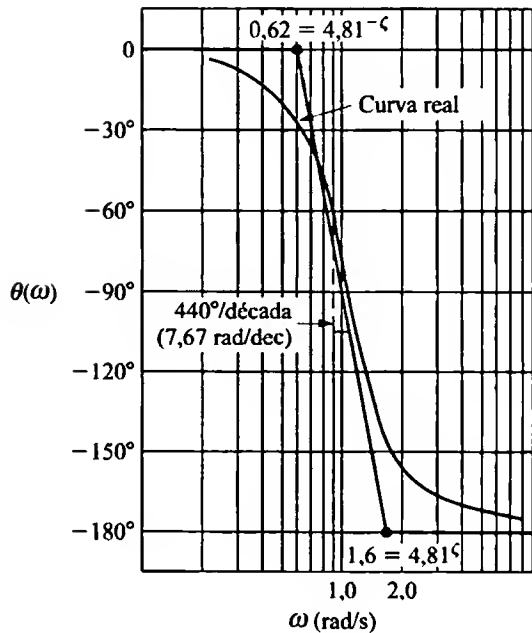


Figura E.15. Efecto de  $\zeta$  sobre la gráfica del ángulo de fase.

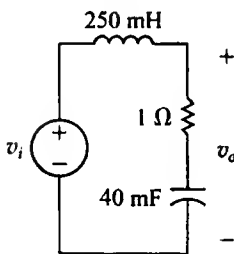
### EJEMPLO E.4

- Calcule la función de transferencia para el circuito mostrado en la Figura E.17.
- Realice una gráfica de amplitud basada en líneas rectas de  $20 \log_{10} |H(j\omega)|$ .





**Figura E.16.** Aproximación basada en líneas rectas del ángulo de fase para una pareja de polos complejos.



**Figura E.17.** Circuito para el Ejemplo E.4.

### SOLUCIÓN

- a) Transformando el circuito de la Figura E.17 al dominio de  $s$  y luego aplicando la técnica de división de tensión en el dominio de  $s$ , obtenemos

$$H(s) = \frac{\frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$

Sustituyendo los valores de los componentes del circuito, nos queda

$$H(s) = \frac{4(s+25)}{s^2 + 4s + 100}$$

- c) Utilice la gráfica de amplitud basada en líneas rectas para determinar el tipo de filtro representado por este circuito y luego estime su frecuencia de corte.
- d) ¿Cuál es la frecuencia de corte real?
- e) Realice una gráfica basada en líneas rectas del ángulo de fase de  $H(j\omega)$ .
- f) ¿Cuál es el valor de  $\theta(\omega)$  a la frecuencia de corte obtenida en el apartado (c)?
- g) ¿Cuál es el valor real de  $\theta(\omega)$  a la frecuencia de corte?

- b) El primer paso a la hora de construir diagramas de Bode consiste en escribir  $H(j\omega)$  en forma estándar. Puesto que  $H(s)$  contiene un factor cuadrático, primero comprobamos el valor de  $\zeta$ . Vemos que  $\zeta = 0,2$  y  $\omega_n = 10$ , por lo que

$$H(s) = \frac{s/25 + 1}{1 + (s/10)^2 + 0,4(s/10)},$$

de donde

$$H(j\omega) = \frac{|1 + j\omega/25| \angle \psi_1}{|1 - (\omega/10)^2 + j0,4(\omega/10)| \angle \beta_1}$$

Observe que, para el factor cuadrático,  $u = \omega/10$ . La amplitud de  $H(j\omega)$  en decibelios es

$$A_{dB} = 20 \log_{10} |1 + j\omega/25|$$

$$- 20 \log_{10} \left[ \left| 1 - \left( \frac{\omega}{10} \right)^2 + j0,4 \left( \frac{\omega}{10} \right) \right| \right],$$

y el ángulo de fase es

$$\theta(\omega) = \psi_1 - \beta_1,$$

donde

$$\psi_1 = \tan^{-1}(\omega/25),$$

$$\beta_1 = \tan^{-1} \frac{0,4(\omega/10)}{1 - (\omega/10)^2}.$$

La Figura E.18 muestra la gráfica de amplitud.

- c) A partir de la gráfica de amplitud basada en líneas rectas de la Figura E.18, este circuito actúa como un filtro paso bajo. A la frecuencia de corte, la amplitud de  $H(j\omega)$  es 3 dB inferior a la amplitud en la banda

de paso. Fijándonos en la gráfica, podemos predecir que la frecuencia de corte es aproximadamente de 13 rad/s.

- d) Para hallar la frecuencia de corte real, sustituimos  $s$  por  $j\omega$  en  $H(s)$ , calculamos la expresión correspondiente a  $|H(j\omega)|$ , hacemos  $|H(j\omega_c)| = (1/\sqrt{2})$ ,  $H_{\max} = 1/\sqrt{2}$  y despejamos  $\omega_c$ . En primer lugar,

$$H(j\omega) = \frac{4(j\omega) + 100}{(j\omega)^2 + 4(j\omega) + 100}.$$

Entonces,

$$H(j\omega_c) = \frac{\sqrt{(4\omega_c)^2 + 100^2}}{\sqrt{(100 - \omega_c^2)^2 + (4\omega_c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Despejando  $\omega_c$ , se obtiene

$$\omega_c = 16 \text{ rad/s}.$$

- e) La Figura E.19 muestra la gráfica del ángulo de fase. Observe que el segmento de línea recta de  $\theta(\omega)$  entre 1,0 y 2,5 rad/s no tiene la misma pendiente que el segmento comprendido entre 2,5 y 100 rad/s.

- f) A partir de la gráfica del ángulo de fase de la Figura E.19, estimamos que el ángulo de fase a la frecuencia de corte de 16 rad/s es de  $-65^\circ$ .

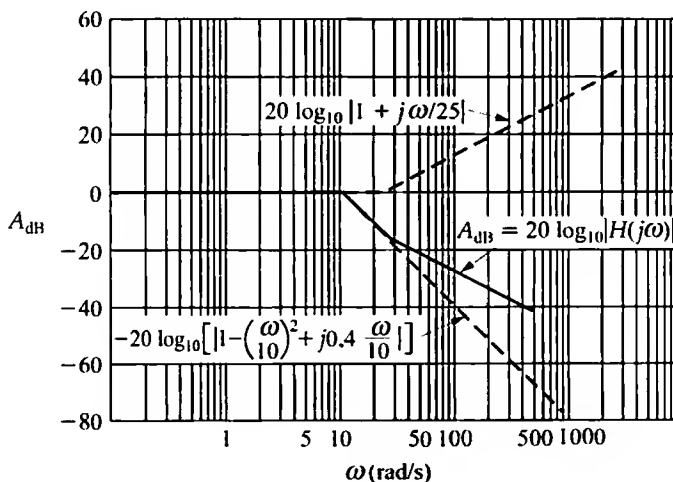


Figura E.18. La gráfica de amplitud para el Ejemplo E.4.

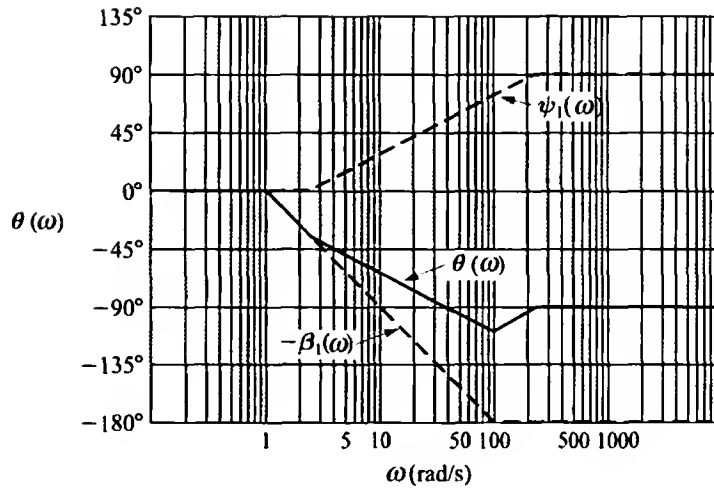


Figura E.19. Gráfica del ángulo de fase para el Ejemplo E.4.

- g) Podemos calcular el ángulo exacto de fase a la frecuencia de corte sustituyendo  $s = j16$  en la función de transferencia  $H(s)$ :

$$H(j16) = \frac{4(j16 + 25)}{(j16)^2 + 4(j16) + 100}.$$

Calculando el ángulo de fase, vemos que

$$\theta(\omega_c) = \theta(j16) = -125,0^\circ.$$

Observe que el error en el ángulo predicho es muy grande. En general, las gráficas de ángulo de fase basadas en líneas rectas no proporcionan resultados satisfactorios en la banda de frecuencias en las que el ángulo de fase está variando. La gráfica del ángulo de fase basada en líneas rectas resulta útil sólo para predecir el comportamiento general del ángulo de fase, no para estimar los valores de ángulo de fase reales a frecuencias concretas.



## APÉNDICE

# Tabla abreviada de identidades trigonométricas

1.  $\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \operatorname{sen} \beta$
2.  $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$
3.  $\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta = 2 \operatorname{sen} \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$
4.  $\operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} \beta = 2 \cos \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right)$
5.  $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right)$
6.  $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \operatorname{sen} \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right)$
7.  $2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$
8.  $2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)$
9.  $2 \operatorname{sen} \alpha \cos \beta = \operatorname{sen}(\alpha + \beta) + \operatorname{sen}(\alpha - \beta)$
10.  $\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$
11.  $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \alpha$
12.  $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\alpha$
13.  $\operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\alpha$
14.  $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$
15.  $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$



# APÉNDICE

# G

# Tabla abreviada de integrales

$$1. \quad \int x e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^2} (ax - 1)$$

$$2. \quad \int x^2 e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^3} (a^2 x^2 - 2ax + 2)$$

$$3. \quad \int x \operatorname{sen} ax dx = \frac{1}{a^2} \operatorname{sen} ax - \frac{x}{a} \cos ax$$

$$4. \quad \int x \cos ax dx = \frac{1}{a^2} \cos ax + \frac{x}{a} \operatorname{sen} ax$$

$$5. \quad \int e^{ax} \operatorname{sen} bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \operatorname{sen} bx - b \cos bx)$$

$$6. \quad \int e^{ax} \cos bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \operatorname{sen} bx)$$

$$7. \quad \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a}$$

$$8. \quad \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{1}{2a^2} \left( \frac{x}{x^2 + a^2} + \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} \right)$$

$$9. \quad \int \operatorname{sen} ax \operatorname{sen} bx dx = \frac{\operatorname{sen} (a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\operatorname{sen} (a+b)x}{2(a+b)}, \quad a^2 \neq b^2$$

$$10. \quad \int \cos ax \cos bx dx = \frac{\operatorname{sen} (a-b)x}{2(a-b)} + \frac{\operatorname{sen} (a+b)x}{2(a+b)}, \quad a^2 \neq b^2$$

$$11. \quad \int \operatorname{sen} ax \cos bx dx = -\frac{\cos (a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\cos (a+b)x}{2(a+b)}, \quad a^2 \neq b^2$$

$$12. \quad \int \operatorname{sen}^2 ax dx = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2ax}{4a}$$

$$13. \quad \int \cos^2 ax \, dx = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2ax}{4a}$$

$$14. \quad \int_0^{\infty} \frac{a \, dx}{a^2 + x^2} = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & a > 0; \\ 0, & a = 0; \\ -\frac{\pi}{2}, & a < 0 \end{cases}$$

$$15. \quad \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} ax}{x} \, dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & a > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & a < 0 \end{cases}$$

$$16. \quad \int x^2 \operatorname{sen} ax \, dx = \frac{2x}{a^2} \operatorname{sen} ax - \frac{a^2 x^2 - 2}{a^3} \cos ax$$

$$17. \quad \int x^2 \cos ax \, dx = \frac{2x}{a^2} \cos ax + \frac{a^2 x^2 - 2}{a^3} \operatorname{sen} ax$$

$$18. \quad \int e^{ax} \operatorname{sen}^2 bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + 4b^2} \left[ (a \operatorname{sen} bx - 2b \cos bx) \operatorname{sen} bx + \frac{2b^2}{a} \right]$$

$$19. \quad \int e^{ax} \cos^2 bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + 4b^2} \left[ (a \cos bx + 2b \operatorname{sen} bx) \cos bx + \frac{2b^2}{a} \right]$$



# APÉNDICE H

## Respuestas a los problemas seleccionados

### Capítulo 1

- 1.1. 3,93 MB  
 1.3. 3,5 s  
 1.6.  $362 \mu\text{m}^2$   
 1.9.  $4 \sin 5000t \text{ mC}$   
 1.12. a) 300 W, A a B  
       b) 500 W, B a A  
       c) 200 W, B a A  
       d) 400 W, A a B  
 1.17. a) 42,21 mW  
       b)  $12,14 \mu\text{J}$   
       c)  $140,625 \mu\text{J}$   
 1.24. a) 8,45 s  
       b)  $-15,40 \text{ W}$  (15,40 W generada)  
       c) 31,55 s  
       d) 15,40 W (15,40 W extraída)  
       e)  $w(0) = 0 \text{ J}$ ;  $w(10) = 112,5 \text{ J}$ ;  $w(20) = 200 \text{ J}$ ;  $w(30) = 112,5 \text{ J}$ ;  $w(40) = 0 \text{ J}$   
 1.26. 1740 W

### Capítulo 2

- 2.2. 8 k $\Omega$   
 2.4. 20  $\Omega$   
 2.14. a) 0,4 A  
       b) 1,6 A  
       c) 120 V

d)  $P_{40\Omega} = 160 \text{ W}$ ;  $P_{300\Omega} = 48 \text{ W}$ ;  
 $P_{75\Omega} = 192 \text{ W}$

e) 400 W

2.16. a)  $i_g = 6 \text{ A}$ ;  $i_o = 2 \text{ A}$

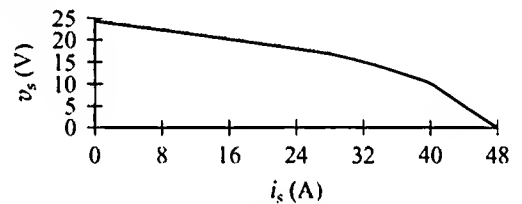
b) 240 V

c)  $P_{\text{gen}} = P_{\text{abs}} = 1440 \text{ W}$

2.21. a)  $-30 \text{ V}$  fuente; 20  $\Omega$  resistencia

b) 10 W

2.23. a)



b) 24 V fuente; 0,25  $\Omega$  resistencia

c) 19,2 A

d) 96 A

e) 48 A

f) Un modelo lineal no puede predecir el comportamiento no lineal de la fuente de tensión.

2.26. a)  $P_{4\Omega} = 900 \text{ W}$ ;  $P_{20\Omega} = 1620 \text{ W}$ ;  
 $P_{5\Omega} = 180 \text{ W}$ ;  $P_{22,5\Omega} = 360 \text{ W}$ ;  
 $P_{15\Omega} = 1500 \text{ W}$

b) 4560 W

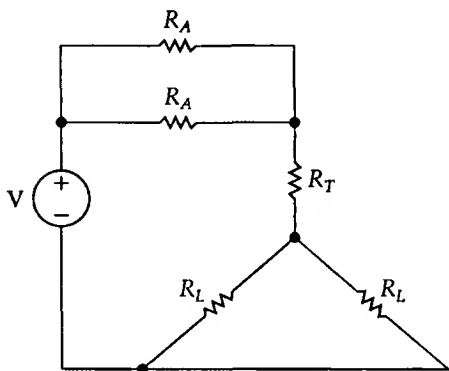
c)  $P_{\text{gen}} = 4560 \text{ W} = P_{\text{dis}}$

2.29. a) 5,55 V

b)  $P_{\text{gen}} = 44,82 \text{ mW} = P_{\text{dis}}$

2.34.  $i = 385 \text{ mA}$ , por lo que es necesario poner un signo de advertencia y tomar precauciones.

2.35.



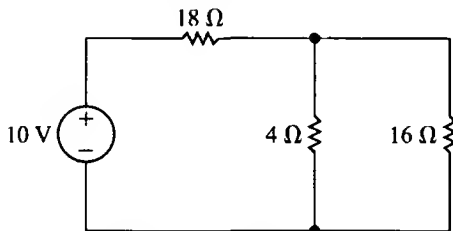
2.36. a)  $P_{\text{brazo}} = 59,17 \text{ W}$ ;  $P_{\text{pierna}} = 29,59 \text{ W}$ ;  $P_{\text{tronco}} = 7,40 \text{ W}$   
 b)  $t_{\text{brazo}} = 1414,23 \text{ s}$ ;  $t_{\text{pierna}} = 7071,13 \text{ s}$ ;  $t_{\text{tronco}} = 70.677,37 \text{ s}$   
 c) Todos los valores son muy superiores a unos pocos minutos.

2.37. a)  $40 \text{ V}$   
 b) No,  $12 \text{ V}/800 \Omega = 15 \text{ mA}$  provocará simplemente una descarga menor.

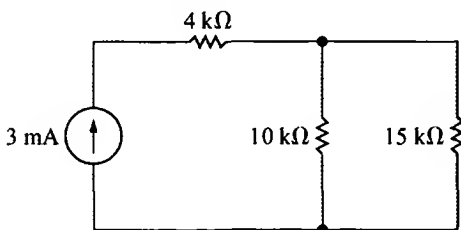
2.38.  $3000 \text{ V}$

### Capítulo 3

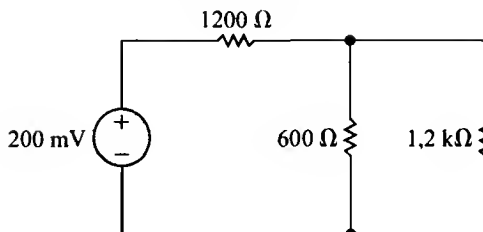
3.1 a)  $6 \Omega$  y  $12 \Omega$ ;  $9 \Omega$  y  $7 \Omega$



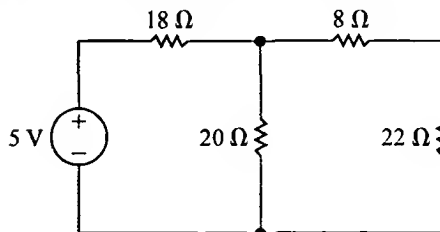
b)  $3 \text{ k}\Omega$ ,  $5 \text{ k}\Omega$  y  $7 \text{ k}\Omega$



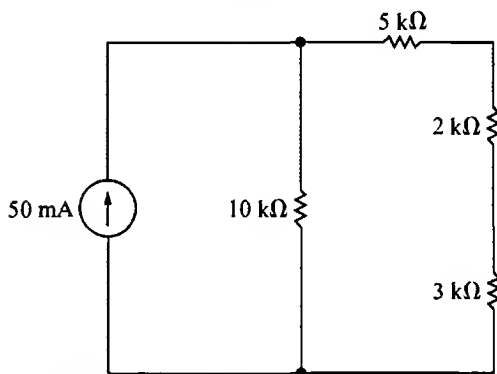
c)  $300 \Omega$ ,  $400 \Omega$  y  $500 \Omega$



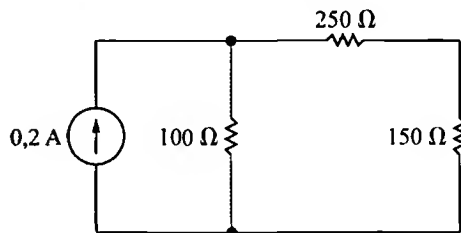
3.2. a)  $10 \Omega$  y  $40 \Omega$ ;  $100 \Omega$  y  $25 \Omega$



b)  $9 \text{ k}\Omega$ ,  $18 \text{ k}\Omega$  y  $6 \text{ k}\Omega$



c)  $600 \Omega$ ,  $200 \Omega$  y  $300 \Omega$



3.5. a)  $21,2 \Omega$   
 b)  $10 \text{ k}\Omega$   
 c)  $1600 \Omega$

3.6. a)  $30 \Omega$   
 b)  $5 \text{ k}\Omega$   
 c)  $80 \Omega$

- 3.13. a) 10 V  
 b)  $P_{R_1} = 800 \text{ mW}$ ;  $P_{R_2} = 200 \text{ mW}$   
 c)  $R_1 = 1600 \Omega$ ;  $R_2 = 400 \Omega$  (valores mínimos)

3.14. 26,67  $\Omega$

3.21.  $R_1 = 800 \Omega$ ;  $R_2 = 1,6 \text{ k}\Omega$ ;  $R_3 = 16 \text{ k}\Omega$ ;  $R_4 = 16 \text{ k}\Omega$

- 3.22. a) 15 V, positiva en la parte superior  
 b) 20 mA, de derecha a izquierda  
 c) 1,6 mA, de la parte superior a la inferior  
 d) 18 V, positiva en la parte superior

- 3.23. a) 30 mV, positiva a la izquierda  
 b) 4,5 V, positiva en la parte superior  
 c) 0,4 A, de la parte inferior a la superior

3.31. a)  $i_m = \frac{(10/99)}{10 + (10/99)} i_{\text{medida}} = \frac{1}{100} i_{\text{medida}}$

b)  $\frac{1}{100.000}$

c) Sí

- 3.34. a) 49.980  $\Omega$   
 b) 4980  $\Omega$   
 c) 230  $\Omega$   
 d) 5  $\Omega$

- 3.49. a) 2000  $\Omega$   
 b) 8,4 mA  
 c) 800  $\Omega$ ; 28,8 mW  
 d) 500  $\Omega$ ; 2,88 mW

3.53.  $v_1 = 23,2 \text{ V}$ ;  $v_2 = 21,0 \text{ V}$

- 3.54. a) La estrella equivalente es 5  $\Omega$ , 20  $\Omega$ , 4  $\Omega$ ;  $R_{ab} = 33 \Omega$ .  
 b) El triángulo equivalente es 100  $\Omega$ , 80  $\Omega$ , 20  $\Omega$ ;  $R_{ab} = 33 \Omega$ .  
 c) Convierta  $R_4$ - $R_5$ - $R_6$  de triángulo a estrella; convierta  $R_3$ - $R_4$ - $R_6$  de estrella a triángulo.

3.55. 90  $\Omega$

3.71.  $R_1 = 1,0372 \Omega$ ,  $R_2 = 1,1435 \Omega$ ,  
 $R_3 = 1,2 \Omega$ ,  $R_4 = 1,1435 \Omega$ ,  $R_5 = 1,0372 \Omega$ ,  $R_a = 0,0259 \Omega$ ,  $R_b = 0,0068 \Omega$ ,  $R_c = 0,0068 \Omega$ ,  $R_d = 0,0259 \Omega$

3.72.  $P_{\text{dis}} = 624 \text{ W} = P_{\text{gen}}$

- 3.73. a)  $R_1 = 0,4269 \Omega$ ,  $R_2 = 0,4617 \Omega$ ,  
 $R_3 = 0,48 \Omega$ ,  $R_4 = 0,4617 \Omega$ ,  
 $R_5 = 0,4269 \Omega$ ,  $R_a = 0,0085 \Omega$ ,  
 $R_b = 0,0022 \Omega$ ,  $R_c = 0,0022 \Omega$ ,  
 $R_d = 0,0085 \Omega$   
 b)  $i_1 = 26,51 \text{ A}$ ,  $i_1^2 R_1 = 300 \text{ W}$  o  
 200 W/m;  $i_2 = 25,49 \text{ A}$ ,  
 $i_2^2 R_2 = 300 \text{ W}$  o 200 W/m;  
 $i_b = 52 \text{ A}$ ,  $i_b^2 R_b = 6 \text{ W}$  o 200 W/m;  
 $P_{\text{gen}} = 1548 \text{ W} = P_{\text{dis}}$

## Capítulo 4

- 4.1. a) 11  
 b) 9  
 c) 9  
 d) 7  
 e) 6  
 f) 4  
 g) 6

- 4.2. a) 2  
 b) 5  
 c) 7  
 d) 1; 4; 7

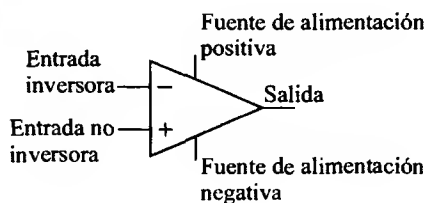
- 4.3. a) 7  
 b) 3  
 c) 4  
 d) malla superior; malla de la izquierda

- 4.4. a) 5  
 b) 3  
 c)  $-i_g + i_{R_1} + i_{R_2} = 0$ ;  
 $-i_{R_1} + i_{R_4} + i_{R_3} = 0$ ;  
 $i_{R_5} - i_{R_2} - i_{R_3} = 0$   
 d) 2  
 e)  $R_1 i_{R_1} + R_3 i_{R_3} - R_2 i_{R_2} = 0$ ;  
 $R_3 i_{R_3} + R_5 i_{R_5} - R_4 i_{R_4} = 0$

- 4.6.  $-5 \text{ V}$
- 4.9.  $v_1 = 120 \text{ V}, v_2 = 96 \text{ V}$
- 4.10. a)  $i_a = 8 \text{ A}, i_b = 2 \text{ A}, i_c = 6 \text{ A}, i_d = 2 \text{ A}, i_e = 4 \text{ A}$   
b)  $360 \text{ W}$
- 4.19.  $750 \text{ W}$  generados
- 4.20. a)  $P_{25\Omega} = -8800 \text{ W}; P_{\text{gen}} = 8800 \text{ W}$   
b)  $P_{84\Omega} = 628,32 \text{ W}, P_{40\Omega} = 3097,6 \text{ W}, P_{160\Omega} = 774,4 \text{ W}, P_{10\Omega} = 1960 \text{ W}, P_{20\Omega} = 2247,2 \text{ W}, P_{8\Omega} = 92,48 \text{ W}, P_{\text{dis}} = 8800 \text{ W}$
- 4.21.  $10 \text{ V}$
- 4.26.  $v_1 = -37,5 \text{ V}, P_{25\text{V}} = 31,25 \text{ W}$  generada
- 4.27.  $25 \text{ V}$
- 4.31. a)  $i_a = 5,6 \text{ A}, i_b = 3,2 \text{ A}, i_c = -2,4 \text{ A}$   
b)  $i_a = -8,8 \text{ A}, i_b = -1,6 \text{ A}, i_c = 7,2 \text{ A}$
- 4.32. a)  $P_{230\text{V}} = -1012 \text{ W}, P_{460\text{V}} = -16.928 \text{ W}, P_{\text{gen}} = 17.940 \text{ W}$   
b)  $P_{\text{abs}} = 17.940 \text{ W}$
- 4.33.  $259,2 \text{ W}$
- 4.34.  $2.016 \text{ W}$  generada
- 4.37. a)  $-312 \text{ W}$  generada ( $312 \text{ W}$  absorbida)  
b)  $21.000 \text{ W}$   
c)  $P_{\text{gen}} = 21.000 \text{ W} = P_{\text{dis}}$
- 4.38. a)  $2 \text{ mA}$   
b)  $304 \text{ mW}$  generada  
c)  $0,9 \text{ mW}$  generada
- 4.43.  $740 \text{ W}$
- 4.46. a)  $i_a = -4,2 \text{ A}, i_b = 7,4 \text{ A}, i_c = 4,68 \text{ A}, i_d = 11,6 \text{ A}, i_e = 2,72 \text{ A}$   
b)  $P_{\text{gen}} = 1329,632 \text{ W} = P_{\text{abs}}$
- 4.52. a) Hay tres tensiones de nodo desconocidas, pero sólo dos corrientes de malla desconocidas, por lo que elegimos el método de las corrientes de malla.  
b)  $3,6 \text{ W}$   
c) No, ya que resulta fácil calcular la tensión en bornes de la fuente de corriente a partir de las corrientes de malla.  
d)  $52,8 \text{ W}$  generada
- 4.54. a) El método de las tensiones de nodo, porque las ecuaciones de restricción son más fáciles de formular.  
b)  $480 \text{ mW}$  absorbida
- 4.55. a)  $-1 \text{ mA}$   
b)  $-1 \text{ mA}$
- 4.58. a)  $-0,85 \text{ A}$   
b)  $-0,85 \text{ A}$
- 4.59.  $V_{\text{Th}} = 60 \text{ V}, R_{\text{Th}} = 10 \Omega$
- 4.62.  $I_{\text{N}} = 1 \text{ mA}$ , de arriba hacia abajo;  $R_{\text{N}} = 3,75 \text{ k}\Omega$
- 4.63. a)  $51,3 \text{ V}$   
b)  $-5\%$
- 4.65.  $v_{\text{Th}} = 160 \text{ V}$ , negativa en la parte superior;  $R_{\text{Th}} = 56,4 \text{ k}\Omega$
- 4.72.  $1,43 \mu\text{A}$
- 4.75.  $2,5 \Omega$  y  $22,5 \Omega$
- 4.76. a)  $6 \Omega$   
b)  $24 \text{ W}$
- 4.87. a)  $50 \text{ V}$   
b)  $250 \text{ W}$
- 4.88.  $30 \text{ V}$
- 4.101.  $v_1 = 39,583 \text{ V}, v_2 = 102,5 \text{ V}$
- 4.102.  $v_1 = 37,5 \text{ V}, v_2 = 105 \text{ V}$
- 4.103.  $v_1 = 52,083 \text{ V}, v_2 = 117,5 \text{ V}$

## Capítulo 5

5.1. a)



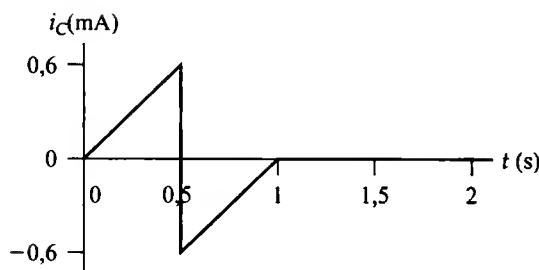
- b) La resistencia de entrada es infinita, por lo que  $i_n = 0$  A
- c) La ganancia en la región lineal es infinita, por lo que  $v_p - v_n = 0$
- d)  $-10$  V
- 5.2. a)  $-15$  V (saturado)  
b)  $-10$  V  
c)  $-4$  V  
d)  $7$  V  
e)  $-1,08$  V  $\leq v_a \leq 4,92$  V
- 5.3.  $-1$  mA
- 5.6. a) Utilice una única resistencia de  $20$  k $\Omega$  en el camino directo y 6 resistencias de  $20$  k $\Omega$  conectadas en serie en el camino de realimentación; alternatively, utilice 6 resistencias de  $20$  k $\Omega$  conectadas en paralelo en el camino directo y una única resistencia de  $20$  k $\Omega$  en el camino de realimentación.  
b)  $\pm 18$  V
- 5.7. a) Amplificador no inversor  
b)  $9$  V
- 5.16. a) Amplificador sumador inversor  
b)  $-4$  V  
c)  $-2,5$  V  $\leq v_b \leq -1,3$  V
- 5.17. a)  $14$  V  
b)  $3,818$  V  $\leq v_a \leq 9,273$  V
- 5.19.  $R_a = 24$  k $\Omega$ ,  
 $R_b = 12$  k $\Omega$ ,  
 $R_c = 8$  k $\Omega$ ,  
 $R_d = 6$  k $\Omega$
- 5.22. a) Amplificador no inversor  
b)  $2v_s$   
c)  $-6$  V  $\leq v_s \leq 4$  V
- 5.23. a)  $10,54$  V  
b)  $-4,554$  V  $\leq v_s \leq 4,554$  V  
c)  $181,76$  k $\Omega$

- 5.29  $20$  k $\Omega$
- 5.30. a)  $4,2$  V  
b)  $-771$  mV  $\leq v_c \leq 1371$  mV
- 5.31. a)  $-1,53$  V  
b)  $33,5$  k $\Omega$   
c)  $80$  k $\Omega$
- 5.37. a)  $24,98$   
b)  $-0,04$   
c)  $624,5$
- 5.38.  $19,93$  k $\Omega \leq R_x \leq 20,07$  k $\Omega$
- 5.39. a)  $-19,9915$  V  
b)  $403,2$   $\mu$ V  
c)  $5002,02$   $\Omega$   
d)  $-20; 0$  V;  $5000$   $\Omega$
- 5.48. a)  $2$  k $\Omega$   
b)  $12$  m $\Omega$

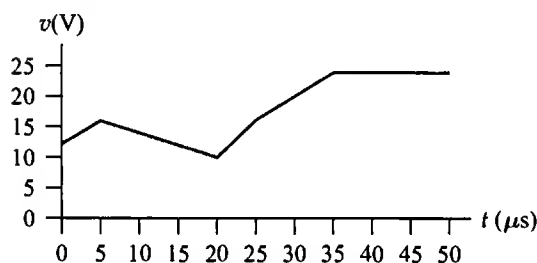
## Capítulo 6

- 6.1. a)  $i = 0$   $t < 0$   
 $i = 50t$  A  $0 \leq t \leq 5$  ms  
 $i = 0,5 - 50t$  A  $5$  ms  $\leq t \leq 10$  ms  
 $i = 0$   $10$  ms  $\leq t \leq \infty$
- b)  $v = 0$   $t < 0$   
 $v = 1$  V  $0 \leq t \leq 5$  ms  
 $v = -1$  V  $5$  ms  $\leq t \leq 10$  ms  
 $v = 0$   $10$  ms  $\leq t \leq \infty$   
 $p = 0$   $t < 0$   
 $p = 50t$  W  $0 \leq t \leq 5$  ms  
 $p = 50t - 0,5$  W  $5$  ms  $\leq t \leq 10$  ms  
 $p = 0$   $10$  ms  $\leq t \leq \infty$   
 $w = 0$   $t < 0$   
 $w = 25t^2$  J  $0 \leq t \leq 5$  ms  
 $w = 25t^2 - 0,5t + 0,0025$  J  $5$  ms  $\leq t \leq 10$  ms  
 $w = 0$   $10$  ms  $\leq t \leq \infty$

6.14.



- 6.15. a)  $8 \times 10^5 t + 12 \text{ V}$   
 b)  $-4 \times 10^5 t + 18 \text{ V}$   
 c)  $12 \times 10^5 t - 14 \text{ V}$   
 d)  $8 \times 10^5 t - 4 \text{ V}$   
 e) 24 V  
 f)



6.21. 15 H

- 6.22. a)  $6e^{-t} \text{ A}$   
 b)  $4e^{-t} - 2 \text{ A}$   
 c)  $2e^{-t} + 2 \text{ A}$   
 d) 36 J  
 e) 54 J  
 f) 18 J  
 g)  $54 \text{ J} - 36 \text{ J} = 18 \text{ J}$  (correcto)

6.26.  $2 \mu\text{F}$  con 25 V, positiva en la parte superior

- 6.27. a)  $10e^{-t} \text{ V}$   
 b)  $6,67e^{-t} - 2,67 \text{ V}$   
 c)  $3,33e^{-t} + 2,67 \text{ V}$   
 d)  $100 \mu\text{J}$   
 e)  $132 \mu\text{J}$   
 f)  $32 \mu\text{J}$

g)  $100 \mu\text{J} + 32 \mu\text{J} = 132 \mu\text{J}$  (correcto)

6.34. a)  $16 \frac{di_2}{dt} + 32i_2 = 2 \frac{di_g}{dt}$

b)  $-16e^{-t} + 32e^{-2t} + 32e^{-t} - 32e^{-2t} = 16e^{-t}$

c)  $34e^{-t} - 4e^{-2t} \text{ V}, t \geq 0$

d) 30 V; sí

6.38. a) 50 mH; 2,4

b)  $0,2 \times 10^{-6} \text{ Wb/A}$

6.39. 0,8 nWb/A; 1,2 nWb/A

6.47. a) 2721,6 mJ

b) 2721,6 mJ

c) 518,4 mJ

d) 518,4 mJ

6.48. a) -4,5 A

b) no

6.49.  $v = \frac{1}{3}v_s(t) + v(0)$

6.51. El dedo no causa ningún cambio en la tensión de salida.

## Capítulo 7

7.1. a)  $i_1(0^-) = 5 \text{ mA}, i_2(0^-) = 15 \text{ mA}$

b)  $i_1(0^+) = 5 \text{ mA}, i_2(0^+) = -5 \text{ mA}$

c)  $5e^{-20.000t} \text{ mA}$

d)  $-5e^{-20.000t} \text{ mA}$

e) La corriente de una resistencia puede cambiar instantáneamente.

7.2. a) 4 A

b) 80 ms

c)  $i = 4e^{-12,5t} \text{ A}, t \geq 0;$   
 $v_1 = -180e^{-12,5t} \text{ V}, t \geq 0^+;$   
 $v_2 = -200e^{-12,5t} \text{ V}, t \geq 0^+$

d) 56,89%

7.3. a) 0

b) 160 mA

c) 65 mA

- d) 160 mA  
 e) 225 mA  
 f) 0  
 g)  $160e^{-200t}$  mA,  $t \geq 0$   
 h) 0  
 i) -3,2 V  
 j) 0  
 k)  $-3,2e^{-200t}$  V,  $t \geq 0^+$   
 l)  $225 - 160e^{-200t}$  mA,  $t \geq 0^+$
- 7.21. a)  $i = 1,6e^{-50t}$  mA,  $t \geq 0^+$ ,  
 $v_1 = 32e^{-50t} + 8$  V,  $t \geq 0$ ,  
 $v_2 = -8e^{-50t} + 8$  V,  $t \geq 0$   
 b) 800  $\mu$ J  
 c)  $w_{\text{atrapada}} = 160 \mu\text{J}$ ,  $w_{\text{dis}} = 640 \mu\text{J}$
- 7.22. a)  $9,9e^{-1000t}$  mA  
 b) 42,14%
- 7.33. a)  $i_L(t) = -2 - 3e^{-5000t}$  A,  $t \geq 0$ ;  
 $v_o(t) = 48 - 48e^{-5000t}$  V,  $t \geq 0$   
 b)  $v_L(0^+) = 60$  V,  $v_o(0^+) = 0$  V
- 7.34. a)  $5 + 15e^{-1000t}$  A,  $t \geq 0$   
 b)  $50 - 450e^{-1000t}$  V,  $t \geq 0^+$
- 7.35.  $i_o(t) = 2,5 + 7,5e^{-1250t}$  A,  $t \geq 0$ ;  
 $v(t) = -150e^{-1250t}$  V,  $t \geq 0$
- 7.47.  $-60 + 90e^{-2000t}$  V,  $t \geq 0$
- 7.48. a)  $60 - 60e^{-100t}$  V,  $t \geq 0$   
 b)  $1 - 0,6e^{-100t}$  mA,  $t \geq 0^+$   
 c)  $1 + 2,4e^{-100t}$  mA,  $t \geq 0^+$   
 d)  $4 - 2,4e^{-100t}$  mA,  $t \geq 0^+$   
 e) 3,4 mA
- 7.61. a) 50 V  
 b) -24 V  
 c) 0,1  $\mu$ s  
 d) -18,5 A  
 e)  $-24 + 74e^{-10^7 t}$  V,  $t \geq 0$   
 f)  $-18,5e^{-10^7 t}$  A,  $t \geq 0^+$
- 7.62. a) 90 V  
 b) -60 V  
 c) 1000  $\mu$ s
- d) 916,3  $\mu$ s
- 7.63. a) -13 mA  
 b) -12 mA  
 c) 80  $\mu$ s  
 d)  $-12 - e^{-12.500t}$  mA,  $t \geq 0$
- 7.64. a)  $6 - 6e^{-10t}$  A,  $t \geq 0$   
 b)  $100e^{-10t}$  V,  $t \geq 0$   
 c)  $7 - 7e^{-10t}$  A,  $t \geq 0$   
 d)  $-1 + e^{-10t}$  A,  $t \geq 0$   
 e) Sí, se verifican las condiciones iniciales y los valores finales.
- 7.66. a)  $4 - 4e^{-20t}$  A,  $t \geq 0$   
 b)  $80e^{-20t}$  V,  $t \geq 0^+$   
 c)  $2,4 - 2,4e^{-20t}$  A,  $t \geq 0$   
 d)  $1,6 - 1,6e^{-20t}$  A,  $t \geq 0$   
 e) Sí, se verifican las condiciones iniciales y los valores finales.
- 7.69.  $-100 + 130e^{-200t}$  V,  $t \geq 0$
- 7.70. a) 7,5 A  
 b) 6,14 A  
 c) 226,48 mA  
 d) -220,73 V  
 e) -110,4 V
- 7.84. a) 2,25  
 b) 272,1  $\mu$ s
- 7.85. 83,09 ms
- 7.89. 80 ms
- 7.90.  $v_o = 8 - 1600t$  V,  $0 \leq t \leq t_{\text{sat}}$ ;  
 $v_2 = 11e^{-200t} - 15$  V,  $0 \leq t \leq t_{\text{sat}}$ ;  
 $v_f = 23 - 1600t - 11e^{-200t}$  V,  
 $0 \leq t \leq t_{\text{sat}}$
- 7.103. a) 1,091 M $\Omega$   
 b) 0,29 s
- 7.104. a) 8,55 destellos/min  
 b) 559,3 k $\Omega$
- 7.105. a) 24,3 destellos/min  
 b) 99,06 mA  
 c) 43,39 por año

## Capítulo 8

8.1. a)  $-100 \text{ rad/s}$ ,  $-400 \text{ rad/s}$

b) sobreamortiguado

c)  $1562,5 \Omega$

d)  $-160 + j120 \text{ rad/s}$ ,  
 $-160 - j120 \text{ rad/s}$

e)  $1250 \Omega$

8.2. a)  $R = 8 \text{ k}\Omega$ ,  $L = 40 \text{ H}$ ,  
 $\alpha = 625 \text{ rad/s}$ ,  $\omega_0 = 500 \text{ rad/s}$

b)  $i_R(t) = 4e^{-1000t} - e^{-250t} \text{ mA}$ ,  $t \geq 0^+$ ;  
 $i_C(t) = 0,2e^{-250t} - 3,2e^{-1000t} \text{ mA}$ ,  
 $t \geq 0^+$ ;

$i_L(t) = 0,8e^{-250t} - 0,8e^{-1000t} \text{ mA}$ ,  
 $t \geq 0^+$

8.7. a)  $40 \text{ mH}$

b)  $625 \Omega$

c)  $100 \text{ V}$

d)  $40 \text{ mA}$

e)  $e^{-20.000t} (40 \cos 15.000t$   
 $+ 220 \sin 15.000t) \text{ mA}$ ,  $t \geq 0$

8.8. a)  $a = 500 \text{ rad/s}$ ,  $\omega_0 = 400 \text{ rad/s}$ ,

$L = 1,5625 \text{ H}$ ,  $C = 4 \mu\text{F}$ ,

$A_1 = -31 \text{ mA}$ ,  $A_2 = 76 \text{ mA}$

b)  $38,75e^{-200t} - 23,75e^{-800t} \text{ V}$ ,  $t \geq 0$

c)  $155e^{-200t} - 95e^{-800t} \text{ mA}$ ,  $t \geq 0^+$

d)  $-124e^{-200t} + 19e^{-800t} \text{ mA}$ ,  $t \geq 0$

8.9. a)  $R = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $C = 1 \mu\text{F}$ ,  
 $D_1 = 6000 \text{ V/s}$ ,  $D_2 = 8 \text{ V}$

b)  $(-3000t + 2)e^{-500t} \text{ mA}$ ,  $t \geq 0^+$

8.16.  $5e^{-2000t} + 10e^{-8000t} \text{ V}$ ,  $t \geq 0$

8.17.  $15e^{-2000t} \cos 3122,5t$   
 $+ 4,8e^{-2000t} \sin 3122,5t \text{ V}$ ,  $t \geq 0$

8.18.  $15e^{-4000t} \text{ V}$ ,  $t \geq 0$

8.24.  $60 - 120e^{-5000t} + 15e^{-20.000t} \text{ mA}$ ,  $t \geq 0$

8.25.  $60 - 105e^{-8000t} \cos 6000t$   
 $- 90e^{-8000t} \sin 6000t \text{ mA}$ ,  $t \geq 0$

8.26.  $60 - 750.000te^{-10.000t}$   
 $- 105e^{-10.000t} \text{ mA}$ ,  $t \geq 0$

8.40.  $-2,4e^{-4t} \cos 3t - 3,2e^{-4t} \sin 3t \text{ A}$ ,  
 $t \geq 0^+$

8.42. a)  $10.000te^{-10^5t} + 0,1e^{-10^5t} \text{ A}$ ,  $t \geq 0$   
b)  $25 \times 10^5te^{-10^5t} + 50e^{-10^5t} \text{ V}$ ,  $t \geq 0$

8.46. a)  $24 \text{ V}$

b)  $-53,248 \text{ V/s}$

c)  $-40 - 25,6e^{-160t} + 89,6e^{-640t} \text{ V}$ ,  
 $t \geq 0^+$

8.51. a)  $v_o = 10t^2 \text{ V}$ ,  $0 \leq t \leq 0,5^- \text{ s}$ ;  
 $v_o = -5t^2 + 15t - 3,75 \text{ V}$ ,  $0,5^+ \text{ s} \leq t \leq t_{\text{sat}}$ ;  
 $v_{o1} = -1,6t \text{ V}$ ,  $0 \leq t \leq 0,5^- \text{ s}$ ;  
 $v_{o1} = 0,8t - 1,2 \text{ V}$ ,  $0,5^+ \text{ s} \leq t \leq t_{\text{sat}}$   
b)  $3,5 \text{ s}$

8.52.  $v_o = 10 - 20e^{-t} + 10e^{-2t} \text{ V}$ ,  
 $0 \leq t \leq 0,5 \text{ s}$ ;  
 $v_o = -5 + 19,42 e^{-(t-0,5)}$   
 $- 12,87e^{-2(t-0,5)} \text{ V}$ ,  $0,5 \leq t \leq \infty$ ;  
 $v_{o1} = -0,8 + 0,8e^{-2t} \text{ V}$ ,  $0 \leq t \leq 0,5 \text{ s}$ ;  
 $v_{o1} = 0,4 - 0,91e^{-2(t-0,5)} \text{ V}$ ,  $0,5 \leq t \leq \infty$

8.60. a)  $55,23 \mu\text{s}$

b)  $262,42 \text{ V}$

c)  $t_{\text{máx}} = 53,63 \mu\text{s}$ ,  $v(t_{\text{máx}}) = 262,15 \text{ V}$

8.61. a)  $40 \text{ mJ}$

b)  $-27.808,04 \text{ V}$

c)  $568,15 \text{ V}$

## Capítulo 9

9.1. a)  $600 \text{ Hz}$

b)  $1,67 \text{ ms}$

c)  $10 \text{ V}$

d)  $6 \text{ V}$

e)  $-53,13^\circ$  o  $-0,9273 \text{ rad}$

f)  $662,62 \mu\text{s}$

g)  $245,97 \mu\text{s}$



9.2.  $\frac{V_m}{2}$

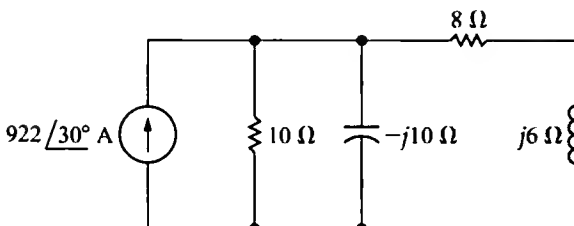
- 9.3. a) 40 V  
 b) 50 Hz  
 c) 314,159 rad/s  
 d) 1,05 rad  
 e) 60°  
 f) 20 ms  
 g) 6,67 ms  
 h)  $40 \cos 100\pi t$  V  
 i) 8,33 ms  
 j) 16,67 ms

- 9.9. a)  $-195,72e^{-1066,67t} + 200 \cos(800t - 11,87^\circ)$  mA  
 b)  $-195,72e^{-1066,67t}$  mA,  
 $200 \cos(800t - 11,87^\circ)$  mA  
 c) 28,39 mA  
 d) 0,2 A, 800 rad/s,  $-11,87^\circ$   
 e)  $36,87^\circ$

- 9.12. a) 1000 Hz  
 b) 0°  
 c)  $-90^\circ$   
 d) 8  $\Omega$   
 e) 1,27 mH  
 f)  $j8 \Omega$

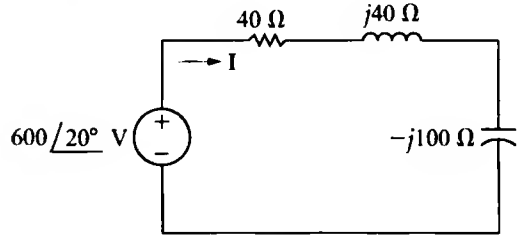
- 9.13. a) 314,159,27 rad/s  
 b) 90°  
 c)  $-15,92 \Omega$   
 d) 0,2  $\mu$ F  
 e)  $-j15,92 \Omega$

- 9.14. a)



- b)  $5000,25 \angle 17,47^\circ$  V  
 c)  $5000,25 \cos(2 \times 10^4 t + 17,47^\circ)$  V

- 9.15. a)



- b)  $8,32 \angle 76,31^\circ$  A  
 c)  $8,32 \cos(8000t + 76,31^\circ)$  A

- 9.16.  $17,68 \cos(50t - 135^\circ)$  mA

- 9.17. a)  $200 \angle 36,87^\circ$  mS  
 b) 160 mS  
 c) 120 mS  
 d) 10 A

- 9.18.  $42,43 \cos(2000t + 45^\circ)$  V

- 9.19. a)  $50 \angle 45^\circ \Omega$   
 b) 50  $\mu$ S

- 9.20.  $42,43 \cos(50.000t + 45^\circ)$  V

- 9.35. 0,667  $\Omega$

- 9.39.  $10 \cos 200t$  mV

- 9.42.  $227,68 \angle -18,43^\circ$  V, positivo en la parte superior;  $3,6 + j10,8 \Omega$

- 9.43.  $2,2 \angle 0^\circ$  A, fluyendo de arriba abajo;  
 $30 - j40 \Omega$

- 9.51.  $188,43 \angle -42,88^\circ$  V

- 9.54.  $36 \cos 2000t$  V

- 9.56.  $j80$  V =  $80 \angle 90^\circ$  V

- 9.59.  $4 - j2$  A =  $4,47 \angle -26,57^\circ$  A

- 9.66. a)  $i_x = 5 \cos(5000t - 36,87^\circ)$  A,  
 $i_L = \cos(5000t - 180^\circ)$  A

- b) 0,5  
 c) 9,0 mJ, 12 mJ

- 9.67.  $850 + j850$  V, positivo en la parte superior;  $85 + j85 \Omega$

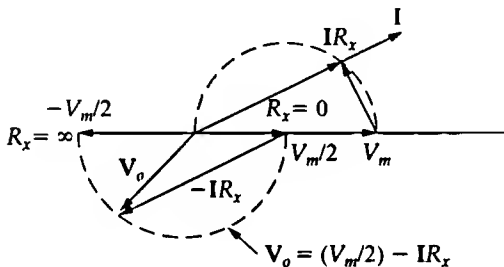
9.71.  $512 \angle 60^\circ \text{ k}\Omega$

9.75. a)  $247,11 \angle 1,68^\circ \text{ V}$

b)  $-32 \Omega, 241,13 \angle 1,90^\circ \text{ V}$

c)  $-26,90 \Omega$

- 9.76. A medida que  $R_x$  varía de 0 a  $\infty$ , la amplitud de  $v_o$  permanece constante y su ángulo de fase cambia entre  $0$  y  $-180^\circ$ .



9.85. a)  $I_1 = 24 \angle 0^\circ \text{ A}, I_2 = 2,04 \angle 0^\circ \text{ A},$   
 $I_3 = 21,96 \angle 0^\circ \text{ A}, I_4 = 19,40 \angle 0^\circ \text{ A},$   
 $I_5 = 4,6 \angle 0^\circ \text{ A}, I_6 = 2,55 \angle 0^\circ \text{ A}$

b)  $0,42 \angle 0^\circ \text{ A}$

9.86. a)  $0 \text{ A}$

b)  $0,436 \text{ A}$

- c) Cuando las dos cargas son iguales, se extrae más corriente del primario.

## Capítulo 10

10.1. a)  $P = 409,58 \text{ W (abs);}$   
 $Q = 286,79 \text{ VAR (abs)}$

b)  $P = 103,53 \text{ W (abs);}$   
 $Q = -386,37 \text{ VAR (gen)}$

c)  $P = -1000 \text{ W (gen);}$   
 $Q = -1732,05 \text{ VAR (gen)}$

d)  $P = -250 \text{ W (gen);}$   
 $Q = 433,01 \text{ VAR (abs)}$

10.3. a) Sí, la corriente es de unos 22 A.

b) Sí, la corriente es de unos 14 A cuando el disyuntor está cerrado.

10.4. a)  $0,35 \text{ A}$

b)  $1,13 \text{ A}$

10.6. a)  $3 \text{ V (rms)}$

b)  $4 \text{ W}$

10.14. a)  $160 \text{ W (gen)}$

b)  $-40 \text{ W (abs)}$

c)  $60 \text{ W}$

d)  $-80 \text{ VAR}$

e) los genera

f)  $0,6$  en adelante

g)  $-0,8$

10.16 a)  $6,4 \text{ W (gen), } 4,8 \text{ VAR (gen), } 8 \text{ VA}$

b)  $P_{\text{gen}} = 1,6 + 4,8 = 6,4 \text{ W} = P_{\text{abs}}$

c)  $Q_{\text{gen}} = 6,4 - 1,6 = 4,8 \text{ VAR} = Q_{\text{abs}}$

10.18. a)  $1,875 + j0,625 \Omega = 1,98 \angle 18,43^\circ \Omega$

b)  $0,9487$  en retardo

10.33. a)  $20 + j20 \Omega$

b)  $45 \text{ W}$

10.38. a)  $360 \text{ mW}$

b)  $4 \text{ k}\Omega$

c)  $443,1 \text{ mW}$ , que es superior a  $360 \text{ mW}$

d)  $450 \text{ mW}$

e)  $R_o = 4 \text{ k}\Omega, C_o = 66,67 \text{ nF}$

f) Sí,  $450 \text{ mW} > 443,1 \text{ mW}$

10.39. a)  $R_o = 5 \text{ k}\Omega, C_o = 0,1 \mu\text{F},$   
 $P = 439,04 \text{ mW}$

b) Sí,  $439,04 \text{ mW} > 360 \text{ mW}$

c) Si,  $439,04 \text{ mW} < 450 \text{ mW}$

10.43. a)  $108 \text{ V (rms)}$

b)  $1296 \text{ W}$

c)  $40\%$

10.44. a)  $2,7 \text{ kW}$

b)  $5,4 \text{ kW}$

10.55. a)  $1425 \text{ W}$

b)  $31,25 \text{ W}$

10.56.  $90 \text{ W}$

10.57. a)  $10$

b)  $250 \text{ W}$

10.66.  $R_1 = 28,8 \, \Omega$ ,  $R_2 = 28,8 \, \Omega$

10.67. a)  $P_L = \frac{V^2}{R_1 + R_2}$      $P_M = \frac{V^2}{R_2}$

$$P_H = \frac{V^2(R_1 + R_2)}{R_1 R_2} = \frac{\frac{V^2 V^2}{P_L}}{\left(\frac{V^2}{P_L} - \frac{V^2}{P_M}\right)\left(\frac{V^2}{P_L}\right)}$$

$$= \frac{P_M^2}{P_M - P_L}$$

b) 1125 W

10.68.  $R_1 = 36 \, \Omega$ ,  $R_2 = 24 \, \Omega$

## Capítulo 11

11.1. a) acb

b) abc

11.2. a) Equilibrado, positivo

b) Equilibrado, negativo

c) No equilibrado, ángulos de fase

d) No equilibrado, amplitudes

e) No equilibrado, ángulos de fase

f) No equilibrado, frecuencias

11.8.  $v_{AB} = 293,95 \cos(\omega t + 56^\circ) \, V$

$v_{BC} = 293,95 \cos(\omega t - 69^\circ) \, V$

$v_{CA} = 293,95 \cos(\omega t + 176^\circ) \, V$

11.9. a) 10 A (rms);

b) 684,71 V (rms);

11.10 a)  $I_{aA} = 5 \angle -36,87^\circ \, A$  (rms)

b)  $V_{ab} = 216,5 \angle -30^\circ \, V$  (rms)

c)  $V_{AN} = 122,23 \angle -1,36^\circ \, V$  (rms)

d)  $V_{AB} = 211,71 \angle -31,36^\circ \, V$  (rms)

11.11. a)  $I_{AB} = 6,4 \angle -36,87^\circ \, A$  (rms)

b)  $I_{aA} = 11,09 \angle -66,87^\circ \, A$  (rms)

c)  $V_{ab} = 499,21 \angle 0^\circ \, V$  (rms)

11.22. a) 4467,43 V (rms)

b) 97,83%

11.23. a) 138,46 A (rms)

b) 0,892 en retardo

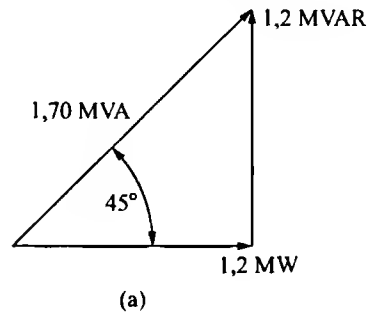
11.33. 197,29 W, 476,63 W

11.34. a)  $W_2 - W_1 = V_L I_L [\cos(\theta - 30^\circ) - \cos(\theta + 30^\circ)] = 2V_L I_L \sin \theta \sin 30^\circ = V_L I_L \sin \theta$ . Por tanto,

$$\sqrt{3}(W_2 - W_1) = \sqrt{3}V_L I_L \sin \theta = Q_T$$

b) 2592 VAR, -2592 VAR, 3741,23 VAR, -4172,8 VAR

11.44. a)



b)  $\xrightarrow{\hspace{1cm}}$  1,2 MW  
(b)

11.45. a) 16,71  $\mu F$

b) 50,14  $\mu F$

11.46.  $|V_{ab}| = 12.548,8 \, V$ , por lo que la tensión está por debajo del nivel aceptable de 13 kV. Por tanto, cuando la carga en la subestación caiga a cero, deberá desconectarse el banco de condensadores.

11.47.  $P_{L(\text{antes})} = 81,66 \, kW$ ,  
 $P_{L(\text{después})} = 40,83 \, kW$

## Capítulo 12

12.1. a)  $5t[u(t) - u(t - 2)] + 10[u(t - 2) - u(t - 6)] + (40 - 5t)[u(t - 6) - u(t - 8)]$

b)  $10 \sin(\pi t)[u(t) - u(t - 2)]$

c)  $4t[u(t) - u(t - 5)]$

12.2. a)  $(t + 10)u(t + 10) - 2tu(t) + (t - 10)u(t - 10)$

b)  $-8(t + 3)u(t + 3) + 8(t + 2)u(t + 2) + 8(t + 1)u(t + 1) - 8(t - 1)u(t - 1) - 8(t - 2)u(t - 2) + 8(t - 3)u(t - 3)$

12.5. a) 1

b) 0

c)  $\infty$

12.6. a) 26

b) 2,25

12.7.  $\frac{2}{9}$

$$12.24. \text{ a) } \frac{dF(s)}{ds} = \frac{d}{ds} \left[ \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt \right]$$

$$= - \int_0^\infty tf(t)e^{-st} dt$$

Por tanto,  $\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\frac{dF(s)}{ds}$

$$\text{b) } \frac{d^2 F(s)}{ds^2} = \int_0^\infty t^2 f(t)e^{-st} dt$$

$$\frac{d^3 F(s)}{ds^3} = \int_0^\infty -t^3 f(t)e^{-st} dt$$

Por tanto,

$$\frac{d^n F(s)}{ds^n} = (-1)^n \int_0^\infty t^n f(t)e^{-st} dt$$

$$= (-1)^n \mathcal{L}\{t^n f(t)\}$$

$$\text{c) } \mathcal{L}\{t^5\} = \frac{120}{s^6}$$

$$\mathcal{L}\{t \sin \beta t\} = \frac{2\beta s}{(s^2 + \beta^2)^2}$$

$$\mathcal{L}\{e^{-t} t \cosh t\} = \frac{s^2 + 2s + 2}{s^2(s+2)^2}$$

$$12.25. \text{ a) } \int_s^\infty F(u) du = \int_s^\infty \left[ \int_0^\infty f(t)e^{-ut} dt \right] du$$

$$= \int_0^\infty \left[ \int_s^\infty f(t)e^{-ut} du \right] dt$$

$$= \int_0^\infty f(t) \int_s^\infty e^{-ut} du dt$$

$$= \int_0^\infty f(t) \left[ \frac{e^{-ut}}{-t} \right]_s^\infty dt$$

$$= \int_0^\infty f(t) \left[ \frac{-e^{-st}}{-t} \right] dt = \mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}$$

$$\text{b) } \mathcal{L}\{t \sin \beta t\} = \frac{\beta}{s^2 + \beta^2}$$

$$12.26. \frac{1,92s^2}{(s^2 + 1,6s + 1)(s^2 + 1)}$$

12.37. a)  $[e^{-t} + 5e^{-2t} + 2e^{-4t}]u(t)$

b)  $[10 + 5e^{-2t} - 8e^{-3t} + e^{-5t}]u(t)$

c)  $[10e^{-t} + 20e^{-2t} \cos(t + 53,13^\circ)]u(t)$

d)  $[490 + 250e^{-7t} \cos(t - 163,74^\circ)]u(t)$

12.38. a)  $[20t - 4 + 4e^{-5t}]u(t)$

b)  $[250 - 200te^{-t} - 250e^{-t}]u(t)$

c)  $[30t - 8 + 10e^{-3t} \cos(t + 36,87^\circ)]u(t)$

d)  $[20 - 2,5t^2e^{-t} - 15te^{-t} - 20e^{-t}]u(t)$

e)  $[16 + 89,44te^{-2t} \cos(t + 26,57^\circ) + 113,14e^{-2t} \cos(t + 98,13^\circ)]u(t)$

12.39 a)  $5\delta(t) + [12e^{-2t} - 4e^{-4t}]u(t)$

b)  $10\delta(t) + [40e^{-24t} \cos(7t - 36,87^\circ)]u(t)$

c)  $\delta'(t) - 10\delta(t) + [30e^{-5t} + 20e^{-10t}]u(t)$

12.44. a)  $f(0^+) = 8; f(\infty) = 0$

b)  $f(0^+) = 8; f(\infty) = 10$

c)  $f(0^+) = 22; f(\infty) = 0$

d)  $f(0^+) = 250;$   
 $f(\infty) = 490$

## Capítulo 13

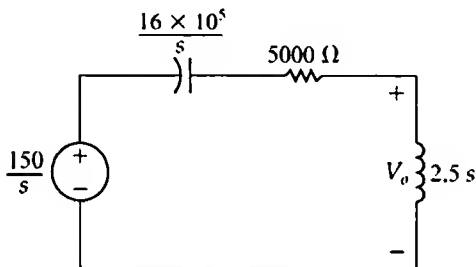
13.1. a)  $\frac{0,04(s^2 + 20.500s + 10^3)}{s}$

b) ceros en  $-8000$  rad/s y  $-12.500$  rad/s; polo en 0

13.5. a)  $\frac{4 \times 10^6 s}{s^2 + 2000s + 64 \times 10^4}$

b) cero en  $-8000$  rad/s y  $-12.500$  rad/s; polo en 0

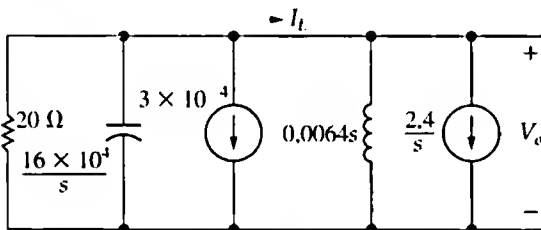
13.9. a)



b)  $\frac{150s}{(s+400)(s+1600)}$

c)  $(200 e^{-1600t} - 50 e^{-400t}) u(t)$  V

13.10. a)



b)  $\frac{-48(s+8000)}{s^2 + 8000s + 25 \times 10^6}$

c)  $\frac{2,4(s+4875)}{s^2 + 8000s + 25 \times 10^6}$

d)  $80e^{-4000t} \cos(3000t + 126,87^\circ) u(t)$  V

e)  $2,5e^{-4000t} \cos(3000t - 16,26^\circ) u(t)$  A

13.26.  $[10 - 10e^{-t/2} \cos 0,5t] u(t)$  A

13.27. a)  $I_1 = \frac{6(s^2 + s - 3)}{s(s+2)(s+3)}$

$$I_2 = \frac{-9s^2 - 30s - 18}{s(s+2)(s+3)}$$

b)  $i_1(0^+) = 6$  A;  $i_1(\infty) = -3$  A;

$i_2(0^+) = -9$  A;  $i_2(\infty) = -3$  A

c)  $i_1(t) = [-3 + 3e^{-2t} + 6e^{-3t}] u(t)$  A;

$i_2(t) = [-3 - 3e^{-2t} - 3e^{-3t}] u(t)$  A

13.35.  $V_{Th} = \frac{40}{s+100}$ ;  $Z_{Th} = \frac{2000(s+50)}{s+100}$ ;

$i(t) = 63,24e^{-150t} \cos(50t + 71,57^\circ) u(t)$  mA

13.36. a)  $\frac{-1440s}{(s+5)(s+20)}$

b)  $v_o(0^+) = 0$   $v_o(\infty) = 0$

c)  $[-96e^{-5t} + 96e^{-20t}] u(t)$  V

13.37.  $[96e^{-5t} - 96e^{-20t}] u(t)$  V

13.42. a)  $\frac{480(s+2,5)}{s(s+4)(s+6)}$

b)  $[50 + 90e^{-4t} - 140e^{-6t}] u(t)$  V

13.49. a)  $\frac{200}{s+200}$  polo en  $-200$  rad/s

b)  $\frac{s}{s+200}$  cero en 0, polo en  $-200$  rad/s

c)  $\frac{s}{s+8000}$  cero en 0, polo en  $-8000$  rad/s

d)  $\frac{8000}{s+8000}$  polo en  $-8000$  rad/s

e)  $\frac{100}{s+500}$  polo en  $-500$  rad/s

13.57.  $1 - e^{-t}$  V,  $0 \leq t \leq 1$ ;  
 $(e - 1)e^{-t}$  V,  $1 \leq t \leq \infty$

13.58.  $e^{-t}$  V,  $0 \leq t \leq 1$ ;  
 $(1 - e)e^{-t}$  V,  $1 \leq t \leq \infty$

13.76.  $16,97 \cos(3t + 8,13^\circ)$  V

13.77. a)  $\frac{-10^4 s}{(s+400)(s+1000)}$

b)  $13,13 \cos(400t - 156,8^\circ) \text{ V}$

13.83. a) 80 V

b) 20 V

c) 0 V

d)  $32\delta(t) \mu\text{A}$

e) 16 V

f) 4 V

g) 20 V

13.84. a) 0,8 A

b) 0,6 A

c) 0,2 A

d) -0,6 A

e)  $0,6e^{-2} \times 10^6 u(t) \text{ A}$

f)  $-0,6e^{-2} \times 10^6 u(t) \text{ A}$

g)  $-1,6 \times 10^{-3} \delta(t) - 7200e^{-2} \times 10^6 u(t) \text{ V}$

13.89. a)  $i_2(0^-) = i_2(0^+) = 0 \text{ A};$   
 $i_L(0^-) = i_L(0^+) = 35,36 \text{ A}$

b)

$V_0 =$

$$\frac{1440\pi(122,92\sqrt{2}s - 3000\pi\sqrt{2})}{(s+1475\pi)(s^2 + 14.400\pi^2)} + \frac{300\sqrt{2}}{s+1475\pi};$$

$v_0(t) =$

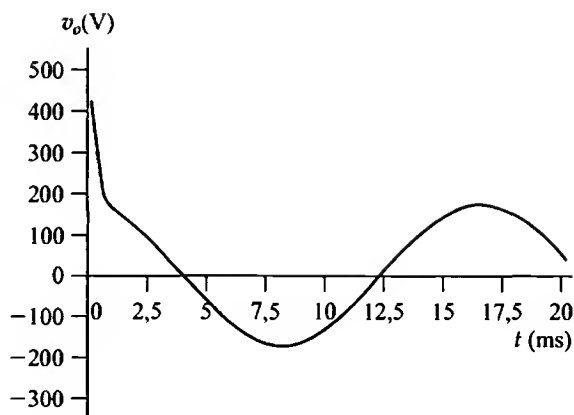
$252,89e^{-1475\pi t}$

$+172,62 \cos(120\pi t + 6,85^\circ) \text{ V};$

$v_0(0^+) = 424,26 \text{ V}$

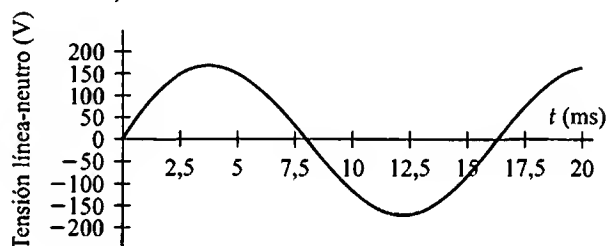
c)  $V_0 = 122,06 \angle 6,85^\circ \text{ V (rms)}$

d)



13.90. a)  $-20,58e^{-1475\pi t} + 172,62 \cos(120\pi t - 83,15^\circ) \text{ V}$

b)



c) La tensión presenta un pico en el Problema 13.89, pero no en éste.

## Capítulo 14

14.1. a) 2021,27 Hz

b)  $H(j\omega_c) = 0,71 \angle -45^\circ;$

$H(j0,2\omega_c) = 0,98 \angle -11,31^\circ;$

$H(j5\omega_c) = 0,2 \angle -78,69^\circ$

c)  $v_o(\omega_c) = 7,07 \cos(12.700t - 45^\circ) \text{ V};$

$v_o(0,2\omega_c) = 9,81 \cos(2540t - 11,31^\circ) \text{ V};$

$v_o(5\omega_c) = 1,96 \cos(63.500t - 78,69^\circ) \text{ V}$

14.2. a) 31,42  $\Omega$

b) 895,77 Hz

14.9. a) 5,31 k $\Omega$

b) 333,86 Hz

14.10. a) 125  $\Omega$

b) 3 k $\Omega$

- 14.15. a) 100 krad/s  
 b) 15,92 kHz  
 c) 8  
 d) 93,95 krad/s  
 e) 14,96 kHz  
 f) 106,45 krad/s  
 g) 16,94 kHz  
 h) 12,5 krad/s o 1,99 kHz

- 14.16. a)  $R = 5 \text{ k}\Omega$ ,  $L = 50 \text{ mH}$   
 b)  $f_{c1} = 2,88 \text{ kHz}$ ,  
 $f_{c2} = 3,52 \text{ kHz}$   
 c) 636,62 Hz

- 14.24. a) 1 Mrad/s  
 b) 159,15 kHz  
 c) 15  
 d) 967,22 krad/s  
 e) 153,94 kHz  
 f) 1,03 Mrad/s  
 g) 164,55 kHz  
 h) 10,61 kHz

- 14.25. a)  $R = 397,89 \Omega$ ,  
 $L = 3,17 \text{ mH}$   
 b)  $f_{c1} = 3,62 \text{ kHz}$ ,  
 $f_{c2} = 4,42 \text{ kHz}$   
 c) 800 Hz

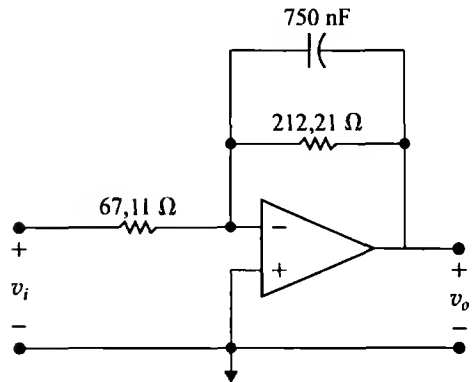
- 14.31. a)  $L = 0,39 \text{ H}$ ,  
 $C = 0,1 \mu\text{F}$   
 b)  $0,948 | V_{\text{pico}} |$   
 c)  $0,344 | V_{\text{pico}} |$

- 14.32.  $L = 0,225 \text{ H}$ ,  
 $C = 0,057 \mu\text{F}$ ,  $0,344 | V_{\text{pico}} |$

## Capítulo 15

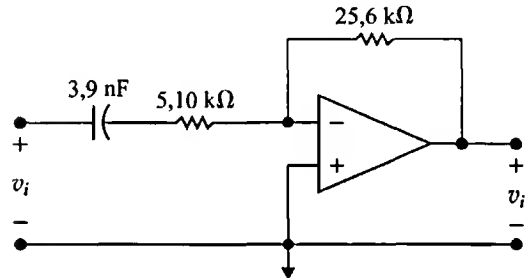
- 15.4. a)  $R_1 = 67,11 \Omega$ ,  
 $R_2 = 212,21 \Omega$

b)



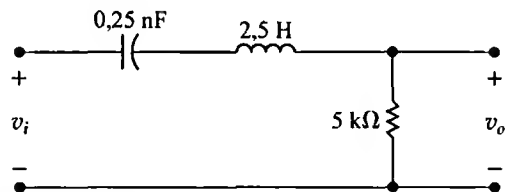
- 15.5. a)  $R_1 = 5,10 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 25,6 \text{ k}\Omega$

b)



- 15.9. a)  $R = 0,05 \Omega$ ,  $L = 1 \text{ H}$ ,  $C = 1 \text{ F}$   
 b)  $R = 5 \text{ k}\Omega$ ,  $L = 2,5 \text{ H}$ ,  $C = 0,25 \text{ nF}$

c)

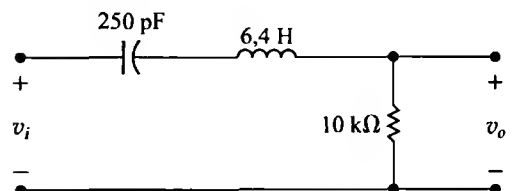


- 15.10. a)  $1/Q$

b) 
$$\frac{s/Q}{s^2 + s/Q + 1}$$

- c)  $R = 10 \text{ k}\Omega$ ,  $L = 6,4 \text{ H}$ ,  $C = 250 \text{ pF}$

d)



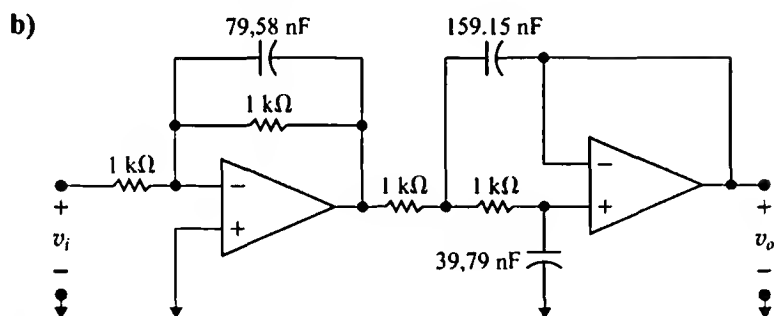
e)  $\frac{1562,5s}{s^2 + 1562,5s + 625 \times 10^6}$

15.25.  $f_{c1} = 38,52 \text{ Hz}$ ,  
 $f_{c2} = 1038,52 \text{ Hz}$ ,  
 $R_L = 30,65 \Omega$ ,  
 $R_H = 826,43 \Omega$

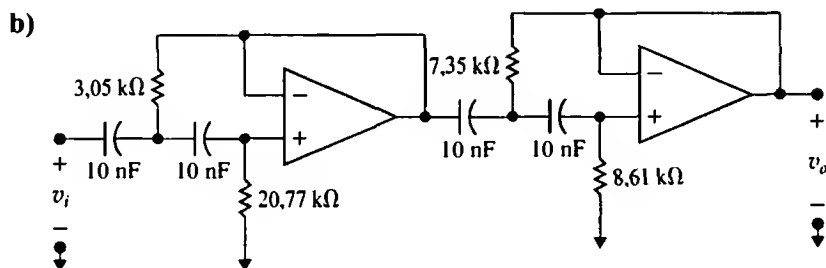
15.26.  $R_L = 21,18 \text{ k}\Omega$ ,  $R_H = 1,18 \text{ k}\Omega$ ,  $\frac{R_f}{R_i} = 6$

15.28. a) 3  
b)  $-32,65 \text{ dB}$

15.31. a) Circuito de primer orden:  $R = 1 \text{ k}\Omega$ ,  
 $C = 79,58 \text{ nF}$   
Circuito de segundo orden:  $R = 1 \text{ k}\Omega$ ,  
 $C_1 = 159,15 \text{ nF}$ ,  $C_2 = 39,79 \text{ nF}$



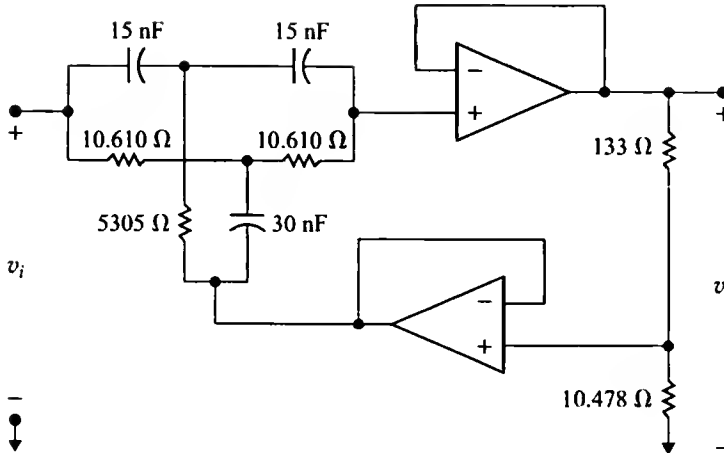
15.32. a) Primera sección:  $R_1 = 3,05 \text{ k}\Omega$ ,  
 $R_2 = 20,77 \text{ k}\Omega$   
Segunda sección:  $R_1 = 7,35 \text{ k}\Omega$ ,  
 $R_2 = 8,61 \text{ k}\Omega$



15.53. a)  $R = 10.610 \Omega$ ;  
 $\sigma R = 10.478 \Omega$ ;  
 $(1 - \sigma)R = 133 \Omega$



b)



c) 
$$\frac{s^2 + 4 \times 10^6 \pi^2}{s^2 + 100\pi s + 4 \times 10^6 \pi^2}$$

15.54.  $C = 39,79 \text{ nF}$ ,  
 $|H(j\omega)|_{\text{máx}} = 20,01 \text{ dB}$ ,  
 $|H(j/R_2 C_1)| = 17,04 \text{ dB}$

15.55. Seleccione  $R_1 = 100 \text{ k}\Omega$ , entonces  
 $R_2 = 400 \text{ k}\Omega$ ,  $C_1 = 7,96 \text{ nF}$ .

## Capítulo 16

16.1. a)  $\omega_{oa} = 31.415,93 \text{ rad/s}$ ,  
 $\omega_{ob} = 3978,87 \text{ rad/s}$

b)  $f_{oa} = 5 \text{ kHz}$ ,  $f_{ob} = 25 \text{ kHz}$

c)  $a_{va} = 0$ ,  
 $a_{vb} = 25 \text{ V}$

d)

$a_{ra} = 0$ ;  $a_{ka} = 0$  para  $k$  par;

$a_{ka} = \frac{-80}{\pi k} \sin \frac{\pi k}{2}$  para  $k$  impar;

$b_{ka} = 0$  para  $k$  par;  $b_{ka} = \frac{240}{\pi k}$  para  $k$  impar;

$a_{ab} = 25$ ;  $a_{kb} = \frac{200}{\pi k} \sin \frac{\pi k}{4}$  para todo  $k$ ;

$b_{kb} = 0$  para todo  $k$

e)

$$v_a(t) = \frac{80}{\pi}$$

$$\sum_{n=1,3,5,\dots} -\frac{1}{n} \sin \frac{\pi n}{2} \cos n\omega_o t + \frac{3}{n} \sin n\omega_o t \text{ V};$$

$$v_b(t) = 25 + \frac{200}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{4} \cos n\omega_o t \text{ V}$$

16.2.

$$\frac{160}{\pi} + 20 \sin \omega_o t - \frac{320}{\pi} \sum_{n=2,4,6,\dots} \frac{\cos n\omega_o t}{n^2 - 1} \text{ V}$$

16.3. a)  $\frac{4V_m}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n} \sin n\omega_o t \text{ V}$

b)  $\frac{2V_m}{\pi} \left[ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-n^2} \cos n\omega_o t \right] \text{ V}$

c)  $\left[ \frac{V_m}{\pi} + \frac{V_m}{2} \sin \omega_o t \right.$

$$\left. + \frac{2V_m}{\pi} \sum_{n=2,4,6,\dots} \frac{1}{1-n^2} \cos n\omega_o t \right] \text{ V}$$

16.10. a) 62,5 Hz

b) no

c) sí

d) sí

e) sí

f)

$$a_v = 0, a_k = 0 \text{ para todo } k, b_k = 0 \text{ para } k \text{ par,}$$

$$b_k = \frac{0,16}{\pi^2 k^2} \sin \frac{k\pi}{4} \text{ A para } k \text{ impar}$$

16.11. a)  $2\pi \text{ rad/s}$

b) sí

c) no

d) no

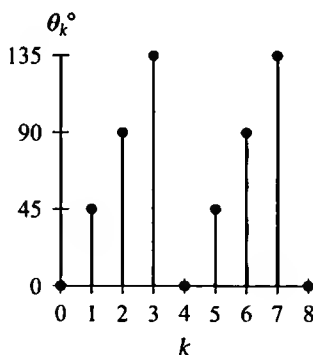
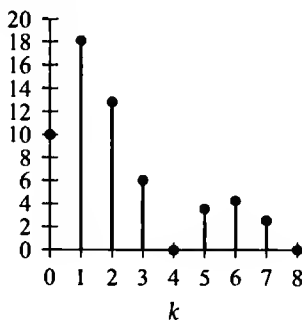
16.18. a) 
$$10 \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sqrt{(\pi n)^2 + 4}}{n^2} \cos(n\omega_0 t - \theta_n)$$

siendo  $\theta_n = \tan^{-1} \frac{\pi k}{2}$

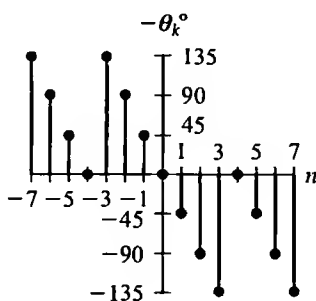
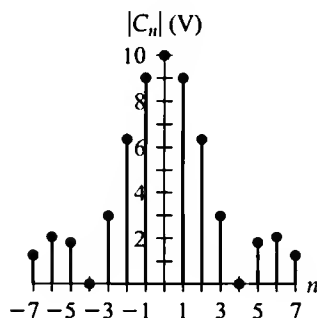
b) 26,23 A

16.24.  $26,83 \cos(500t + 63,43^\circ) +$   
 $16,64 \cos(1500t - 146,31^\circ) +$   
 $11,14 \cos(2500t + 21,80^\circ) \text{ V}$

16.45. a)  $A_k(\text{V})$



b)



16.25. a)  $41,998 \cos(2000t - 0,60^\circ) +$   
 $13,985 \cos(6000t + 177,32^\circ) +$   
 $5,984 \cos(14.000t + 184,17^\circ) \text{ V}$

b) El quinto armónico a 10 krad/s es eliminado por el filtro de banda eliminada, cuya frecuencia central es de 10 krad/s.

16.29. a) 37,23 W

b) 38,4 W

c) -3,05%

16.30. 1,85 W

16.33. a) 74,5356 V

b) 74,5306 V

16.34. a) 117,55 V

b) -2,04%

c) 69,2765 V, -0,0081%

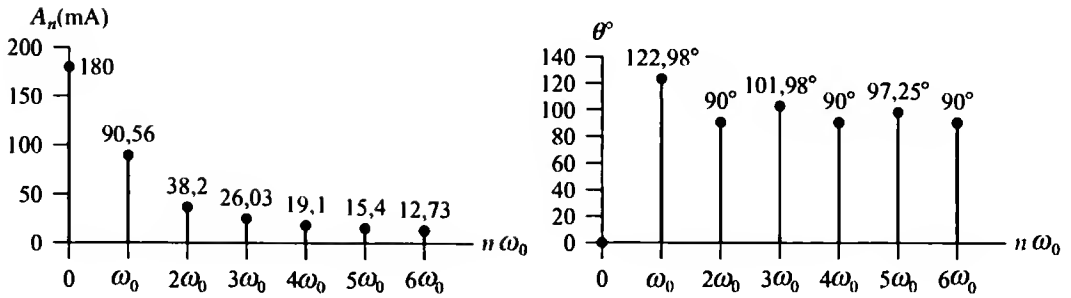
16.41.  $C_0 = \frac{V_m}{2}, C_n = j \frac{V_m}{2\pi n}, n = \pm 1, \pm 2, \dots$

16.42. a) 480 W

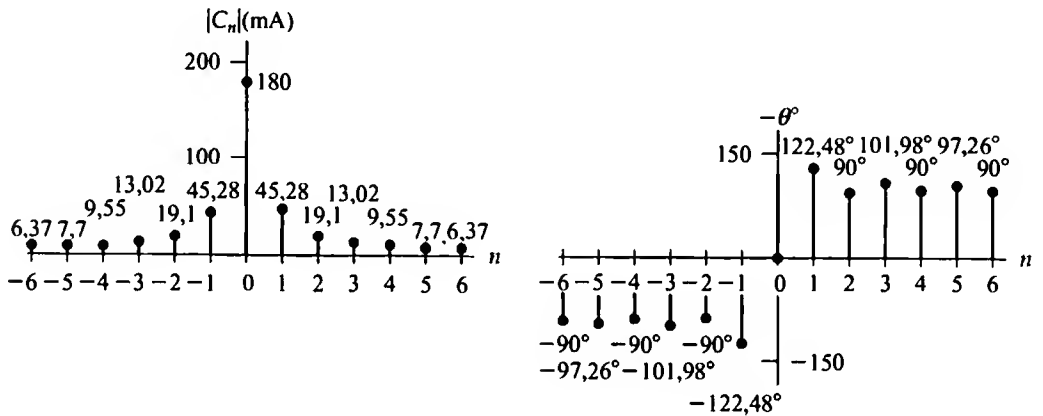
b) 470,32 V

c) -2,02%

16.46. a)



b)



## Capítulo 17

17.2. a) 
$$j \frac{2A}{\tau} \left\{ \frac{\omega\tau \cos(\omega\tau/2) - 2 \sin(\omega\tau/2)}{\omega^2} \right\}$$

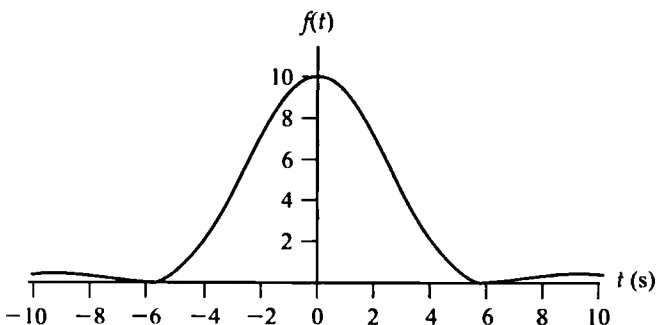
b) 0

c) La coordenadas serían 0, 0,3, 0,44, 0,35, 0,12, 0,0014, 0,10, 0,17, 0,09, 0,0032

17.3. a) 
$$\frac{\omega_o A}{4\pi} \left[ \frac{\sin(\omega_o t/4)}{(\omega_o t/4)} \right]^2$$

b)  $79,58 \times 10^{-3} \omega_o A$

c)



17.4. a)  $\frac{2(a^2 - \omega^2)}{(a^2 + \omega^2)^2}$

b)  $-j48a\omega \frac{(a^2 - \omega^2)}{(a^2 + \omega^2)^4}$

c)  $\frac{a}{a^2 + (\omega - \omega_0)^2} + \frac{a}{a^2 + (\omega + \omega_0)^2}$

d)  $\frac{-ja}{a^2 + (\omega - \omega_0)^2} + \frac{ja}{a^2 + (\omega + \omega_0)^2}$

e)  $e^{-j\omega t_0}$

17.19. a)  $\frac{\tau}{2} \cdot \frac{\text{sen}[(\omega + \omega_0)\tau/2]}{(\omega + \omega_0)(\tau/2)} + \frac{\tau}{2} \cdot \frac{\text{sen}[(\omega - \omega_0)\tau/2]}{(\omega - \omega_0)(\tau/2)}$

b)  $F(\omega) \rightarrow \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$

17.22. a)  $6e^{-50t} u(t)$  mA

b) Sí, se verifican las condiciones iniciales y los valores finales

17.28. a)  $[12,5e^{-t} - 7,5e^{-5t}]u(t) + 5e^{5t}u(-t)$  V

b) 5 V

c) 5 V

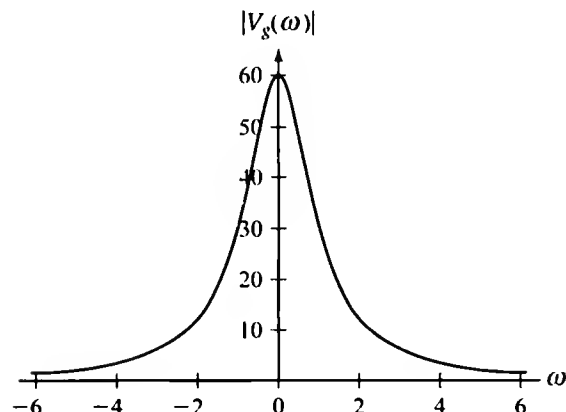
d)  $(12,5e^{-t} - 7,5e^{-5t})u(t)$  V

e) Sí

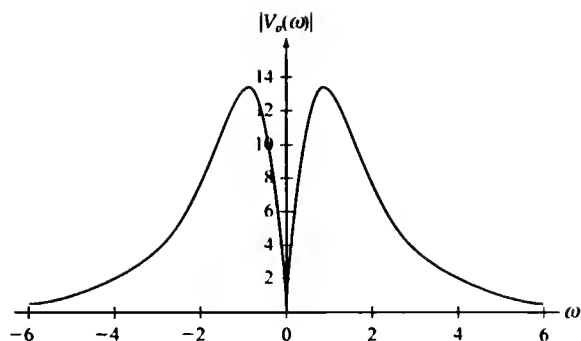
17.31.  $\cos(5000t + 90^\circ)$  A

17.38. a)  $(24e^{-t} - 16e^{-t/2})u(t) + 8e^t u(-t)$  V

b)



b)



d) 900 J

e) 320 J

f) 95,95%

g) 99,75%

## Capítulo 18

18.2.  $z_{11} = 13 \Omega$ ;  $z_{12} = 12 \Omega$ ;

$z_{21} = 12 \Omega$ ;  $z_{22} = 16 \Omega$

18.4.  $b_{11} = 1,08$ ;  $b_{12} = 32 \Omega$ ;

$b_{21} = 0,016 \text{ S}$ ;  $b_{22} = 1,4$

18.5.  $a_{11} = -4 \times 10^{-4}$ ;  $a_{12} = -20 \Omega$ ;

$a_{21} = -0,5 \mu\text{S}$ ;  $a_{22} = -0,02$

18.11.  $g_{11} = 12,5 \mu\text{S}$ ;  $g_{12} = 1,5$ ;

$g_{21} = -250$ ;  $g_{22} = 50 \text{ M}\Omega$

18.12. a)  $y_{11} = 20 \mu\text{S}$ ;  $y_{12} = 30 \text{ nS}$ ;

$y_{21} = 5 \mu\text{S}$ ;  $y_{22} = 20 \text{ nS}$

b) Sí

18.30. 12,5

18.32. a) 35,36 V

b) 125 mW

c) 18,75  $\mu\text{W}$

18.37. 420  $\mu\text{W}$

18.38. 1 A

# Índice

## A

Adaptación de impedancias, uso de transformadores ideales, 442–443

Adelanto

ángulo de fase en, 413

factor de potencia en, 477

Admitancia, definición de, 448

Amortiguamiento crítico, definición de, 351

Amperímetro, 80

Amplificador

diferencial, 201–202

integrador, 310–313, 376

inversor, 197–198

circuito, 197

ecuación, 197

operacional. *Véase* Amplificador operacional

Amplificador operacional, 188–211

camino de realimentación, 197–198

circuito

amplificador diferencial, 201–206

equivalente, 206

de amplificador inversor, 197–198

de amplificador no inversor, 200–201

de amplificador sumador, 199–200

corrientes, 191–196

designación de los terminales, 190–191

encapsulado DIP, 190

filtros basados en, 741–764

banda eliminada, 741–749

de orden superior, 749–764

paso banda, 741–749

modelo realista, 206–211

saturación, 193

tensiones, 191–196

ganancia, 193

tensiones y corrientes en los terminales, 191

Amplitud sinusoidal, 401

Análisis de circuitos, 13, 112–165

casos especiales, 122–126

definición de, 13

equivalentes

de Norton, 144–150

de Thévenin, 144–154

método de las corrientes de malla, 127–140.

*Véase también* Corrientes de malla, método de las casos especiales, 132–135

comparación con el método de las tensiones de nodo, 136–140

con fuentes dependientes, 130–132

introducción al, 127–129

método de las tensiones de nodo, 118–127. *Véase*

*también* Tensiones de nodo, método de las

con fuentes dependientes, 121–122

introducción al, 118–121

superposición, 157

técnicas de, 112–165

terminología, 114–118

transferencia máxima de potencia, 154–157

transformaciones de fuentes, 140–144

Análisis de régimen permanente sinusoidal, 398–449

circuitos equivalentes de Thévenin-Norton, 424–428

corrientes de malla, método de las, 430

elementos de circuito pasivos en el dominio de la frecuencia, 410–415

fasors, 405–410

diagramas, 443–444

fuerza sinusoidal, 400–404

ley de Kirchhoff en el dominio de la frecuencia, 415–416

respuesta sinusoidal, 404–405

simplificaciones

en paralelo, 416–424

en serie, 416–424

triángulo-estrella, 416–424

tensiones de nodo, método de las, 429–430

transformaciones de fuentes, 424–428

utilización

de transformadores, 431–436

de un transformador ideal, 436–443

Análisis mediante tensiones de nodo de circuitos

amplificadores, 125–126

Ancho de banda, 704

Ángulo de fase, 401

definición de, 401

en función de la frecuencia en diagramas de Bode, 976 gráfica, 686

Ángulo del factor de potencia, 477

Aparatos de calefacción, 471–472, 500–502

Atenuación, 686

Autoinductancia, 249–250

relación con la inductancia mutua a través del coeficiente de acoplamiento, 253

## B

Baja  $Q$ , filtros de, 765. *Véase también* Banda ancha, filtros

Banda ancha, filtros de, 741, 764

- Banda eliminada, 687
  - de banda estrecha, filtro de, 765–774
  - filtro de, 687, 715–719, 745–747, 763–767
    - de Butterworth, 763–767
- Bobinas, 226–234, 240–242, 411–413, 608–610
  - acopladas, 947
  - circuito equivalente
    - en el dominio de la frecuencia, 411–413
    - en el dominio de  $s$ , 608
  - combinación
    - en paralelo, ecuación, 242
    - en serie, ecuación, 240
  - de corriente, 543
  - de potencial, 543
  - ecuación
    - de la energía, 232
    - de la potencia, 232
    - $i$ - $v$ , 230
    - $v$ - $i$ , 228
  - en el dominio de  $s$ , 608
  - energía almacenada, 231–232
  - ideales, ecuaciones en los terminales, 260
  - relación voltios-amperios, 228, 230
  - relaciones  $V$ - $I$ , 411–413
- Butterworth, filtros de, 756–758, 760–764
  - orden de, 756–758

## C

- Caja negra, definición, 69
- Cálculos de potencia, 36, 480–482, 485–493, 536–542, 817–819
  - carga en triángulo equilibrada, 538
  - de un circuito trifásico equilibrado, 536–542
  - de una resistencia, 36
  - en el dominio de los fasores, 485–486
  - funciones periódicas, 817–819
  - trifásica, 536–537
  - valor rms, 480–482
- Cambio de escala, 738–741
  - de frecuencia, 738
  - de módulo, 738
  - utilización en el diseño, 739
- Camino, 114–115
  - cerrado, 45
- Capacidad, 235–239. *Véase también* Inductancia
  - combinaciones serie-paralelo, 240–244
  - condensador, 235–239
  - inductancia mutua, 244–259
- Capacitancia equivalente, tensión inicial, 242
- Carga, definición de, 74
- Carga electrónica, 12
- Ceros, 592–593
  - complejos en diagramas de Bode, 970–974
  - de primer orden en diagramas de Bode, 964
  - y polos, 592, 634, 970–975
    - de  $H(s)$ , 634
    - diagramas de Bode, 970–975
- Circuito
  - abierto, 40–41
  - amperímetro, medidor de d'Arsonval, 80–81
  - amplificador. *Véase* Circuito amplificador
  - con condensador, 649–651
  - con resistencia-bobina, 689–693
  - con resistencia-bobina-condensador, 716–719
  - de distribución doméstica, 399, 447
  - de ignición, 347, 381–384
  - de luz intermitente, 275, 314–316
  - de múltiples mallas, respuesta al escalón, 620–622
  - eléctrico, definición de, 7
  - equivalente. *Véase* Circuito equivalente
  - no planar, 114
  - paralelo, respuesta al escalón, 616–618
  - planar, 112–114
  - puente, 84–85
  - $RC$ . *Véase* Circuito  $RC$
  - $RL$ . *Véase* Circuito  $RL$
  - $RLC$ . *Véase* Circuito  $RLC$
  - serie con bobina, 651–654
- Circuito amplificador, 52–53, 125–126, 135–136
  - análisis
    - mediante corrientes de malla, 135–136
    - mediante tensiones de nodo, 125–126
  - diferencial, 201–206
    - ecuación simplificada, 202
  - ley de Kirchhoff, aplicación, 52–53
  - ley de Ohm, aplicación, 52–53
  - amplificador no inversor, 200–201
    - ecuación, 200
- Circuito equivalente, 49–50, 68–71, 125–126, 242, 410–413, 525–525, 608
  - de condensadores en paralelo y en serie, 242
  - de elementos de circuito pasivos, 410–413
  - de Norton, 144–148
  - de resistencias, 68–71
  - de un amplificador basado en transistor, 50, 125–126
  - de un circuito trifásico equilibrado, 526
  - en el dominio de los fasores, 410–413
  - en el dominio de  $s$ , 608
  - en paralelo, 69–71
  - en serie, 68
  - monofásico, 527
- Circuito  $RC$ , 274–297, 614, 704–708
  - análisis cualitativo de, 704–708
  - en serie, definición de, 694, 704–708
    - análisis cualitativo, 704–708
  - respuesta natural, 614
- Circuito  $RL$ , 274–297, 692–693
  - en serie, análisis cualitativo, 692–693

- Circuito *RLC*, 346–386  
 introducción, 348–353  
 serie, 371–375, 384, 692–693, 716–719  
   análisis cualitativo, 716–719  
   ecuación característica, 371  
   formas de la respuesta natural en corriente, ecuación, 372  
   frecuencia de neper, ecuación, 372  
   frecuencia de resonancia en radianes, ecuación, 372  
   paralelo, ecuación característica, 384  
   respuesta al escalón de la tensión del condensador, 373  
   respuesta natural y al escalón, 371–375  
 paralelo, 364–370, 619–620  
   ecuación característica, 350  
   respuesta al escalón, 364–370  
   respuesta transitoria, 619–620
- Circuitos, 68–93, 113, 161–165, 520–548  
 activos de filtrado. *Véase* Circuitos activos de filtrado  
 capacitivos, potencia, 476–477  
 de frecuencia selectiva. *Véase* Circuitos de frecuencia selectiva  
 equivalentes  $\pi$ -T, 86–88  
 inductivos, potencia, 475  
 monofásicos equivalentes, 527  
 resistencias realistas, 113  
 resistivos, 63–93. *Véase también* Circuitos resistivos simples  
*RL* y *RC*. *Véase* Circuitos *RL* y *RC* de primer orden, respuesta de  
 telefónicos de marcación por tonos, 685, 721–722  
 trifásicos. *Véase* Circuitos trifásicos  
 trifásicos equilibrados, 520–548. *Véase también* Circuitos trifásicos equilibrados
- Circuitos activos de filtrado, 730–774  
 cambio de escala, 738–741  
 filtros  
   basados en amplificador operacional de orden superior, 749–764  
   de banda eliminada, 741–749  
   paso banda basados en amplificador operacional, 741–749  
   paso banda de banda estrecha, 765–774  
 paso alto de primer orden, 732–737  
 paso bajo de primer orden, 732–737
- Circuitos de frecuencia selectiva, 684–729, 976  
 filtros  
   de banda eliminada, 715–720  
   paso alto, 697–703  
   paso bajo, 689–697  
   paso banda, 703–715  
 introducción, 686–688
- Circuitos resistivos simples, 63–93, 474–475  
 circuitos equivalentes  
    $\pi$ -T, 86–93  
   triángulo-estrella, 86–93  
 división  
   de corriente, 77–79  
   de tensión 77–79  
 divisor  
   de corriente  
   de tensión, 73–76  
 en paralelo, 69–71  
 en serie, 68–69  
 medidas de resistencias, 84–85  
 potencia, 474–475  
 puente de Wheatstone, 84–85
- Circuitos *RL* y *RC* de primer orden, respuesta de, 274–316  
 amplificador integrador, 310–316  
 conmutación secuencial, 304–308  
 respuesta natural  
   de un circuito *RC*, 284–289  
   de un circuito *RL*, 277–284  
 respuesta no acotada, 308  
 respuestas al escalón, 289–297  
 solución para la respuesta natural al escalón, 297–304
- Circuitos trifásicos, 520–548  
 estrella-estrella, 525  
 estrella-triángulo, 532–536  
 medida de la potencia, 543–546  
 potencia instantánea, 539
- Circuitos trifásicos equilibrados, 520–548  
 cálculos de potencia, 536–543  
 circuito estrella-estrella, análisis, 525–532  
 circuito estrella-triángulo, 532–536  
 fuentes, 523–525  
 potencia media, medida, 543–548  
 tensiones, 522–525
- CMMR, *véase* Tasa de rechazo en modo común
- Cocientes de tensiones y corrientes, 439–442  
 determinación de la polaridad, 440–442  
 transformadores, 439–440
- Coefficientes  
 de acoplamiento, 253  
 de amortiguamiento, 359, 973  
 definición de, 973  
 efecto sobre los diagramas de Bode, 973  
 de Fourier, 797–800
- Cofactor de un determinante, 919
- Combinación de bobinas  
 en paralelo, ecuación, 242  
 en serie, ecuación, 240
- Combinación de condensadores en serie, ecuación, 242
- Componente  
 de régimen permanente, 404–405  
 de señal en modo común, 203–204  
 de señal en modo diferencial, 203–204  
 transitoria, 404–405

- Componentes de circuito ideales, 13
  - Condensadores, 235–239, 413, 610–612
    - circuito equivalente en el dominio de la frecuencia, 413
    - circuito equivalente en el dominio de  $s$ , 610–612
    - ecuación  $i$ - $v$ , 235
    - ecuación  $v$ - $i$ , 236
    - ecuaciones en los terminales, 260
    - en paralelo, 242
    - en serie, 242
    - energía almacenada, 236
    - relación  $V$ - $I$ , 413
    - relación voltios-amperios, 235–236
    - respuesta a un escalón de tensión en circuitos  $RLC$  en serie, 373
  - Condiciones suficientes y necesarias, 796
  - Conductancia, 36
  - Conductor neutro en un circuito trifásico, 525–526
  - Conexión en paralelo, 69–71, 240, 242, 417–421
    - de bobinas, 240
    - de condensadores, 242
    - de impedancias, 417–421
    - de resistencias, 69–71
  - Conexión en serie, 45, 68–69, 240, 242, 417–421
    - de bobinas, 240
    - de condensadores, 242
    - de impedancias, 417–421
    - de resistencias, 68–69
  - Conmutación secuencial, 304–308
  - Conmutador ideal, 40
  - Conmutadores de proximidad, 227, 256–259
  - Constante de relajación, 279–281, 285–286, 316, 692
    - circuito  $RC$ , 285–286
    - circuito  $RL$ , 281
    - circuitos  $RC$  y  $RL$ , 316
    - definición de, 281
    - relación con la frecuencia de corte, 692
    - significado, 279–281
  - Control de volumen de graves, 731, 772–774
  - Convenio de signos pasivo, 16, 19, 20
  - Convenio de puntos, 245, 245
    - definición de, 245
    - para bobinas con acoplamiento mutuo, ecuación, 245
  - Conversión  $T$ - $\pi$ , 86–88
  - Corriente
    - definición de, 13
    - continua (cc), 66–67
    - de desplazamiento, 235
    - de entrada, restricción para un amplificador operacional ideal, 194
    - de fase, 529
    - de línea, 529
    - de salida en un cuadripolo con terminación, 897
    - eléctrica, 13
    - en una bobina, 366–368
    - en la respuesta al escalón de un circuito  $RLC$  paralelo críticamente amortiguado, 368
    - en la respuesta al escalón de un circuito  $RLC$  paralelo sobreamortiguado, 366–368
    - medida de, 80–83
  - Corrientes de malla, 127–129, 132–135, 135–136, 244, 430, 620–622
    - análisis de circuitos amplificadores, 135–136
    - análisis de inductancia mutua, 244
    - casos especiales, 132–135
    - definición de, 127
    - en circuitos resistivos, 127–129
    - en el dominio de los fasores, 430
    - en el dominio de  $s$ , 620–622
    - método de las, 127–136, 430. *Véase también* Tensiones de nodo, método de las
    - casos especiales, 132–135
    - comparación con el método de las tensiones de nodo, 136–140
    - con fuentes dependientes, 130–132
    - introducción, 127–130
  - Cortocircuito, 40–41
  - Cortocircuito virtual, 193
  - Críticamente amortiguado, definición de, 351
  - Cuadripolos, 884–906
    - con terminación, análisis, 897–900
    - ecuaciones, 898
    - tabla de características, 898
    - conexión en cascada, 904
    - ecuaciones de los terminales, 886–887
    - interconectados, 903–906
    - parámetros, 887, 891–892
    - tabla de conversión, 891–892
    - recíprocos, 894–895
    - definición de, 894
    - relación entre los parámetros, 894
    - simétricos, 895
    - simétricos, 896
- ## D
- D'Arsonval, medidores, 80–83
    - amperímetro, 80, 82
    - polímetros, 80–81
    - utilización, 82–83
    - voltímetro, 80, 83
  - Década, definición de, 964
  - Decibelio, 957–959
  - Delta de Dirac, función, 568
  - Determinación de la polaridad de la tensión, de la corriente, de un cociente o de un transformador, 440–442
  - Determinante característico, 918
  - Devanados, primario y secundario, 432
  - Diagramas
    - de bloques, 742



- de módulos, 686
- polos-ceros, 592
- de fasores, 443–447
- Diagramas de Bode, 961–975
  - ángulo de fase en función de la frecuencia, 976
  - ceros, 970–975
    - complejos, 970–974
  - ceros de primer orden, 964
  - corregidos, 966, 972–974
    - amplitud, 966
    - raíces complejas, 972–974
    - raíces simples, 966
  - factores cuadráticos, 972
  - polos, 970–975
    - complejos, 970–974
  - polos de primer orden, 964

Dirichlet, condiciones (series de Fourier), 796

Distorsión

- de amplitud, 813
- de fase, 813

Divisor de corriente, circuito, 75–76

- análisis, 76. *Véase también* Ohm, ley de; Kirchhoff, ley de
- ecuación, 78

Divisor de tensión, circuito, 73–74

Dominio de la frecuencia, 406, 410–413, 415–416, 714

- elementos de circuito pasivos en el, 410–413
- leyes de Kirchhoff, 415–416
- traslación, 578
- y dominio del tiempo, 714

Dominio de  $s$ , 606–612

- análisis de circuitos en el, 612–613
- elementos de circuito, 608–612

Dominio del tiempo, 577–578, 714

- traslación, 577–578

- y dominio de la frecuencia, 714

Dos amplificadores integradores, 376–379

- con resistencias de realimentación, 376–379

Dos vatímetros, método de los, 544

## E

Ecuación característica, 349–352, 371

- de un circuito  $RLC$  paralelo, 349–352
- de un circuito  $RLC$  serie, 371

Ecuación diferencial de segundo orden, solución general, 348–353

Ecuaciones de corriente independientes, 44

Ecuaciones en los terminales para bobinas y condensadores ideales, 260

Ecualizador gráfico, 686

Electrodomésticos, 479–480

Elemento activo, definición de, 32

Elemento pasivo, 228

- definición de, 32

Elementos de circuito, 28–56

- conectados en paralelo, 69

- conectados en serie, 68–69

- fuentes de corriente, 30–34

- fuentes de tensión, 30–34

- fuentes dependientes, 49–53

- ideal básico, 15

- ideales, 13

- ley de Kirchhoff, 42–49. *Véase también* Kirchhoff, ley de
- modelos, construcción de, 39–42

- pasivos en el dominio de la frecuencia, 410–413

- resistencia eléctrica, 34–38. *Véase también* Ohm, ley de

En serie, definición de la conexión, 45

Energía, 17–19, 231–232, 236, 866–874

- almacenada, 231–232, 236

- en un condensador, 236

- en una bobina, 232

- cálculo mediante el teorema de Parseval, 866–867

- de un condensador, ecuación, 236

- densidad de, 867–868

- relación con la potencia, 15–16

Enlace de flujo en respuestas impulsivas, 657

Equivalente de Thèvenin, 144–146, 623, 897–905

- de un cuadripolo con terminación, 897–905

- determinación, 150–154

- en circuitos resistivos, 144–146

- en el dominio de  $s$ , 623

Escalón unitario, función, 596

Espectro

- de amplitud, 824–827

- de fase, 824

- de líneas, 824

Estrella, interconexión en, 86

Estrella-estrella (circuito trifásico), análisis, 525–531

Estrella-triángulo

- circuito trifásico, análisis, 532–536

- conversión en circuitos resistivos, 86–88

## F

Factor de amortiguamiento en circuitos  $RLC$ , 359

Factor de calidad, 704, 765

- definición de, 765

Factor de potencia, 477

- ángulo, 477

Factor reactivo, 477

Factores cuadráticos, 585, 972

- en diagramas de Bode, 972

- en una expansión en fracciones parciales, 585

Fasores, 405–410

- concepto, 405

- diagramas, 443–447

- representación mediante, 406

Filtros, 685, 689–719, 730, 760–764, 768–770

- activos. *Véase* Filtros activos

Filtros (*cont.*)

- de banda eliminada, 715–719
  - de banda estrecha, 765
  - de Butterworth, 760–764
  - de hendidura en doble T, 768–770
  - pasivos, 688
  - paso alto, 697–703
    - de primer orden, 732–738
  - paso bajo, 689–697
    - de primer orden, 732–738
  - paso banda, 703–715
- Filtros activos, 730, 732, 735, 742, 745–747, 754, 768–770
- Butterworth, 754
  - de alta  $Q$ , 768–770
  - de banda eliminada en cascada, 745–747
  - de banda estrecha, 768–770
  - de hendidura en doble T, 768–770
  - paso alto de primer orden, 735
  - paso bajo de primer orden, 732
  - paso banda en cascada, 742
- Forma exponencial de las series de Fourier, 821
- Formas de respuesta natural en corriente en circuitos  $RLC$  en serie, 372
- Fourier, transformada de, 846–865
- aplicaciones a los circuitos, 863
  - convergencia de la integral de Fourier, 850–852
  - de funciones elementales, 857
  - deducción de la, 848–849
  - en el límite, 855–857
  - funciones
    - coseno, 856–857
    - escalón, 855–856
    - signo, 855–856
  - propiedades matemáticas, 858
  - relación con la transformada de Laplace, 853–855
  - tablas, 857, 862
    - de transformadas funcionales, 857
    - de transformadas operacionales, 862
  - teorema de Parseval, 866–874
  - transformadas operacionales, 860–863
- Fracciones parciales, expansión en, 582–590, 634–636
- factores cuadráticos, 585
  - fracciones impropias, 591
  - fracciones propias, 582–590
  - función de transferencia, 634–636
- Frecuencia, 8, 360, 400, 473, 738
- central, 703
  - compleja, 351
  - de corte, 690–692
    - como parte de un factor cuadrático, 970–971
    - relación con la constante de relajación, 692
  - de la potencia instantánea, 473
  - de la respuesta subamortiguada, 360
  - de neper, 351, 372, 714

- circuito  $RLC$  paralelo, ecuación, 351
  - circuito  $RLC$  serie, ecuación, 372
  - relación con el ancho de banda, 714
  - de potencia mitad, 691
  - de resonancia, 351, 704
    - en radianes para un circuito  $RLC$  paralelo, 351
    - en radianes para un circuito  $RLC$  serie, 372
  - de una función sinusoidal, 400
  - en radianes amortiguada, 357–359
    - ecuación, 357
  - fundamental (función periódica), 795–796
  - relación con la longitud de onda, 8
- Frecuencias armónicas, 795–796
- Fuentes, 30, 523–525
- conexión en estrella, 523–524
  - configuración en triángulo, 523–524
  - continuas, definición de, 66–67
  - de corriente, 30–32. Véase también Tensión, fuentes de
    - dependientes, 30–31
    - ideales, 30
    - independientes, 30
  - dependientes, 30, 49
    - aplicación ilustrativa, 49
    - definición de, 30
  - desactivadas, 150
  - eléctricas, 30
  - ideales de tensión, 30
  - impulsivas, 654
  - independientes, 30
  - sinusoidales, 400–404
  - transformaciones de, 140–141, 424–428
- Función
- coseno, transformada de Fourier, 856–857
  - de ponderación, 645
  - de transferencia, 631–648
    - expansión en fracciones parciales, 634
  - escalón, 274, 564–565, 856
    - transformada de Fourier, 856
    - transformada de Laplace, 564–565
  - impulsiva, 568, 570, 649–658
    - en el análisis de circuitos, 649–658
    - propiedad de enmascaramiento, 570
  - par, 800, 855
    - serie de Fourier, 800
    - transformada de Fourier, 855
  - periódica, 817–821
    - cálculos de potencia, 817–819
    - periodo de, 762–795
    - valor rms, 820–821
  - racional, 582
    - definición de, 582
  - impropia, 582
  - propia, 582
  - signo, transformada de Fourier, 855–856

sinusoidal, 400, 401, 573  
 amplitud, 401  
 ángulo de fase, 401  
 frecuencia, 400  
 período, 400  
 transformada de Laplace, 573  
 valor rms, 401

## G

Galgas extensométricas, 189, 210–211  
 Galvanómetro, 84  
 Ganancia, 193, 197–198, 200, 897  
 amplificador  
   inversor, 197–198  
   no inversor, 200  
   operacional, 193  
 de corriente, cuadripolo con terminación, 897  
 de tensión, 199, 200, 897  
   amplificador inversor, 199  
   amplificador no inversor, 200  
   cuadripolo con terminación, 897  
 definición de, 193  
 en función de los parámetros de un cuadripolo, 897  
 en lazo abierto, 197–198  
 Gráficas de amplitud con líneas rectas, 972–974  
 Gráficas de ángulo de fase, 976  
 Gráficas de respuesta en frecuencia, 686–688, 689, 698, 701, 706, 713  
   ideal, 686–688  
   paso alto *RL* en serie, 698, 701  
   paso bajo *RL* en serie, 689  
   paso banda *RL* en serie, 706, 713  
     con resistencia de fuente distinta de cero, 713  
     con resistencia de fuente igual a cero, 713

## H

Hendidura en doble T, filtro de, 769  
 $H(s)$ , polos y ceros, 634  
 Hercios, 5–7

## I

Identidad de Euler, 406  
 Identidades trigonométricas, tabla, 981  
 Impedancia, 414, 897  
   definición de, 414  
   de entrada a un cuadripolo con terminación, 897  
   reflejada, 434  
 Impulso  
   definición de, 568  
   unitario, función, 568, 596  
 Inductancia, 226–235. *Véase también* Capacidad  
   bobina, introducción, 228  
   combinación serie-paralelo de bobinas, 240–244  
   condensador, 235–239  
   mutua, 244–256, 625–627

análisis con corrientes de malla, 244  
 autoinductancia, 249–250  
 cálculos de energía, 254–256  
 circuito con, 625–627  
 concepto, 250–253  
   en términos de la autoinductancia, 253–254

Ingeniería eléctrica, panorámica, 4–10

Integral de convolución, 637–646

definición de, 637

función de transferencia, 637–646. *Véase también*

Función de transferencia

interpretación gráfica, 640

Integral de Fourier, 846–847

Intensidad de una función impulsiva, 568–569

Interconexión

en  $\pi$ , 86

en T, 86

Invariante en el tiempo, 637

circuito, 637

## K

Kirchhoff, Gustav, 43

Kirchhoff, ley de las corrientes, 44, 46, 116, 415–416, 613

dominio de la frecuencia, 415–416

en el análisis

de circuitos resistivos, 116

en el dominio de  $s$ , 613

en el dominio de los fasores, 415–416

enunciado, 44

utilización, 46

Kirchhoff, ley de las tensiones, 44–45

utilización, 46

## L

Laplace, transformada de, 562–595, 606–658, 853–855

análisis de circuitos, 593–594, 606–658

aplicaciones, 614–631

elementos de circuito en el dominio de  $s$ , 608–612

en el dominio de  $s$ , 612–613

función de transferencia, expansión en funciones parciales, 634–646

función de transferencia, respuesta en régimen permanente sinusoidal, 646–649

función impulsiva, 649–658

aplicación, 580–581

bilateral, 564

definición de, 564–565

función escalón, 565–568

funcional, 572–574

inversa, 582–590

polos y ceros de  $F(s)$ , 592–593

relación con la transformada de Fourier, 853–855

tablas, 574, 579

de transformadas funcionales, 573

Laplace, transformada de (*cont.*)  
 de transformadas operacionales, 579  
 teorema del valor final, 593–594  
 teorema del valor inicial, 593–594  
 unilateral, 564

Lazo, 114–115  
 cerrado, 45

Lineal, circuito  
 invariante en el tiempo, 636  
 sistema, 157

Linterna, construcción de un modelo de circuito, 39–41

Longitud de onda, 8

Luneta térmica para automóviles, 67, 89–93

## M

Malla, definición de, 114–115

Marcas de puntos, procedimiento de determinación, 246–248

Matrices, 921, 922–926  
 conformes, 923  
 igualdad, 923  
 multiplicación, 922–926  
 resta, 923  
 suma, 923  
 utilización en sistemas de ecuaciones, 917, 921

Matriz, 921–922, 926, 929  
 adjunta, 926  
 columna, 922  
 cuadrada, 922  
 determinante de una, 922  
 identidad, 926  
 inversa, 928  
 particionamiento de una, 929  
 simétrica, 926  
 transpuesta, 926

Medidas de resistencia, 84–85

Medidas en los terminales, construcción de un modelo de circuito basado en, 42

Memoria, concepto de circuito, 644–646

Menor con signo, 920

Menor de un determinante, 919

Método de Cramer, 918

Modelos de circuitos, 13, 39–42  
 construcción de, 39–42  
 luz intermitente, 39

Modo común, definición, 203

Modo diferencial, definición, 203

Módulo, 738

Multifrecuencia de doble tono (DTMF), 685

## N

No planar, circuito, 114

Nodo, 43  
 de referencia, 118  
 esencial, 115

Números complejos, 939–945  
 conjugados, 941  
 elevados a una potencia, 944  
 forma polar, 939  
 forma rectangular, 939  
 operaciones aritméticas, 941–943  
 raíces, 944  
 representación gráfica, 940

## O

Octava, definición de, 967

Ohm, George Simon, 35

Ohm, ley de, 34–38, 413–414, 612  
 eléctrica, 34–38  
 en el dominio de los fasores, 413–414  
 en el dominio de  $s$ , 612

## P

Parámetros, 887  
 $a$ , 889  
 $b$ , 889  
 de inmitancia, 889  
 de transmisión, 889  
 $g$ , 889  
 $h$ , 889  
 híbridos, 889  
 $y$ , 889  
 $z$ , 887, 897

Parejas de transformadas, 590

Parseval, teorema de, 866–874  
 aplicación, 867

Paso alto, filtros, 697–703, 732–738, 763–767  
 Butterworth, 763–767  
 de primer orden, 732–738

Paso bajo, filtros, 689–697, 732–738, 754–755  
 Butterworth, 754–755  
 de primer orden, 732–738

Paso banda, 686  
 filtro, 688, 703–715, 741  
 de Butterworth, 760–764

Paso banda de banda estrecha, filtro, 765–774

Período  
 de una función periódica, 762–795  
 de una función sinusoidal, 400

Planar, circuito, 112–114

Plano  $s$ , 593

Polímetros analógicos, 80

Polímetros digitales, 80

Polinomio de Butterworth, 754  
 orden de, 756

Polos  
 complejos en diagramas de Bode, 970–974  
 de primer orden en diagramas de Bode, 964  
 definición de, 593

y ceros, 634, 970–975  
 de  $H(s)$ , 634  
 diagramas de Bode, 970–975  
 Potencia, 5, 17, 18, 37–38, 502–503. *Véase también* Energía. Cálculos de potencia  
 aparente, 484, 503  
 cálculo, 37–38,  
 compleja, 483, 486–487, 538  
   en una carga en estrella equilibrada, 538  
 de un condensador, ecuación, 236  
 de una resistencia  
   en función de la corriente, 37  
   en función de la tensión, 37  
 definición de, 17  
 ecuación, 18  
 eléctrica, transmisión y distribución, 521, 547–548  
 factor de. *Véase* Factor de potencia  
 instantánea, 472–474, 539  
   en circuitos monofásicos, 472–474  
   en circuitos trifásicos equilibrados, 539  
 media, cálculos, 474–480, 536–537, 817–819  
   con funciones periódicas, 817–819  
   en circuitos monofásicos, 474–476  
   en circuitos trifásicos, 536–537  
 media máxima absorbida, 494–495  
 real, 474  
   instantánea, 475  
   signo algebraico, 16  
   sistemas de, 5  
   unidades, 483  
 Prefijos como potencias de un valor, 134–135  
 Prefijos de potencia, 12  
 Propias, funciones racionales, 582  
 Propiedad de cambio de escala, 578–579  
 Propiedad de enmascaramiento, 570  
 Prototipo físico, 13–14  
 Puente de Wheatstone, 84–85  
 Puerto, definición de, 884  
 Pulso de tensión rectangular, energía contenida en un, 871–874

## R

Raíces en la expansión en fracciones parciales, 585, 587, 588–589  
   complejas y distintas, 585  
   complejas y repetidas, 588–589  
   reales y repetidas, 587  
 Rama esencial, 115  
 Reacción de las personas a la corriente, 54–55  
 Reactancia, 414  
   capacitiva, 414  
   inductiva, 414  
 Realimentación negativa, 193–194  
 Régimen permanente sinusoidal, cálculos de potencia, 470–502

cálculos de potencia, 485–493  
 potencia  
   compleja, 483–485  
   instantánea, 472–474  
   media, 474–480  
   reactiva, 474–480  
   transferencia máxima de potencia, 493–502  
   valor rms, 480–482  
 Representación mediante, 406  
 Resistencia, 34–38, 84–85, 68–71, 112, 161–165, 410–411, 608, 697–708  
   circuito con condensador, 697–708  
   circuitos realistas, 112, 161–165  
   combinación, 71  
   conexión  
     en paralelo, 69–71  
     en serie, 68  
   definición de, 34–38  
   eléctrica, 34–38. *Véase también* Ohm, ley de  
   en el dominio de  $s$ , 608  
   medida, 84–85. *Véase también* Puente de Wheatstone  
   relación  $V-I$ , 410–411  
 Resistencias de realimentación, dos amplificadores integra-  
 dores con, 376–379  
 Resolución de problemas, pasos, 9–10  
 Resonancia, 704  
   frecuencia de, 351, 704  
 Respuesta, 277, 404, 640  
   al escalón. *Véase* Respuesta al escalón  
   al impulso, 640  
   de régimen permanente, 279, 404–405  
     sinusoidal, función de transferencia, 646–649  
   en frecuencia, 684  
   en tensión  
     críticamente amortiguada, 361–362  
     sobreamortiguada, 353–357  
     subamortiguada, 357–361  
   natural. *Véase* Respuesta natural  
   no acotada, 308–310  
   sinusoidal, 404–405  
     componente de régimen permanente, 404–405  
     componente transitoria, 404–405  
   subamortiguada, 360–362  
     características, 360  
     definición dc, 351  
   transitoria, 279, 619–620  
     dc un circuito  $RLC$  paralelo, 619–620  
 Respuesta al escalón, 274, 289–297, 346–386, 616–619, 620–622  
   circuito  $RLC$ , 346–386  
     en paralelo, 364–370  
     en serie, 371–375  
     introducción, 348–353  
   de circuitos de múltiples mallas, 620–622

# Respuesta al escalón (*cont.*)

de circuitos en paralelo, 616–618

de circuitos *RC*, 295–296

ecuación, 295

de circuitos *RL*, 289–297

ecuación, 290

técnica general *RL-RC*, 297

de circuitos *RLC* paralelo, 364–370

de circuitos *RLC* serie, 371–375

solución general, ecuación, 298

# Respuesta natural, 274–297. Véase también Circuitos *RL* y

*RC* de primer orden, respuesta de los

circuito *RC*, 284–288, 614

cálculo de la ecuación, 285–286

circuito *RL*, 277–284

cálculo de la ecuación, 280

circuito *RLC* paralelo, 348–349, 353–357, 361–364

críticamente amortiguado, 361–364

sobreamortiguado, 353–357

subamortiguado, 358

circuito *RLC*, 346–386

circuito *RLC* serie, 371–375

en tensión, 354, 357, 361

críticamente amortiguada en circuitos *RLC* paralelos, 361

sobreamortiguada en circuitos *RLC* paralelos, 354

subamortiguada en circuitos *RLC* paralelos, 358

# Retardo

ángulo de fase en, 412

factor de potencia en, 477

# Rizado, 360

## S

# Secuencia de fase, 522

# Seguridad eléctrica, 28–29, 54

# Series de Fourier, 792–827

amplitud, 824–827

análisis, panorámica, 795–796

aplicación, 810–816

cálculos de potencia media con funciones periódicas, 817–819

coeficientes, 767–807

simetría, 800–807

definición de, 795–796

espectros de fase, 824–827

forma exponencial de las, 821–824

en el análisis de circuitos, 810

forma trigonométrica alternativa, 807–809

valor rms, función periódica, 820–821

# Siemens, 36

# Signo algebraico de la potencia, interpretación, 18

# Simetría, 800, 802, 805

de cuarto de onda, 805

de media onda, 802

función impar, 802

función par, 800

Simétrico, definición de, 896

Sistema internacional de unidades, 10–12. Véase también

Unidades del SI

tabla, 11

unidades derivadas, tabla de, 11

# Sistemas

de alimentación, 5

de comunicaciones, 4

de control, 5

de parámetros agregados, 8

de procesamiento de la señal, 5–6

informáticos, 4

Sobreamortiguado, definición de, 351

Solución de régimen permanente, características, 405

Subamortiguado, 351

Sumador, circuito amplificador, 199–200

Supermalla 133–134

Supernodo, 124–125

Superposición, 157–160, 627, 811

en aplicaciones de las series de Fourier, 811

en circuitos resistivos, 157–160

en el dominio de *s*, 627

Supresores de sobretensiones, 607, 658–659

Susceptancia, 419, 447

valores en circuitos *RLC*, 447

capacitiva, 434

inductiva, 434

## T

Tabla de integrales, 983

Tasa de rechazo en modo común, 204–206

Tensión, 14–15, 30–34, 80–83. Véase también Corriente

de entrada, restricción para un amplificador operacional

ideal, 193

de fase, 529

definición de, 14

de línea, 529

de nodo, definición de, 118

en los terminales, 191

fuentes de, 30–34

medida, 80–83

Tensiones de nodo, método de las, 118–121, 122–126, 429,

616–618. Véase también Corrientes de malla, método de las

casos especiales, 122–126

comparación con el método de las corrientes de malla, 136

en circuitos resistivos, 118–119

en el dominio de los fasores, 429

en el dominio de *s*, 616–618

fuentes dependientes, 118, 121

introducción, 118–121

Teorema del valor final, 593–594

Teorema del valor inicial, 593–594  
 Teoría de circuitos, 7–9  
 Terminal neutro, 523  
 Thévenin-Norton, circuitos equivalentes y transformaciones de fuentes, 424–428  
 Tolerancia, definición de, 74  
 Transferencia máxima de potencia, 154, 492–500  
     circuito resistivo, 154  
     régimen permanente sinusoidal, 493  
 Transformaciones de fuentes, 140–141, 424–428  
     circuitos equivalentes de Thévenin-Norton, 424–428  
     en circuitos resistivos, 140–141  
 Transformada  
     bilateral dc Laplace, 564  
     fasorial, 405  
         inversa, 407–410  
     funcional, 565, 572  
     inversa, 582–590, 846–849  
         Fourier, 846–849  
         Laplace, 582–590  
 Transformadas operacionales, 565, 574–580, 860–862  
     Fourier, 860–862. *Véase también* Fourier, transformada de  
     Laplace 574–584. *Véase también* Laplace, transformada de  
     lista de, 579  
 Transformador, 431–436  
     lineal, 432  
 Transformadores ideales, 432, 436–443, 953  
     utilización, 442–443  
 Triángulo, interconexión en, 86  
 Triángulo-estrella, transformación, 86–88, 88–89, 421–424  
     aplicación, 88–89  
     circuitos  
         en el dominio de los fasores, 421–424  
         equivalentes, 86–88  
         resistivos, 86–88

## U

Unidades  
     derivadas en el SI, 11  
     tabla de, 11  
 Unidades del SI, 10–12  
     definición de, 10–11

    tabla, 11  
     unidades derivadas, 11  
 Unilateral, transformada de Laplace, 564

## V

Valor eficaz, 481  
 Valor final, teorema del, 593–594  
 Valor inicial, teorema del, 593–594  
 Valor rms, 401, 403–404, 480–482, 820–821  
     cálculos de potencia, 480–482  
     de una función periódica, 820–821  
     de una función sinusoidal, 401  
     de una función triangular, 403–404  
 Valores  
     de admitancia en circuitos *RLC*, 447  
     de impedancia, circuitos *RLC*, 447  
     de reactancia en circuitos *RLC*, 447  
     nominales de un electrodoméstico, 478–480  
 Var, 475, 503  
     definición de, 475  
 Variables de circuito, 2–19, 112  
     análisis de, 13, 112  
     corriente, introducción a, 1–15  
     elemento de circuito ideal básico, 15  
     en ingeniería eléctrica, 2–10  
     Sistema internacional de unidades, 10–12. *Véase también* Unidades del SI  
     tensión, 14–15  
 Vars magnetizantes, 475  
 Vatímetro, 543  
 Vatio, 15–16, 503  
 V-I, relación, 410–413  
     para un condensador, 413  
     para una bobina, 412–413  
     para una resistencia, 410–411  
 Voltímetro, 80  
     circuito, medidor de d'Arsonval, 80–81  
     voltio-amperio, 503

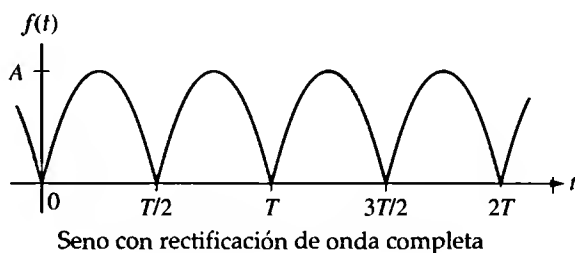
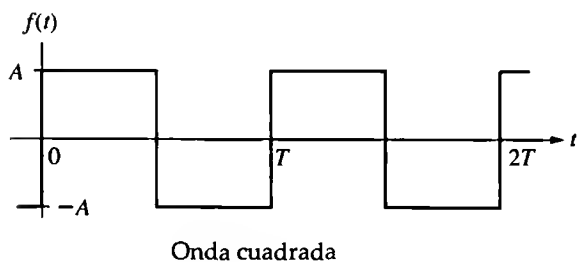
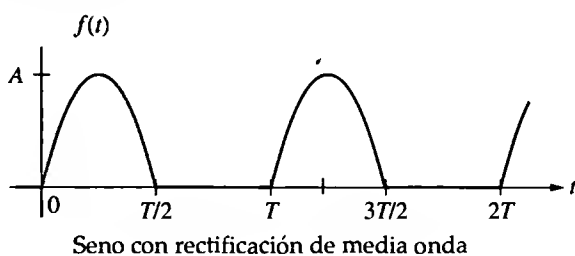
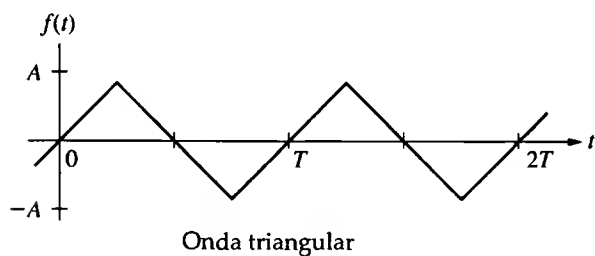
## W

Wheatstone, puente de, 84–85

## Y

Y, definición de la interconexión, 86

## FUNCIONES PERIÓDICAS



## SERIES DE FOURIER

$$f(t) = \frac{8A}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \left[ \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right] \sin n\omega_0 t$$

Onda triangular

$$f(t) = \frac{A}{\pi} + \frac{A}{2} \sin \omega_0 t - \frac{2A}{\pi} \sum_{n=2,4,6}^{\infty} \frac{\cos n\omega_0 t}{n^2 - 1}$$

Seno con rectificación de media onda

$$f(t) = \frac{4A}{\pi} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n} \sin n\omega_0 t$$

Onda cuadrada

$$f(t) = \frac{2A}{\pi} - \frac{4A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\omega_0 t}{(4n^2 - 1)}$$

Seno con rectificación de onda completa



## TRANSFORMADAS DE FOURIER DE FUNCIONES ELEMENTALES

$f(t)$	$F(\omega)$
$\delta(t)$ (impulso)	1
$A$ (constante)	$2\pi A\delta(\omega)$
$\text{sgn}(t)$ (signo)	$2/j\omega$
$u(t)$ (escalón)	$\pi\delta(\omega) + 1/j\omega$
$e^{-at}u(t)$ (exponencial de tiempo positivo)	$1/(a + j\omega), a > 0$
$e^{at}u(-t)$ (exponencial de tiempo negativo)	$1/(a - j\omega), a > 0$
$e^{-a t }$ (exponencial de tiempo positivo y negativo)	$2a/(a^2 + \omega^2), a > 0$
$e^{j\omega_0 t}$ (exponencial compleja)	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$
$\cos \omega_0 t$ (coseno)	$\pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$
$\sin \omega_0 t$ (seno)	$j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$

## TRANSFORMADAS OPERACIONALES

$f(t)$	$F(\omega)$
$Kf(t)$	$KF(\omega)$
$f_1(t) - f_2(t) - f_3(t)$	$F_1(\omega) - F_2(\omega) + F_3(\omega)$
$d^n f(t)/dt^n$	$(j\omega)^n F(\omega)$
$\int_{-\infty}^t f(x) dx$	$F(\omega)/j\omega$
$f(at)$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{\omega}{a}\right), a > 0$
$f(t - a)$	$e^{-j\omega a}F(\omega)$
$e^{j\omega_0 t}f(t)$	$F(\omega - \omega_0)$
$f(t) \cos \omega_0 t$	$\frac{1}{2}F(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}F(\omega + \omega_0)$
$\int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)h(t - \lambda) d\lambda$	$X(\omega)H(\omega)$
$f_1(t)f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(u)F_2(\omega - u) du$
$t^n f(t)$	$(j)^n \frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n}$